三角学辞典

问题解法

问 题 解 法

三 角 学 辞 典

〔日〕笹部贞市郎 编

肖 禾 编译

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 23.5 插页 4 字数 1,316,000

1983 年 11 月第 1 版 1983 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—58,500 本

统一书号：17150·8 定价：（精）4.20 元

出版说明

自明治维新以后，日本为了学习西方科学技术，在中小学数学教育上也刻意输入，大量地翻译了欧美有影响的课本．以后又自编教材和各种初等数学读物，逐渐地在初等数学教育的取材、编排、题选上形成了自己的特点．根据国内外的情况，日本数学教育也迭经改革，但仍然有着不同于欧美、苏联的地方．为了从一个方面了解这种特点，我们组织翻译了这一套题解辞典．

这几本辞典的题目及解答远不是数学教育的全部，但是由于它的写作年代较近，作者在编选题目时又比较注意立足于日本的教育情况，兼顾传统与未来，所以确实从比较宽广的角度反映了日本中学数学教育所注重的东西．这些都可以供我国的数学教师了解借鉴．这几本辞典选择的题目有相当部分是初等数学所必需的基础训练题，当然更可以作为教学中的参考材料．

需要说明的是，这几本辞典卷帙浩大，各册各章的编写质量并不一致．错误、重复之处多有发现，我们在组织翻译时只纠正了发现的错误，删去各册中的数学小史和一些数表，如对数表，三角函数表等，在《三角学辞典》中删去了一些明显重复的题目以及球面三角的题目，其他未作改动．希望读者能在使用中注意．

前　言

本书是先前已出版的几何学、代数学、微积分学等各辞典的姐妹篇，书中记载了关于三角学的各种问题及其解法.

不用多说，看一看三角学发展的历史就可知道，这门学科的最初目的，是要根据三角形的边、角大小来计算未知的边、角大小，使它能在测量、航海等实际问题中发挥作用. 由于三角形是所有图形的基础，所以彻底弄清关于三角形的各种定理、法则及种种公式、研究它们的使用方法，对于三角学的学习是基本的.

随着科学技术的发展，在所有的领域里，再没有比今天更切实地感觉到数学的重要性了. 特别是在航海、航空、测量、建筑、机械、电气等各种实用方面，就是说上一句"绝对没有不用到三角的事情"，也不算过分.

即使三角学是这样重要的一门学科，看上去却也是枯燥无味的，而且由于它的问题的数量又是无限的，所以不论是学生，还是教师，都往往是敬而远之，迫切希望有一本系统地归纳、阐述这些问题的完备的辞书.

本书就是顺应这个愿望而编纂的，它的要点如下：

本书的内容如目录所示，从三角函数的基本性质出发，涉及整个平面三角，以及测量的理论和它的应用. 且不说中学教科书的内容，一般地，就是对于那些正在学习大学基础课程的学生以及广泛从事科学技术实际工作的人，本书也是十分有用的.

在编辑本书的时候，畏友伊藤政治、倉本熊雄两位先生，对问题的搜集、解答、校订等各项工作都给予了种种帮助. 对于他们促进本书出版所作的努力，在此深表谢意.

编　者

1964 年 10 月

目　　录

第一章　序

第二章　锐角三角函数

第三章　一般角的三角函数

第四章　加 法 定 理

第五章　三角形与三角函数

第六章　方程和不等式

第七章　消去法，反三角函数，反三角方程

第八章　棣莫佛定理，复数，向量

第九章　解三角形的理论及应用

第十章　测　量

第一章　序

1. 角度制

1. 什么是三角学？

解　三角就是利用表示三角形的边和角之间关系的三角函数，研究三角形及一般多边形的性质，并进而根据三角函数表，算出边和角的数值．在几何学中，虽然也求边和角的大小或进行大小比较，但要算出它们的数值，在许多情况下却是困难的．然而，用三角的方法，可以一个一个地求出它们的数值，因此在测量、建筑和其他工业上用途非常广泛．此外，将它应用在球面上的球面三角，在天文学上也是不可缺少的．

2. 用角度制表示下列各角：$\frac{11}{16}$直角，0.678直角，$0.24\dot{1}$直角．

解　$\frac{11}{16}$直角$=90°\times\frac{11}{16}=61\frac{7}{8}$度，$60'\times\frac{7}{8}=52\frac{1}{2}$分，$60''\times\frac{1}{2}=30$秒．∴ $\frac{11}{16}$直角$=61$度52分30秒．0.678直角$=90°\times0.678=61.02$度，$60'\times0.02=1.2$分，$60''\times0.2=12$秒．∴ 0.678直角$=61$度1分12秒．$0.24\dot{1}$直角$=\frac{241-24}{900}$直角$=\frac{217}{900}$直角$=90°\times\frac{217}{900}=21.7$度，$60'\times0.7=42$分．∴ $0.24\dot{1}$直角$=21$度42分．

3. 直角的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$分别是几度？

解　直角是90°．因此它的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$分别是$90°\times\frac{1}{2}=45°$，$90°\times\frac{1}{3}=30°$，$90°\times\frac{1}{4}=22.5°$，$90°\times\frac{1}{5}=18°$，$90°\times\frac{1}{6}=15°$．

4. 将67°23′40″化成以秒为单位的单名数．

解　$(67\times60+23)\times60+40=242620''$．

5. 用度、分、秒表示57398″．

解　$57398\div60=956\cdots$余38，

$956\div60=15\cdots$余56，

∴ $57398''=15°56'38''$．

6. 用以直角为单位的小数表示56°．

解　$\frac{56}{90}=0.6\dot{2}$(直角)．

7. 把97°5′15″用以直角为单位的小数来表示．

解　$97°5'15''=(97\times60+5)\times60+15=349515''$，直角$=90\times60\times60=324000$秒．因此，把97°5′15″用以直角为单位的小数来表示，就是$349515\div324000=1.07875$(直角)．

8. 用度、分、秒表示直角的0.2875．

解　$90°\times0.2875=25.875°$，$60'\times0.875=52.5'$，$60''\times0.5=30''$．因此，直角的$0.2875=25°52'30''$．

9. 用度、分、秒表示12点15分时钟的两针所成的角．

解　长针走1°的时间里两针离开$1°-\frac{1°}{12}=\frac{11°}{12}$．因为敲12点时两针重合，所以经过15分钟，长针走了$360°\times\frac{15}{60}=90°$．这时两针的交角是$\frac{11°}{12}\times90=82°30'$．

10. 用角度制表示2点34分56秒时钟的长针和短针的夹角．

解　从钟上标着XII的地方到长针的距离，用度数来表示是$6°\times34\frac{56}{60}$．因此从标着II的地方到短针的距离，用度数来表示是$6°\times34\frac{56}{60}\times\frac{1}{12}$，从而，从XII到短针的度数是$6°\times34\frac{56}{60}\times\frac{1}{12}+6°\times10$，所要求的夹角是$6°\times34\frac{56}{60}-6°\times34\frac{56}{60}\times\frac{1}{12}-6°\times10=132°8'$．

11. 钟表的两针在5点到7点40分这段时间里各转过了多少角度？

解　显然，分针在5点到7点40分这段时

间里转过 2 周又 1 周的 $\frac{40}{60}$. 如用度数来表示这个转动，就是

$$360°\times2+360°\times\frac{40}{60}=960°.$$

因为时针转过分针的 $\frac{1}{12}$，所以时针转过的度数是 $960°\times\frac{1}{12}=80°$.

12. 有两个角，如果它们的和是 84°，差是 0.1 直角，那么它们分别是多少度，多少个直角？

解 0.1 直角即是 $90°\times0.1=9°$. 因此两个角分别是 $(84°+9°)\div2=46°30'$ 和 $(84°-9°)\div2=37°30'$. 如果用直角作单位来表示，那么分别是 $\frac{46°30'}{90°}=\frac{31}{60}$ 直角和 $\frac{37°30'}{90°}=\frac{5}{12}$ 直角.

13. 正五边形的一个内角是几度？

解 多边形的外角加起来一共是 4 个直角，即等于 360°. 因此正五边形的一个外角等于 $360°\div5=72°$，从而一个内角是 $180°-72°=108°$.

14. 在正八边形的外接圆中，它的一条边所对的圆周角是几度？

解 在正八边形的外接圆中，它的一条边所对的圆心角是直角的 $\frac{4}{8}$，即是 45°. 这条边将圆周分成两条弧，若把优弧上的一点和这条边的两端连结起来，则所张开的圆周角是 $45°\times\frac{1}{2}=22°30'$，若把劣弧上的一点和这条边的两端连结起来，则所张开的圆周角是 $22°30'$ 的补角，即是 $180°-22°30'=157°30'$.

15. 已知正多边形的一个内角是 120°，求它的边数.

解 设正多边形的边数为 n，则一个外角是 $\frac{4}{n}$ 直角 $=\frac{360°}{n}$，从而内角是 $180°-\frac{360°}{n}$. 根据题意有 $180°-\frac{360°}{n}=120°$，因此求得 $n=6$.

16. $ABCD$ 是圆的内接四边形，它的 $\angle A$ 是 $44°35'$，$\angle B$ 是 $72°48'12''$，$\angle C$ 和 $\angle D$ 是多少度？

解 因为 $ABCD$ 内接于圆，所以 $\angle A$ 和 $\angle C$ 互为补角. 因此 $\angle C=180°-44°35'=135°25'$. 又 $\angle B$ 和 $\angle D$ 互为补角，因此 $\angle D=180°-72°48'12''=107°11'48''$.

17. 有一个多边形，它的内角的度数顺次成等差数列. 又知最小的角是 120°，公差是 5°，求多边形的边数.

解 问题可以这样考虑：即最大的外角是 $180°-120°=60°$，从它开始的各外角逐一减少 5°，这样的多边形是几边形. 因为外角和是 4 直角，即 360°，所以若设这个多边形是 n 边形，则从等差数列的公式

$$360°=\frac{n}{2}[2\times60°-(n-1)5°]$$

可得 $n=16$ 和 $n=9$. 但是 $n=16$ 不适合，如果 $n=16$，那么最小的外角就是 $60°-15\times5°=-15°$，成了负角. 因此所要求的多边形的边数是 9.

18. 用度、分、秒表示下列各角：0.35 直角，0.0875 直角，2.01375 直角，直角的 $\frac{5}{32}$，直角的 $\frac{8}{21}$，1.07 分，46.75 分，30.89 分.

解 0.35 直角 $=90°\times0.35=31.5°$，$60'\times0.5=30'$，因此 0.35 直角 $=31°30'$. 0.0875 直角 $=90°\times0.0875=7.875°$，$60'\times0.875=52.5'$，$60''\times0.5=30''$，因此 0.0875 直角 $=7°52'30''$. 2.01375 直角 $=90°\times2.01375=181.2375°$，$60'\times0.2375=14.25'$，$60''\times0.25=15''$，因此 2.01375 直角 $=181°14'15''$. $\left(\text{直角的}\frac{5}{32}\right)=90°\times\frac{5}{32}=14.0625°$，$60'\times0.0625=3.75'$，$60''\times0.75=45''$，因此 $\left(\text{直角的}\frac{5}{32}\right)=14°3'45''$. $\left(\text{直角的}\frac{8}{21}\right)=90°\times\frac{8}{21}=34\frac{2°}{7}$，$60'\times\frac{2}{7}=17\frac{1'}{7}$，$60''\times\frac{1}{7}=8\frac{4''}{7}$，因此 $\left(\text{直角的}\frac{8}{21}\right)=34°17'8\frac{4''}{7}$. 1.07 分 $=1'+60''\times0.07=1'+4.2''=1'4.2''$. 46.75 分 $=46'+60''\times0.75=46'+45''=46'45''$. 30.89 分 $=30'+60''\times0.89=30'+53.4''=30'53.4''$.

19. 用度、分、秒表示 1.704535 直角.

解 $90°\times1.704535=153.40815°$，$60'\times$

0.40815＝24.489′，60″×0.489＝29.34″，因此1.704535直角＝153°24′29.34″.

20. 在4点到5点30分这段时间内钟的两针各转过了多少角度？

解 分针：4点钟时分针在标着XII的地方，从那时到5点30分止转过了一周半，即转过了$360°\times1.5=540°$.

时针：从4点到5点30分，时针从IV走到了V和VI的当中，因此转过了一周的$\frac{1.5}{12}$，即转过了$360°\times\frac{1.5}{12}=45°$.

21. 正十一边形的一个外角是几度？

解 正n边形的一个外角等于$\frac{4}{n}$直角.本题$n=11$，因此是$\frac{4}{11}$直角，即是$90°\times\frac{4}{11}=32.\dot{7}\dot{2}°$.

$$60'\times0.72727=43.6362',$$
$$60''\times0.6362=38.1720'',$$

所以正十一边形的一个外角是

$$32°43'38.1720''.$$

22. 正八边形的一个外角是几度？

解 多边形的外角和是4直角．正八边形的一个外角与其他各个外角都相等，因此等于外角和的八分之一，即是$360°\div8=45°$.

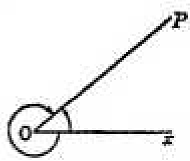
23. 正多边形的一个内角是170°，求它的边数.

解 一个内角是170°时，一个外角是$180°-170°=10°$．因此这个多边形的边数是$360°\div10°=36$.

2. 弧度制

24. 什么是正角，什么是负角？

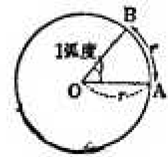
解 如图，$\angle xOP$可以认为是从顶点O引出的射线OP，从直线Ox的位置转到OP的位置而形成的.这个旋转的量的大小是$\alpha°$，Ox叫做基准（又叫做基线），OP叫做动半径．动半径旋转时，若方向和时针旋转的方向相反，就叫做正的旋转，若方向和时针旋转的方向相同，就叫做负的旋转．由正的旋转所形成的角叫做正角，由负的旋转所形成的角叫做负角.



25. 什么是弧度制？

解 **弧度制** 表示角的大小，通常使用的是象15°，30°40′这样的角度制单位，但在理论研究等方面，也还经常使用弧度制.

在半径为r的圆周上取长度是r的弧AB，考虑这条弧所对的圆心角$\angle AOB$，可见它的大小是一定的，和半径的长短无关．用这个角的大小作为角度的单位，叫做弧度，记号是rad．用弧度作单位来度量角叫做弧度制.



因为半径为r的圆周长是$2\pi r$，所以用弧度制来表示360°的角，就是$\frac{2\pi r}{r}=2\pi$.因此弧度制和角度制之间有下列关系：

$$\pi\text{弧度}=180°,$$
$$1\text{弧度}=\frac{180°}{\pi}\approx57°17'45'',$$
$$1°=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx0.01745\text{弧度}.$$

从而得到下列公式：

$$y°=\frac{180}{\pi}x\text{弧度},\ x\text{弧度}=\frac{\pi}{180}y°.$$

注 在弧度制中，通常略去单位名称．例如90°，45°，30°分别是$\frac{\pi}{2}$弧度，$\frac{\pi}{4}$弧度，$\frac{\pi}{6}$弧度，它们可简写成$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{6}$.

26. 圆弧AB的长度等于半径r，证明弧AB所对的圆心角与r无关.

解 半径为r的圆周长是$2\pi r$．因为圆弧的长度和它所对的圆心角成比例，所以如果设长度等于r的弧AB所对的圆心角是$x°$，则$2\pi r:r=360°:x°$.

$$\therefore\ x°=\frac{180°}{\pi}\approx57°17'45''.$$

即弧AB所对的圆心角与r无关.

27. 已知车轮的转速是每秒35转，求它转过1弧度所需要的时间．这里取$\pi=\frac{22}{7}$.

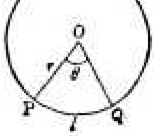
解 这个车轮转一转所要的时间是$\frac{1}{35}$秒，因此转过1弧度需要

$$\frac{1}{35}\div2\pi=\frac{1}{35}\times\frac{7}{22}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{220}.$$

28. 设半径是 r，圆心角是 θ（弧度）的扇形的弧长为 l，面积为 S，证明

$$l=r\theta,\ S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl.$$

解 同圆中弧长和扇形面积都和它们的圆心角成比例。因为半径为 r 的圆周和圆面积分别是 $2\pi r$ 和 πr^2，所以



$$l:2\pi r=\theta:2\pi,$$

$$\therefore\ l=r\theta.$$

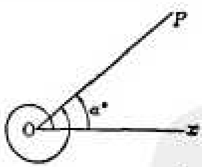
又 $$S:\pi r^2=\theta:2\pi,$$

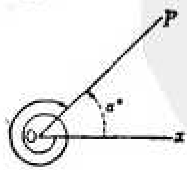
$$\therefore\ S=\frac{1}{2}r^2\theta.$$

$r\theta$ 用 l 代入，则 $S=\frac{1}{2}rl$。

29. 什么是一般角？

解 在问题 24 中，角的旋转不管是朝正的方向还是朝负的方向，都可以继续不断地进行下去。例如，在右图中，如果 $\angle xOP$ 的大小是 $\alpha°$，那么动径 OP 可以认为是从基线 Ox 的位置开始旋转了





$\alpha°,\ 360°+\alpha°,$

$360°\times2+\alpha°,\ \cdots$

或 $-360°+\alpha°,$

$-360°\times2+\alpha°,\cdots$

这些角叫做属于动径 OP 的角，或者动径 OP 所表示的角。即

OP 所表示的角

$=\alpha°+360°\cdot n.$（n 是整数）

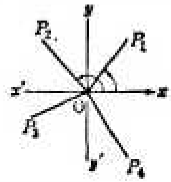
这也叫做动径 OP 和基线 Ox 所形成的一般角，即 $\angle xOP$ 的一般角。因此，动径 OP 的一般角定义如下：

一般角的定义 设动径 OP 和基线 Ox 所形成的一个角是 $\alpha°$，那么它的一般角是

$\alpha°+360°\cdot n\ \ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$

注 在上面的定义中，把动径 OP 和基线 Ox 所形成的一个角设为 $\alpha°$，而不设为 $\angle xOP$ 的劣角。例如在 $\angle xOP=60°$ 的情况下，不妨设 $\alpha°=60°$，$\alpha°=-300°$，$\alpha°=420°$，…。

当把直角坐标系 x 轴的正向作为角的基线时，根据动径所在的象限，把 OP 所表示的一般角叫做这个象限的角。右图中，$\angle xOP_1$，$\angle xOP_2$，$\angle xOP_3$，$\angle xOP_4$ 分别是第一、第二、第三、第四象限的角。



30. 用弧度制表示 $42°45'30''$。

解 $60''\times45=2700''$，$60''\times60\times42=151200''$。

因此

$$42°45'30''=151200''+2700''+30''$$
$$=153930''.$$

又 π（弧度）$=60''\times60\times180$，

于是，设所要求的弧度是 α（弧度），则从

$$\frac{153930}{60\times60\times180}=\frac{\alpha}{\pi}$$

可得， $\alpha=0.2375\cdots\pi.$

31. (1) 若扇形 OAB 的圆心角是 θ，半径是 a，试用 a 和 θ 表示这个扇形的内切圆半径 r。

(2) 若扇形的圆心角是 $60°$，求扇形的内切圆与扇形的面积之比。

解 (1) 设扇形 OAB 的内切圆的圆心是 O'，与 OA、OB 的切点是 P、Q，与 $\overset{\frown}{AB}$ 的切点是 R。因为 $\angle AOO'=\frac{\theta}{2}$，所以

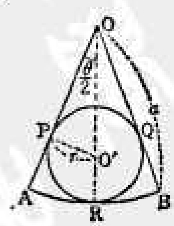
$$OO'\sin\frac{\theta}{2}=O'P.$$

$$\therefore\ OO'=r\csc\frac{\theta}{2}.$$

因为 $OO'+O'R=OR$，

所以

$$r\csc\frac{\theta}{2}+r=a.$$



$$\therefore\ r=\frac{a\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}.$$

(2) $\theta=60°$ 时 $\theta=\frac{\pi}{3}$（弧度），

$\therefore$ 扇形 OAB 的面积 $S=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi a^2}{6}$，

内切圆的半径 $r=\frac{a\sin 30^\circ}{1+\sin 30^\circ}=\frac{a}{3}$.

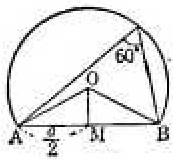
因此，内切圆的面积

$$S'=\pi r^2=\frac{a^2\pi}{9}.$$

$\therefore\ S':S=2:3$.

32. 求弦长是 a，且包含 60° 圆周角的弓形面积.

解 设这个弓形的弦为 AB，弧 AB 所属的圆的圆心为 O，则 $\angle AOB=120^\circ$. 从 O 向 AB 引垂线 OM，有



$$\angle OAM=30^\circ,$$
$$AM=\frac{a}{2}.$$
$$\therefore\ OM=\frac{a}{2}\operatorname{tg}30^\circ=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

$\triangle OAB$ 的面积是

$$\frac{a}{2}\times\frac{a}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2.$$

因为优角 $AOB=240^\circ=\frac{4\pi}{3}$，$OA=2OM=\frac{a}{\sqrt{3}}$，所以，以这个优角为圆心角的扇形 OAB 的面积是

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{2\pi a^2}{9}.$$

$$\therefore\ \text{弓形的面积}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2+\frac{2\pi a^2}{9}=\frac{8\pi+3\sqrt{3}}{36}a^2.$$

33. 若两个角的差是 1°，它们的和是 1 弧度，试用弧度制表示这两个角的大小.

解 设所要求的两个角分别是 x（弧度）和 y（弧度），则

$$x-y=\frac{\pi}{180},\ x+y=1.$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{180}\right),\ y=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{180}\right).$$

34. 若正多边形的一个外角是一个内角的 $\frac{1}{6}$，试用弧度制表示内角和外角的大小，并求出多边形的边数.

解 设外角是 x 弧度，则内角是 $(\pi-x)$ 弧度. 因而由题意得

$$6x=\pi-x,\ \text{即}\ x=\frac{1}{7}\pi.$$

从而内角是 $\quad\pi-\frac{1}{7}\pi=\frac{6}{7}\pi.$

又，因为外角的和总是 2π，所以这个多边形的边数是

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{7}\pi}=14.$$

35. 求半径为 5 cm 的圆中，圆心角为 $\frac{2}{3}$ 直角的圆弧的长度.

解 因为半径是 5 cm，所以这个圆的周长是 10π cm. 因此，所要求的弧长的厘米数 x 为：$\frac{10\pi}{360}=\frac{x}{60}$. 取 π 的近似值 3.1416，得 $x=5.23\cdots$.

36. 已知 200° 圆心角所对的弧长约等于半径的 $3\frac{1}{2}$ 倍，求这时 π 精确到小数第二位的值.

解 设半径为 r，则这个圆的周长是 $2\pi r$. 因此得到下面的比例式：$2\pi r:3\frac{1}{2}r=360:200$，从而求得 $\pi=\frac{63}{20}=3.15$.

37. 用角度制和弧度制，分别表示 12 点过 $\frac{1}{4}$ 小时的时候时钟长短两针的夹角.

解 在 12 点后的 $\frac{1}{4}$ 小时里，长针经过了 4 个直角的 $\frac{1}{4}$，即 1 直角. 在这段时间里，短针经过的角度是长针的 $\frac{1}{12}$，即经过了 1 直角的 $\frac{1}{12}$. 因此两针间的夹角是 1 直角的 $\frac{11}{12}$. 用角度制表示就是 $\frac{11}{12}\times 90^\circ=\frac{11\times 15^\circ}{2}=\frac{165^\circ}{2}=82\frac{1^\circ}{2}$，用弧度制表示就是 $\frac{11}{12}\times\frac{\pi}{2}=\frac{11\pi}{24}$.

38. 将下列各角换算成弧度制或角度制.

(1) 75°，120°，-150°，-300°，175°，-36°.

(2) $\frac{\pi}{10}$，$\frac{5\pi}{2}$，$-\frac{3\pi}{4}$，$\frac{2\pi}{3}$，2，-3.

解 设 $a^\circ=\theta$（弧度），因为 $180^\circ=\pi$（弧度），所以

$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{\alpha}{180}.$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\alpha}{180}\pi(\text{弧度}),\qquad ①$$

$$\alpha=\frac{180}{\pi}\theta(°).\qquad ②$$

(1) 从①式得

$$75°=\frac{5\pi}{12},\quad 120°=\frac{2\pi}{3},$$

$$-150°=-\frac{5\pi}{6},\quad -300°=-\frac{5\pi}{3},$$

$$175°=\frac{35\pi}{36},\quad -36°=-\frac{\pi}{5}.$$

(2) 从②式得

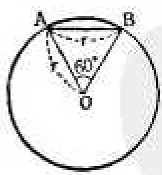
$$\frac{\pi}{10}=18°,\quad \frac{5\pi}{2}=450°,$$

$$-\frac{3\pi}{4}=-135°,\quad \frac{2\pi}{3}=120°,$$

$$2\approx115°,\quad -3\approx-172°.$$

39. 一条弦的长度等于半径 r, 求它和劣弧所组成的弓形的面积.

解 在半径为 r 的圆 O 中作长度等于 r 的弦 AB, 则三角形 OAB 是边长为 r 的正三角形. 因此



$$\angle AOB=60°=\frac{\pi}{3}.$$

又, 三角形的高是 $\frac{\sqrt{3}}{2}r$, 所以三角形 OAB 的面积是

$$\frac{1}{2}r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2.$$

于是, 若设所要求的弓形面积是 S, 则

$$\begin{aligned}S&=\text{扇形 }OAB\text{ 的面积}\\&\quad-\text{三角形 }OAB\text{ 的面积}\\&=\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\\&=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2.\end{aligned}$$

40. 一个半径为 r 的扇形, 若它的周长等于弧所在的半圆的长, 那么扇形的圆心角是多少弧度?

又, 扇形的面积是多少?

解 设扇形的圆心角是 θ 弧度, 因为扇形的弧长是 $r\theta$, 所以扇形的周长是 $2r+r\theta$.

根据题意, 有

$$2r+r\theta=\pi r.$$

$$\therefore\quad \theta=\pi-2\approx1.1416(\text{弧度}).$$

又, 这时扇形的面积

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r^2(\pi-2).$$

41. 求半径为 $r, r'(r<r')$ 的两同心圆的圆弧, 和从圆心出发夹角为 $\alpha°$ 的两射线所围成的部分的面积.

解 设同心圆的圆心是 O, 两射线和内圆、外圆的交点分别是 a、b 及 a'、b', 则所要求的面积

$S=$扇形 $Oa'b'$ 的面积$-$扇形 Oab 的面积.

$$\alpha°=\frac{\alpha}{180}\pi(\text{弧度}),$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S&=\frac{1}{2}r'^2\cdot\frac{\alpha\pi}{180}\\&\quad-\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{\alpha\pi}{180}\\&=\frac{\alpha\pi}{360}(r'^2-r^2).\end{aligned}$$

42. 求半径是 12 cm, 圆心角是 1.8 弧度的扇形的面积.

解 设扇形的面积是 S, 弧长是 l, 则

$$S=\frac{1}{2}rl.$$

又 $\quad l=r\theta=12\times1.8=21.6(\text{cm}),$

因此 $\quad S=\frac{1}{2}\times12\times21.6=129.6(\text{cm}^2).$

43. 求半径是 15 cm, 弧长是 18 cm 的扇形的圆心角, 及这个扇形的面积.

解 根据问题 28, 因为

$$r=15,\ l=18,\ l=r\theta,\ S=\frac{1}{2}rl,$$

所以

$$\theta=\frac{18}{15}=\frac{6}{5},\ S=\frac{15\times18}{2}=135(\text{cm}^2).$$

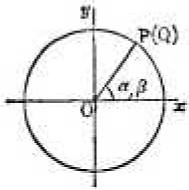
44. 从同一基线出发的两个角 α 和 β, 如果它们的动径有下列关系, 那么 α、β 间有怎样的关系? 这里角的单位是弧度.

(1) 两条动径重合;

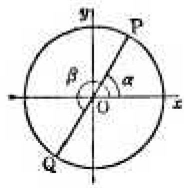
(2) 两条动径在一直线上, 但方向相反.

解 设动径 OP、OQ 所表示的角分别是 α、β. 它们的位置如下图所示.

(1) 作为特殊情况, $\alpha=\beta$. 一般地, 它们



(1)



(2)

的差是 $2n\pi$，即

$$\alpha-\beta=2n\pi.\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

(2) 特殊情况是 $\alpha-\beta=-\pi$．一般地

$$\alpha-\beta=(2n+1)\pi.\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

45．求任意角的弧度数和度数之间的关系．

解 设任意角的弧度数是 θ，这个角的度数是 x．因为 2 直角是 180°，所以 $\frac{x}{180}$ 是这个角和 2 直角的比．又，2 直角的弧度数是 π，所以 $\frac{\theta}{\pi}$ 也是这个角和 2 直角的比．因此，$\frac{x}{180}=\frac{\theta}{\pi}$，从而得

$$x=\frac{180\theta}{\pi},\quad \theta=\frac{\pi x}{180}.$$

46．用弧度表示 35′30″．

解 设所要求的弧度数是 θ，则

$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{35\times60+30}{180\times60\times60}.$$

从而 $$\theta=\frac{71}{21600}\pi\approx0.01033.$$

47．用弧度表示 11°15′30″．

解 $11°15'30''=675\frac{1}{2}$ 分，因此换算成弧度是

$$\frac{675\frac{1}{2}}{180\times60}\pi=\frac{675\times2+1}{180\times60\times2}\pi$$
$$=\frac{1351}{21600}\pi.$$

48．用弧度表示 13°．

解 因为 180° 是 π(弧度)，所以从 $180:13=\pi:x$ 可知，13° 是 $\frac{13}{180}\pi$．

49．求弧度是 $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}$ 的角的度数．

解 将 $\pi=180°$ 代入，即能求得度数．$\frac{\pi}{3}$ 的度数是 60°，$\frac{\pi}{6}$ 的度数是 30°，$\frac{\pi}{4}$ 的度数是 45°．

50．用角度制表示下列各角．

(1) π；(2) $\frac{3\pi}{4}$；(3) 10π．

解 因为 π 用角度制表示时是 180°，所以所给的各角分别是 (1) 180°，(2) $180°\times\frac{3}{4}=135°$，(3) $180°\times10=1800°$．

51．当汽车在半径为 r km 的圆弧上以每小时 a 公里的速度行驶时，n 秒钟的时间里行驶了多少秒的角度？

解 每小时行驶 a 公里，因此 n 秒钟里行驶 $\frac{na}{60\times60}$ 公里．又因为半径为 r 公里的圆周长是 $2\pi r$ km，所以所要求的角度的秒数可从下式得到：

$$2\pi r:\frac{na}{60\times60}=360\times60\times60:x.$$

即是 $$x=\frac{180na}{\pi r}.$$

52．正 n 边形的一个内角是多少弧度？

解 多边形的外角和是 4 直角，即等于 2π 弧度．因此正 n 边形的一个外角是 $\frac{2}{n}\pi$．从而一个内角的弧度数是 $\pi-\frac{2}{n}\pi=\frac{(n-2)\pi}{n}$．

53．若多边形的内角和是 10π，求它的边数．

解 设多边形的边数是 n，则内角和与外角和加起来是 $n\pi$．因此，仅仅外角的和是 $n\pi-10\pi$．又因为多边形的外角和总是等于 4 直角，即 2π，所以 $n\pi-10\pi=2\pi$，从而得 $n=12$．

54．若三角形各内角的比是 3:5:7，求各角的弧度数．

解 这个三角形的各个内角，用角度制表示分别是 $180°\times\frac{3}{3+5+7}=36°$，$180°\times\frac{5}{3+5+7}=60°$，$180°\times\frac{7}{3+5+7}=84°$．因此，用弧度制表示，它们分别是 $36\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{5}$，$60\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$，$84\times\frac{\pi}{180}=\frac{7\pi}{15}$．

55. 在半径为 12 cm 的圆中，求长为 5 cm 的弧所对的圆心角的度数。

解 半径为 12 cm 的圆的半周长是 12π cm。因此从 $\frac{12\pi}{180}=\frac{5}{x}$ 得 $x=\frac{75}{\pi}$ 度。

56. 在半径为 120 cm 的圆中，求 9 cm 的弧所对的圆心角的度数。

解 所要求的角的弧度数是 $\frac{9}{120}$，即是 $\frac{3}{40}$。因此，根据问题 45，这个角的度数是 $\frac{180}{\pi}\times\frac{3}{40}=\frac{27}{2\pi}$。

57. 等圆 O 和 O' 相交于 A、B，它们公共部分的面积等于圆 O 面积的一半。证明：设 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}+\theta$，则 $\theta=\cos\theta$。

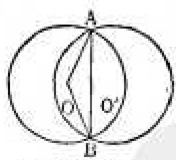
解 设等圆的半径是 r，则

扇形 OAB 的面积 $=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$，

$\triangle OAB$ 的面积

$$=\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}r^2\cos\theta,$$



弦 AB 和弧 AB 所围的弓形的面积是

$$\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta-\cos\theta\right).$$

因为两圆的公共部分的面积是这个弓形面积的 2 倍，所以根据题意有

$$r^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta-\cos\theta\right)=\frac{1}{2}\pi r^2.$$

$$\therefore\quad \theta=\cos\theta.$$

3. 三角比

58. 什么是三角比？

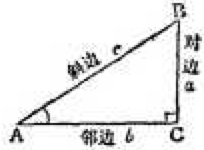
解 在直角三角形 ABC 中，若 $\angle C$ 是直角，那么当 $\angle A$ 或 $\angle B$ 确定时，这个三角形的形状也就确定了，三条边的比是一定的。这时，对于这个三角形三边之间相互的比有如下的规定。

1. 正弦

在直角三角形中，$\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$ 的值叫做正弦，$\angle A$ 的正弦记作 $\sin A$。下图中

$$\sin A=\frac{BC}{AB},$$

$$\sin B=\frac{AC}{AB}.$$



2. 余弦

$\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$ 的值叫做余弦，$\angle A$ 的余弦记作 $\cos A$。图中

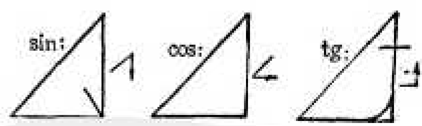
$$\cos A=\frac{AC}{AB},\quad \cos B=\frac{BC}{AB}.$$

3. 正切

$\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}$ 的值叫做正切，$\angle A$ 的正切记作 $\operatorname{tg} A$。图中

$$\operatorname{tg} A=\frac{BC}{AC},\quad \operatorname{tg} B=\frac{AC}{BC}.$$

注 记忆的方法：如考虑直角左面的角，则可用如下的方法记忆。



4. 余切

$\frac{\text{邻边}}{\text{对边}}$ 的值叫做余切，$\angle A$ 的余切记作 $\operatorname{ctg} A$。图中

$$\operatorname{ctg} A=\frac{AC}{BC},\ \operatorname{ctg} B=\frac{BC}{AC}.$$

5. 正割

$\frac{\text{斜边}}{\text{邻边}}$ 的值叫做正割，$\angle A$ 的正割记作 $\sec A$。图中

$$\sec A=\frac{AB}{AC},\ \sec B=\frac{AB}{BC}.$$

6. 余割

$\frac{\text{斜边}}{\text{对边}}$ 的值叫做余割，$\angle A$ 的余割记作 $\csc A$。图中

$$\csc A=\frac{AB}{BC},\ \csc B=\frac{AB}{AC}.$$

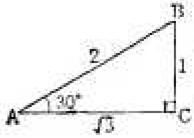
59. 求下列三角比。

(1) $\sin 30^\circ$； (2) $\cos 30^\circ$； (3) $\operatorname{tg} 30^\circ$；
(4) $\operatorname{ctg} 30^\circ$； (5) $\sec 30^\circ$； (6) $\csc 30^\circ$。

解 下图中 $\angle A=30^\circ$，$\angle C=90^\circ$ 时

$$BC:AB:AC=1:2:\sqrt{3}.$$

因此，(1) $\sin 30°=\frac{1}{2}$。



(2) $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

(3) $\operatorname{tg} 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

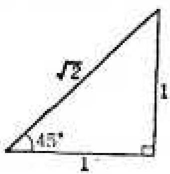
(4) $\operatorname{ctg} 30°=\sqrt{3}$。(5) $\sec 30°=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

(6) $\csc 30°=2$。

60. 求下列各值。

(1) $\sin 45°$；　(2) $\sin 60°$；

(3) $\operatorname{tg} 45°$；　(4) $\sec 60°$。



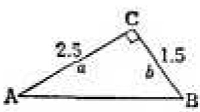
解 (1) $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

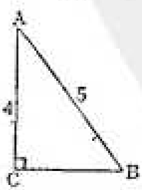
(2) $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

(3) $\operatorname{tg} 45°=1$。(4) $\sec 60°=2$。

61. 求下左图中 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的正切的值。

解 $\operatorname{tg} A=\frac{1.5}{2.5}=0.6$，$\operatorname{tg} B=\frac{2.5}{1.5}=\frac{5}{3}$。





62. 求上右图中 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的正切的值。

解 由勾股定理，首先可求出 BC 的长。

$$BC=\sqrt{5^2-4^2}=3。$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg} A=\frac{3}{4}=0.75,\quad \operatorname{tg} B=\frac{4}{3}。$$

注 1. 不管直角三角形的位置怎样，首先要弄清，要求正切值的那个角的对边是哪一条，邻边是哪一条。

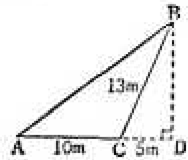
2. $\angle A+\angle B=90°$，它们是互为余角的关系。$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}$，$\operatorname{tg} B=\frac{b}{a}$，$\operatorname{tg} A\times\operatorname{tg} B=1$，因此 $\operatorname{tg} A$ 和 $\operatorname{tg} B$ 是互为倒数的关系。

3. 在上例中看到，正切的值可以是有限小数，也可以是象 $\operatorname{tg} B$ 那样的无限小数，此外，是无理数的情况也是很多的。

63. 求下图中 $\operatorname{tg} A$ 的值。

解 $BD=\sqrt{13^2-5^2}=12$。

$\therefore\quad \operatorname{tg} A=\frac{12}{15}=0.8$。



注 注意不要解成

$\operatorname{tg} A=\frac{13}{10}=1.3$。

64. 测得树影的长是 15 m，这时，将一根长 1.8 m 的木棒直立在地面上，它的影子长 2 m，求树的高度。

又，再求出这时太阳的高度（也叫做仰角，即太阳光线和水平面的夹角）。

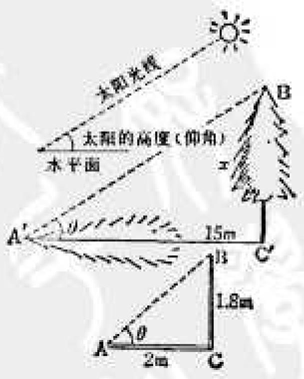
解 $\frac{\text{高度}}{\text{影长}}=\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}=\operatorname{tg}\theta$，

即 $\frac{1.8}{2}=\frac{x}{15}=\operatorname{tg}\theta$。

因此求得 $x=13.5(\text{m})$，

$\operatorname{tg}\theta=0.9$，

$\theta\approx 42°$。



65. 倾斜的程度（斜度）一般用正切来表示。对于屋顶来说，所谓 5 寸的斜度，是指一尺水平距离升高 5 寸的那种倾斜状况，和正切是相同的。求 5 寸斜度的屋顶和水平面的夹角。

解 $\operatorname{tg}x=\frac{5}{10}$

$=0.5$。

查表得 $x\approx 26.6°$。

这里，为了求得表中没有的值，让我们复习一下，怎样取用比例部分。

$\operatorname{tg}27°=0.5095$，$\operatorname{tg}26°=0.4877$。

对应于0.5的角在26°和27°之间。

$\operatorname{tg}27°-\operatorname{tg}26°=0.0218$…表差

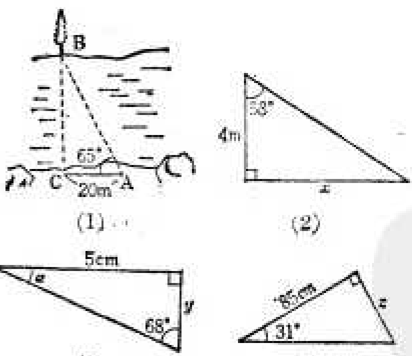
$\operatorname{tg}x°-\operatorname{tg}26°=0.5-0.4877=0.0123$，

$$\frac{0.0123}{0.0218}=\frac{123}{218}\approx 0.6,$$

$\therefore\quad x\approx 26°+0.6°=26.6°$。

66． 如图(1)，为了测量河的宽度，选定 B 物作为对岸的目标，并在离开 B 正对面的 C 点 20 m 的河沿取一点 A，测得 $\angle A=65°$。这条河的宽度是多少？

图(2)、(3)、(4)中，x, y, z 的值各是多少？

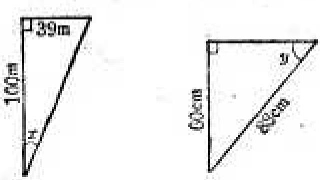


(1)　(2)　(3)　(4)

解 (1) 42.9 m，(2) 6.4 m，(3) 2 cm，(4) 51 cm。

注　(3)中，若由 $\frac{5}{y}=\operatorname{tg}68°\approx 2.4751$，而计算 $y=5\div 2.4751$ 是不合算的。不如由 $\alpha=90°-68°=22°$，求 $y=5\operatorname{tg}22°=2.02$ 来得方便。

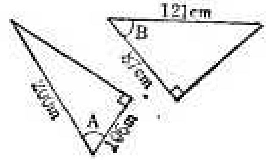
67． 查表，求下面两图中 $\angle x$ 和 $\angle y$ 的度数。



解　$\operatorname{tg}x=\frac{39}{100}$，$\sin y=\frac{60}{88}$。

查表得　$x\approx 21.3°$，$y\approx 43.0°$。

68． 查表，求下面两图中 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的度数。



解　$\cos A=\frac{106}{200}\approx 0.53$，$\cos B=\frac{87}{121}\approx 0.719$。

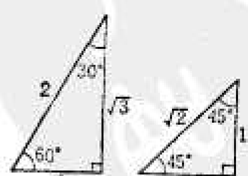
查表得　$\angle A\approx 58°$，$\angle B\approx 44°$。

69． 在下面的空格里填上数值。

	0°	30°	45°	60°	90°
sin					
cos					
tg					

解

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	无穷大

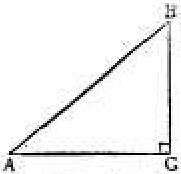


70． 求下列三角函数的值。

(1) $\sec 0°$；　(2) $\csc 90°$。

解　(1) $\sec A=\frac{AB}{AC}$，当 $\angle A=0°$ 时，AB 和 AC 重迭，因此 $\frac{AB}{AC}=1$，即 $\sec 0°=1$。

(2) $\csc A=\frac{AB}{BC}$. 当$\angle A=90°$时, BC和AB重迭, 因此$\csc 90°=1$.



71. 四边形$PQRS$中, $\angle PSR$是直角, 对角线PR垂直于边RQ, 并且$RP=20$, $RQ=21$, $RS=16$. 求$\sin\angle PRS$, $\operatorname{tg}\angle RPS$, $\cos\angle RPQ$, $\csc\angle PQR$.

解 因为$\triangle RSP$和$\triangle PRQ$是直角三角形,所以

$$PS=\sqrt{PR^2-RS^2}=\sqrt{20^2-16^2}=12,$$

$$PQ=\sqrt{PR^2+RQ^2}=\sqrt{20^2+21^2}=29.$$

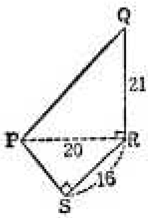
因此

$$\sin\angle PRS=\frac{PS}{PR}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg}\angle RPS=\frac{SR}{PS}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3},$$

$$\cos\angle RPQ=\frac{PR}{PQ}=\frac{20}{29},$$

$$\csc\angle PQR=\frac{PQ}{PR}=\frac{29}{20}.$$



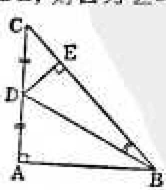
72. 在等腰直角三角形ABC中, 连结斜边的一端B和AC的中点D, 求$\angle CBD$的余切和正弦的值.

解 从D向BC作垂线DE, 则因为$\angle C=45°$, 所以$CE=DE$.

设$DC=l$, 得

$$DE=CE=\frac{1}{\sqrt{2}}l,$$

$$BC=2\sqrt{2}l.$$



从而

$$BE=\left(2\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)l=\frac{3}{\sqrt{2}}l.$$

因此 $BD=\sqrt{DE^2+BE^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{9}{2}}\,l$

$$=\sqrt{5}\,l.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\angle CBD=\frac{BE}{DE}=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}l}{\frac{1}{\sqrt{2}}l}=3.$$

又 $\sin\angle CBD=\frac{DE}{BD}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}l}{\sqrt{5}\,l}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$

73. 一个三角形的三条边和33, 56, 65这三个数成比例, 求最小内角的余切、正割和余割的值.

解 因为$\sqrt{33^2+56^2}=65$, 所以这是一个直角三角形. 最小的角是"33"所对的角, 设为θ, 则

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{56}{33},\ \sec\theta=\frac{65}{56},\ \csc\theta=\frac{65}{33}.$$

74. 四边形的一个角是60°, 另一个角是二分之一直角, 第三个角是$\frac{3\pi}{4}$弧度, 求各角的度数.

解 第一个角是60°, 第二个角是$\frac{1}{2}\times 90°$, 即45°, 第三个角是$\frac{3\pi}{4}\times\frac{180}{\pi}$度, 即135°, 因此第四个角是$360°-60°-45°-135°$, 即120°.

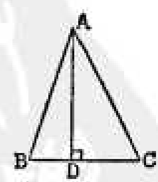
75. 若0.73弧度的圆心角所对的弧长是2.19 m, 求这个圆的半径.

解 设这个圆的半径是r, 则0.73弧度的圆心角所对的弧长等于$0.73r$. 根据题意有$0.73r=2.19$, 因而得$r=3$(m).

76. 从三角形ABC的顶点A作BC的垂线AD, 若所得的BD、CD、AD和2、3、6成比例, 那么顶角是多少度?

解 $\operatorname{tg}\angle BAD=\frac{BD}{AD}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

$$\operatorname{tg}\angle CAD=\frac{CD}{AD}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$



因为 $\operatorname{tg}\angle BAC=\operatorname{tg}(\angle BAD+\angle CAD)$

$$=\frac{\operatorname{tg}\angle BAD+\operatorname{tg}\angle CAD}{1-\operatorname{tg}\angle BAD\operatorname{tg}\angle CAD}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=1,$$

所以 顶角$\angle BAC=45°$.

77. 在半径为3.6 m的圆中, 求1.625弧度的圆心角所对的弧的长度.

解 所要求的弧长是$3.6\times 1.625=5.85$(m).

第二章 锐角三角函数

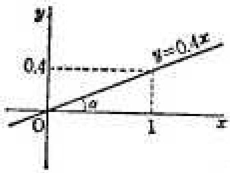
1. 基本性质

78. 求 $2\sin 30^\circ\cos 30^\circ\operatorname{ctg}60^\circ$ 的值.

解 因为 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\operatorname{ctg}60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以原式的值是

$$2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}.$$

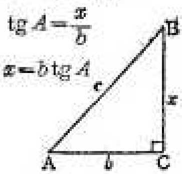
79. 直线 $y=0.4x$ 的斜率是 0.4，即 $\operatorname{tg}\alpha=0.4$，这里 α 是直线和 x 轴所成的角．求 α.

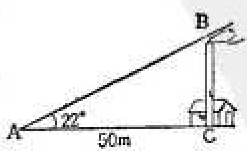


解 $\alpha=21.8^\circ$.

注 如果只要取近似值，那么可以不考虑比例部分，而直接从表中读取最接近的角度．在本题中，答案可以取作 22° 或 22° 不到．

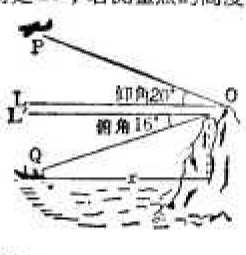
80. 在离开烟囱底部 50 m 的地方，测得烟囱顶的仰角是 22°，求烟囱的高度．





解 $x=50\operatorname{tg}22^\circ=50\times0.404=20.2(\text{m})$.

81. 下图中俯角是 16°，若测量点的高度是 200 m，那么船离测量点的水平距离是多少？又，飞机在船的正上方飞行，仰角是 20°，飞机的高度是多少？



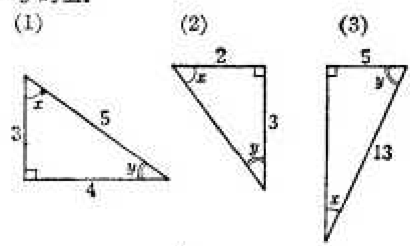
解 $90^\circ-16^\circ=74^\circ$，因此水平距离

$$OL'=200\operatorname{tg}74^\circ\approx697.5(\text{m}).$$

飞机的高度

$$h=OL'\times\operatorname{tg}20^\circ=253.9(\text{m}).$$

82. 求下列各三角形的 $\sin x$，$\cos x$，$\sin y$，$\cos y$ 的值.



解 (1) $\sin x=\frac{4}{5}=0.8=\cos y$,

$$\cos x=\frac{3}{5}=0.6=\sin y.$$

(2) 首先求得斜边是 $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

$$\sin x=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}=\cos y,$$

$$\cos x=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}=\sin y.$$

(3) 首先求得角 y 的对边的长是 $\sqrt{13^2-5^2}=12$.

$$\sin x=\frac{5}{13}=\cos y,\quad \cos x=\frac{12}{13}=\sin y.$$

注 1. 要想对任何位置的直角三角形都能立刻说出三角比，那就要进行大量的练习．

2. 从 (2)、(3) 可知，在直角三角形中，只要已知某两条边的长，就可利用勾股定理求出第三条边的长，因此可以求出所有的三角比．

3. $\angle A+\angle B=90^\circ$，即 $\angle B=90^\circ-\angle A$.

$$\sin A=\cos B=\cos(90^\circ-A),$$

$$\cos A=\sin B=\sin(90^\circ-A).$$

83. 若三角形三边的比是 25:24:7，求最小一个内角的三角函数的值.

解 $\sqrt{24^2+7^2}=\sqrt{625}=25$，因此是直角三角形，并且最小的内角所对的边是"7"．设最小的内角是 θ，则

$\sin\theta=\dfrac{7}{25}$，$\cos\theta=\dfrac{24}{25}$，

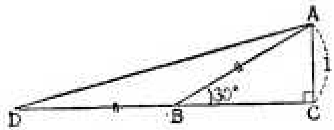
$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{7}{24}$，

$\operatorname{ctg}\theta=\dfrac{24}{7}$，

$\sec\theta=\dfrac{25}{24}$，$\csc\theta=\dfrac{25}{7}$。

84． 用作图的方法求出 $\sin 15^\circ$ 和 $\cos 15^\circ$ 的值．

解　在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$．延长 CB 到 D，使 $BD=AB$，则 $\angle ADC=15^\circ$．设 $AC=1$，因为 $AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，所以 $DC=2+\sqrt{3}$．因而



$$AD^2=AC^2+DC^2=1+(2+\sqrt{3})^2$$
$$=8+4\sqrt{3}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2,$$
$$AD=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$
$$\therefore\quad \sin 15^\circ=\frac{AC}{AD}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$
$$\cos 15^\circ=\frac{CD}{AD}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

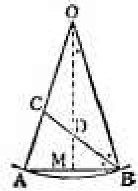
注　利用余角公式，从 15° 角的三角函数值可以求得 75° 角的三角函数值．

$$\sin 75^\circ=\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$
$$\cos 75^\circ=\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

85． 若圆的半径是 1，求它的内接正十边形的边长，并以此求 $\sin 18^\circ$ 和 $\cos 18^\circ$ 的值．

解　设圆心是 O，内接正十边形的一条边是 AB，则 $\triangle OAB$ 是顶角为 36° 的等腰三角形，$\angle OBA=72^\circ$．作 $\angle OBA$ 的平分线，和 OA 交于 C，得 $\triangle OAB\backsim\triangle BCA$，从而

$$AB^2=OA\cdot AC.$$
$$OC=CB=AB.$$



设 $AB=x$，则

$$x^2=1-x.$$

解此方程，取正根得

$$AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

取 AB 的中点 M，则 $AM=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\angle AOM=18^\circ$，因此

$$\sin 18^\circ=\frac{AM}{OA}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

从 $OM^2=OA^2-AM^2$，得 $OM=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$．

$$\therefore\quad \cos 18^\circ=\frac{OM}{OA}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

注　由 $\triangle OAB$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}OA^2\sin 36^\circ=\dfrac{1}{2}AB\cdot OM$，

可求得

$$\sin 36^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

又，从

$$\cos^2 36^\circ=1-\sin^2 36^\circ=1-\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$
$$=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16},$$

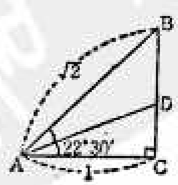
得　　$$\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

86． 在 $\angle C$ 为直角的等腰直角三角形 ABC 中，作 $\angle A$ 的平分线 AD．

(1) 设 $AC=1$，求 CD 和 AD 的长度；

(2) 求 $22^\circ 30'$ 的正弦和余弦的值．

解　(1) 因为 $\angle A=\angle B$，所以 $BC=AC=1$．从而 $AB=\sqrt{2}$．又因为 AD 是 $\angle A$ 的平分线，所以



$$BD:CD=AB:AC$$
$$=\sqrt{2}:1.$$

$$\therefore\quad CD=\frac{1}{\sqrt{2}+1}BC=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$$

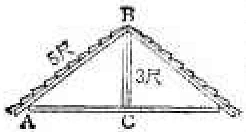
从而

$$AD^2=AC^2+CD^2=1+(\sqrt{2}-1)^2$$
$$=4-2\sqrt{2}.$$
$$\therefore\quad AD=\sqrt{4-2\sqrt{2}}.$$

(2) 因为 $\angle CAB=45°$，所以 $\angle CAD=22°30'$。因而

$$\sin 22°30'=\frac{CD}{AD}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$
$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$
$$\cos 22°30'=\frac{AC}{AD}=\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

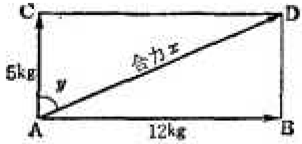
87. 右图所示的人字形屋顶，$AB=5$尺，$BC=3$尺，屋顶的倾斜角 $\angle A$ 是多少度？



解　$\sin A=\dfrac{3}{5}=0.6$，查表得角 A 约是 37°。如果取用比例部分，进行精确的计算，那么因为 0.6 是在 $\sin 36°=0.5878$ 和 $\sin 37°=0.6018$ 之间，所以

$$\begin{array}{r}0.6018\\-0.5878\\\hline 0.0140\end{array}\qquad\begin{array}{r}0.6000\\-0.5878\\\hline 0.0122\end{array}\qquad\frac{122}{140}\approx 0.9,$$
$$\angle A=36.9°.$$

88. 如下图所示，两个作用于同一点 A 的力 AB 和 AC 互相成直角，求合力 x 和角 y 的大小。



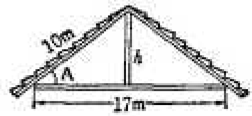
解　由勾股定理，得合力

$$x=\sqrt{5^2+12^2}=13(\text{kg}).$$
$$\cos y=\frac{5}{13}\approx 0.3846,$$

查表得　　$y\approx 67.4°$。

注　不管是用正弦、还是用余弦或正切，都能求出角 y。

89. 求下图中屋顶的倾斜角 $\angle A$ 和高 h。



解　$17\div 2=8.5$，$\cos A=\dfrac{8.5}{10}=0.85$，

$\angle A=31.8°$，

$$h=\sqrt{10^2-8.5^2}=5.3(\text{m}).$$

注　1. $h=8.5\,\text{tg}\,31.8°$，这在前面已经学过，tg 31.8° 在正切值表中没有，可利用比例部分而求得。

$$\begin{array}{r}\text{tg}\,32°=0.6249\\-)\,\text{tg}\,31°=0.6009\\\hline \text{表差}\cdots\cdots 0.0240\end{array}$$
$$0.024\times 0.8=0.0192.$$
$$\begin{array}{r}0.6009\\+)\,0.0192\\\hline 0.6201\cdots\text{tg}\,31.8°\end{array}$$
$$h=8.5\times 0.62\approx 5.3.$$

2. h 也可由 $h=10\sin 31.8°$ 求得。

90. 查表求 1°，10°，30°，45°，60°，89° 的正弦、余弦和正切的值。当表中的角逐渐变大时，三角比的值怎样变化？

解

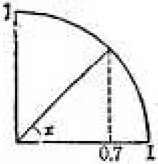
角 \ 三角比	sin	cos	tg
1°	0.0175	0.9998	0.0175
10°	0.1736	0.9848	0.1763
30°	0.5000	0.8660	0.5774
45°	0.7071	0.7071	1.0000
60°	0.8660	0.5000	1.7321
89°	0.9998	0.0175	57.2900

当表中的角逐渐增大时，正弦和正切的值也随着逐渐增大，而余弦的值逐渐减小。

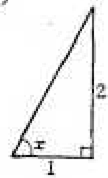
91. 不用表或量角器，作出适合下面式子的角。

(1) $\cos x=0.7$；　(2) $\text{tg}\,x=2$。

解　(1) 如下图所示，只要画一个半径是 1 的单位圆，就能作出所要作的角。



(1)



(2)

注　下面列出一些三角比的值，以供参考.

三角比 \ 角	正弦(sin)	余弦(cos)	正切(tg)
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}=0.5$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $=0.866$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $=0.577$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $=0.707$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $=0.707$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $=0.866$	$\frac{1}{2}=0.5$	$\sqrt{3}$ $=1.732$
90°	1	0	无穷大

92. 若 A、B、C 表示三角形 ABC 的三个内角，证明下列等式成立.

(1) $\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$.

(2) $\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$.

解　由 $A+B+C=180°$ 得

$$B+C=180°-A,\ \frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}.$$

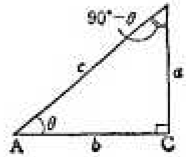
因此

(1) $\sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$.

(2) $\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}=\operatorname{tg}\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$.

注　图中 $\operatorname{tg}\theta=\frac{a}{b}$，$\operatorname{tg}(90°-\theta)=\frac{b}{a}$. 因此

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}(90°-\theta)\\&=1\div\frac{a}{b}\\&=1\div\operatorname{tg}\theta\\&=\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}.\end{aligned}$$



93. 证明下列等式.

(1) $\operatorname{tg}^2x+(1-\operatorname{tg}^4x)\cos^2x=1$;

(2) $\frac{\sin(90°-x)}{\operatorname{tg}(90°-x)}=\sin x$;

(3) $\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\operatorname{tg}x}{\cos x}$.

解　(1) 左边

$$\begin{aligned}&=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+\left(1-\frac{\sin^4x}{\cos^4x}\right)\cos^2x\\&=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+\cos^2x-\frac{\sin^4x}{\cos^2x}\\&=\frac{\sin^2x(1-\sin^2x)}{\cos^2x}+\cos^2x\\&=\sin^2x+\cos^2x=1.\end{aligned}$$

(2) 左边 $=\sin(90°-x)\div\frac{\sin(90°-x)}{\cos(90°-x)}$

$=\cos(90°-x)=\sin x$.

(3) 右边

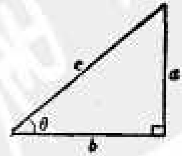
$$\begin{aligned}&=\frac{1}{\cos^2x}-\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\\&=\frac{1-\sin x}{\cos^2x}=\frac{1-\sin x}{1-\sin^2x}\\&=\frac{1}{1+\sin x}.\end{aligned}$$

94. 证明 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

解　在下图中

$$\sin\theta=\frac{a}{c},\quad \cos\theta=\frac{b}{c}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2\\&=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2\\&=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}\\&=1.\end{aligned}$$



注　$(\sin\theta)^2$、$(\cos\theta)^2$ 可记作 $\sin^2\theta$、$\cos^2\theta$.

95. 证明下面的等式成立.

$$\frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}.$$

解　右边$=\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)^2}{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}$

$$=\frac{\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}.$$

注　1. 在平方关系或上面的问题中，不管角的大小怎样，左边总是等于右边．这样的等式叫做恒等式（相对于方程来说）．

2. 证明恒等式有三种方法．或从左边出发，变形到右边（如问题 94 的证明），或从右边出发，变形到左边（如问题 95 的证明），或将左、右两边分别变形，使它们变成相同的式子．证明时，应当选择最方便的方法．

相除关系

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \operatorname{ctg}\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

这叫做相除关系．看下面的问题．

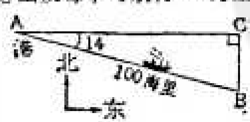
96．证明 $1+\operatorname{tg}^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$．

解　左边$=1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$．

注　$1+\operatorname{tg}^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ 也是平方关系中的一个．

要做到也会使用 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 的变形 $\sin\theta=\operatorname{tg}\theta\cos\theta$．

97．一艘从 A 港出发每小时航行 10 海里的轮船，如果没有潮流影响，可在某时刻到达正东的 C 点．但实际上，由于受到来自正北方向的潮流的影响，现在却在离开 A 港 100 海里的 B 点（见图）．问此时这艘船已航行了多少时间？又，潮流的时速是多少海里？



解　$AC=AB\times\cos 14^\circ\approx 97$（海里）．因为船的时速是 10 海里，所以此时船已航行了 9.7 小时．

在这段时间里，被潮流朝南冲走的距离

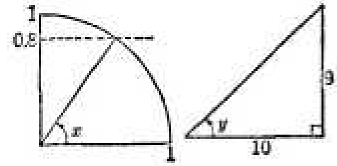
$$BC=AB\sin 14^\circ=24.2\text{（海里）}.$$

因此潮流的时速是

$$24.2\div 9.7\approx 2.5\text{（海里/小时）}.$$

98．根据 $\sin x=0.8$，不用表和量角器作角 x．又，作 $\operatorname{tg}y=0.9$ 的角 y．

解　作法如下．如果利用表，那么不用有刻度的尺也能作出角 x 和 y．

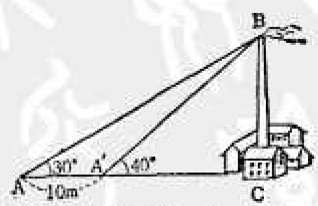


99．在离开树根部 20 m 的地方，测得树顶的仰角是 28°．树高约多少米？这里，眼睛的高度按 1.4 m 计算．（计算中可利用下面的三角函数值．）

$$\sin 28^\circ=0.4695,\ \cos 28^\circ=0.8829,$$
$$\operatorname{tg}28^\circ=0.5317.$$

解　约 12 m．题中给出了三个三角比的值，在这种情况下，需要注意使用哪个好．在本题中用正切求高度比较方便，但在有些求高度的问题中斜边是已知的，那就用正弦．

100．要测量烟囱的高度，但由于它的周围有建筑物而不能测得到烟囱底部的距离．现在空地上取 A、A' 两点，使 A、A'、C 在一条直线上．在 A、A' 测仰角，得 $\angle A=30^\circ$，$\angle A'=40^\circ$，又测得 $AA'=10\,\text{m}$，求烟囱的高度．



解　设 $A'C=x\,\text{m}$，$BC=h\,\text{m}$，则

$$\operatorname{tg}30^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{h}{10+x},$$

$$h=0.5774(10+x). \quad ①$$

$$\operatorname{tg}40^\circ=\frac{BC}{A'C}=\frac{h}{x},\ h=0.8391x. \quad ②$$

从①、②得

$$0.5774(10+x)=0.8391x, \quad ③$$
$$(0.8391-0.5774)x=5.774,$$
$$x=\frac{5.774}{0.2617}\approx 22.1\,(\text{m}). \quad ④$$

将④代入②，得

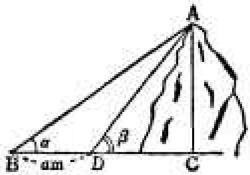
$$h=0.8391\times 22.1\approx 18.5(\mathrm{m})。$$

101. 要求山的高度 AC，即使在一点 B 测得仰角 α，如不知道 BC 的长度，也还不行。因此，在从 B 点向山靠近 a m 的 D 点再测得仰角 β。用 a、α、β 表示山的高度。又，当 $a=1000$ m，$\alpha=20°$，$\beta=31°$ 时，山的高度是多少米？

解　设山的高度是 x m，则

$$\frac{x}{BC}=\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$\frac{x}{DC}=\mathrm{tg}\,\beta。$$



因此

$$BC=\frac{x}{\mathrm{tg}\,\alpha},$$

$$DC=\frac{x}{\mathrm{tg}\,\beta}。$$

$$a=BC-DC=\frac{x}{\mathrm{tg}\,\alpha}-\frac{x}{\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$=\frac{(\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\alpha)x}{\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}。$$

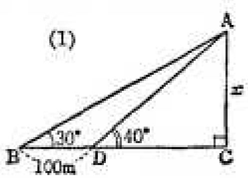
从而得　$$x=\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\alpha}。$$

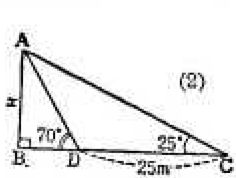
当 $a=1000$ m，$\alpha=20°$，$\beta=31°$ 时，

$$x\approx\frac{1000\times 0.364\times 0.601}{0.601-0.364}\approx\frac{218.8}{0.237}$$

$$\approx 923(\mathrm{m})。$$

102. 求下面的三角形的高。





解　(1) 设高 $AC=x$，则

$$\frac{BC}{x}=\mathrm{ctg}\,30°=\sqrt{3}\approx 1.73,$$

$$\therefore\quad BC=\sqrt{3}\,x\approx 1.73x。$$

又　$$\frac{DC}{x}=\mathrm{ctg}\,40°\approx 1.19,$$

$$\therefore\quad DC=1.19x。$$

由于　$$BC-DC=100,$$

所以　$$1.73x-1.19x=100,$$

解得　$$x\approx 185(\mathrm{m})。$$

(2) 用与上同样的方法解得 $x\approx 14(\mathrm{m})$。

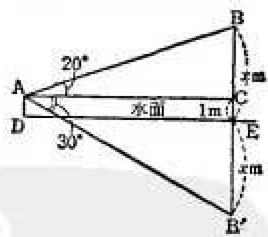
103. 沼泽中竖着一块碑。在离开水面 1 m 高的地方观测时，到碑顶的仰角是 20°，到水中映象顶点的俯角是 30°，求水面到碑顶的高度。

解　从下图可得

$$\angle B=70°,\ \angle B'=60°,$$

$$BC=BE-CE=x-1,$$

$$B'C=B'E+EC=x+1。$$



在 $\triangle ABC$ 中，

$$AC=BC\,\mathrm{tg}\,B=(x-1)\,\mathrm{tg}\,70°。\qquad ①$$

在 $\triangle AB'C$ 中，

$$AC=B'C\,\mathrm{tg}\,B'=(x+1)\,\mathrm{tg}\,60°。\qquad ②$$

从①、②得

$$(x-1)\,\mathrm{tg}\,70°=(x+1)\,\mathrm{tg}\,60°,$$

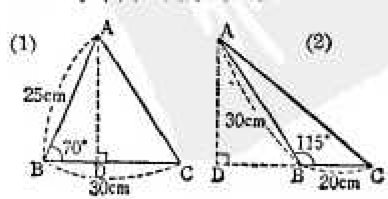
$$(\mathrm{tg}\,70°-\mathrm{tg}\,60°)x=\mathrm{tg}\,70°+\mathrm{tg}\,60°。$$

$$\begin{array}{r}2.7475\\-1.7321\\\hline 1.0154\end{array}\qquad\begin{array}{r}2.7475\\+1.7321\\\hline 4.4796\end{array}$$

即　$$1.0154x=4.4796,$$

$$x\approx\frac{4.48}{1.02}\approx 4.39(\mathrm{m})。$$

104. 求下列三角形的面积。



解 (1) 从顶点 A 向底边 BC 引垂线时，垂足 D 在 BC 上的情况。

$AD=AB\sin 70^\circ=25\times 0.9397\approx 23.5$。

$\triangle ABC$ 的面积是

$$\frac{1}{2}\times 30\times 23.5\approx 353(\mathrm{cm}^2).$$

(2) 垂足 D 在 BC 的延长线上的情况。

$$\angle ABD=180^\circ-115^\circ=65^\circ,$$

$$AD=AB\sin\angle ABD=30\times 0.9063\approx 27.2.$$

$\triangle ABC$ 的面积是

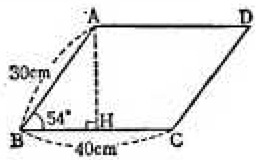
$$\frac{1}{2}\times 20\times 27.2=272(\mathrm{cm}^2).$$

注 上面是已知两边和夹角，求三角形的面积。

105. 求下图的平行四边形的面积。

解 先求高。

$AH=AB\sin 54^\circ$
$=30\times 0.809$
≈ 24.3。



因此面积是

$$BC\times AH\approx 40\times 24.3\approx 971(\mathrm{cm}^2).$$

106. (1) 求两边分别是 10 cm 和 12 cm，夹角是 32° 的三角形的面积。

(2) 求两边分别是 5 m 和 7 m，夹角是 40° 的三角形的面积。

(3) 求相邻两边分别是 20 m 和 50 m，夹角是 150° 的平行四边形的面积。

(4) 求一边是 10 m，一个角是 30° 的菱形的面积。

解 (1) 设面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}\times 10\times 12\times\sin 32^\circ\approx\frac{1}{2}\times 10\times 12\times 0.530=31.8(\mathrm{cm}^2).$$

(2) $S=\frac{1}{2}\times 5\times 7\times\sin 40^\circ\approx\frac{1}{2}\times 5\times 7\times 0.64\approx 11.2(\mathrm{m}^2)$.

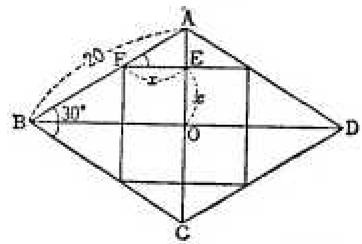
(3) $S=20\times 50\times\sin 150^\circ=20\times 50\times\sin 30^\circ=20\times 25=500(\mathrm{m}^2)$.

(4) $S=10\times 10\times\sin 30^\circ=100\times 0.5=50(\mathrm{m}^2)$.

107. 若菱形的边长是 20 cm，一个角是 60°，求它的内接正方形的边长。

解 设所求的长度是 $2x$，则

$$AE=EF\,\mathrm{tg}\angle AFE=\frac{1}{\sqrt{3}}x,\quad EO=x,$$



$$AO=AE+EO=\frac{x}{\sqrt{3}}+x=\frac{\sqrt{3}}{3}x+x=\frac{\sqrt{3}+3}{3}x. \quad ①$$

另外，从 $\triangle ABO$ 又得

$$AO=AB\sin 30^\circ=20\times 0.5=10. \quad ②$$

从 ①、② 得

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3}x=10,$$

$$x=\frac{30}{3+\sqrt{3}}=\frac{30(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{30(3-\sqrt{3})}{3^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{30(3-\sqrt{3})}{6}=5(3-\sqrt{3}).$$

因此，正方形的边长 $2x$ 是

$$10(3-\sqrt{3})\approx 12.7(\mathrm{cm}).$$

108. 梯形的上底是 a，下底是 $b(a<b)$，两底角是 α、β，写出它的面积公式。

解 $h=x\,\mathrm{tg}\,\alpha=y\,\mathrm{tg}\,\beta$.

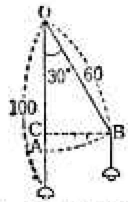
$$b=a+x+y=a+\frac{h}{\mathrm{tg}\,\alpha}+\frac{h}{\mathrm{tg}\,\beta}=a+\frac{h(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta)}{\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\therefore\quad h=\frac{(b-a)\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}.$$

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h=\frac{(a+b)(b-a)\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{2(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta)}=\frac{(b^2-a^2)\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{2(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta)}.$$

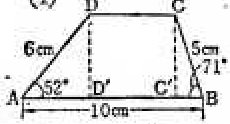
109. 从天花板上吊下 1m 长的电灯线，现在离顶 60 cm 的地方系上一根绳子，拉动绳子，使电灯线与铅垂方向错开 30°。这时电灯比原来高了多少 cm？

解 从 A 移动到 B 的时候，电灯升高的高度是 AC。



$$AC=OA-OC$$
$$=60-60\cos 30°$$
$$=60-60\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\approx 8(\text{cm}).$$

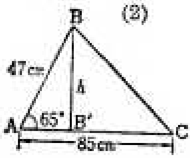
110 (1) 求图中 AD'、BC'、DD' 及梯形上底 DC 的长，并计算梯形的面积。



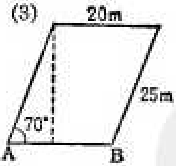
(2) 求如图所示的三角形的高和面积。

(3) 求如图所示的平行四边形的高和面积。

(2)



(3)



解 (1) $AD'=6\cos 52°\approx 3.7(\text{cm})$.

$BC'=5\cos 71°\approx 1.6(\text{cm})$.

$DC=D'C'=AB-AD'-BC'$

$\approx 4.7(\text{cm})$.

$DD'=AD\sin 52°\approx 4.7(\text{cm})$.

DD' 也可用 $BC\sin 71°$ 求得。

因此，梯形的面积是

$$\frac{1}{2}(AB+DC)\times DD'\approx 34.5(\text{cm}^2).$$

(2) $h=47\sin 65°\approx 42.6(\text{cm})$.

面积是 $\frac{1}{2}AC\times h\approx 1810(\text{cm}^2)$.

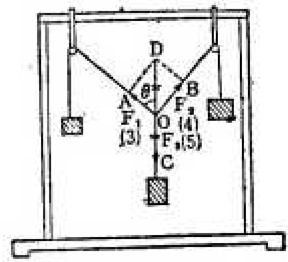
(3) $h=25\sin 70°\approx 23.5(\text{m})$.

面积是 $AB\times h\approx 470(\text{m}^2)$.

111. 一根 1m 长的木棒 AB，与平面交成 60° 的角，求它在平面上的正射影 $A'B'$ 的长。

解 $A'B'=AB\cos 60°=1\times 0.5=0.5(\text{m})$.

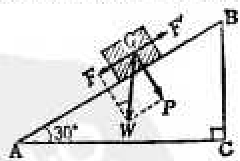
112. 如下图所示有两个滑轮，从连结点 O 出发的三根线的端点，分别挂着 3kg、4kg、5kg 的重物，整个滑轮系统平衡．求 $\angle AOD$.



解 因为 $\triangle OAD$ 是直角三角形，所以 $\sin\theta=\frac{4}{5}=0.8$，$\theta\approx 53°$。更精确一些，求得 $\theta\approx 53°8'$.

113. 在倾斜角是 30° 的斜面上，有一个重 10 kg 的物体．求下滑力 F，向上的拉力 F' 和物体对斜面的作用力 P.

解 物体的重力作用于重心 G，并垂直向下．这个力 10 kg 可以分解成与斜面平行的力 F（它等于 F'）和与斜面成直角的力 P。



因为 $GW\perp AC$，$GP\perp AB$，所以 $\angle FWG=\angle BAC=30°$.

因此 $GF=GW\sin 30°=10\times\frac{1}{2}=5$,

$$GP=GW\cos 30°=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 8.7,$$

即 力 $F=$ 力 $F'=5\,\text{kg}$，力 $P=8.7\,\text{kg}$.

注 要阻止物体沿斜面下滑，只要对物体作用一个力 F'，使它的方向和 F 相反，大小等于 F 就可以了．这个力就是作用在物体和斜面之间的摩擦力．

一般地，若设物体的重力是 W kg，下滑力是 F kg，对斜面的作用力是 P kg，斜面与水平面的夹角是 θ，则

$$F=W\sin\theta,\ P=W\cos\theta.$$

114. W 和倾斜角 θ 的值如下，求 F（下滑力）和 P（对斜面的作用力）的值．

(1) $W=100\,\text{kg}$, $\theta=45°$;

(2) $W=50\,\text{kg}$, $\theta=60°$.

解 (1) $F=P\approx 70.7\,\text{kg}$.

(2) $F\approx 43.3\,\mathrm{kg}$, $P=25\,\mathrm{kg}$.

115. 求 $\frac{1}{2}\csc^2 60^\circ+\sec^2 45^\circ-2\operatorname{ctg}^2 60^\circ$ 的值.

解 对于各个三角函数,用它的值代入,得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+(\sqrt{2})^2-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=2.$$

116. 证明 $\sin^2 60^\circ-\sin^2 30^\circ=\frac{1}{6}\operatorname{tg}60^\circ\times\operatorname{ctg}30^\circ$.

解 原式的左边$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$,

右边$=\frac{1}{6}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}$.

$\therefore\quad \sin^2 60^\circ-\sin^2 30^\circ=\frac{1}{6}\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{ctg}30^\circ$.

117. 求 $\frac{1}{3}\sin^2 60^\circ-\frac{1}{2}\sec 60^\circ\operatorname{tg}^2 30^\circ+\frac{4}{3}\sin^2 45^\circ\operatorname{tg}^2 60^\circ$ 的值.

解 用 $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sec 60^\circ=2$, $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$ 代入,得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\times2\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\\&\quad+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(\sqrt{3})^2\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+2=\frac{23}{12}.\end{aligned}$$

118. 证明 $\cos 60^\circ-\operatorname{tg}^2 45^\circ+\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ-\sin 30^\circ=0$.

解 用 $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}45^\circ=1$, $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ 代入原式的左边,则左边等于

$$\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2},$$

将这个式子计算下去,结果就是 0.

119. 求 $3\operatorname{tg}^2 30^\circ+\frac{1}{4}\sec 60^\circ+5\operatorname{ctg}^2 45^\circ-\frac{2}{3}\sin^2 60^\circ$ 的值.

解 用 $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sec 60^\circ=2$, $\operatorname{ctg}45^\circ=1$, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 代入,得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\\&\quad+\frac{1}{4}\times2+5\times1-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\&=1+\frac{1}{2}+5-\frac{1}{2}=6.\end{aligned}$$

120. 证明 $3\operatorname{tg}^2 30^\circ+\frac{4}{3}\cos^2 30^\circ-\frac{1}{2}\times\sec^2 45^\circ-\frac{1}{3}\sin^2 60^\circ=\frac{3}{4}$.

解 用 $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sec 45^\circ=\sqrt{2}$, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 代入左边,则

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

即等于 $\frac{3}{4}$.

2．余角的三角函数

121. 证明下列等式.

(1) $\sin(90^\circ-A)=\cos A$;

(2) $\cos(90^\circ-A)=\sin A$;

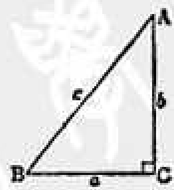
(3) $\operatorname{tg}(90^\circ-A)=\operatorname{ctg}A$;

(4) $\operatorname{ctg}(90^\circ-A)=\operatorname{tg}A$;

(5) $\sec(90^\circ-A)=\csc A$;

(6) $\csc(90^\circ-A)=\sec A$.（余角公式）

解 (1) 图中 $A+B=90^\circ$,



$\therefore\quad B=90^\circ-A$.

因为

$\sin B=\frac{b}{c}$, $\cos A=\frac{b}{c}$,

所以 $\sin B=\cos A$.

$\therefore\quad \sin(90^\circ-A)=\cos A$.

同理 $\cos(90^\circ-A)=\sin A$.

(2)、(3)、(4)、(5)、(6) 可用同样的方法证明.

注 下列公式也是成立的.

$$\begin{cases}\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta,\\\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta,\\\operatorname{tg}(90^\circ+\theta)=-\operatorname{ctg}\theta.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(180°+\theta)=-\sin\theta,\\ \cos(180°+\theta)=-\cos\theta,\\ \mathrm{tg}(180°+\theta)=\mathrm{tg}\,\theta.\end{cases}$$

利用这些公式，可以将任意角的三角函数值表示成角度是 $0°\leqq\theta\leqq 90°$，或更进一步，角度是 $0°\leqq\theta\leqq 45°$ 的角的三角函数值．

122． 下列角的正弦，分别等于哪个角的余弦？

(1) $23°40'25''$，　(2) $18°26'41''$，

(3) $50°49'27.6''$．

解　(1) $66°19'35''(90°-23°40'25'')$．

(2) $71°33'19''(90°-18°26'41'')$．

(3) $39°10'32.4''(90°-50°49'27.6'')$．

123． 在下面的□里填人适当的数．

(1) $\sin 60°=\cos$ □；

(2) $\mathrm{tg}\,25°=\mathrm{ctg}$ □；

(3) $\sec 53°30'=\csc$ □．

解　(1) $30°$．(2) $65°$．(3) $36°30'$．

124． 求使 $\mathrm{tg}\,2A=\mathrm{ctg}\,3A$ 的 A 的值．

解　因为 $\mathrm{tg}\,2A=\mathrm{ctg}(90°-2A)$，所以为了使 $\mathrm{tg}\,2A=\mathrm{ctg}\,3A$，只要

$$3A=90°-2A.$$

$$\therefore\ 5A=90°.\quad\therefore\ A=18°.$$

125． 求适合 $\sin A=\cos A$ 的 A 的值（A 是锐角）．

解　因为 $\sin A=\cos(90°-A)$，且 A 是锐角，所以要使 $\sin A=\cos A$，只要 $A=90°-A$，即 $2A=90°$．因此 $A=45°$．

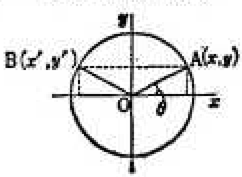
126． 哪些角的余弦分别等于下列角的正弦？

(1) $49'56''$；　(2) $79°14'39.8''$．

解　一个角的余弦等于余角的正弦，因此(1)的答案是 $90°-49'56''=89°10'4''$，(2)的答案是 $90°-79°14'39.8''=10°45'20.2''$．

127． 若 $0°<\theta<90°$，证明下列公式．

$$\sin(180°-\theta)=\sin\theta,$$
$$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta,$$
$$\mathrm{tg}(180°-\theta)=-\mathrm{tg}\,\theta.\ \text{（补角公式）}$$



解　在以直角坐标平面的原点为圆心，r 为半径的圆周上取两点 A、B，若 $\angle xOA=\theta$，则 $\angle xOB=180°-\theta$．设它们的坐标分别是 (x,y) 和 (x',y')，那么由于 A、B 关于 y 轴对称，所以 $x'=-x$，$y'=y$．

$$\therefore\ \sin(180°-\theta)=\frac{y'}{r}=\frac{y}{r}=\sin\theta,$$

$$\cos(180°-\theta)=\frac{x'}{r}=-\frac{x}{r}=-\cos\theta,$$

$$\mathrm{tg}(180°-\theta)=\frac{y'}{x'}=-\frac{y}{x}=-\mathrm{tg}\,\theta.$$

注　这些公式，当 θ 是一般角时也是成立的．

128． 若 $0°<\alpha<45°$，求下列各式的值．

(1) $\sin^2(45°+\alpha)+\sin^2(45°-\alpha)$；

(2) $\mathrm{tg}(45°+\alpha)\cdot\mathrm{tg}(45°-\alpha)$．

解　(1) $\sin(45°+\alpha)=\cos[90°-(45°+\alpha)]=\cos(45°-\alpha)$．

$$\therefore\ \sin^2(45°+\alpha)+\sin^2(45°-\alpha)$$
$$=\cos^2(45°-\alpha)+\sin^2(45°-\alpha)=1.$$

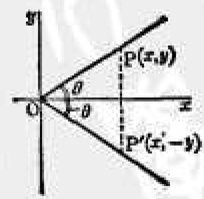
(2) $$\mathrm{tg}(45°+\alpha)=\mathrm{ctg}[90°-(45°+\alpha)]$$
$$=\mathrm{ctg}(45°-\alpha).$$

$$\therefore\ \mathrm{tg}(45°+\alpha)\cdot\mathrm{tg}(45°-\alpha)$$
$$=\mathrm{ctg}(45°-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(45°-\alpha)=1.$$

129． 证明下列公式．

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta,\ \cos(-\theta)=\cos\theta,$$
$$\mathrm{tg}(-\theta)=-\mathrm{tg}\,\theta.\ \text{（负角公式）}$$

解　设 θ 是一般角，表示 θ 的动半径和表示 $-\theta$ 的动半径是关于基线对称的．在 θ 的动半径上取一点 $P(x,y)$，则 $P'(x,-y)$ 是表示 $-\theta$ 的动半径上的一点，并且若 $OP=r$，则 $OP'=r$．因而



$$\sin(-\theta)=\frac{-y}{r}=-\frac{y}{r}=-\sin\theta,$$

$$\cos(-\theta)=\frac{x}{r}=\cos\theta,$$

$$\mathrm{tg}(-\theta)=\frac{-y}{x}=-\frac{y}{x}=-\mathrm{tg}\,\theta.$$

130． 填空：

(1) $\sin 20°=\cos$ □；

(2) $\cos 50°=$ □ $40°$；

(3) $\sin 45°=\cos$ □；

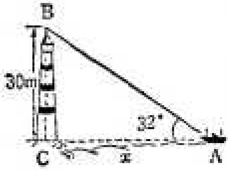
(4) $\sin(45°+x)=\cos\boxed{}$；

(5) $\cos 90°=\sin\boxed{}$。

解　(1) 70°．(2) sin．(3) $45°-x$．(4) 45°．(5) 0°．

131． 从船上测得高为 30 m 的灯塔的仰角是 32°，求到灯塔的距离。

解　32° 的余角 B 是 58°，$\operatorname{tg}58°=\dfrac{x}{30}$，所以



$$x=30\operatorname{tg}58°\approx 30\times 1.6=48(\text{m}).$$

132． 倾斜角是 7° 的上坡路，走 200 米升高几米？

解　$x=200\sin 7°=200\times 0.1219\approx 24.4$（米）。

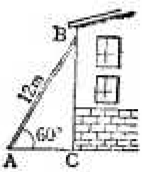
133． 长 12 m 的梯子和地面成 60° 角斜靠在墙上，求梯子上端的高度。

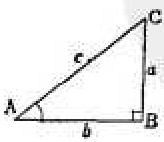
$$\sin A=\frac{a}{c},$$

$$a=c\sin A,$$

$$\cos A=\frac{b}{c},$$

$$b=c\cos A.$$





解　因为 $\sin 60°=\dfrac{BC}{AB}$，所以

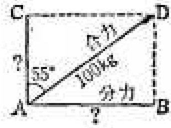
$$BC=AB\sin 60°.$$

又因为 $AB=12$，$\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0.8660$，所以

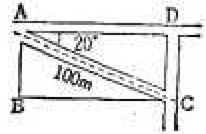
$$BC=12\times 0.866\approx 10.4(\text{m}).$$

134． (1) 如下图所示，互相成直角的两个力 AB、AC 作用在同一点 A，合力 AD 是 100 kg，且和 AC 成 55° 的角，求 AB 和 AC 的大小。

(2) 下图中，从 A 绕道 AD、DC 到 C 和从 A 笔直到 C，相差多少路程？



(1)



(2)

解　(1) $AB\approx 81.9$ kg，$AC\approx 57.4$ kg．(2) 28.2 m．

135． 查表求下列数值的正弦和余弦的角：0.3090，0.0872。

解　正弦值为 0.3090 的角是 18°，余弦值为 0.3090 的角是 72°；正弦为 0.0872 的角是 5°，余弦为 0.0872 的角是 85°。

136． 对于下面的说法，正确的加"○"，不正确的打"×"。(在锐角范围内)

(1) 正弦的值随着角的增大而增大，但不和角的大小成正比例。

(2) 余弦的值随着角的增大而减小，和角的大小成反比例。

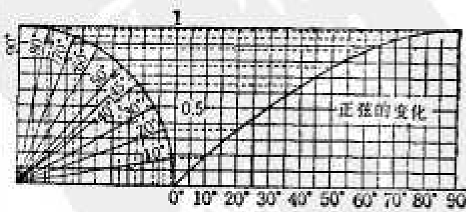
(3) 正切的值和角的大小成正比例。

(4) 正弦、余弦的值一般小于 1。

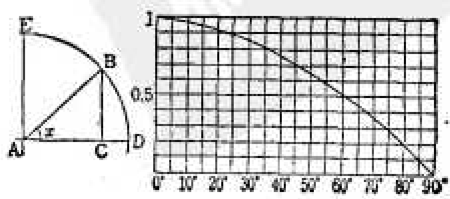
(5) 对于 0° 和 90°，因为无法考虑有这样"锐角"的直角三角形，所以不考虑三角比。

解　(1) ○　(2) ×　(3) ×　(4) ○　(5) ×

注　以 A 为圆心、1 为半径作圆（叫做单位圆），在圆周上任意取一点 B，设 $\angle BAC=x$，则



(余弦的变化)



$$\sin x=\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{1}=BC,$$

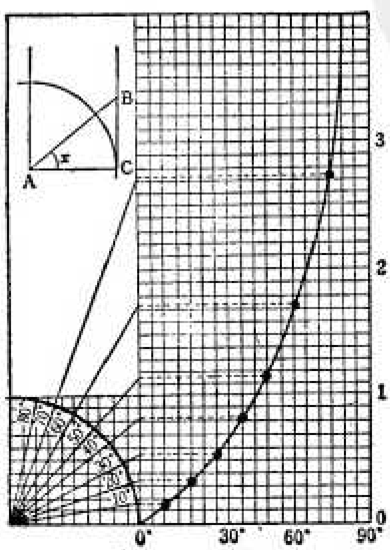
$$\cos x=\frac{AC}{AB}=\frac{AC}{1}=AC.$$

当角 x 是 0° 时，AB 和 AC 重合，$BC=0$，$AC=1$，因此规定 $\sin 0^\circ=0$，$\cos 0^\circ=1$。（在这种情况下，不能作出直角三角形，就是这样规定的。）

随着 x 逐渐增大，BC 的长度也逐渐增大，而 AC 的长度逐渐减小。最后，当 $x=90^\circ$ 时，AB 和 AE 重合，$BC=AE=1$，$AC=0$，因此规定 $\sin 90^\circ=1$，$\cos 90^\circ=0$。当 x 从 0° 变化到 90° 时，若将正弦和余弦的值随之变化的情况描成图象，就得到前面两图。正弦的值随着角的增大而增大，相反地，余弦的值随着角的增大而减小。但是第一个图象虽然经过原点，却不是一条直线而是一条曲线，第二个图象是一条与纵轴和横轴都相接的连续曲线，因此它们都不和角的大小成正比例或反比例。例如 $\sin 20^\circ=0.342$，$\sin 60^\circ=0.866$，这里角扩大了 3 倍，但正弦的值却没有扩大 3 倍。

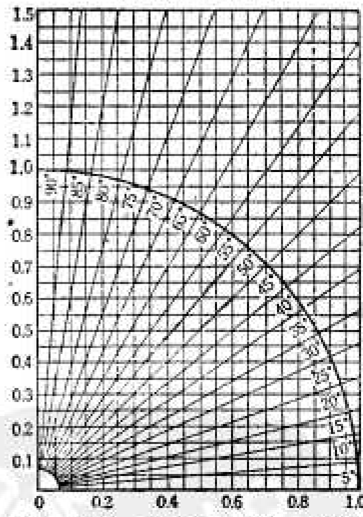
因为正弦和余弦都是用直角三角形中最长的斜边做分母，所以它们的值一般小于 1。

（正切的变化）



正切的图象也还是通过作半径是 1 的圆来求得的，如上图所示。这里 $\operatorname{tg} x=\frac{BC}{AC}=\frac{BC}{1}=BC$。当 $x=0^\circ$ 时，AB 和 AC 重合，$BC=0$，因此规定 $\operatorname{tg} 0^\circ=0$。随着 x 逐渐增大，BC 的长度也逐渐增大。当 x 接近 90° 时，BC 的长度变成无穷大，但不成正比例。

（三角比的图示）



137． 若角 α 和 β 互为余角，证明下列各式。

(1) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cos\alpha\cos\beta=1$;

(2) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2=1-2\cos\alpha\cos\beta$.

解　(1) 因为 $\alpha+\beta=90^\circ$，所以

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{ctg}\alpha,\ \cos\beta=\sin\alpha.$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \text{左边}&=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\cos\alpha\sin\alpha\\&=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\ \text{左边}&=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\\&=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\\&=1-2\sin\alpha\cos\alpha,\end{aligned}$$

$$\text{右边}=1-2\cos\alpha\sin\alpha.$$

$$\therefore\ \text{左边}=\text{右边}.$$

138． 若 $\alpha+\beta=90^\circ$，证明下列两式。

(1) $\cos^3\alpha+\cos^3\beta$
$=(\sin\alpha+\sin\beta)(1-\sin\alpha\sin\beta)$;

(2) $\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha+\sin^2\beta\operatorname{tg}\beta$
$=\dfrac{1-2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$.

解　因为 $\alpha+\beta=90°$，所以

$$\cos\beta=\sin\alpha,\ \sin\beta=\cos\alpha.$$

(1) 利用公式

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2+B^2-AB),$$

得

$$\begin{aligned}左边&=\cos^3\alpha+\sin^3\alpha\\&=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)\\&=(\sin\alpha+\sin\beta)(1-\sin\alpha\sin\beta).\end{aligned}$$

$\therefore$ 左边＝右边.

(2)

$$\begin{aligned}左边&=\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\beta}{\cos\beta}\\&=\frac{\sin^3\alpha\cos\beta+\sin^3\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}\\&=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}\\&=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}\\&=\frac{1-2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=右边.\end{aligned}$$

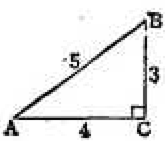
3．已知某角的一个三角函数的值，求它的其他三角函数的值

139． 有一个正弦是 $\frac{3}{5}$ 的角，求它的其他三角函数的值.

解　$\cos A=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$，$\operatorname{tg}A=\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$.

$$\therefore\ \csc A=\frac{5}{3},\ \sec A=\frac{5}{4},\ \operatorname{ctg}A=\frac{4}{3}.$$

别解　因为 $\sin A=\frac{BC}{AB}$，若 $AB=5$，$BC=3$，则 $AC=4$.



$$\therefore\ \cos A=\frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg}A=\frac{3}{4},\ \operatorname{ctg}A=\frac{4}{3},$$

$$\sec A=\frac{5}{4},\ \csc A=\frac{5}{3}.$$

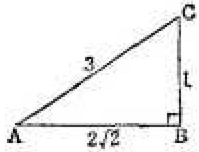
140． 已知 $\sin A=\frac{1}{3}$，求 $\operatorname{tg}A$ 及 $\sec A$.

解　$\operatorname{tg}A=\dfrac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

$$\sec A=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

别解　设 $AC=3$，$BC=1$，则

$$AB=\sqrt{3^2-1}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$



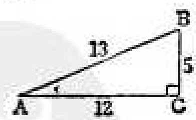
$$\therefore\ \operatorname{tg}A=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\sec A=\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

141． 已知 $\cos A=\frac{12}{13}$，由图解求其他的三角函数的值.

解　作 $\angle C$ 为直角的三角形 ABC，使斜边 AB 是 13，AC 是 12，则 $BC=\sqrt{13^2-12^2}=5$．因此

$$\sin A=\frac{5}{13},$$



$$\operatorname{tg}A=\frac{5}{12},$$

$$\operatorname{ctg}A=\frac{12}{5},$$

$$\sec A=\frac{13}{12},$$

$$\csc A=\frac{13}{5}.$$

142． 用 $\cos A$ 表示 A 所有的其他三角函数.

解　$\sin^2A+\cos^2A=1$.

因此

$$\sin^2A=1-\cos^2A,$$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}.$$

又

$$\operatorname{tg}A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{1-\cos^2A}}{\cos A}.$$

从而

$$\csc A=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2A}},$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A},\ \operatorname{ctg}A=\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2A}}.$$

别解　设 $AB=1$，$AC=\cos A$，则因为 $BC=\sqrt{1-\cos^2A}$，所以

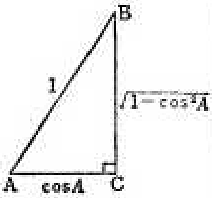
$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A},$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A},$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}},$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A},$$

$$\csc A=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}}.$$



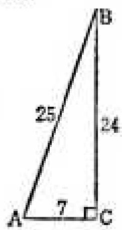
143. 如果 $\cos A=\frac{7}{25}$，那么 $\sin A$ 等于多少?

解 $\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2}=\frac{24}{25}$.

别解 设 $AB=25$，$AC=7$，则

$$BC=24.$$

$$\therefore \sin A=\frac{24}{25}.$$



144. 若 $\cos\theta=\frac{1}{a}$，求 $\sin\theta$ 及 $\operatorname{tg}\theta$.

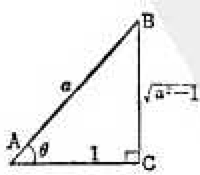
解 $\sin\theta=\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$.

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}}{\frac{1}{a}}=\sqrt{a^2-1}.$$

别解 设 $AB=a$，$AC=1$，则因为 $BC=\sqrt{a^2-1}$，所以

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\sqrt{a^2-1}.$$



145. 若 $\cos A=\frac{5}{13}$，求 A 的其他各三角函数的值.

解

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}.$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=\frac{12}{5}.$$

$$\csc A=\frac{1}{\sin A}=\frac{13}{12}.$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{13}{5}.$$

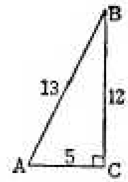
$$\operatorname{ctg} A=\frac{1}{\operatorname{tg} A}=\frac{5}{12}.$$

别解 设 $AB=13$，$AC=5$，则 $BC=12$.

$$\therefore \sin A=\frac{12}{13},$$

$\operatorname{tg} A=\frac{12}{5}$，$\operatorname{ctg} A=\frac{5}{12}$，

$\sec A=\frac{13}{5}$，$\csc A=\frac{13}{12}$.



146. 如果 $\operatorname{tg} B=\sqrt{3}$，那么 $\sin B$ 和 $\cos B$ 各等于多少?

解 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos B=\frac{1}{\sqrt{1+3}}=\frac{1}{2}.$$

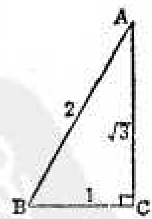
别解 设 $BC=1$，$AC=\sqrt{3}$，那么

因为 $AB=2$，

所以

$$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos B=\frac{1}{2}.$$



147. 若 $\operatorname{tg} A=\frac{m}{n}$，求 $\sin A$ 及 $\cos A$ 的值.

解 $\sin A=\frac{\frac{m}{n}}{\sqrt{1+\frac{m^2}{n^2}}}=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

$$\cos A=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{m^2}{n^2}}}=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

别解 因为 $\operatorname{tg} A=\frac{BC}{AC}$，

所以设

$AC=n$，$BC=m$.

于是 $AB=\sqrt{m^2+n^2}$.

$$\therefore \sin A=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

$$\cos A=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

148. 用 $\sin A$ 表示 A 所有的其他三角函数。

解 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$。

因此

$$\cos^2 A=1-\sin^2 A,\ \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}.$$

又 $\operatorname{tg} A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$.

于是再根据余割、正割、余切分别是正弦、余弦、正切的倒数，求得

$$\csc A=\frac{1}{\sin A},\quad \sec A=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}},$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}.$$

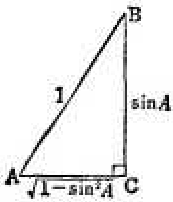
别解 因为 $\sin A=\dfrac{BC}{AB}$，所以设

$AB=1$, $BC=\sin A$。

于是

$$AC=\sqrt{1-\sin^2 A}.$$

$$\therefore\ \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A},$$



$$\operatorname{tg} A=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}},\ \operatorname{ctg} A=\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A},$$

$$\sec A=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}},\ \csc A=\frac{1}{\sin A}.$$

149. 若 $\operatorname{tg} A=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$，求 $\cos A$ 及 $\csc A$。

解

$$\cos A=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(m^2-n^2)^2}{(m^2-n^2)^2+4m^2n^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(m^2-n^2)^2}{m^4+2m^2n^2+n^4}}$$

$$=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}.$$

$$\csc A=\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\cos A\operatorname{tg} A}$$

$$=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\cdot\frac{m^2-n^2}{2mn}=\frac{m^2+n^2}{2mn}.$$

别解 设 $AC=m^2-n^2$, $BC=2mn$，则

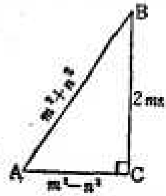
$$AB=\sqrt{(m^2-n^2)^2+(2mn)^2}$$

$$=\sqrt{(m^2+n^2)^2}$$

$$=m^2+n^2.$$

$$\therefore\ \cos A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2},$$

$$\csc A=\frac{m^2+n^2}{2mn}.$$



150. 若 $\cos\alpha=0.7$，计算 $\operatorname{tg}\alpha$，精确到小数第二位。

解

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{1-0.7^2}}{0.7}=\frac{\sqrt{0.51}}{0.7}=\frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$=\frac{7.141\cdots}{7}\approx 1.02.$$

151. 当 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2x(x+1)}{2x+1}$ 时，$\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值是多少？

解 在 $\sin\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ 和

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

中，将 $\operatorname{tg}\alpha$ 用所给的值代入，得

$$\sin\alpha=\frac{2x(x+1)}{2x^2+2x+1},$$

$$\cos\alpha=\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}.$$

别解 设 $AC=2x+1$, $BC=2x(x+1)$，则

$$AB^2=(2x+1)^2+[2x(x+1)]^2$$

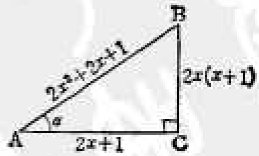
$$=4x^4+8x^3+8x^2+4x+1$$

$$=(2x^2+2x+1)^2,$$

$$\therefore\ AB=2x^2+2x+1.$$

$$\therefore\ \sin\alpha=\frac{2x(x+1)}{2x^2+2x+1},$$

$$\cos\alpha=\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}.$$



152. 若 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，求 $\cos\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$ 的值。

解 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$.

$$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}.$$

153. 若 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\sin\alpha$ 的值．又，α 的余角的正弦和余弦各是多少？

解　$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}.$

又，余角的正弦和余弦分别等于角 α 的余弦和正弦，所以它们的值分别是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$.

154. (1) 若 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$，求 $\cos^2\theta+\cos^4\theta$ 的值．

(2) 若 $1+\sin^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$，求 $\operatorname{tg}\theta$ 的值；

(3) 若 $\cos x=\operatorname{tg}x$，求 $\sin x$ 的值；

(4) 若 $\sin x+\cos x=a$，求 $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$ 的值．

解　(1) 因为 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$，

所以　$\sin\theta=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$.

$\therefore\ \cos^2\theta+\cos^4\theta=\sin\theta+\sin^2\theta=1.$

(2) 在原式的两边同除以 $\cos^2\theta$，得

$$\sec^2\theta+\operatorname{tg}^2\theta=3\operatorname{tg}\theta.$$

因为　$\sec^2\theta=\operatorname{tg}^2\theta+1$，

所以　$2\operatorname{tg}^2\theta-3\operatorname{tg}\theta+1=0$，

$$(2\operatorname{tg}\theta-1)(\operatorname{tg}\theta-1)=0.$$

$$\therefore\ \operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2}\quad\text{或}\quad\operatorname{tg}\theta=1.$$

(3) $\cos x=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$,

$$\therefore\ \cos^2x=\sin x,$$

$$1-\sin^2x=\sin x,\ \sin^2x+\sin x-1=0.$$

$$\therefore\ \sin x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

因为 $-1\leq\sin x\leq1$，所以 $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(4) $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$

$$=\frac{1}{\sin x\cos x}.$$

另一方面，若在 $\sin x+\cos x=a$ 的两边同时平方，则得

$$\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x=a^2,$$

$$1+2\sin x\cos x=a^2,$$

$$\sin x\cos x=\frac{a^2-1}{2}.$$

$$\therefore\ \operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{2}{a^2-1}.$$

（这里，设 $a\neq\pm1$）

155. 化简：

(1) $(\csc\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)\times(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta)$；

(2) $\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{ctg}\theta}+\dfrac{\operatorname{ctg}\theta}{1-\operatorname{tg}\theta}-\sec\theta\csc\theta$；

(3) $\operatorname{ctg}^2\theta\cdot\dfrac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}+\sec^2\theta\cdot\dfrac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}$.

解　(1) 原式

$$=\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\times\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)\times\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\times\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=1.$$

(2) 原式

$$=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}-\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}\cdot[\sin^3\theta-\cos^3\theta-(\sin\theta-\cos\theta)]$$

$$=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\times\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-1}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$=1.$$

(3) 原式

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\theta}\cdot\frac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}$$

$$=\frac{1}{\sec^2\theta-1}\cdot\frac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}$$
$$=\frac{1}{(1+\sec\theta)(1+\sin\theta)}-\frac{1}{(1+\sec\theta)(1+\sin\theta)}$$
$$=0.$$

156. 化简下列各式.

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$;

(2) $(1-\operatorname{tg}^4\theta)\cos^2\theta+\operatorname{tg}^2\theta$;

(3) $(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta)^2-(\operatorname{tg}\theta-\operatorname{ctg}\theta)^2$.

解 (1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$
$$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2.$$

(2) $(1-\operatorname{tg}^4\theta)\cos^2\theta+\operatorname{tg}^2\theta$
$$=(1+\operatorname{tg}^2\theta)(1-\operatorname{tg}^2\theta)\cos^2\theta+\operatorname{tg}^2\theta$$
$$=\sec^2\theta(1-\operatorname{tg}^2\theta)\cos^2\theta+\operatorname{tg}^2\theta$$
$$=1-\operatorname{tg}^2\theta+\operatorname{tg}^2\theta=1.$$

(3) $(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta)^2-(\operatorname{tg}\theta-\operatorname{ctg}\theta)^2$
$$=\operatorname{tg}^2\theta+2\operatorname{tg}\theta\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}^2\theta-(\operatorname{tg}^2\theta-2\operatorname{tg}\theta\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}^2\theta)$$
$$=4\operatorname{tg}\theta\operatorname{ctg}\theta=4.$$

157. 当 $\cos\alpha=\frac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}$ 时，$\operatorname{tg}\alpha$ 等于多少?

解 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$
$$=1-\frac{(m^2+2mn)^2}{(m^2+2mn+2n^2)^2}$$
$$=\frac{4(m+n)^2n^2}{(m^2+2mn+2n^2)^2}.$$

因此 $\sin\alpha=\frac{2(m+n)n}{m^2+2mn+2n^2}$.

于是 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
$$=\frac{2(m+n)n}{m^2+2mn+2n^2}\div\frac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}$$
$$=\frac{2(m+n)n}{m^2+2mn}.$$

158. 若 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，用 t 表示 $\cos x$、$\sin x$ 和 $\operatorname{tg}x$.

解 $\sec^2\frac{x}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1=t^2+1.$

$$\therefore\quad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+t^2}.$$

从而 $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2},$$
$$\operatorname{tg}x=\frac{2t}{1-t^2}.$$

159. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=1$，$\cos\alpha+\cos\beta=0$，求下列两式的值.

(1) $\cos2\alpha+\cos2\beta$;

(2) $\sin^4\alpha+\cos^4\beta$.

解 $\sin\beta=1-\sin\alpha$，$\cos\beta=-\cos\alpha$.

因此
$$1=\sin^2\beta+\cos^2\beta$$
$$=(1-\sin\alpha)^2+(-\cos\alpha)^2$$
$$=2-2\sin\alpha,$$
$$\sin\alpha=\frac{1}{2}.$$

从而 $\sin\beta=\frac{1}{2}$，$\cos^2\alpha=\cos^2\beta=\frac{3}{4}$.

(1) $\cos2\alpha+\cos2\beta$
$$=2\cos^2\alpha+2\cos^2\beta-2=1.$$

(2) $\sin^4\alpha+\cos^4\beta$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{5}{8}.$$

4. 恒等式的证明

160. 证明下列公式.

(1) $1+\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta$;

(2) $1+\operatorname{ctg}^2\theta=\csc^2\theta$.

解 (1) 因为 $\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$,

所以
$$1+\operatorname{tg}^2\theta=1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos^2\theta}.$$

但是 $\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$,

所以上式是 $1+\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta$.

(2) $1+\operatorname{ctg}^2\theta=1+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}=\csc^2\theta.$$

161. 证明下列等式.

(1) $\sin^2 A+\cos^2 A=1$;

(2) $\operatorname{tg} A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$;

(3) $\operatorname{ctg} A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$;

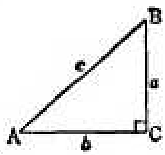
(4) $\operatorname{tg} A\operatorname{ctg} A=1$;

(5) $\sin A\csc A=1$;

(6) $\cos A\sec A=1$.

解 (1) 因为 $\sin A=\dfrac{a}{c}$,

所以 $(\sin A)^2=\dfrac{a^2}{c^2}$,



即 $\sin^2 A=\dfrac{a^2}{c^2}$.

(不能把 $(\sin A)^2$ 写成 $\sin A^2$)

同样 $\cos^2 A=\dfrac{b^2}{c^2}$,

所以

$$\sin^2 A+\cos^2 A=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}. \quad ①$$

又因为 $\angle C=90°$, $a^2+b^2=c^2$, 所以从 ① 得

$$\sin^2 A+\cos^2 A=\frac{c^2}{c^2}=1.$$

(2) $\operatorname{tg} A=\dfrac{a}{b}$. 因 $\sin A=\dfrac{a}{c}$, $\cos A=\dfrac{b}{c}$,

$$\therefore \frac{\sin A}{\cos A}=\frac{a}{c}\div\frac{b}{c}=\frac{a}{b}.$$

因此 $\operatorname{tg} A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$.

(3) $\cos A=\dfrac{b}{c}$, $\sin A=\dfrac{a}{c}$.

$$\therefore \frac{\cos A}{\sin A}=\frac{b}{c}\div\frac{a}{c}=\frac{b}{a}=\operatorname{ctg} A.$$

(4) $\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{ctg} A=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}=1$.

(5) $\sin A\cdot\csc A=\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{c}{a}=1$.

(6) $\cos A\cdot\sec A=\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{b}=1$.

162. 证明 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sec\alpha+\csc\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$.

解 原式的左边 $=(\sin\alpha+\cos\alpha)\div\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\div\left(\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)$$

$$=\sin\alpha\cos\alpha.$$

163. 证明 $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

解 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

因此

原式的左边 $=(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$

$$=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

164. 证明 $\dfrac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B}=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B$.

解 $\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B=\dfrac{1}{\operatorname{tg} A}+\dfrac{1}{\operatorname{tg} B}$

$$=\frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B}.$$

原式的左边 $=(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B)\dfrac{\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}$

$$=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B.$$

165. 证明

$$\frac{(\sec A+\csc A)^2}{\sec^2 A+\csc^2 A}=1+2\sin A\cos A.$$

解 $\sec^2 A+\csc^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 A}$

$$=\frac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}$$

$$=\sec^2 A\csc^2 A.$$

原式的左边 $=\left(\dfrac{\sec A+\csc A}{\sec A\csc A}\right)^2$

$$=\left(\frac{1}{\csc A}+\frac{1}{\sec A}\right)^2$$

$$=(\sin A+\cos A)^2$$

$$=\sin^2 A+2\sin A\cos A+\cos^2 A$$

$$=1+2\sin A\cos A.$$

166. 证明 $(1-\operatorname{tg}^4 A)\cos^2 A+\operatorname{tg}^2 A=1$.

解 原式的左边

$=(1-\operatorname{tg}^2 A)(1+\operatorname{tg}^2 A)\cos^2 A+\operatorname{tg}^2 A.$

而 $(1+\operatorname{tg}^2 A)\cos^2 A=\sec^2 A\cos^2 A=1,$

$\therefore$ 原式的左边$=1-\operatorname{tg}^2 A+\operatorname{tg}^2 A=1.$

167. 证明 $(\cos A-\cos^3 A)^2+(\sin A-\sin^3 A)^2=\sin^2 A\cos^2 A.$

解 原式的左边

$$=\cos^2 A(1-\cos^2 A)^2+\sin^2 A(1-\sin^2 A)^2$$
$$=\cos^2 A\sin^4 A+\sin^2 A\cos^4 A$$
$$=\cos^2 A\sin^2 A(\sin^2 A+\cos^2 A)$$
$$=\cos^2 A\sin^2 A.$$

168. 证明 $(\cos^2 A+\operatorname{ctg}^2 A)\operatorname{tg}^2 A=\sec^2 A+(\cos^2 A-1)\operatorname{tg}^2 A.$

解 左边$=\left(\cos^2 A+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right)\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$=\sin^2 A+1.$

右边$=\dfrac{1}{\cos^2 A}+(\cos^2 A-1)\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$=\dfrac{1}{\cos^2 A}+\sin^2 A-\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$=\dfrac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}+\sin^2 A$

$=1+\sin^2 A.$

因此 左边=右边.

169. 证明 $\sin A(1+\operatorname{tg} A)+\cos A(1+\operatorname{ctg} A)=\csc A+\sec A.$

解 原式的左边

$$=\sin A\,\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}+\cos A\,\frac{\sin A+\cos A}{\sin A}$$
$$=(\sin A+\cos A)\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)$$
$$=(\sin A+\cos A)\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}$$
$$=\frac{\sin A+\cos A}{\cos A\sin A}=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\sin A}$$
$$=\sec A+\csc A.$$

170. 证明 $(\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha)^2+(1-\cos\alpha)^2=(\sec\alpha-1)^2.$

解 $\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha.$

因此

原式的左边

$$=\operatorname{tg}^2\alpha(1-\cos\alpha)^2+(1-\cos\alpha)^2$$
$$=(\operatorname{tg}^2\alpha+1)(1-\cos\alpha)^2$$
$$=\sec^2\alpha(1-\cos\alpha)^2$$
$$=(\sec\alpha-\sec\alpha\cos\alpha)^2$$
$$=(\sec\alpha-1)^2.$$

171. 证明 $(\operatorname{tg}\alpha-1)^2+(1-\operatorname{ctg}\alpha)^2=(\sec\alpha-\csc\alpha)^2.$

解 $(\operatorname{tg}\alpha-1)^2=\operatorname{tg}^2\alpha+1-2\operatorname{tg}\alpha$

$=\sec^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha,$

同样 $(1-\operatorname{ctg}\alpha)^2=\csc^2\alpha-2\operatorname{ctg}\alpha.$

因此

原式的左边

$$=\sec^2\alpha-2(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)+\csc^2\alpha$$
$$=\sec^2\alpha-2\sec\alpha\csc\alpha+\csc^2\alpha$$
$$=(\sec\alpha-\csc\alpha)^2.$$

172. 证明 $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$

解 在原式的左边，用 $1-\sin^2\beta$、$1-\sin^2\alpha$ 分别代换 $\cos^2\beta$、$\cos^2\alpha$，则

原式的左边

$$=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta$$
$$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$$

173. 证明 $\sec^2\alpha+\csc^2\alpha=\sec^2\alpha\cdot\csc^2\alpha.$

解 左边$=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$

$=\sec^2\alpha\cdot\csc^2\alpha.$

174. 证明 $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2=\sec^2\alpha\csc^2\alpha.$

解 原式的左边$=(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+(1+\operatorname{ctg}^2\alpha).$

由于 $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha,$

$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha,$

所以左边是 $\sec^2\alpha+\csc^2\alpha.$

根据上题，这个式子等于 $\sec^2\alpha\csc^2\alpha.$

175. 当 $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，$\cos\beta=\dfrac{3}{5}$ 时，$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ 的值是多少？这里 α、β 都是小于 $90°$ 的正角。

解 由 $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$ 得 $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，因此

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}$.

又由 $\cos\beta=\frac{3}{5}$ 得 $\sin\beta=\frac{4}{5}$，因此 $\operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}$.

$$\therefore\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{36+20}{15-48}=-\frac{56}{33}.$$

176. 证明

$$\frac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\operatorname{ctg}\theta.$$

解　原式左边的分子 $=\cos\theta(2\sin\theta-1)$，左边的分母

$$\begin{aligned}&=(1-\cos^2\theta)-\sin\theta+\sin^2\theta\\&=\sin^2\theta-\sin\theta+\sin^2\theta\\&=2\sin^2\theta-\sin\theta\\&=\sin\theta(2\sin\theta-1).\end{aligned}$$

因此

$$\text{原式的左边}=\frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{\sin\theta(2\sin\theta-1)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\operatorname{ctg}\theta.$$

177. 证明

$$\frac{\operatorname{tg}^3 A}{1+\operatorname{tg}^2 A}+\frac{\operatorname{ctg}^3 A}{1+\operatorname{ctg}^2 A}=\frac{1-2\sin^2 A\cos^2 A}{\sin A\cos A}.$$

解　原式的左边

$$\begin{aligned}&=\frac{\sin^3 A}{\cos^3 A\sec^2 A}+\frac{\cos^3 A}{\sin^3 A\csc^2 A}\\&=\frac{\sin^3 A}{\cos A}+\frac{\cos^3 A}{\sin A}=\frac{\sin^4 A+\cos^4 A}{\cos A\sin A}\\&=\frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-2\sin^2 A\cos^2 A}{\cos A\sin A}\\&=\frac{1-2\sin^2 A\cos^2 A}{\cos A\sin A}.\end{aligned}$$

178. 证明

$$\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{tg}^2\theta\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta+\operatorname{ctg}^2\theta\cos\theta}=\frac{\csc\theta-\sec\theta}{\sec\theta\csc\theta-1}.$$

解　原式左边第一项的分子和分母同乘以 $\cos^2\theta$，则化成 $\frac{\cos^2\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$. 同样，左边的第二项可化成 $\frac{\sin^2\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$. 因此

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\\&=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}\\&=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta\sin\theta}.\end{aligned}$$

分子、分母同除以 $\sin\theta\cos\theta$，则得

$$\frac{\csc\theta-\sec\theta}{\sec\theta\csc\theta-1}.$$

它和原式的右边相等.

179. 证明

$$\sec^6 A=1+\operatorname{tg}^6 A+3\operatorname{tg}^2 A\sec^2 A.$$

解　
$$\begin{aligned}\text{右边}&=1+\operatorname{tg}^6 A+3\operatorname{tg}^2 A(1+\operatorname{tg}^2 A)\\&=1+\operatorname{tg}^6 A+3\operatorname{tg}^2 A+3\operatorname{tg}^4 A\\&=1+3\operatorname{tg}^2 A+3\operatorname{tg}^4 A+\operatorname{tg}^6 A\\&=(1+\operatorname{tg}^2 A)^3=\sec^6 A.\end{aligned}$$

180. 证明

$$\sin\alpha\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha-\sin^3\alpha)^2+(\cos\alpha-\cos^3\alpha)^2}.$$

解　右边根号内的式子

$$\begin{aligned}&=\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)^2+\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)^2\\&=\sin^2\alpha\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^4\alpha\\&=\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\\&=\sin^2\alpha\cos^2\alpha.\end{aligned}$$

因此原式成立.

181. 证明

$$\operatorname{tg}^4 A=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A-\sec^2 A}{\sin^2 A+\cos^2 A-\csc^2 A}.$$

解　
$$\begin{aligned}\text{原式的右边}&=\frac{1-\sec^2 A}{1-\csc^2 A}\\&=\frac{1-(1+\operatorname{tg}^2 A)}{1-(1+\operatorname{ctg}^2 A)}\\&=\frac{-\operatorname{tg}^2 A}{-\operatorname{ctg}^2 A}\\&=\operatorname{tg}^2 A\operatorname{tg}^2 A=\operatorname{tg}^4 A.\end{aligned}$$

182. 证明 $\cos\theta(\operatorname{tg}\theta+2)(2\operatorname{tg}\theta+1)=2\sec\theta+5\sin\theta$.

解　原式的左边

$$\begin{aligned}&=\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+2\right)\left(2\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1\right)\\&=\frac{1}{\cos\theta}(\sin\theta+2\cos\theta)(2\sin\theta+\cos\theta)\end{aligned}$$

$=\frac{1}{\cos\theta}(2\sin^2\theta+5\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta)$

$=\frac{2}{\cos\theta}+5\sin\theta=2\sec\theta+5\sin\theta$。

183. 证明 $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$。

解 这个恒等式也就是

$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)=\operatorname{ctg}\beta(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)$,

即

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\beta.$$

这就是说，只要 $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1=\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\alpha-1$ 成立，那么原式就成立。事实上，最后一个式子总是成立的，所以原式也成立。

184. 证明

$\frac{\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{ctg}A}+\frac{\operatorname{ctg}A}{1-\operatorname{tg}A}=\sec A\csc A+1$.

解 $\frac{\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{ctg}A}=\frac{\operatorname{tg}^2A}{(1-\operatorname{ctg}A)\operatorname{tg}A}=\frac{\operatorname{tg}^2A}{\operatorname{tg}A-1}$,

$\frac{\operatorname{ctg}A}{1-\operatorname{tg}A}=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{tg}A}{(1-\operatorname{tg}A)\operatorname{tg}A}=\frac{1}{(1-\operatorname{tg}A)\operatorname{tg}A}$.

因此

原式的左边

$=\frac{\operatorname{tg}^2A}{\operatorname{tg}A-1}+\frac{1}{(1-\operatorname{tg}A)\operatorname{tg}A}$

$=\frac{-\operatorname{tg}^3A+1}{(1-\operatorname{tg}A)\operatorname{tg}A}$

$=\frac{1+\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}^2A}{\operatorname{tg}A}=\frac{\sec^2A+\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}A}$

$=\sec^2A\operatorname{ctg}A+1$

$=\sec A\csc A+1$.

185. 求 $(1+\operatorname{ctg}A-\csc A)\times(1+\operatorname{tg}A+\sec A)$ 的值。

解 原式

$=\frac{\sin A+\cos A-1}{\sin A}\times\frac{\cos A+\sin A+1}{\cos A}$

$=\frac{1}{\sin A\cos A}(\sin^2A+2\sin A\cos A+\cos^2A-1)$

$=\frac{1}{\sin A\cos A}(2\sin A\cos A)=2$.

186. 证明 $1-\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^4A=\cos^2A(1+\operatorname{tg}^6A)$。

解 原式的右边

$=\cos^2A(1+\operatorname{tg}^2A)(1-\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^4A)$

$=\cos^2A\sec^2A(1-\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^4A)$

$=1-\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^4A$.

187. 证明 $(\operatorname{tg}A-\sin A)^2+(1-\cos A)^2=(\sec A-1)^2$。

解 原式的左边

$=\left(\frac{\sin A}{\cos A}-\sin A\right)^2+[\cos A(\sec A-1)]^2$

$=\sin^2A(\sec A-1)^2+\cos^2A(\sec A-1)^2$

$=(\sin^2A+\cos^2A)(\sec A-1)^2$

$=(\sec A-1)^2$.

188. 证明

$$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta=2\sin\theta\cos\theta+\sin^3\theta\sec\theta+\cos^3\theta\csc\theta.$$

解 原式的右边

$=2\sin\theta\cos\theta+\sin^3\theta\times\frac{1}{\cos\theta}+\cos^3\theta\times\frac{1}{\sin\theta}$

$=2\sin\theta\cos\theta+\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}(2\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta+\cos^4\theta)$

$=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta$.

189. 证明 $\cos A\operatorname{ctg}^2A+\sec A\csc^2A-2\operatorname{ctg}A\csc A=\sec A-\cos A$。

解 原式的左边

$=\frac{\cos^3A}{\sin^2A}+\frac{1}{\cos A\sin^2A}-\frac{2\cos A}{\sin^2A}$

$=\frac{1}{\sin^2A}\left(\cos^3A+\frac{1}{\cos A}-2\cos A\right)$

$$=\frac{1}{\sin^2 A\cos A}(\cos^4 A+1-2\cos^2 A)$$

$$=\frac{1}{\sin^2 A\cos A}(1-\cos^2 A)^2$$

$$=\frac{\sin^4 A}{\sin^2 A\cos A}=\frac{\sin^2 A}{\cos A}=\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}$$

$$=\sec A-\cos A.$$

190. 证明 $\sec^2 A\csc^2 A-\sec^2 A-2\cos^2 A=(\sin^4 A+\cos^4 A)\csc^2 A$.

解　原式的左边

$$=\frac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}-\frac{1}{\cos^2 A}-2\cos^2 A$$

$$=\frac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}(1-\sin^2 A-2\cos^4 A\sin^2 A)$$

$$=\frac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}(\cos^2 A-2\cos^4 A\sin^2 A)$$

$$=\frac{1}{\sin^2 A}(1-2\cos^2 A\sin^2 A)$$

$$=\csc^2 A[(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-2\cos^2 A\sin^2 A]$$

$$=\csc^2 A(\sin^4 A+\cos^4 A).$$

191. 证明 $(\csc^2 A-1)[2(1-\cos A)-(1-\cos A)^2]=\cos^2 A$.

解　原式的左边

$$=\left(\frac{1}{\sin^2 A}-1\right)(1-\cos A)\times[2-(1-\cos A)]$$

$$=\frac{1}{\sin^2 A}(1-\sin^2 A)\times(1-\cos A)(1+\cos A)$$

$$=\frac{1}{\sin^2 A}\cos^2 A(1-\cos^2 A)=\cos^2 A.$$

192. 用含有 $\sec A$ 的式子表示 $(\csc A-\operatorname{ctg} A)^2$.

解

$$(\csc A-\operatorname{ctg} A)^2=\left(\frac{1}{\sin A}-\frac{\cos A}{\sin A}\right)^2$$

$$=\frac{(1-\cos A)^2}{\sin^2 A}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}$$

$$=\frac{\frac{1-\cos A}{\cos A}}{\frac{1+\cos A}{\cos A}}=\frac{\sec A-1}{\sec A+1}.$$

193. 若 $\sin x+\sin^2 x=1$, 求 $\sin x$, 并证明这时 $\cos^2 x+\cos^4 x=1$.

解　从二次方程 $\sin x+\sin^2 x=1$, 得 $\sin x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. 因为取负号时 $\sin x$ 的绝对值变成大于1, 所以只能取正号. 因此

$$\sin^2 x=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}.$$

于是　$$\cos^2 x=1-\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{-2+2\sqrt{5}}{4}$$

$$=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\cos^4 x=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$\cos^2 x+\cos^4 x=1.$$

194. 若 $\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha=m$, $\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha=n$, 证明

$$\cos\alpha=\frac{m-n}{m+n}.$$

解　$\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$, 因此从所给的式子得

$$\cos\alpha=\frac{m-n}{m+n}.$$

195. 若 $m\sin\alpha=n\cos\alpha$, 证明

$$\sin\alpha=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

解　从 $m\sin\alpha=n\cos\alpha$ 得 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{n}{m}$, 因此

$$\sin\alpha=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

196. 若 $\cos\theta=\frac{5}{13}$, 计算下式的值.

$$\frac{2\sin\theta-3\cos\theta}{4\sin\theta-9\cos\theta}.$$

解　因为 $\cos\theta>0$, 所以 θ 是第一或第四象限的角.

(i) 在 θ 是第一象限角的情况下, 因为 $\sin\theta>0$, 所以

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}$$

$$=\frac{12}{13}.$$

$\therefore$　原式$=3$.

(ii) 在 θ 是第四象限角的情况下, 因为 $\sin\theta<0$, 所以

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\frac{12}{13}.$$

$$\therefore\ 原式=\frac{13}{31}.$$

197. 已知 $\sin A=\frac{12}{13}$，$\cos B=\frac{4}{5}$，求 $\sin(A-B)$。

解 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}$

$$=\sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13},$$

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}$$

$$=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}.$$

因此

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}$$

$$=\frac{33}{65}.$$

198. 证明 $\mathrm{tg}\,9°=\sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$。

解 $\mathrm{tg}\,9°=\frac{\sin 9°}{\cos 9°}$

$$=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{4-\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{\sqrt{5}-1}$$

$$=\sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

199. 化简 $\sin(180°+x)\sin(90°+y)-\sin(90°-x)\sin(180°-y)$。

解 原式 $=-\sin x\cos y-\cos x\sin y$

$$=-(\sin x\cos y+\cos x\sin y)$$

$$=-\sin(x+y).$$

200. 证明 $\cos 0°\,\mathrm{ctg}\,30°\csc 45°+\sin 45°\times\mathrm{tg}\,60°\sec 90°=\infty$。

解 原式

$$=1\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}\times\infty$$

$$=\infty.$$

201. 证明下列各式.

(1) $\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 A}\sqrt{\sec^2 A-1}\sqrt{1-\sin^2 A}=1$；

(2) $\mathrm{tg}^2\alpha+\sec^2\beta=\sec^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta$；

(3) $(1+\sin A+\cos A)^2(1-\sin A-\cos A)^2=4\sin^2 A\cos^2 A$。

解 (1) 原式的左边

$$=\csc A\,\mathrm{tg}\,A\cos A$$

$$=\frac{1}{\sin A}\cdot\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\cos A=1.$$

(2) 原式的左边 $=\sec^2\alpha-1+1+\mathrm{tg}^2\beta$

$$=\sec^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta.$$

(3) 原式的左边 $=[1-(\sin A+\cos A)^2]^2$

$$=(1-1-2\sin A\cos A)^2$$

$$=4\sin^2 A\cos^2 A.$$

202. 证明下列各式.

(1) $\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$；

(2) $\frac{\csc A}{\csc A-1}+\frac{\csc A}{\csc A+1}=2\sec^2 A$；

(3) $\frac{1-\mathrm{tg}\,A}{1+\mathrm{tg}\,A}=\frac{\mathrm{ctg}\,A-1}{\mathrm{ctg}\,A+1}$；

(4) $\frac{1}{\sec A-\mathrm{tg}\,A}=\sec A+\mathrm{tg}\,A$；

(5) $\frac{\cos A}{\sec A}+\frac{\sin A}{\csc A}=1$。

解 (1) 原式的左边

$$=\frac{\sin A(1-\cos A)}{1-\cos^2 A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}$$

$$=\frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}$$

$$=\frac{2}{\sin A}=2\csc A.$$

(2) 原式左边的分子、分母同乘以 $\sin A$，则

$$左边=\frac{1}{1-\sin A}+\frac{1}{1+\sin A}=\frac{2}{1-\sin^2 A}$$

$$=\frac{2}{\cos^2 A}=2\sec^2 A.$$

(3) 原式的左边 $=\frac{\mathrm{ctg}\,A-\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{ctg}\,A}{\mathrm{ctg}\,A+\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{ctg}\,A}$

$$=\frac{\mathrm{ctg}\,A-1}{\mathrm{ctg}\,A+1}.$$

(4) 原式的左边 $=\frac{\sec A+\mathrm{tg}\,A}{\sec^2 A-\mathrm{tg}^2 A}$

$$=\frac{\sec A+\mathrm{tg}\,A}{1}$$

$$=\sec A+\mathrm{tg}\,A.$$

(5) 原式的左边

$$=\frac{\cos^2 A}{\cos A\sec A}+\frac{\sin^2 A}{\sin A\csc A}$$

$$=\cos^2 A+\sin^2 A=1.$$

203. 证明 $(1+\operatorname{ctg} A+\operatorname{tg} A)(\sec A-\csc A)=\frac{\sec^2 A}{\csc A}-\frac{\csc^2 A}{\sec A}$.

解 $1+\operatorname{ctg} A+\operatorname{tg} A$

$$=\operatorname{tg} A\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} A+\operatorname{tg} A$$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$=\frac{\sin A\cos A+\cos^2 A+\sin^2 A}{\sin A\cos A}.$$

将这个式子的分子、分母同除以$\sin^2 A\cos^2 A$，则得

$$\frac{\sec^2 A+\sec A\csc A+\csc^2 A}{\csc A\sec A}.$$

因此

$$\text{原式的左边}=\frac{\sec^3 A-\csc^3 A}{\csc A\sec A}$$

$$=\frac{\sec^2 A}{\csc A}-\frac{\csc^2 A}{\sec A}.$$

204. 证明 $\frac{\operatorname{tg} A+\sec A-1}{\operatorname{tg} A-\sec A+1}=\frac{1+\sin A}{\cos A}$.

解 将原式左边的分子、分母同乘以$\cos A$，则

$$\text{左边}=\frac{\sin A+1-\cos A}{\sin A-1+\cos A}$$

$$=\frac{\cos A(1+\sin A)-\cos^2 A}{\cos A(\sin A+\cos A-1)}$$

$$=\frac{\cos A(1+\sin A)-(1-\sin^2 A)}{\cos A(\sin A+\cos A-1)}$$

$$=\frac{(1+\sin A)(\cos A+\sin A-1)}{\cos A(\sin A+\cos A-1)}$$

$$=\frac{1+\sin A}{\cos A}.$$

205. 证明 $(\csc A+\operatorname{ctg} A)(1-\sin A)-(\sec A+\operatorname{tg} A)\times(1-\cos A)=(\csc A-\sec A)\times[2-(1-\cos A)(1-\sin A)]$.

解 原式的左边

$$=\csc A-1+\operatorname{ctg} A-\cos A-\sec A$$
$$+1-\operatorname{tg} A+\sin A$$
$$=(\csc A-\sec A)$$
$$+(\operatorname{ctg} A-\operatorname{tg} A)-\cos A+\sin A$$
$$=(\csc A-\sec A)$$
$$+\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos A\sin A}-(\cos A-\sin A)$$
$$=(\csc A-\sec A)+\frac{\cos A-\sin A}{\cos A\sin A}$$
$$\times(\cos A+\sin A-\cos A\sin A)$$
$$=(\csc A-\sec A)+(\csc A-\sec A)$$
$$\times[1-(1-\cos A)(1-\sin A)]$$
$$=(\csc A-\sec A)$$
$$\times[2-(1-\cos A)(1-\sin A)].$$

206. 证明下式具有与x无关的定值。

$$\frac{\sin^8 x}{8}-\frac{\cos^8 x}{8}-\frac{\sin^6 x}{3}+\frac{\cos^6 x}{6}+\frac{\sin^4 x}{4}.$$

解 原式

$$=\frac{1}{8}(\sin^8 x-\cos^8 x)$$
$$+\frac{1}{6}(\cos^6 x-\sin^6 x)$$
$$-\frac{\sin^6 x}{6}+\frac{\sin^4 x}{4}.$$

将这个式子的第一项和第二项变形。

$$\sin^8 x-\cos^8 x$$
$$=(\sin^4 x+\cos^4 x)(\sin^4 x-\cos^4 x)$$
$$=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)$$
$$\times(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)$$
$$=[1-2\sin^2 x(1-\sin^2 x)]$$
$$\times[\sin^2 x-(1-\sin^2 x)]$$
$$=(2\sin^4 x-2\sin^2 x+1)$$
$$\times(2\sin^2 x-1).$$

$$\cos^6 x-\sin^6 x$$
$$=(\cos^2 x-\sin^2 x)$$
$$\times(\cos^4 x+\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x)$$
$$=(\cos^2 x-\sin^2 x)(1-\sin^2 x\cos^2 x)$$
$$=(1-2\sin^2 x)(1-\sin^2 x+\sin^4 x).$$

$$\therefore\quad\text{原式}=\frac{1}{24}[(2\sin^2 x-1)$$
$$\times(6\sin^4 x-6\sin^2 x+3-4$$
$$+4\sin^2 x-4\sin^4 x)$$
$$-4\sin^6 x+6\sin^4 x]$$
$$=\frac{1}{24}[(2\sin^2 x-1)$$
$$\times(2\sin^4 x-2\sin^2 x-1)$$
$$-4\sin^6 x+6\sin^4 x]=-\frac{1}{24}.$$

因此，原式的值与 x 无关。

207. 若 $\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$，证明 $\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1$。

解 将已知条件变形。

$$\cos^4\alpha\sin^2\beta+\sin^4\alpha\cos^2\beta=\sin^2\beta\cos^2\beta,$$

$$(1-\sin^2\alpha)^2\sin^2\beta+\sin^4\alpha(1-\sin^2\beta)-\sin^2\beta(1-\sin^2\beta)=0,$$

$$\sin^2\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^4\alpha\sin^2\beta+\sin^4\alpha-\sin^4\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^4\beta=0,$$

$$\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^4\beta=0,$$

$$(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)^2=0,$$

即 $$\sin^2\alpha=\sin^2\beta,$$

从而 $$\cos^2\alpha=\cos^2\beta.$$

$$\therefore\quad \frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

208. 若 $\sin^2A\csc^2B+\cos^2A\cos^2C=1$，证明 $\sin^2C=\operatorname{tg}^2A\operatorname{ctg}^2B$。

解 将所给的条件变形。

$$\sin^2A\csc^2B+\cos^2A\cos^2C-\sin^2A-\cos^2A=0,$$

$$\sin^2A(\csc^2B-1)+\cos^2A(\cos^2C-1)=0,$$

$$\sin^2A\operatorname{ctg}^2B-\cos^2A\sin^2C=0,$$

$$\therefore\quad \sin^2C=\operatorname{tg}^2A\operatorname{ctg}^2B.$$

209. 若 $\sin\theta+\cos\theta=p$，证明当 $x=\sin\theta$ 及 $x=\cos\theta$ 时，$y=2x^2-2px+p^2$ 的值等于 1。

解 当 $x=\sin\theta$ 时，

$$y=2x^2-2px+p^2=2\sin^2\theta-2(\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta+(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

当 $x=\cos\theta$ 时，

$$y=2x^2-2px+p^2=2\cos^2\theta-2(\sin\theta+\cos\theta)\cos\theta+(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

210. 若关于 x 的二次方程

$$x^2-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)x+1=0$$

的一个根是 $2+\sqrt{3}$，证明

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}.$$

解 $2+\sqrt{3}$ 是方程的一个根，将它代入方程，得

$$(2+\sqrt{3})^2-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(2+\sqrt{3})+1=0.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=4.$$

另一方面

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=4,$$

$$\therefore\quad \sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}.$$

211. 证明下列等式。

(1) $\frac{1+\cos\theta}{\sec\theta-\operatorname{tg}\theta}-\frac{1-\cos\theta}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}=2(1+\operatorname{tg}\theta)$；

(2) $\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}+\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=2\csc\theta$。

解 (1) 将左边通分，则

$$\text{左边}=\frac{1}{\sec^2\theta-\operatorname{tg}^2\theta}(\sec\theta+\cos\theta\sec\theta+\operatorname{tg}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\theta-\sec\theta+\operatorname{tg}\theta+\sec\theta\cos\theta-\operatorname{tg}\theta\cos\theta)$$
$$=2(\cos\theta\sec\theta+\operatorname{tg}\theta)=2(1+\operatorname{tg}\theta).$$

(2) 将左边通分，则

$$\text{左边}=\frac{1}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}[(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta+2\cos\theta(1+\sin\theta)+(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta-2\cos\theta(1+\sin\theta)]$$
$$=\frac{2(1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\frac{4(1+\sin\theta)}{2(\sin\theta+\sin^2\theta)}=\frac{2}{\sin\theta}=2\csc\theta.$$

212. 证明 $\csc^6A-\operatorname{ctg}^6A=1+3\csc^2A\times\operatorname{ctg}^2A$。

解 原式的左边

$$=(\csc^2A-\operatorname{ctg}^2A)(\csc^4A+\csc^2A\operatorname{ctg}^2A+\operatorname{ctg}^4A)$$
$$=\csc^4A+\csc^2A\operatorname{ctg}^2A+\operatorname{ctg}^4A$$
$$=(1+\operatorname{ctg}^2A)^2$$

$$+(1+\operatorname{ctg}^2 A)\operatorname{ctg}^2 A+\operatorname{ctg}^4 A$$
$$=1+2\operatorname{ctg}^2 A+\operatorname{ctg}^4 A+\operatorname{ctg}^2 A$$
$$+\operatorname{ctg}^4 A+\operatorname{ctg}^4 A$$
$$=1+3\operatorname{ctg}^2 A+3\operatorname{ctg}^4 A$$
$$=1+3\operatorname{ctg}^2 A(1+\operatorname{ctg}^2 A)$$
$$=1+3\operatorname{ctg}^2 A\csc^2 A.$$

213. 证明

$$(\sec A-\cos A)(1+\operatorname{ctg} A+\operatorname{tg} A)$$
$$=\frac{\sec^2 A}{\csc A}+\frac{\sec A}{\csc^2 A}.$$

解 原式的左边

$$=\operatorname{tg} A\sin A(1+\operatorname{ctg} A+\operatorname{tg} A)$$
$$=\operatorname{tg} A\sin A+\sin A+\operatorname{tg}^2 A\sin A$$
$$=\operatorname{tg} A\sin A+\sin A(1+\operatorname{tg}^2 A)$$
$$=\operatorname{tg} A\sin A+\sin A\sec^2 A$$
$$=\frac{\sin^2 A}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos^2 A}$$
$$=\frac{\sec A}{\csc^2 A}+\frac{\sec^2 A}{\csc A}.$$

214. 证明下列等式。

(1) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\cos^2 x-\sin^2 x$.

(2) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

(3) $2+\operatorname{ctg}^2 x$

$$=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x.$$

解 (1) 将左边的分子、分母同乘以$\cos^2 x$，则

$$\text{左边}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

(2) 将左边的分子、分母同乘以$1-\cos x$，则

$$\text{左边}=\frac{\sin x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}$$
$$=\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

(3) $\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$
$$-\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$$
$$=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$$
$$-\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$
$$=\frac{2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=2.$$

$$\therefore\quad 2+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x.$$

注 (3)也可以这样证明：

$2+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x$

$$=(1+\operatorname{ctg}^2 x)+(1+\operatorname{tg}^2 x)$$
$$=\csc^2 x+\sec^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\therefore\quad 2+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x.$$

215. 证明 $\sin^6 A+\sin^4 A\cos^2 A-\sin^2 A\times\cos^4 A-\cos^6 A=\sin^2 A-\cos^2 A$.

解 原式的左边

$$=(\sin^6 A+\sin^4 A\cos^2 A)$$
$$-(\sin^2 A\cos^4 A+\cos^6 A)$$
$$=\sin^4 A(\sin^2 A+\cos^2 A)$$
$$-\cos^4 A(\sin^2 A+\cos^2 A)$$
$$=\sin^4 A-\cos^4 A$$
$$=(\sin^2 A+\cos^2 A)(\sin^2 A-\cos^2 A)$$
$$=\sin^2 A-\cos^2 A.$$

216. 证明 $3(\sin A+\cos A)-2(\sin^3 A+\cos^3 A)=(\sin A+\cos A)^3$.

解 原式的左边

$$=(\sin A+\cos A)[3-2(\sin^2 A$$
$$-\sin A\cos A+\cos^2 A)]$$
$$=(\sin A+\cos A)$$
$$\times[3-2+2\sin A\cos A]$$
$$=(\sin A+\cos A)(1+2\sin A\cos A)$$
$$=(\sin A+\cos A)^3.$$

217. 化简下列各式。

(1) $\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{ctg}\theta}+\dfrac{\operatorname{ctg}\theta}{1-\operatorname{tg}\theta}-\sec\theta\csc\theta$;

(2) $\operatorname{ctg}^2\theta\cdot\dfrac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}+\sec^2\theta\cdot\dfrac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}$.

解 (1)

$$\text{原式}=\frac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$
$$-\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}\times[\sin^3\theta-\cos^3\theta-(\sin\theta-\cos\theta)]$$

$$=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\times\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-1}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$=1$.

(2) 原式$=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\theta}\cdot\frac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}$

$$=\frac{1}{\sec^2\theta-1}\cdot\frac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}$$

$$=\frac{1}{(1+\sec\theta)(1+\sin\theta)}-\frac{1}{(1+\sec\theta)(1+\sin\theta)}$$

$=0$.

218. 解下面关于 x、y 的方程组。

$$\begin{cases}x\cos\theta-y\sin\theta=u, & ①\\ x\sin\theta+y\cos\theta=v. & ②\end{cases}$$

解　①$\times\cos\theta+$②$\times\sin\theta$，得

$$x(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=u\cos\theta+v\sin\theta.$$

$\therefore\ x=u\cos\theta+v\sin\theta.$

①$\times\sin\theta-$②$\times\cos\theta$，得

$$-y(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=u\sin\theta-v\cos\theta.$$

$\therefore\ y=v\cos\theta-u\sin\theta.$

219. 若 $u_n=\cos^n\theta+\sin^n\theta$，求 $3u_4-2u_6$ 的值.

解　$3u_4-2u_6$

$=3(\cos^4\theta+\sin^4\theta)-2(\cos^6\theta+\sin^6\theta)$

$=3[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta]-2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\times(\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)$

$=3(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta)-2[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-3\sin^2\theta\cos^2\theta]$

$=3-6\sin^2\theta\cos^2\theta-2+6\sin^2\theta\cos^2\theta=1.$

5. 其他

220. 若 $\cos A=\cos x\sin C$，$\cos B=\sin x\sin C$，证明 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$.

解　$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$

$=1-\cos^2A+1-\cos^2B+\sin^2C$

$=1-\cos^2x\sin^2C+1-\sin^2x\sin^2C+\sin^2C$

$=2-\sin^2C(\sin^2x+\cos^2x-1)$

$=2.$

221. 从 $1+\sin^2\theta=3\cos\theta\sin\theta$ 求 $\operatorname{tg}\theta$的值.

解　$1+\sin^2\theta-3\sin\theta\cos\theta=0,$

$2\sin^2\theta+\cos^2\theta-3\sin\theta\cos\theta=0,$

$(2\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=0.$

$\therefore\ 2\sin\theta=\cos\theta$　或　$\sin\theta=\cos\theta.$

$\therefore\ \operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2}$　或　$\operatorname{tg}\theta=1.$

222. 若 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$，求 $\cos^2\theta+\cos^4\theta$ 的值.

解　$\cos^2\theta+\cos^4\theta=\cos^2\theta(1+\cos^2\theta)$

$=(1-\sin^2\theta)(2-\sin^2\theta)$

将式中的 $\sin^2\theta$ 用 $1-\sin\theta$ 代入，则

$\cos^2\theta+\cos^4\theta=\sin\theta(1+\sin\theta)$

$=\sin\theta+\sin^2\theta=1.$

223. 已知关于 x 的二次方程

$$3x^2-4x\sin\alpha+2(1-\cos\alpha)=0,$$

具有两个不相同的实根，求角 α 的范围。

解　设判别式为 D，则

$\frac{D}{4}=4\sin^2\alpha-6(1-\cos\alpha)$

$=4(1-\cos^2\alpha)-6(1-\cos\alpha)$

$=(1-\cos\alpha)(4\cos\alpha-2)$

$=-2(2\cos\alpha-1)(\cos\alpha-1)>0.$

$\therefore\ (2\cos\alpha-1)(\cos\alpha-1)<0,$

$$\frac{1}{2}<\cos\alpha<1,$$

$\therefore\ 0°<\alpha<60°.$

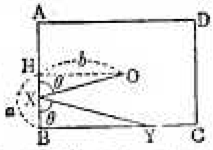
224. 有一个长方形的台球台 $ABCD$. 假设一个球从中心 O 打出后，经 AB 上的点 X

反弹到 BC 上的点 Y，再弹出，且 $AB=2a$，$BC=2b$，$\angle AXO=\angle BXY=\theta$。

(1) 用 a、b、θ 表示 BY 的长；

(2) 若 $a=\sqrt{3}b$，求使从 X 弹回的球恰巧进入 C 角的 θ 的值。

解 (1) 从球台的中心 O 向 AB 作垂线，设垂足是 H，则



$$BY=BX\,\mathrm{tg}\,\theta$$
$$=(BH-XH)\,\mathrm{tg}\,\theta$$
$$=(a-b\,\mathrm{ctg}\,\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta$$
$$=a\,\mathrm{tg}\,\theta-b.$$

(2) 若 $a=\sqrt{3}b$，且 $BY=2b$，那么从上式得

$$2b=\sqrt{3}b\,\mathrm{tg}\,\theta-b,$$

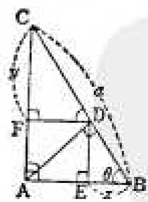
$$\therefore\quad \mathrm{tg}\,\theta=\sqrt{3}.\quad \therefore\quad \theta=60^\circ.$$

225. 从直角三角形的顶点 A 向斜边 BC 作垂线 AD，再从它的垂足 D 向 AB、AC 分别作垂线 DE、DF，设 $BC=a$，$BE=x$，$CF=y$，$\angle ABC=\theta$。

(1) 用 a 及 θ 的三角函数表示 AB；

(2) 用 a 及 θ 的三角函数分别表示 x，y；

(3) 证明 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$。



解 从右图得

$$BD=AB\cos\theta,$$
$$CD=AC\sin\theta.$$

(1) $AB=a\cos\theta$。

(2) $x=BD\cos\theta=AB\cos\theta\cos\theta=a\cos^3\theta$，

$y=CD\sin\theta=AC\sin\theta\sin\theta=a\sin^3\theta$。

(3) 从(2)得 $\sin\theta=\left(\dfrac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$，$\cos\theta=\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$。

$$\therefore\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

$$\therefore\quad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

226. 若 $a^2x^2=a^2-b^2$，$a\,\mathrm{tg}\,A=b\,\mathrm{tg}\,B$，用 a、b 表示 $(1-x^2\sin^2B)(1-x^2\cos^2A)$ 的值。

解 将 $a\,\mathrm{tg}\,A=b\,\mathrm{tg}\,B$ 的两边平方，得

$$a^2\cdot\frac{1-\cos^2A}{\cos^2A}=b^2\cdot\frac{1-\cos^2B}{\cos^2B},$$

$$(a^2-a^2\cos^2A)\cos^2B$$
$$=(b^2-b^2\cos^2B)\cos^2A.$$

$$\therefore\quad \cos^2A=\frac{a^2\cos^2B}{b^2+(a^2-b^2)\cos^2B}.$$

$$\therefore\quad 原式=\left[1-\frac{a^2-b^2}{a^2}(1-\cos^2B)\right]$$
$$\times\left[1-\frac{(a^2-b^2)\cos^2B}{b^2+(a^2-b^2)\cos^2B}\right]$$
$$=\frac{b^2+(a^2-b^2)\cos^2B}{a^2}$$
$$\times\frac{b^2}{b^2+(a^2-b^2)\cos^2B}$$
$$=\frac{b^2}{a^2}.$$

227. 若 $\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,A}{\sin C}-\dfrac{\mathrm{tg}\,B}{\mathrm{tg}\,C}\right)^2=\mathrm{tg}^2A-\mathrm{tg}^2B$，证明 $\cos C=\dfrac{\mathrm{tg}\,B}{\mathrm{tg}\,A}$。

解 将所给的条件变形。

$$\left(\frac{\mathrm{tg}\,A}{\sin C}-\frac{\mathrm{tg}\,B}{\mathrm{tg}\,C}\right)^2-\mathrm{tg}^2A+\mathrm{tg}^2B=0,$$

$$\frac{\mathrm{tg}^2A}{\sin^2C}-\mathrm{tg}^2A+\frac{\mathrm{tg}^2B}{\mathrm{tg}^2C}$$
$$+\mathrm{tg}^2B-2\,\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\,\frac{\cos C}{\sin^2C}=0,$$

$$\mathrm{tg}^2A\cdot\frac{\cos^2C}{\sin^2C}+\mathrm{tg}^2B\cdot\frac{1}{\sin^2C}$$
$$-2\,\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\cdot\frac{\cos C}{\sin^2C}=0,$$

$$\frac{1}{\sin^2C}(\mathrm{tg}\,A\cos C-\mathrm{tg}\,B)^2=0.$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}\,A\cos C=\mathrm{tg}\,B.$$

$$\therefore\quad \cos C=\frac{\mathrm{tg}\,B}{\mathrm{tg}\,A}.$$

228. 当表示角 α 和 β 的两个动半径有下面这样的关系时，α 和 β 之间有怎样的关系？

(1) 关于 x 轴对称； (2) 关于 y 轴对称。

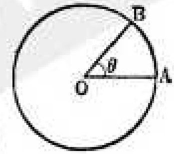
解 (1) 特别的情况是 $\alpha=-\beta$，即 $\alpha+\beta=0$，因此，一般地

$$\alpha+\beta=360^\circ n.\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

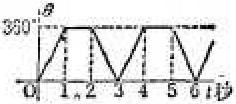
(2) 特别的情况是 $\alpha=180^\circ-\beta$，即 $\alpha+\beta=180^\circ$，因此，一般地

$$\alpha+\beta=360^\circ n+180^\circ.$$
$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

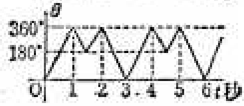
229. 右图中，动半径 OB 所表示的角是 θ。如果 θ 象下图那样地随着时间



(1)



(2)



而变化，那么点B应该怎样运动？

解　(1) 在最初的一秒钟里，从A点开始用等角速度朝正向转一周，在第二秒钟里，留在A点静止不动，在第三秒钟里，从A点开始用等角速度朝负向转一周回到A点．重复这三秒钟的运动．

(2) 在最初的一秒钟里，和(1)进行同样的运动，在下面的$\frac{1}{2}$秒钟里，从A用和前面同样的角速度朝负向转$180°$，在接下去的$\frac{1}{2}$秒钟里，再朝正向转$180°$回到A．在第三秒钟里，从A用等角速度朝负向转一周再回到A．重复这三秒钟的运动．

230． 单摆的长是20 cm，它的下端摆动的圆弧是5 cm，求单摆摆动范围的面积．

解　设单摆的长是r，下端描出的圆弧的长是l，它的面积是S，则

$$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times5\times20=50(\mathrm{cm}^2).$$

231． 求下列各式的值．

(1) $\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{3}$；

(2) $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}$；

(3) $4\left(\sin^3\frac{\pi}{3}+\cos^3\frac{\pi}{6}\right)-3\left(\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}\right)$．

解　(1) $\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{3}$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}.$$

(2) $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1^2+(\sqrt{3})^2=\frac{13}{3}.$$

(3) $4\left(\sin^3\frac{\pi}{3}+\cos^3\frac{\pi}{6}\right)$

$$-3\left(\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3-6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

232． 证明$(1+\cos A)^2+(1+\sin A)^2=3+2(\sin A+\cos A)$．

解　$(1+\cos A)^2=1+2\cos A+\cos^2 A$，

$(1+\sin A)^2=1+2\sin A+\sin^2 A$．

因此

原式的左边

$=2+2(\cos A+\sin A)+\cos^2 A+\sin^2 A$

$=2+2(\cos A+\sin A)+1$

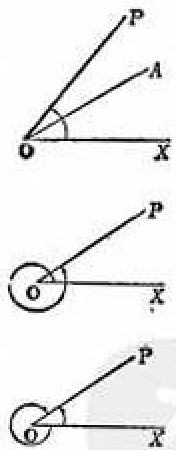
$=3+2(\cos A+\sin A)$．

第三章　一般角的三角函数

1. 一般角的三角函数的符号

233. 说明一般角的意义.

解　从一定点 O 引出的半直线 OA，如果从 OX 的位置开始，在平面内绕 O 点旋转到 OP 的位置，那么形成角 XOP 的 OX 叫做基线，OA 叫做动半径．如果把角的大小看成是动半径从基线开始到最后位置的旋转度量，那么角的大小是无限的．如图所示，如果动半径越过 OX 的位置继续旋转，那么角 XOP 就超过了 $360°$．还有，动半径从 OX 转到 OP，它的旋转方向有两个，如右图所示．为了区别这两个相反的方向，于是给角的大小加上了正负号．通常规定，动半径逆时针方向旋转时所形成的角为**正角**，顺时针方向旋转时所形成的角为**负角**．

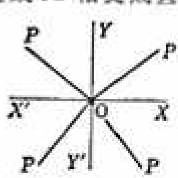


因此，角的大小可取正、负及零的一切值．这样的角就叫作**一般角**．

当只知道一般角的基线和动半径的位置时，如果设它的一个度数是 α，那么它一般角的度数就可用 $\alpha+360°n$ 来表示．这里 n 表示任意的整数(正整数、负整数或零)．

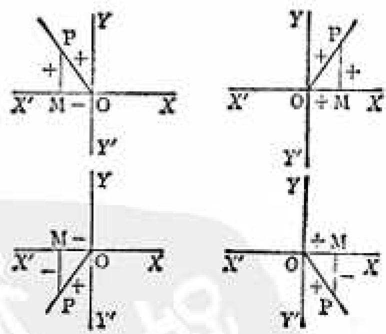
234. 什么是象限?

解　设基线 OX 和半直线 OY 相交成直角，XO、YO 的延长线分别是 OX'、OY'．当角 XOP 的动半径 OP 在 OX 和 OY 之间时，就叫做在第一象限的角．随着 OP 顺次在 OY 和 OX' 之间、OX' 和 OY' 之间、OY' 和 OX 之间，角 XOP 就分别叫做在第二、第三、第四象限．例如，$225°$ 是在第三象限的角，$-300°$ 和 $400°$ 是在第一象限的角．



235. 说明什么是一般角的三角函数．

解　象上题那样作 XOX' 和 YOY'，把由动半径 OP 所生成的角 XOP 简称为角 A．现在，不管角 A 在哪个象限，从 OP 上的任意一点 P 向 XOX' 引垂线 PM，得直角三角形 OPM，给它的三条边分别按如下的规定加上正、负号．



(a) 斜边 OP 总是正的．

(b) 底边 OM 在 OX 上是正的，在 OX' 上是负的．

(c) 垂线 PM，对于 XOX' 来说，和 OY 同侧时是正的，和 OY' 同侧时是负的．

用这样加上了符号的线段，给一般角的三角函数定义如下:

$$\sin A=\frac{PM}{OP},\ \cos A=\frac{OM}{OP},$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{PM}{OM},$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{OM}{PM},\ \sec A=\frac{OP}{OM},$$

$$\csc A=\frac{OP}{PM}.$$

显然，在一般角的三角函数中，函数值是由角的大小本身决定的．另外，函数值的符号根

据上述规定可象下表那样来确定。

象限＼函数	$\frac{\sin}{\csc}$	$\frac{\cos}{\sec}$	$\frac{\operatorname{tg}}{\operatorname{ctg}}$
1	+	+	+
2	+	−	−
3	−	−	+
4	−	+	−

236. 叙述一般角的三角函数间的关系。

解　由定义容易证明，下列各式对于一般角也是成立的。

$$\left.\begin{aligned}\sin A\csc A&=1,\\ \cos A\sec A&=1,\\ \operatorname{tg}A\operatorname{ctg}A&=1.\end{aligned}\right\}\quad ①$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}A&=\frac{\sin A}{\cos A},\\ \operatorname{ctg}A&=\frac{\cos A}{\sin A}.\end{aligned}\right\}\quad ②$$

$$\left.\begin{aligned}\sin^2 A+\cos^2 A&=1,\\ 1+\operatorname{tg}^2 A&=\sec^2 A,\\ 1+\operatorname{ctg}^2 A&=\csc^2 A.\end{aligned}\right\}\quad ③$$

根据①、②和③，在一个角的三角函数中，只要知道了其中的某一个，就能求出其他五个。

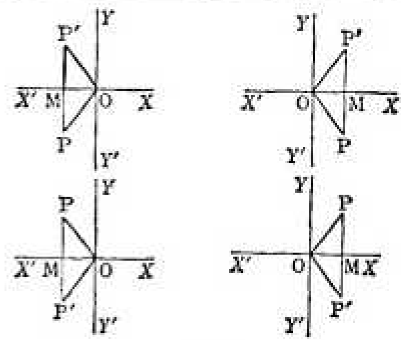
237. 试述$(-A)$的三角函数。

解　与基线OX构成角A的动半径OP，和构成角$-A$的动半径OP'总是关于OX对称的。现从OP上的一点P向OX（或它的延长线OX'）引垂线PM，再将它延长，和OP'交于P'，这时所得的两个三角形OPM和$OP'M$是全等的，$OP'=OP$。这样，虽然有必要一一画出A在一切象限的情况，但要记忆这个结果，只要画某一个图（例如A是在第一象限的情况）看看就行了。

另外，$P'M$虽然也和PM的长度相等，但它们的符号是相反的，即

$$P'M=-PM.$$

从而
$$\sin A=\frac{PM}{OP},$$
$$\sin(-A)=\frac{P'M}{OP'}=-\frac{PM}{OP}.$$



$$\cos A=\frac{OM}{OP},$$
$$\cos(-A)=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}.$$

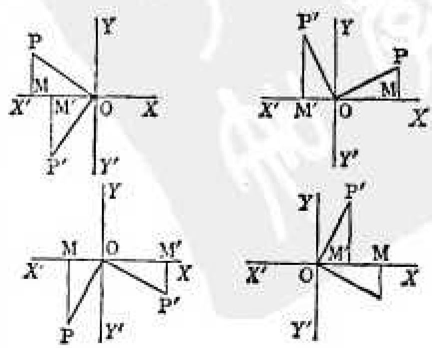
因此
$$\sin(-A)=-\sin A,$$
$$\cos(-A)=\cos A,$$
$$\operatorname{tg}(-A)=-\operatorname{tg}A.$$

238. 试述$(90°+A)$的三角函数。

解　设角XOP为A，角XOP'为$90°+A$，$OP=OP'$，如果从P及P'向XOX'引垂线PM及$P'M'$，那么所得的两个三角形OPM和$P'OM'$全等，

$$P'M'=OM,\ OM'=-PM.$$

从而
$$\sin A=\frac{PM}{OP},$$
$$\sin(90°+A)=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{OM}{OP}.$$
$$\cos A=\frac{OM}{OP},$$
$$\cos(90°+A)=\frac{OM'}{OP'}=-\frac{PM}{OP}.$$



因此　$\sin(90°+A)=\cos A$,
$\cos(90°+A)=-\sin A$,
$\operatorname{tg}(90°+A)=-\operatorname{ctg} A$.

239. 试述$(90°n\pm A)$的三角函数.

解　(i) 上题公式中的A是任意角，如用$90°+A$来代替A，则有

$$\sin[90°+(90°+A)]=\cos(90°+A)=-\sin A,$$
$$\cos[90°+(90°+A)]=-\sin(90°+A)=-\cos A.$$

因此得到下列公式:

$$\left.\begin{aligned}\sin(180°+A)&=-\sin A,\\ \cos(180°+A)&=-\cos A,\\ \operatorname{tg}(180°+A)&=\operatorname{tg} A.\end{aligned}\right\}\quad ①$$

(ii) 在①中,再用$180°+A$代替A,则得到下列公式:

$$\left.\begin{aligned}\sin(360°+A)&=\sin A,\\ \cos(360°+A)&=\cos A,\\ \operatorname{tg}(360°+A)&=\operatorname{tg} A.\end{aligned}\right\}\quad ②$$

A和$360°+A$的动半径的位置是完全相同的,因此这个结果是显然的. 一般地,设n是任意整数,则能推得$\sin(360°n+A)=\sin A$等.

(iii) 在上题所得的公式和本题的①、②中,用$-A$代替A,则得到下列三组公式:

$$\left.\begin{aligned}\sin(90°-A)&=\cos A,\\ \cos(90°-A)&=\sin A,\\ \operatorname{tg}(90°-A)&=\operatorname{ctg} A.\end{aligned}\right\}\quad ③$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(180°-A)&=\sin A,\\ \cos(180°-A)&=-\cos A,\\ \operatorname{tg}(180°-A)&=-\operatorname{tg} A.\end{aligned}\right\}\quad ④$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(360°-A)&=-\sin A,\\ \cos(360°-A)&=\cos A,\\ \operatorname{tg}(360°-A)&=-\operatorname{tg} A.\end{aligned}\right\}\quad ⑤$$

注　不管A是怎样的角，$90°-A$和$180°-A$分别叫作A的余角和补角.

240. 说明任意角的三角函数，都可以用正的锐角的三角函数来表示.

解　首先，负角的三角函数，根据公式可以化成正角的三角函数. 如果这个正角超过$360°$，那么可以从中减去$360°$的倍数，使它化成不超过$360°$的角的三角函数. 如果角在$180°$以上，那么就将它化成$180°$以下的角的三角函数,如果角仍在$90°$以上,那么再化成补角的三角函数，从而化成小于$90°$的正角的三角函数. 在以上的处理中，三角函数的种类丝毫没有变化. 例如，任意角的正弦总能用正的锐角的正弦来表示.

如果可以改变函数的种类，那么还能化成小于$45°$的正角.

例 1. $\sin 1765°=\sin(4\times 360°+325°)$
$=\sin 325°=\sin(180°+145°)$
$=-\sin 145°$
$=-\sin(180°-35°)$
$=-\sin 35°$.

例 2. $\operatorname{tg}(-1190°)=-\operatorname{tg} 1190°$
$=-\operatorname{tg}(3\times 360°+110°)$
$=-\operatorname{tg} 110°=-\operatorname{tg}(180°-70°)$
$=\operatorname{tg} 70°=\operatorname{tg}(90°-20°)$
$=\operatorname{ctg} 20°$.

但是在一般情况下,不必遵照上面的步骤.例如,根据上题的⑤和④，例1和例2只要分别象下面这样考虑就可以了.

$$\sin 1765°=\sin(5\times 360°-35°)=-\sin 35°.$$
$$\operatorname{tg}(-1190°)=-\operatorname{tg}(7\times 180°-70°)=\operatorname{tg} 70°.$$

241. 说明一般角的三角函数什么时候有最大值，什么时候有最小值，什么时候没有值.

解　$\sin\alpha$和$\cos\alpha$对于α的一切值都是有定义的. $\sin\alpha$在$\alpha=2n\pi+\frac{\pi}{2}$($n$是整数)时有最大值1，在$\alpha=2n\pi-\frac{\pi}{2}$时有最小值$-1$. $\cos\alpha$在$\alpha=2n\pi$时有最大值1，在$\alpha=2n\pi+\pi$时有最小值-1. 因而$-1\leqslant\sin\alpha\leqslant 1$，$-1\leqslant\cos\alpha\leqslant 1$. $\operatorname{tg}\alpha$在$\alpha=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$时没有值,$\operatorname{ctg}\alpha$在$\alpha=2n\pi$和$\alpha=2n\pi+\pi$时没有值. $\operatorname{tg}\alpha$和$\operatorname{ctg}\alpha$可取一切实数值.

此外，$\csc\alpha$和$\sec\alpha$的绝对值都不小于1，$\csc\alpha$在$\alpha=2n\pi$和$\alpha=2n\pi+\pi$时没有值，$\sec\alpha$在$\alpha=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$时没有值.

242. 在下面的□里，填上适当的正负号或角度.

(1) $\sin(-390°)=\square\sin 390°$
$=\square\sin(30°+360°)=\square\sin\square$;

(2) $\cos(-750°)=\square\cos 750°$

$=\square\cos(30°+360°\times 2)=\square\cos\square$;

(3) $\operatorname{tg}(-1100°)=\dfrac{\sin(-1100°)}{\cos(-1100°)}$

$=\dfrac{\square\sin(20°+360°\times 3)}{\square\cos(20°+360°\times 3)}$

$=\square\dfrac{\sin\square}{\cos\square}=\square\operatorname{tg}\square$.

解　(1) $\sin(-390°)=-\sin 390°$

$=-\sin(30°+360°)$

$=-\sin 30°$.

(2) $\cos(-750°)=\cos 750°$

$=\cos(30°+360°\times 2)=\cos 30°$.

(3) $\operatorname{tg}(-1100°)=\dfrac{\sin(-1100°)}{\cos(-1100°)}$

$=\dfrac{-\sin(20°+360°\times 3)}{+\cos(20°+360°\times 3)}$

$=-\dfrac{\sin 20°}{\cos 20°}=-\operatorname{tg}20°$.

243. 下面两个角的动半径在第几象限?

(1) $2000°$;　　(2) $-4000°$.

解　(1) $2000°=360°\times 5+200°$,

而　$200°=90°\times 2+20°$.

即 $2000°$ 的动半径所在的象限也就是 $200°$ 的动半径所在的象限，由于 $200°$ 的动半径从基线开始越过两个象限又 $20°$，所以这个角的动半径在第三象限.

(2) $-4000°=-360°\times 11-40°$,

因此，$-4000°$ 和 $-40°$ 的动半径在同一位置，即在第四象限.

244. 求下例各式的值.

(1) $\cos 570°\sin 150°$

$+\sin(-330°)\cos(-390°)$;

(2) $\cos 420°\operatorname{tg}60°\sec 45°$

$+\sin 45°\operatorname{ctg}30°\csc 450°$.

解　(1) 原式 $=\cos(360°+180°+30°)$

$\times\sin(180°-30°)$

$-\sin(360°-30°)$

$\times\cos(360°+30°)$

$=-\cos 30°\sin 30°$

$+\sin 30°\cos 30°=0$.

(2) 原式 $=\cos(360°+60°)\operatorname{tg}60°\sec 45°$

$+\sin 45°\operatorname{ctg}30°$

$\times\csc(360°+90°)$

$=\cos 60°\operatorname{tg}60°\sec 45°$

$+\sin 45°\operatorname{ctg}30°\csc 90°$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\times\sqrt{3}\times 1=\sqrt{6}$.

245. 若将基线 Ox 和坐标平面的 x 轴的正向重合，并在表示一般角的动半径上取一点 $P(x,y)$，设 $OP=r$，那么 θ 的三角函数可由

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$$

来定义.

(1) 判明这些函数在各个象限的符号.

(2) 证明 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

$$\operatorname{tg}^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}.$$

解　(1) 随着动半径在第一、第二、第三和第四象限，P 的坐标 x、y 的符号象下面的左表那样变化. 再由于 $r>0$，所以上面三个三角函数的符号如下面的右表所示.

象限	x	y
1	+	+
2	−	+
3	−	−
4	+	−

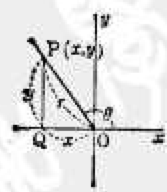
象限	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\operatorname{tg}\theta$
1	+	+	+
2	+	−	−
3	−	−	+
4	−	+	−

(2) 从 P 向 x 轴作垂线，设垂足是 Q，则 $OQ=|x|$，$PQ=|y|$.

由勾股定理，得

$$OP^2=OQ^2+PQ^2.$$

$$\therefore\quad r^2=x^2+y^2.$$



用 r^2 除上式的两边，得

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1,$$

$$\therefore\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

再用 $\cos^2\theta$ 除这个等式的两边，则得

$$\operatorname{tg}^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}.$$

246. 将下列函数分别用 $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$ 中的某一个来表示.

$$\cos(-x),\ \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right),\ \operatorname{tg}(\pi-x),\ \sin(\pi+x).$$

解 $$\cos(-x)=\cos x.$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x.$$

$$\operatorname{tg}(\pi-x)=-\operatorname{tg}x.$$

$$\sin(\pi+x)=-\sin x.$$

247. 求 $A-90°$ 和 $A-180°$ 的各三角函数。

解 $$\sin(A-90°)=-\sin(90°-A)=-\cos A.$$

$$\cos(A-90°)=\cos(90°-A)=\sin A.$$

$$\operatorname{tg}(A-90°)=-\operatorname{tg}(90°-A)=-\operatorname{ctg}A.$$

从而 $$\csc(A-90°)=-\sec A.$$

$$\sec(A-90°)=\csc A.$$

$$\operatorname{ctg}(A-90°)=-\operatorname{tg}A.$$

又 $$\sin(A-180°)=-\sin(180°-A)=-\sin A.$$

$$\cos(A-180°)=\cos(180°-A)=-\cos A.$$

$$\operatorname{tg}(A-180°)=-\operatorname{tg}(180°-A)=\operatorname{tg}A.$$

从而 $$\csc(A-180°)=-\csc A.$$

$$\sec(A-180°)=-\sec A.$$

$$\operatorname{ctg}(A-180°)=\operatorname{ctg}A.$$

248. 当 θ 是第四象限的角，$\cos\theta=\frac{12}{13}$ 时，$\sin\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$ 的值各是多少？

解 $$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{12}{13}\right)^2=\left(\frac{5}{13}\right)^2.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\pm\frac{5}{13}.$$

但是 θ 是第四象限的角，所以 $\sin\theta$ 只能取负值。因此

$$\sin\theta=-\frac{5}{13},\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{5}{12}.$$

249. 若 θ 是第三象限的角，$2\sin\theta=\cos\theta$，求 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$ 的值。

解 将 $\cos\theta=2\sin\theta$ 代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，得

$$5\sin^2\theta=1,\ \sin\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

但因为 θ 是第三象限的角，所以 $\sin\theta<0$。因此

$$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore\quad \cos\theta=2\sin\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}.$$

250. 下列各角的动半径在第几象限？

(1) $370°$； (2) $420°$； (3) $\frac{7}{3}\pi$；

(4) $-40°$； (5) $-100°$； (6) $-365°$；

(7) $-750°$； (8) $-\frac{5}{2}\pi$。

解 (1) $370°=360°+10°$，因此在第一象限。

(2) $420°=360°+60°$，因此在第一象限。

(3) $\frac{7}{3}\pi=2\pi+\frac{\pi}{3}$，因此在第一象限。

(4) $-40°$，在第四象限。

(5) $-100°=-360°+260°=-360°+90°\times2+80°$，因此 $-100°$ 在第三象限。

(6) $-365°=-360°-5°$，因此在第四象限。

(7) $-750°=-360°\times2-30°$，因此在第四象限。

(8) $-\frac{5}{2}\pi=-2\pi-\frac{1}{2}\pi$，因此这个角的动半径在第三象限和第四象限的分界线上。

251. 下列各角的动半径在第几象限？

(1) $290°$； (2) $160°$； (3) $255°$；

(4) $-110°$； (5) $570°$； (6) $-420°$；

(7) $-660°$； (8) $1120°$。

解 (1) $290°=90°\times3+20°$，因此在第四象限。

(2) $160°=90°\times1+70°$，因此在第二象限。

(3) $255°=90°\times2+75°$，因此在第三象限。

(4) $-110°=-90°\times1-20°$，因此在第三象限。

(5) $570°=360°+210°=360°+90°\times2+30°$，因此在第三象限。

(6) $-420°=-360°-60°$，因此在第四象

限.

(7) $-660^\circ=-720^\circ+60^\circ$，因此在第一象限.

(8) $1120^\circ=360^\circ\times3+40^\circ$，因此在第一象限.

252. 求下面的值.

(1) $\sin(-60^\circ)$, $\operatorname{tg}(-60^\circ)$;

(2) $\sin(-390^\circ)$, $\operatorname{tg}(-390^\circ)$;

(3) $\cos 250^\circ$, $\operatorname{tg}250^\circ$;

(4) $\cos(-170^\circ)$, $\operatorname{tg}(-170^\circ)$.

解 (1) $\sin(-60^\circ)=-\sin 60^\circ$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}(-60^\circ)=-\operatorname{tg}60^\circ=-\sqrt{3}.$$

(2) $\sin(-390^\circ)=-\sin(360^\circ+30^\circ)$

$$=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}(-390^\circ)=-\operatorname{tg}(360^\circ+30^\circ)$$

$$=-\operatorname{tg}30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(3) $\cos 250^\circ=\cos(180^\circ+90^\circ-20^\circ)$

$$=-\sin 20^\circ=-0.3420,$$

$$\operatorname{tg}250^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ+90^\circ-20^\circ)$$

$$=\operatorname{ctg}20^\circ=2.747.$$

(4) $\cos(-170^\circ)=\cos(180^\circ-10^\circ)$

$$=-\cos 10^\circ=-0.9848,$$

$$\operatorname{tg}(-170^\circ)=-\operatorname{tg}(180^\circ-10^\circ)$$

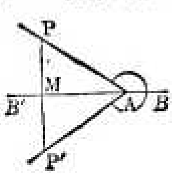
$$=-(-\operatorname{tg}10^\circ)=0.1763.$$

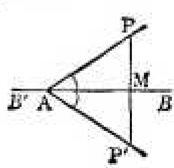
253. 比较任意角和与它绝对值相同符号相反的角的三角函数。即要证明

$$\sin(-A)=-\sin A,\ \cos(-A)=\cos A,$$

$$\operatorname{tg}(-A)=-\operatorname{tg}A.$$

解 设$\angle PAB$是任意的角，作PM垂直于BAB'，并延长PM到P'，使MP'的长等于MP的长，连结AP'，从AB朝相反的方向测量，则$\angle P'AB$和$\angle PAB$的绝对值相等。因此，$\angle PAB$若用A来表示，那么$\angle P'AB$就可以用$-A$来表示。





并且 $$\sin A=\frac{PM}{AP},$$

$$\sin(-A)=\frac{P'M}{AP'}.$$

因为$P'M$和PM的长度相等而符号相反，且AP'等于AP，所以

$$\sin(-A)=-\sin A.$$

又 $$\cos(-A)=\frac{AM}{AP'}=\frac{AM}{AP}=\cos A.$$

因此 $$\operatorname{tg}(-A)=\frac{\sin(-A)}{\cos(-A)}$$

$$=\frac{-\sin A}{\cos A}=-\operatorname{tg}A,$$

$$\csc(-A)=-\csc A,$$

$$\sec(-A)=\sec A,$$

$$\operatorname{ctg}(-A)=-\operatorname{ctg}A.$$

254. (1) 若 $0^\circ<\theta<180^\circ$,

$$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}},$$

求$\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}$的值.

(2) 若$\sin x=\sqrt{\sqrt{3}-1}$，求$\sin^4x+\cos^4x$的值.

解 (1) $\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$$=\pm\sqrt{1-\frac{9}{10}}=\pm\frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\therefore\ \frac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\dfrac{3}{\sqrt{10}}+2\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}\times\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)}{1+\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)+\dfrac{1}{10}-\dfrac{9}{10}}$$

$$=\frac{3\sqrt{10}\pm6}{10\pm\sqrt{10}-8}=\frac{3(\sqrt{10}\pm2)}{2\pm\sqrt{10}}$$

$$=\pm3.$$

因此，θ是锐角时等于3，θ是钝角时等于-3.

(2) 因为$\sin x=\sqrt{\sqrt{3}-1}$，所以$\sin^2x=\sqrt{3}-1$。因此

$$\cos^2x=1-\sin^2x=2-\sqrt{3},$$

$$\sin^4x+\cos^4x=(\sqrt{3}-1)^2+(2-\sqrt{3})^2$$

$$=4-2\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}$$

$$=11-6\sqrt{3}.$$

255. $\sin(90°+\theta)=\square\theta$.
$\cos(\theta-90°)=\square\theta$.
$\mathrm{tg}(180°-\theta)=\square\theta$.

在上面的□里，各应填入下面的哪个函数符号？

(1) sin. (2) cos. (3) tg.
(4) ctg. (5) −sin. (6) −cos.
(7) −tg. (8) −ctg.

解 (2) $\sin(90°+\theta)=\cos\theta$.
(1) $\cos(\theta-90°)=\cos(90°-\theta)=\sin\theta$.
(7) $\mathrm{tg}(180°-\theta)=-\mathrm{tg}\,\theta$.

256. 证明下面两个式子成立.

(1) $\sin(180°+\theta)+\cos(90°-\theta)=0$;
(2) $\cos(270°-\theta)-\cos(\theta+90°)=0$.

解 (1) 左边$=-\sin\theta+\sin\theta=0$.
(2) 左边$=-\sin\theta-(-\sin\theta)=0$.

257. 将 (1) $\sin 870°$, (2) $\cos(-430°)$, (3) $\mathrm{tg}\,1310°$, (4) $\sin(-2095°)$, (5) $\cos 1900°$ 各值，分别填入下面不等式中的各个方框里，使不等式成立.

$$\square<\square<\square<\square<\square$$

解 将上面各函数分别化成锐角三角函数.

$$\sin 870°=\sin(2\times360°+150°)=\sin(180°-30°)=\sin 30°.$$
$$\cos(-430°)=\cos 430°=\cos(360°+70°)=\cos(90°-20°)=\sin 20°.$$
$$\mathrm{tg}(1310°)=\mathrm{tg}(3\times360°+230°)=\mathrm{tg}(180°+50°)=\mathrm{tg}\,50°.$$
$$\sin(-2095°)=-\sin(6\times360°-65°)=-\sin(-65°)=\sin 65°.$$
$$\cos 1900°=\cos(5\times360°+100°)=\cos(90°+10°)=-\sin 10°.$$

因为当 $0°<x<90°$ 时，$\sin x$ 是递增函数，且 $\mathrm{tg}\,50°>1$，所以 $-\sin 10°<\sin 20°<\sin 30°<\sin 65°<1<\mathrm{tg}\,50°$.

$$\therefore\ \cos 1900°<\cos(-430°)<\sin 870°<\sin(-2095°)<\mathrm{tg}\,1310°.$$

258. 若 $\sin B=\sin A$, $\cos B=\cos A$，证明 $A-B$ 是 0° 或 360° 的倍数.

解 $A-B=0°$，即 $A=B$ 时，所给的式子显然是成立的. 现设 $A\neq B$，于是为了使 $\sin B=\sin A$，就必须有 $B=360°n+A$，或根据公式 $\sin\alpha=\sin(180°-\alpha)$ 有 $B=360°n+180°-A$. 又，为了使 $\cos B=\cos A$ 成立，必须有 $B=360°n+A$，或根据公式 $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$有 $B=360°n-A$. 因此，为了使所给的两个式子同时成立，就必须取它们共同的条件. 即，$B=360°n+A$ 必须成立. 这也就是说，$B-A$(或 $A-B$)必须是 360° 的倍数.

259. 对于 $\cos\dfrac{\theta}{3}$ 的一切 θ 值来说，在不改变函数值的条件下，能够增加的最小的正角是多少？

解 对于 $\dfrac{\theta}{3}$ 的一切值来说，能够增加的最小的正角是 360°，所以由

$$\cos\frac{\theta}{3}=\cos\left(\frac{\theta}{3}+360°\right)=\cos\left[\frac{1}{3}(\theta+1080°)\right]$$

可知，在不改变函数值的条件下，θ 能够增加的最小的正角是 1080°.

260. 求下列两式的值.

(1) $\mathrm{ctg}\,10°+\mathrm{tg}\,190°+\mathrm{tg}\,100°+\mathrm{tg}\,350°$;
(2) $\sin 1590°\cos(-1860°)+\mathrm{tg}\,1395°\,\mathrm{ctg}(-960°)$.

解 (1) 原式$=\mathrm{ctg}\,10°+\mathrm{tg}(180°+10°)+\mathrm{tg}(90°+10°)+\mathrm{tg}(360°-10°)$
$=\mathrm{ctg}\,10°+\mathrm{tg}\,10°-\mathrm{ctg}\,10°-\mathrm{tg}\,10°=0$.

(2) 原式$=\sin(4\times360°+90°+60°)\times\cos(5\times360°+60°)-\mathrm{tg}(4\times360°-45°)\times\mathrm{ctg}(2\times360°+180°+60°)$
$=\cos 60°\cos 60°+\mathrm{tg}\,45°\,\mathrm{ctg}\,60°$
$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$=\dfrac{4+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{12}$.

261. 若 θ 是锐角，$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，求下列各式的值.

(1) $\sin\theta\cos\theta$; (2) $\sin\theta+\cos\theta$;
(3) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$.

解 (1) 将 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 的两边平方，得 $\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$.

因为 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

所以 $\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$.

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\times\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$.

因为 θ 是锐角,所以 $\sin\theta+\cos\theta>0$.

$\therefore\quad \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(3) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)$

$\times(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{8}\right)=\frac{11}{16}$.

262. 化简下式.

$$\frac{\sin(\pi+\theta)\operatorname{tg}^2(\pi-\theta)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}-\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\csc^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}.$$

解 原式$=\frac{-\sin\theta(-\operatorname{tg}\theta)^2}{\sin\theta}-\frac{-\cos\theta\sec^2\theta}{\cos\theta}$

$=-\operatorname{tg}^2\theta+\sec^2\theta=1$.

263. 用 $\sin\theta$ 表示 $(\sec\theta-\operatorname{tg}\theta)^2$.

解 $(\sec\theta-\operatorname{tg}\theta)^2=\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

$=\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}=\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$.

264. 填括弧, $0°<\theta<360°$.

(1) 适合 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ 的 θ 值是(　);

(2) 适合 $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的 θ 角在第(　)象限.

解 (1) $30°, 150°$. (2) 二、三.

265. 求下列两式的值.

(1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}\cos\frac{3\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{21\pi}{4}$;

(2) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}+\sin\frac{31\pi}{4}\cos\frac{13\pi}{3}$.

解 (1) 原式$=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$+\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{3}$

$=\frac{\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{6}$.

(2) 原式$=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$+\sin\left(8\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$=-\frac{4+3\sqrt{2}}{12}$.

266. 当 $\cos(-100°)=k$ 时, 用 k 表示 $\operatorname{tg}80°$.

解 $\cos80°=\cos(180°-100°)$

$=-\cos100°=-\cos(-100°)$

$=-k$.

$\therefore\quad \operatorname{tg}80°=\sqrt{\sec^2 80°-1}$

$=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 80°}-1}=\sqrt{\frac{1}{k^2}-1}$

$=\sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}}$.

这里, 因为 $\cos(-100°)=k<0$, 所以

$\operatorname{tg}80°=-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$.

267. 化简下列两式.

(1) $\operatorname{tg}(180°+\theta)\sin(90°+\theta)+\frac{\cos(180°-\theta)}{\operatorname{tg}(180°-\theta)}$;

(2) $\frac{\sin(180°+\theta)\operatorname{tg}^2(180°-\theta)}{\cos(270°+\theta)}-\frac{\sin(270°-\theta)}{\sin(90°+\theta)\cos^2\theta}$.

解 (1) 原式$=\operatorname{tg}\theta\cos\theta+\dfrac{-\cos\theta}{-\operatorname{tg}\theta}$

$$=\sin\theta+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta.$$

(2) 原式$=\dfrac{-\sin\theta(-\operatorname{tg}\theta)^2}{\sin\theta}-\dfrac{-\cos\theta}{\cos\theta\cos^2\theta}$

$$=-\operatorname{tg}^2\theta+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{-\sin^2\theta+1}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1.$$

268. 用 $\cos\theta$ 表示 $1+\operatorname{tg}^4\theta$.

解 $1+\operatorname{tg}^4\theta=(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2-2\operatorname{tg}^2\theta$

$$=\sec^4\theta-\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos^4\theta}-\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1-2\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^4\theta}$$

$$=\frac{1-2\cos^2\theta+2\cos^4\theta}{\cos^4\theta}.$$

269. 若 $\operatorname{tg}\theta=-\dfrac{4}{3}$，求 $\dfrac{5\sin\theta+8}{15\cos\theta-7}$.

解 因为 $\operatorname{tg}\theta$ 的值是负的，所以 θ 是第二或第四象限的角.

(1) θ 是第二象限的角时

$$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}}=-\frac{3}{5},$$

$$\sin\theta=\operatorname{tg}\theta\cos\theta=-\frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}.$$

$$\therefore\ \frac{5\sin\theta+8}{15\cos\theta-7}=\frac{5\times\frac{4}{5}+8}{15\times\left(-\frac{3}{5}\right)-7}$$

$$=-\frac{3}{4}.$$

(2) θ 是第四象限的角时

$$\cos\theta=\frac{3}{5},\ \sin\theta=-\frac{4}{5}.$$

$$\therefore\ \frac{5\sin\theta+8}{15\cos\theta-7}$$

$$=\frac{5\times\left(-\frac{4}{5}\right)+8}{15\times\frac{3}{5}-7}=2.$$

270. 用 $\operatorname{tg}A$ 表示 $\sin^6A+\cos^6A$.

解 $\sin^6A+\cos^6A$

$$=(\sin^2A+\cos^2A)\times(\sin^4A-\sin^2A\cos^2A+\cos^4A)$$

$$=\sin^4A-\sin^2A\cos^2A+\cos^4A$$

$$=\cos^4A\left(\frac{\sin^4A}{\cos^4A}-\frac{\sin^2A}{\cos^2A}+1\right)$$

$$=\frac{1}{\sec^4A}(\operatorname{tg}^4A-\operatorname{tg}^2A+1),$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^4A-\operatorname{tg}^2A+1}{(1+\operatorname{tg}^2A)^2}.$$

271. 若 θ 是第二象限的角，$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，求 $\cos\theta$，$\operatorname{tg}\theta$ 和 $\csc\theta$ 的值.

解 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$$=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}.$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=-\frac{3}{4}.$$

$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{5}{3}.$$

272. 用 $\cos\theta$ 表示 $\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta$.

解 原式$=\sin^2\theta(\sin^2\theta+2\cos^2\theta)$

$$=\sin^2\theta(1+\cos^2\theta)$$

$$=(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)$$

$$=1-\cos^4\theta.$$

273. 用 $\operatorname{tg}\theta$ 表示 $\sec^4\theta-\sec^2\theta$.

解 原式$=\sec^2\theta(\sec^2\theta-1)$

$$=(1+\operatorname{tg}^2\theta)(1+\operatorname{tg}^2\theta-1)$$

$$=(1+\operatorname{tg}^2\theta)\operatorname{tg}^2\theta.$$

274. (1) 若 θ 是第二象限的角，$\sin\theta=0.6$，求 $\cos\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$ 的值.

(2) θ 是第四象限的角，$\cos\theta=0.7$，求 $\sin\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$ 的值.

解 (1) 如果同时考虑符号，则

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$=-\sqrt{1-0.6^2}=-0.8,$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{0.6}{-0.8}=-0.75.$$

(2) $\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-0.7^2}$

$$\approx-0.71,$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-0.71}{0.7}\approx-1.01.$$

275. 如果将三角形 ABC 的三个内角用 A、B、C 表示，则 $A+B+C=180°$。以此证明下列各等式成立。

(1) $\sin(B+C)=\sin A$;

(2) $\operatorname{tg}(B+C)=-\operatorname{tg}A$;

(3) $\sin\dfrac{B+C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}$;

(4) $\cos\dfrac{B+C}{2}=\sin\dfrac{A}{2}$;

(5) $\sin A=-\sin(2A+B+C)$。

解　(1) 左边 $=\sin(180°-A)=\sin A$。

(2) 左边 $=\operatorname{tg}(180°-A)=-\operatorname{tg}A$。

(3) 左边 $=\sin\dfrac{1}{2}(180°-A)$

$$=\sin\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}.$$

(4) 左边 $=\cos\dfrac{1}{2}(180°-A)$

$$=\cos\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}.$$

(5) 右边 $=-\sin(A+B+C+A)$

$=-\sin(180°+A)=\sin A$。

276. 若 A 是第一象限的角，$\sec A=\sqrt{2}$。计算 $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\cos A}}$。

解　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\dfrac{1}{\sec^2 A}}$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

又　$\cos A=\dfrac{1}{\sec A}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

因此　$\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\cos A}}$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}$$

$=\sqrt{2}-1$。

277. 若 $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta=\dfrac{13}{6}$，求 $\sin\theta$ 的值。

解　先求 $\operatorname{ctg}\theta$ 的值。

$$\frac{1}{\operatorname{ctg}\theta}+\operatorname{ctg}\theta=\frac{13}{6},$$

$$6\operatorname{ctg}^2\theta-13\operatorname{ctg}\theta+6=0,$$

$$(3\operatorname{ctg}\theta-2)(2\operatorname{ctg}\theta-3)=0,$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\theta=\frac{2}{3}\quad 或\quad \operatorname{ctg}\theta=\frac{3}{2}.$$

$\operatorname{ctg}\theta=\dfrac{2}{3}$ 时，θ 是第一或第三象限的角，因此

$$\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\theta}}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}}=\pm\frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

$\operatorname{ctg}\theta=\dfrac{3}{2}$ 时，θ 同样是第一或第三象限的角，得

$$\sin\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{4}}}=\pm\frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

278. 分别用 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 表示下列各式。

(1) $\cos^4\theta-\sin^4\theta$;　(2) $(\sin^2\theta-\cos^2\theta)^2$;

(3) $1-\operatorname{tg}^4\theta$。

解　(1) $\cos^4\theta-\sin^4\theta$

$=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$\times(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$=2\cos^2\theta-1$。

又　原式 $=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-\sin^2\theta-\sin^2\theta$

$=1-2\sin^2\theta$。

(2) $(\sin^2\theta-\cos^2\theta)^2=(1-\cos^2\theta-\cos^2\theta)^2$

$=(1-2\cos^2\theta)^2$。

又　原式 $=[\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)]^2$

$=(2\sin^2\theta-1)^2$。

(3) $1-\operatorname{tg}^4\theta=(1+\operatorname{tg}^2\theta)(1-\operatorname{tg}^2\theta)$

$$=\sec^2\theta\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^4\theta}$$

$$=\frac{2\cos^2\theta-1}{\cos^4\theta}.$$

又 原式$=\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{(1-\sin^2\alpha)^2}$.

279. x是第二象限的角,

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

求$\operatorname{tg}x$精确到小数第三位的值。

$$(\sqrt{3}=1.7320)$$

解 当x是第二象限的角时

$$\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=-\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{-(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=-(2-\sqrt{3})$$

$$=-0.2680.$$

因此 $\operatorname{tg}x\approx-0.268$.

280. 用$\sin A$表示$\operatorname{tg}^2A+\operatorname{ctg}^2A$.

解 $\operatorname{tg}^2A+\operatorname{ctg}^2A=\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}+\dfrac{\cos^2A}{\sin^2A}$

$$=\frac{\sin^2A}{1-\sin^2A}+\frac{1-\sin^2A}{\sin^2A}$$

$$=\frac{\sin^4A+(1-\sin^2A)^2}{\sin^2A(1-\sin^2A)}$$

$$=\frac{1-2\sin^2A+2\sin^4A}{\sin^2A(1-\sin^2A)}.$$

281. 求下列函数的周期、最大值和最小值。

(1) $\operatorname{tg}2x$; (2) $\sin^2x$;

(3) $|\sin x|$; (4) $\cos 3x$;

(5) $\dfrac{1}{1+\sin 2x}$; (6) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}$.

解 (1) $\operatorname{tg}2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}(2x+\pi)$

$$=\operatorname{tg}2x.$$

所以周期是$\dfrac{\pi}{2}$,没有最大值和最小值。

(2) 由$\cos 2x=1-2\sin^2x$得

$$\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

$$\therefore\quad 0\leqq\sin^2x\leqq1.$$

又 $\cos 2(x+\pi)=\cos(2x+2\pi)=\cos 2x$.

所以周期是π,最大值是1,最小值是0。

(3) $0\leqq|\sin x|\leqq1$,

$$|\sin(x+\pi)|=|\sin x|.$$

所以周期是π,最大值是1,最小值是0。

(4) $-1\leqq\cos 3x\leqq1$,

$$\cos 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos 3x.$$

所以周期是$\dfrac{2\pi}{3}$,最大值是1,最小值是-1。

(5) 因为$\sin 2x$的周期是π,所以

$$\frac{1}{1+\sin 2x}$$

的周期也是π,最小值是$\dfrac{1}{2}$,没有最大值。

(6) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}=\cos^2x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

所以周期是π,最大值是1,最小值是0。

282. 把下列各函数化成小于45°的正角的三角函数。

(1) $\sin 220°$; (2) $\cos(-1415°)$;

(3) $\operatorname{ctg}3700°$.

解 (1) $\sin 220°=\sin[180°-(-40°)]$
$=\sin(-40°)=-\sin 40°$.

(2) $\cos(-1415°)=\cos(-1440°+25°)$
$=\cos 25°$.

(3) $\operatorname{ctg}3700°=\operatorname{ctg}(3780°-80°)$
$=\operatorname{ctg}(-80°)=-\operatorname{ctg}80°$
$=-\operatorname{ctg}(90°-10°)=-\operatorname{tg}10°$.

注 一般地

$$\begin{cases}\sin(\theta+360°n)=\sin\theta,\\ \cos(\theta+360°n)=\cos\theta.\end{cases}\quad(n\text{是整数})$$

这从θ、$\theta+360°$和$\theta+360°n$的动半径在同一位置,以及正弦、余弦的定义是容易得到的。这就是说,正弦和余弦是以360°作为周期的周期函数。

在(2)中,

$$-1440°+25°=25°+(-4)\cdot360°,$$

所以 $\cos(-1440°+25°)=\cos 25°$.

另外,由于

$$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta,$$
$$\cos(180°+\theta)=-\cos\theta,$$
$$\therefore\quad \operatorname{tg}\theta(180°+\theta)=\operatorname{tg}\theta.$$

从而 $\operatorname{ctg}(180°+\theta)=\operatorname{ctg}\theta$.

所以正切和余切是以 180° 作为周期的周期函数．一般地，有

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\theta+180^\circ n)=\operatorname{tg}\theta, \\ \operatorname{ctg}(\theta+180^\circ n)=\operatorname{ctg}\theta. \end{cases} \quad (n\text{ 是整数})$$

283. 若 α 是第三象限的角，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$，求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值．

解 因为 α 是第三象限的角，所以

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=-\frac{4}{5},$$

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{5}.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=-1\frac{2}{5}.$$

284. 化简 $(a-b)\sin(90^\circ-A)+(a+b)\times\operatorname{ctg}(90^\circ+A)$．

解 $\sin(90^\circ-A)=\cos A$，

$\operatorname{ctg}(90^\circ+A)=-\operatorname{tg}A$，

所以 原式$=(a-b)\cos A-(a+b)\operatorname{tg}A$．

285. 求 $\cos 0^\circ\cos 30^\circ\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\times\sin 60^\circ\sin 90^\circ$ 的值．

解 因为 $\cos 0^\circ=1$，$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 90^\circ=1$，所以

$$\text{原式}=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

286. 求 $\cos^2 18^\circ+\cos^2 60^\circ+\sin^2 0^\circ+2\cos 45^\circ\cos 90^\circ$ 的值．

解 因为 $\cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$，$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，$\sin 0^\circ=0$，$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos 90^\circ=0$，所以

$$\text{原式}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}+\frac{1}{4}=\frac{7+\sqrt{5}}{8}.$$

287. 求 $\sin 420^\circ\cos 390^\circ+\cos(-300^\circ)\times\sin(-330^\circ)$ 的值．

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\sin(360^\circ+60^\circ)\times\cos(360^\circ+30^\circ)\\&\quad+\cos(-360^\circ+60^\circ)\times\sin(-360^\circ+30^\circ)\\&=\sin 60^\circ\cos 30^\circ+\cos 60^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1.\end{aligned}$$

288. 化简 $\sin(180^\circ+\theta)\cos(90^\circ+\theta)-\sin(90^\circ-\theta)\cos(180^\circ-\theta)$．

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=(-\sin\theta)(-\sin\theta)-\cos\theta(-\cos\theta)\\&=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.\end{aligned}$$

289. 化简 $\operatorname{tg}(180^\circ+\theta)\operatorname{ctg}(180^\circ-\theta)-\cos(180^\circ+\theta)\sin(90^\circ+\theta)$．

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\operatorname{tg}\theta(-\operatorname{ctg}\theta)-(-\cos\theta)\cos\theta\\&=-\operatorname{tg}\theta\operatorname{ctg}\theta+\cos^2\theta\\&=-1+\cos^2\theta=-\sin^2\theta.\end{aligned}$$

290. 化简

$\operatorname{tg}(180^\circ+A)\sin(90^\circ+A)\sec(90^\circ-A)$．

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\operatorname{tg}A\cos A\csc A\\&=\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\cos A\cdot\frac{1}{\sin A}=1.\end{aligned}$$

291. 化简 $\sec(180^\circ+A)\sec(180^\circ-A)+\operatorname{ctg}(90^\circ+A)\operatorname{tg}(180^\circ+A)$．

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=(-\sec A)(-\sec A)+(-\operatorname{tg}A)\operatorname{tg}A\\&=\sec^2 A-\operatorname{tg}^2 A\\&=1+\operatorname{tg}^2 A-\operatorname{tg}^2 A=1.\end{aligned}$$

292. 化简 $a\cos(90^\circ-A)+b\cos(90^\circ+A)$．

解 用 $\cos(90^\circ-A)=\sin A$，$\cos(90^\circ+A)=-\sin A$ 代入原式，则有

原式$=a\sin A-b\sin A=(a-b)\sin A$．

293. 求 6420° 的三角函数．

解 $6420^\circ=360^\circ\times17+300^\circ$．

因此所给角的三角函数与 300° 的三角函数相等，

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sin 6420^\circ&=\sin 300^\circ\\&=\sin(180^\circ+120^\circ)=-\sin 120^\circ\\&=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 6420^\circ&=\cos 300^\circ=\cos(180^\circ+120^\circ)\\&=-\cos 120^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

从而 $\operatorname{tg}6420°=-\sqrt{3}$, $\csc 6420°=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$,
$\sec 6420°=2$, $\operatorname{ctg}6420°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

294. 求 585° 的三角函数.

解 $585°=360°+225°$, 因此所给角的三角函数与 225° 的三角函数相等,

$$\therefore\ \sin 585°=\sin 225°=\sin(180°+45°)=-\sin 45°=\frac{-\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos 585°=\cos 225°=\cos(180°+45°)=-\cos 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

从而 $\operatorname{tg}585°=1$, $\csc 585°=-\sqrt{2}$,
$\sec 585°=-\sqrt{2}$, $\operatorname{ctg}585°=1$.

295. 求 690° 的三角函数.

解 $690°=360°+330°$, 因此所给角的三角函数与 330° 的三角函数相等,

$$\therefore\ \sin 690°=\sin 330°=\sin(180°+150°)=-\sin 150°=-\sin 30°=-\frac{1}{2},$$
$$\cos 690°=\cos 330°=\cos(180°+150°)=-\cos 150°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

从而 $\operatorname{tg}690°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\csc 690°=-2$,
$\sec 690°=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}690°=-\sqrt{3}$.

296. 求 930° 的三角函数.

解 $930°=720°+210°$, 因此所给角的三角函数与 210° 的三角函数相等,

$$\therefore\ \sin 930°=\sin 210°=\sin(180°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2},$$
$$\cos 930°=\cos 210°=\cos(180°+30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

从而 $\operatorname{tg}930°=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\csc 930°=-2$,
$\sec 930°=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}930°=\sqrt{3}$.

297. 把下列函数用最小的正角的函数表示出来: (1) $\sin 1005°$; (2) $\operatorname{tg}(-2232°)$.

解 (1) 因为 $1005°=360°\times 2+285°$, 所以

$$\sin 1005°=\sin 285°=\sin(270°+15°)=-\cos 15°,$$

(2) 因为 $-2232°=-360°\times 6-72°$, 所以

$$\operatorname{tg}(-2232°)=-\operatorname{tg}72°=-\operatorname{ctg}(90°-72°)=-\operatorname{ctg}18°.$$

298. 求下列式子的值:

(1) $\cos 0°\sin 270°+2\cos 180°\operatorname{tg}45°$;

(2) $3\sin 0°\sec 180°+2\csc 90°-3\cos 360°$.

解 在原式中用下列数值代入:
$\cos 0°=1$, $\sin 270°=-1$, $\cos 180°=-1$, $\operatorname{tg}45°=1$, $\sin 0°=0$, $\sec 180°=-1$, $\csc 90°=1$, $\cos 360°=1$, 得

(1) 原式$=-3$, (2) 原式$=-1$.

299. 求 $\operatorname{tg}^2 0°+\operatorname{tg}^2 30°+\operatorname{tg}^2 45°$ 的值.

解 用 $\operatorname{tg}0°=0$, $\operatorname{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg}45°=1$ 代入,得

$$原式=0^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1^2=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}.$$

300. 求满足方程

$$x\sin 45°\cos 45°\operatorname{tg}60°=\operatorname{tg}^2 45°-\cos^2 60°+\sin 180°\operatorname{ctg}90°$$

的值.

解 用 $\sin 45°=\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}45°=1$, $\cos 60°=\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}90°=0$ 代入, 原方程成为 $x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{1}{4}$, 即 $\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$, 从而 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

301. 求 $\cos 570°\sin 510°-\sin 330°\cos 390°$ 的值.

解
$$\begin{aligned}原式&=\cos 210°\sin 150°-(-\sin 30°)\cos 30°\\&=(-\cos 30°)\sin 30°+\sin 30°\cos 30°=0.\end{aligned}$$

302. 求 $\operatorname{tg}225°\operatorname{ctg}405°+\operatorname{tg}765°\operatorname{ctg}675°$ 的值.

解
$$\begin{aligned}原式&=\operatorname{tg}45°\operatorname{ctg}45°+\operatorname{tg}45°\operatorname{ctg}315°\\&=1+\operatorname{ctg}315°=1+\operatorname{ctg}(-45°)\\&=1-\operatorname{ctg}45°=1-1=0.\end{aligned}$$

303. 求 $2\cos 120°\sin 225°-3\sin 120°\times\operatorname{tg}135°$ 的值。

解　把

$$\cos 120°=\cos(180°-60°)=-\cos 60°=-\frac{1}{2},$$

$$\sin 225°=\sin(180°+45°)=-\sin 45°=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 120°=\sin(180°-60°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\operatorname{tg}135°=\operatorname{tg}(180°-45°)=-\operatorname{tg}45°=-1$ 代入原式，得

$$\text{原式}=2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2}.$$

304. 求 $\operatorname{tg}150°\cos 0°+3\cos 180°\operatorname{ctg}150°$ 的值。

解　用 $\operatorname{tg}150°=\operatorname{tg}(180°-30°)=-\operatorname{tg}30°=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos 0°=1$，$\cos 180°=-1$ 和 $\operatorname{ctg}150°=\operatorname{ctg}(180°-30°)=-\operatorname{ctg}30°=-\sqrt{3}$ 代入原式，得

$$\text{原式}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\times 1+3(-1)(-\sqrt{3})=-\frac{1}{\sqrt{3}}+3\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

305. 求 $a^2\cos 0°-b^2\sin 270°-2ab\times\operatorname{tg}135°\operatorname{ctg}225°$ 的值。

解　用 $\cos 0°=1$，$\sin 270°=-1$，$\operatorname{tg}135°=\operatorname{tg}(180°-45°)=-\operatorname{tg}45°=-1$，$\operatorname{ctg}225°=\operatorname{ctg}(180°+45°)=\operatorname{ctg}45°=1$ 代入原式，得

$$\text{原式}=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2.$$

306. 求 $\cos 180°\operatorname{tg}(-45°)+\sin 150°\times\sec 210°$ 的值。

解　用 $\cos 180°=-1$，

$$\operatorname{tg}(-45°)=-\operatorname{tg}45°=-1,$$

$$\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 30°=\frac{1}{2},$$

$\sec 210°=\sec(180°+30°)=-\sec 30°=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 代入原式，得

$$\text{原式}=(-1)(-1)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

307. 把下列三角函数用小于 $90°$ 的正角的三角函数表示出来：$\sin(-300°)$，$\operatorname{tg}1345°$，$\cos(-1000°)$。

解　$\sin(-300°)=\sin(-360°+60°)=\sin 60°$，

$$\operatorname{tg}1345°=\operatorname{tg}(360°\times 3+265°)=\operatorname{tg}265°=\operatorname{tg}(180°+85°)=\operatorname{tg}85°,$$

$$\cos(-1000°)=\cos(-360°\times 3+80°)=\cos 80°.$$

308. 求 $\sin 480°$，$\cos 4080°$，$\operatorname{tg}8400°$ 的值。

解　$\sin 480°=\sin(360°+120°)=\sin 120°=\sin(90°+30°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$$\cos 4080°=\cos(360°\times 11+120°)=\cos 120°=\cos(90°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}8400°=\operatorname{tg}(360°\times 23+120°)=\operatorname{tg}120°=\operatorname{tg}(90°+30°)=-\operatorname{ctg}30°=-\sqrt{3}.$$

309. 把下列各三角函数化成小于 $45°$ $\left(\text{或 }\frac{1}{4}\pi\right)$ 的正角的三角函数。

(1) $\sin 740°$，　(2) $\cos(-300°)$，

(3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{3}\pi\right)$，　(4) $\csc 1120°$，

(5) $\csc(-60°)$。

解　(1) $740°=360°\times 2+20°$，

$\therefore\ \sin 740°=\sin 20°$。

(2) $-300°=-360°+60°$，

$\therefore\ \cos(-300°)=\cos 60°=\sin 30°$。

(3) $$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\pi=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}.$$

(4) $1120°=360°\times 3+40°$，

$\therefore\ \csc 1120°=\csc 40°$。

(5) $\csc(-60°)=-\csc 60°=-\sec 30°$.

310. 把 $\sin 7321°$, $\cos(-8146°)$, $\mathrm{tg}\,7389°$, $\mathrm{ctg}\,375°$, $\sec(-8325°)$, $\csc 1732°$ 化成小于 $45°$ 的正角的三角函数.

解 $\sin 7321°=\sin(360°\times 20+121°)$
$=\sin 121°=\sin(90°+31°)$
$=\cos 31°$,

$\cos(-8146°)=\cos(-360°\times 22-226°)$
$=\cos 226°=\cos(180°+46°)$
$=-\cos 46°=-\sin 44°$,

$\mathrm{tg}\,7389°=\mathrm{tg}(360°\times 20+189°)$
$=\mathrm{tg}\,189°=\mathrm{tg}(180°+9°)=\mathrm{tg}\,9°$,

$\mathrm{ctg}\,375°=\mathrm{ctg}(360°+15°)=\mathrm{ctg}\,15°$,

$\sec(-8325°)=\sec(-360°\times 23-45°)$
$=\sec(-45°)=\sec 45°$,

$\csc 1732°=\csc(360°\times 4+292°)$
$=\csc 292°=\csc(180°+112°)$
$=-\csc 112°=-\csc(90°+22°)$
$=-\sec 22°$.

311. 求 $A-270°$ 的三角函数.

解 $\sin(A-270°)=-\sin(270°-A)$
$=\sin(90°-A)=\cos A$,

$\cos(A-270°)=\cos(270°-A)$
$=-\cos(90°-A)=-\sin A$,

$\mathrm{tg}(A-270°)=-\mathrm{tg}(270°-A)$
$=-\mathrm{tg}(90°-A)=-\mathrm{ctg}\,A$,

$\csc(A-270°)=\sec A$,

$\sec(A-270°)=-\csc A$,

$\mathrm{ctg}(A-270°)=-\mathrm{tg}\,A$.

312. 把 $\sin 25°$, $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{8}$ 用钝角的同名三角函数表示出来.

解 $\sin 25°=\sin(180°-25°)=\sin 155°$,

$$\mathrm{ctg}\frac{\pi}{8}=-\mathrm{ctg}\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\mathrm{ctg}\frac{7}{8}\pi.$$

313. 把 $\sin 112°$, $\cos(-350°)$ 用锐角的正弦表示出来.

解 $\sin 112°=\sin(180°-112°)=\sin 68°$,

$\cos(-350°)=\cos(-360°+10°)$
$=\cos 10°=\sin 80°$.

314. 求 $0°$ 至 $900°$ 间所有适合 $\mathrm{tg}\,\theta=1$ 的角 θ.

解 最小的一个角是 $45°$, 而其余各角可经过逐次增加 $180°$ 求得. 因此,所求的全部角为 $45°$, $225°$, $405°$, $585°$, $765°$.

315. 求 $0°$ 至 $900°$ 间所有适合 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$ 的角 θ.

解 因为 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$, 所以 $\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, 取正号时最小的角是 $45°$. 因此其余各角为 $360°-45°$、$360°+45°$、$720°-45°$、$720°+45°$, 即 $315°$、$405°$、$675°$、$765°$. 取负号时最小角为 $135°$. 因此其余各角为 $360°-135°$、$360°+135°$、$720°-135°$、$720°+135°$, 即 $225°$、$495°$、$585°$、$855°$.

316. 求下列三个角的所有三角函数:
(1) $120°$, (2) $135°$, (3) $150°$.

解 (1) $\sin 120°=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos 120°=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$,

$\mathrm{tg}\,120°=-\mathrm{tg}\,60°=-\sqrt{3}$,

从而 $\csc 120°=\csc 60°=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\sec 120°=-\sec 60°=-2$,

$\mathrm{ctg}\,120°=-\mathrm{ctg}\,60°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) $\sin 135°=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 135°=-\cos 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\mathrm{tg}\,135°=-\mathrm{tg}\,45°=-1$,

从而 $\csc 135°=\frac{1}{\sin 135°}=\sqrt{2}$,

$\sec 135°=\frac{1}{\cos 135°}=-\sqrt{2}$,

$\mathrm{ctg}\,135°=\frac{1}{\mathrm{tg}\,135°}=-1$.

(3) $\sin 150°=\sin 30°=\frac{1}{2}$,

$\cos 150°=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\mathrm{tg}\,150°=-\mathrm{tg}\,30°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

从而 $\csc 150°=\frac{1}{\sin 150°}=2$,

$\sec 150°=\frac{1}{\cos 150°}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$$\mathrm{ctg}\,150^\circ=\frac{1}{\mathrm{tg}\,150^\circ}=-\sqrt{3}.$$

317. 求下列各函数的值:

(1) $\sin 210^\circ$，(2) $\cos 240^\circ$，(3) $\mathrm{tg}\,225^\circ$.

解　(1) $\sin 210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)$
$$=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2},$$

(2) $\cos 240^\circ=\cos(180^\circ+60^\circ)$
$$=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2},$$

(3) $\mathrm{tg}\,225^\circ=\mathrm{tg}(180^\circ+45^\circ)$
$$=\mathrm{tg}\,45^\circ=1.$$

318. 找出360°内的正角，分别与3848°、648°有相同的终边．再找出与8542°，539°，600°，−100°同终边的锐角．研究这些角的三角函数与原来角的三角函数有何关系．

解　因为 $3848^\circ=360^\circ\times10+248^\circ$，所以3848°的三角函数都和248°的同名三角函数相等．而 $648^\circ=360^\circ+288^\circ$，所以648°的三角函数和288°的同名三角函数相等．因为 $8542^\circ=180^\circ\times47+82^\circ$，所以它的正弦、余弦、正割、余割分别和82°的同名三角函数绝对值相等、符号相反．但8542°的正切、余切和82°的正切、余切绝对值、符号都相同．由于 $539^\circ=180^\circ\times3-1^\circ$，所以539°的正弦、余割和1°的正弦、余割相等，而539°的其他的函数和1°的同名函数绝对值相等、符号相反．由于 $600^\circ=180^\circ\times3+60^\circ$，所以600°的三角函数中只有正切、余切和60°的同名三角函数相等，而其他的则只是符号相反．由于 $-100^\circ=-180^\circ+80^\circ$，所以−100°的正切、余切和80°的同名函数相等，而−100°的正弦、余弦、正割、余割则分别和80°的同名函数绝对值相等、符号相反．

319. 研究130°，290°，−340°的三角函数的符号．

解　130°是第二象限的角，所以只有正弦、余割是正的，其他函数全是负的．290°是第四象限的角，所以只有余弦和正割是正的，其他函数全是负的．−340°是第一象限的角，所以所有的函数都是正的．

320. 求 $\cos 405^\circ$，$\mathrm{tg}\,210^\circ$，$\mathrm{ctg}(-315^\circ)$ 的值．

解　$\cos 405^\circ=\cos(360^\circ+45^\circ)$
$$=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\mathrm{tg}\,210^\circ=\mathrm{tg}(180^\circ+30^\circ)=\mathrm{tg}\,30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\mathrm{ctg}(-315^\circ)=\mathrm{ctg}(45^\circ-360^\circ)=\mathrm{ctg}\,45^\circ=1.$$

321. 求下列各三角函数的值．

(1) $\sin 495^\circ$，$\cos 495^\circ$，$\mathrm{ctg}\,495^\circ$；

(2) $\sec 120^\circ$，$\mathrm{tg}\,120^\circ$，$\csc 120^\circ$；

(3) $\csc 315^\circ$，$\sec 315^\circ$，$\mathrm{ctg}\,315^\circ$；

(4) $\mathrm{tg}(-300^\circ)$，$\mathrm{ctg}(-300^\circ)$，$\sec(-300^\circ)$；

(5) $\cos(-240^\circ)$，$\sec(-240^\circ)$，$\mathrm{tg}(-240^\circ)$．

解　(1) 因为 $495^\circ=360^\circ+135^\circ$，$135^\circ=180^\circ-45^\circ$，所以
$$\sin 495^\circ=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos 495^\circ=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$
从而　$\mathrm{ctg}\,495^\circ=-1.$

(2) 因为 $120^\circ=180^\circ-60^\circ$，所以
$$\sec 120^\circ=-\sec 60^\circ=-2,$$
$$\mathrm{tg}\,120^\circ=-\mathrm{tg}\,60^\circ=-\sqrt{3},$$
$$\csc 120^\circ=\csc 60^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(3) 因为 $315^\circ=360^\circ-45^\circ$，所以
$$\csc 315^\circ=-\csc 45^\circ=-\sqrt{2},$$
$$\sec 315^\circ=\sec 45^\circ=\sqrt{2},$$
$$\mathrm{ctg}\,315^\circ=-\mathrm{ctg}\,45^\circ=-1.$$

(4) 因为 $-300^\circ=-360^\circ+60^\circ$，所以
$$\mathrm{tg}(-300^\circ)=\mathrm{tg}\,60^\circ=\sqrt{3},$$
$$\mathrm{ctg}(-300^\circ)=\mathrm{ctg}\,60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\sec(-300^\circ)=\sec 60^\circ=2.$$

(5) 因为 $-240^\circ=-360^\circ+120^\circ$，而 $120^\circ=180^\circ-60^\circ$，
$$\therefore\quad \cos(-240^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2},$$
$$\sec(-240^\circ)=-\sec 60^\circ=-2,$$
$$\mathrm{tg}(-240^\circ)=-\mathrm{tg}\,60^\circ=-\sqrt{3}.$$

322． 证明 $\csc(90°+A)\sec(360°-A)+\sin(180°+A)\sec A\,\text{tg}(180°+A)=\text{tg}(45°+A)\,\text{tg}(45°-A)$。

解　原式左边 $=\sec A\sec(-A)+(-\sin A)\sec A\,\text{tg}\,A$

$$=\frac{1}{\cos^2 A}-\frac{\sin A\sin A}{\cos A\cos A}$$

$$=\frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}=\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}=1,$$

而原式右边 $=\text{ctg}[90°-(45°+A)]\,\text{tg}(45°-A)$
$=\text{ctg}(45°-A)\,\text{tg}(45°-A)=1$.

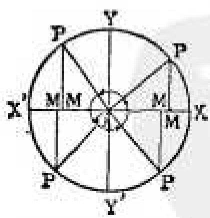
323． 哪个三角函数对于 $-23°$、$-157°$ 和 $157°$ 有相同的函数值．

解　$-23°$ 是第四象限的角．$-157°$ 是第三象限的角，$157°$ 是第二象限的角．因为没有一种三角函数在这三个象限里同号，所以能对这三角取相同函数值的三角函数是不存在的。

2．三角函数的图象

324． 叙述三角函数的变化情况。

解　由定义，动半径 OP 从初始位置 OX 出发，依次经过一、二、三、四各象限时，$\angle XOP$ 所代表的角的三角函数变动情况如下：



象限		一		二		三		四	
函数＼角	0°		90°		180°		270°		360°
sin	0	+增	1	+减	0	−减	−1	−增	0
cos	1	+减	0	−减	−1	−增	0	+增	1
tg	0	+增	$\frac{\infty}{-\infty}$	−增	0	+增	$\frac{\infty}{-\infty}$	−增	0
ctg	∞	+减	0	−减	$\frac{-\infty}{\infty}$	+减	0	−减	−∞
sec	1	+增	$\frac{\infty}{-\infty}$	−增	−1	−减	$\frac{-\infty}{\infty}$	+减	1
csc	∞	+减	1	+增	$\frac{\infty}{-\infty}$	−增	−1	−减	−∞

注　1．表中"角"的一栏中，0°，90°，180°，270°，360° 可以分别加上 360° 的任意整倍数。

2．A 从第一象限中趋近 90° 时，$\text{tg}\,A$ 是正的并成为 ∞，而 A 从第二象限趋近 90° 时 $\text{tg}\,A$ 是负的，其绝对值成为 ∞，因而可写成 $-\infty$。本来对 $\text{tg}\,90°$ 根本不能赋以一定的数值（∞ 不是数），因此我们只能说当 A 无限趋近 90° 时，$\text{tg}\,A$ 变化的趋势是 ∞ 或 $-\infty$。另外，90° 的奇数倍角的正切、正割，90° 的偶数倍角的余切、余割，一般地也常常要象上面那样考虑。

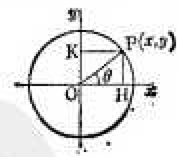
3．不管在哪个象限中，正弦和余弦的绝对值不大于 1，正割和余割的绝对值不小于 1．正切和余切则没有这样的界限。

325． 画 $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ 的图象。

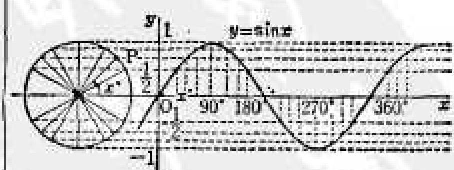
解　正弦曲线，余弦曲线．

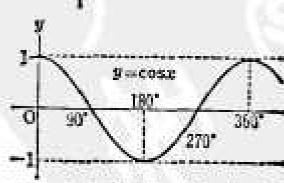
与基线 Ox 成角 θ 的一条动半径，交以 O 为圆心、半径为 1 的圆（单位圆）于点 P，设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，则有

$$\sin\theta=y=OK,$$
$$\cos\theta=x=OH.$$



考察当 θ 变化时 OK、OH 的变化状态，就可以分别得到 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的图象。





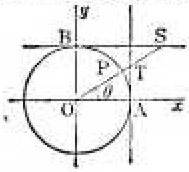
这两条曲线分别称为正弦曲线和余弦曲线．

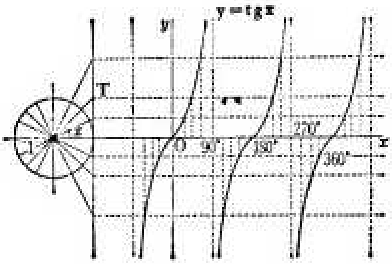
此外，因为 $y=\cos x=\sin(x+90°)$，所以 $y=\cos x$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象向左平移 90° 得到．

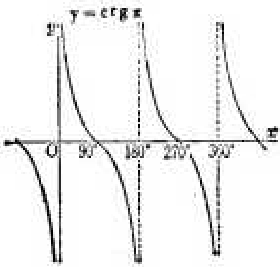
326． 画 $y=\text{tg}\,\theta$，$y=\text{ctg}\,\theta$ 的图象。

解　正切曲线，余切曲线.

如右图，单位圆与 x 轴、y 轴的交点分别设为 A、B. A、B 处的切线和一条与基线 Ox 成 θ 角的动半径 OP 分别交于 T、S，则 $\operatorname{tg}\theta=AT$，$\operatorname{ctg}\theta=BS$. 由 AT，BS 的变化状态可得 $y=\operatorname{tg}\theta$，$y=\operatorname{ctg}\theta$ 的图象。







这两条曲线分别称为正切曲线和余切曲线。

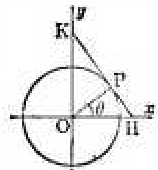
327. 画 $y=\sec\theta$，$y=\csc\theta$ 的图象。

解　正割曲线，余割曲线。

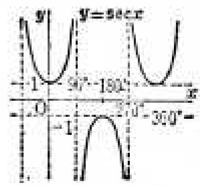
设有与基线 Ox 成角 θ 的一条动半径，交单位圆于点 P. 单位圆在 P 点的切线与 x 轴、y 轴的交点分别记为 H、K，则

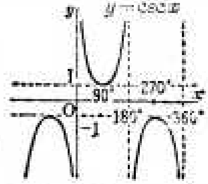
$\sec\theta=OH$，$\csc\theta=OK$.

由 OH，OK 的变化状态，可得 $y=\sec x$，$y=\csc x$ 的图象。



这些曲线分别称为正割曲线和余割曲线。余割曲线可以由正割曲线向右平移 $90°$ 后得到。





328. 当 a、b 都是非 0 实数时，证明下列两个函数的图象可以经平移后重合：

$$y=a\sin x+b\cos x, \qquad ①$$

$$y=a\sin x-b\cos x. \qquad ②$$

特别地，当 $a=b$ 时，图象 ① 经过怎样的平移可以和图象 ② 重合？

解　因为

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$$

所以可定出一个 θ 使得

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$0\leqq\theta<2\pi.$$

这时从 ① 可得

$$y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta), \qquad ①'$$

从 ② 可得　$y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x-\theta)$，　②′

因为 ①′，②′ 是由 $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin x$ 沿 x 轴分别平移 $-\theta$，θ 所得的，所以 ①′、②′ 即 ①、② 可以经平移而重合。$a=b$ 时，从 ①、② 可得

$$y=\sqrt{2}\,a\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right), \qquad ③$$

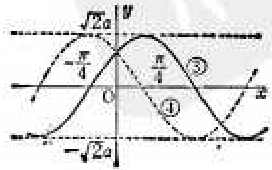
$$y=\sqrt{2}\,a\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right). \qquad ④$$

只要把 ③ 沿 x 轴平移 $2n\pi+\frac{\pi}{2}$（n 为整数），就可得到 ④：

$$y=\sqrt{2}\,a\sin\left\{\left[x-\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]+\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$=\sqrt{2}\,a\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-2n\pi\right)$$

$$=\sqrt{2}\,a\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

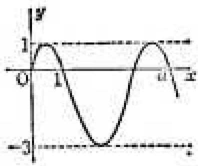


因而只要把①平移 $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n 为任意整数)就行了.

329. 下图是

$$y=R\cos\left(\frac{2\pi}{3}x+\theta\right)-1$$

的图象的一部分. 求 R、θ 和 a 的值. 其中 R 是正数而角用弧度制表示.



解 从图可知, $x=1$ 时和 $x=a$ 时波的位相相同, 于是知道 $a-1$ 为周期. 从而

$$a-1=2\pi\div\frac{2}{3}\pi,\quad \therefore\quad a=4.$$

再考察振幅,

$$2R=1-(-3),$$
$$\therefore\quad R=2.$$

又因为 $x=0$ 时 $y=0$, 从而

$$2\cos\theta=1.\qquad ①$$

而 $x=1$ 时 $y=0$,

$$\therefore\quad 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=1.\qquad ②$$

由①、②得

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore\quad \theta=-\frac{\pi}{3}+2n\pi.$$

所以, $R=2,\ \theta=-\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ a=4.$

330. 把 $y=\sin x$ 的图象

(1) 向上平移 5, 方程如何变化?

(2) 向左平移 $90°$, 方程如何变化?

(3) 化简(2)中所得的方程.

解 (1) $y-5=\sin x$, $\therefore\ y=5+\sin x$.

(2) $y=\sin(x+90°)$.

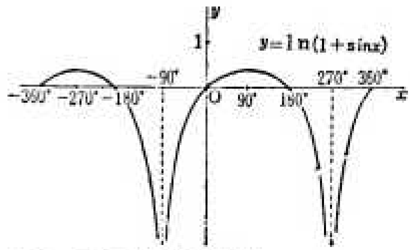
(3) $y=\cos x$.

331. 画出下列函数图象的大体形状:

$$y=\ln(1+\sin x),$$

其中 $\qquad -360°\leq x\leq 360°.$

解 因为 $x=-90°$, $x=270°$ 时 $1+\sin x=0$, 所以 $y=\ln(1+\sin x)$ 不连续. 而 $x=-270°$, $x=90°$ 时 $y=\ln 2$; $x=-360°$, $x=-180°$, $x=0°$, $x=180°$, $x=360°$ 时 $y=\ln 1=0$. 图象如下.



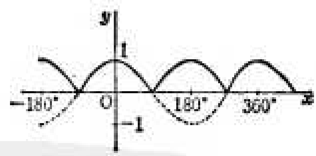
332. 画下列函数的图象:

(1) $y=|\cos x|$;

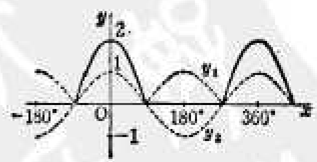
(2) $y=|\cos x|+\cos x$;

(3) $y=|\cos x|-\cos x$.

解 (1) $\cos x\geq 0$ 时有 $y=\cos x$, $\cos x<0$ 时有 $y=-\cos x$, 因此 $y=|\cos x|$ 的图象, 可把 $y=\cos x$ 图象在 x 轴下方的部分关于 x 轴作对称而得, 得到如下的图.



(2) 若 $y_1=|\cos x|$, $y_2=\cos x$, 则 $y=y_1+y_2$.



(3) 与(2)同理可得 $y=y_1-y_2$(图略).

333. 画下列函数的图象:

(1) $y=\sin|x|$; (2) $y=\sin|x|+\sin x$.

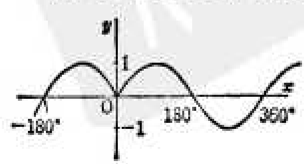
解 (1) $x\geq 0$ 时 $y=\sin|x|$ 成为

$$y=\sin x,\qquad ①$$

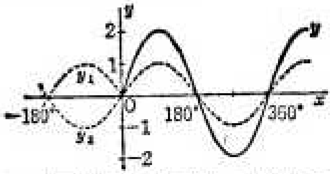
而 $x<0$ 时, $y=\sin|x|$ 成为

$$y=\sin(-x),$$

从而 $y=\sin|x|$ 的图象关于 y 轴对称.



(2) 设 $y_1=\sin|x|$，$y_2=\sin x$，因为 $y=y_1+y_2$，所以可由 y_1、y_2 两个图象迭加，得到 $y=\sin|x|+\sin x$ 的图象。

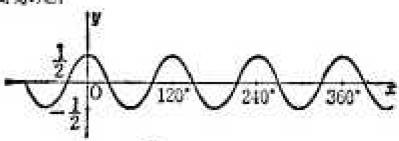


334. 求下列函数的周期，并绘出函数的图象。

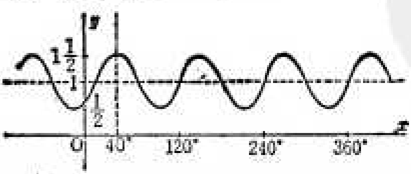
(1) $y=\frac{1}{2}\cos 3x$;

(2) $y=\frac{1}{2}\cos(3x-120°)+1$.

解 (1) (1)、(2)的周期都是 120°。(1)的图象是：



(2) 因为 $y=\frac{1}{2}\cos 3(x-40°)+1$，所以这个函数的图象可由(1)的图象向右平移 40°，且向上平移 1 得到。图象是：



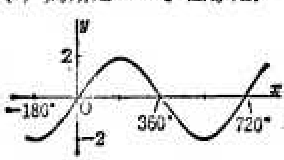
335. 下列函数的周期是什么？绘出它们的图象。

(1) $y=2\sin\frac{x}{2}$;

(2) $y=2\sin\left(\frac{x}{2}+60°\right)$;

(3) $y=2\sin^2 x$.

解 (1) 周期是 720°。图象是：

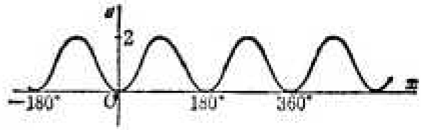


(2) $y=2\sin\left(\frac{x}{2}+60°\right)$

$$=2\sin\frac{1}{2}(x+120°),$$

从而这个函数的图象可由(1)的曲线向左平移 120° 而得。（图略）

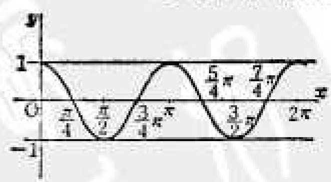
(3) 周期是 180°。图象是：



336. 讨论当角 θ 从 0 变到 2π 时，$\cos^2\theta-\sin^2\theta$ 的符号和值如何变化。

解 若 θ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$，则 $\cos^2\theta$ 从 1 变到 0，$\sin^2\theta$ 从 0 变到 1，因而 $\cos^2\theta-\sin^2\theta$ 从 1 变到 -1。若 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 π，则 $\cos^2\theta-\sin^2\theta$ 从 -1 变到 1。若 θ 从 π 变到 $\frac{3\pi}{2}$，$\cos^2\theta-\sin^2\theta$ 从 1 变到 -1。若 θ 从 $\frac{3\pi}{2}$ 变到 2π，$\cos^2\theta-\sin^2\theta$ 从 -1 变到 1。

注　$\cos^2\theta-\sin^2\theta$ 的图象如下图所示。



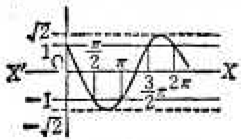
337. 讨论当角 θ 从 0 变到 2π 时，$\cos\theta-\sin\theta$ 的符号和值如何变化。

解 $\theta=0$ 时有 $\cos\theta=1$，$\sin\theta=0$。从而这时 $\cos\theta-\sin\theta=1$。若 θ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\theta$ 从 1 变到 0，$\sin\theta$ 从 0 变到 1，从而 $\cos\theta-\sin\theta$ 从 1 变到 -1，其中 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时 $\cos\theta-\sin\theta$ 的值为 0。若 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 π，$\cos\theta$ 从 0 变到 -1，$\sin\theta$ 从 1 变到 0，从而 $\cos\theta-\sin\theta$ 常为负值，而当 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时取最小值 $-\sqrt{2}$，这是因为

$$(\cos\theta+\sin\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2$$
$$=2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=2,$$

所以 $(\cos\theta-\sin\theta)^2$ 当 $\cos\theta+\sin\theta$ 为 0，即 $\operatorname{tg}\theta=-1$，亦即 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ 时才有最大值。θ 从 π 变到 $\frac{3\pi}{2}$ 时 $\cos\theta-\sin\theta$ 的值，和 θ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时 $\cos\theta-\sin\theta$ 的数值绝对值相同符号相反。θ 从 $\frac{3\pi}{2}$ 变到 2π 时 $\cos\theta-\sin\theta$ 的值，和 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 π 时 $\cos\theta-\sin\theta$ 的数值绝对值相同符号相反。

注　在直线 $X'X$ 上取一些适当的 θ 值，以此为一个端点作 $X'X$ 的垂线段，长度等于把 θ 的值代入 $\cos\theta-\sin\theta$ 后所得到的值。当值为正时垂线段在 XX' 上方，值为负时垂线段在 XX' 下方。象这样把 0 到 2π 间各个值代入 θ，得到一些适当长度的线段后，就可以用垂线段的另一端点连出一条曲线来。由此可以使 $\cos\theta-\sin\theta$ 的变化一目了然，这就是 $\cos\theta-\sin\theta$ 的图象。



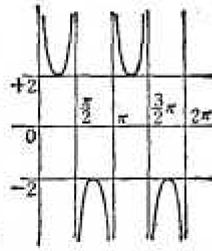
338. 讨论当角 θ 从 0 变到 2π 时，$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta$ 的符号和值如何变化。

解　$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta=\operatorname{tg}\theta+\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$，$\theta$ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg}\theta$ 从 0 趋于无穷大。所以这时 $\operatorname{tg}\theta$ 常为正。$\operatorname{tg}\theta+\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$ 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时有最小值，这是因为

$$\left(\operatorname{tg}\theta+\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\right)^2=\left(\operatorname{tg}\theta-\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\right)^2+4,$$

因而 $\left(\operatorname{tg}\theta+\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\right)^2$ 当 $\operatorname{tg}\theta-\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$ 为 0 时有最小值 4，即 $\operatorname{tg}^2\theta=1$ 时有最小值 4。由此，$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta$ 当 θ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，其值相应从无穷大减小到 2。θ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，其值相应从 2 趋向于无穷大。θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 π 时，$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta$ 的值与当 θ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时 $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta$ 的数值绝对值相同、符号相反，但对应次序相反（即 0 与 π 对应，$\frac{1}{6}\pi$ 与 $\frac{5\pi}{6}$ 对应，等等）。θ 从 π 变到 2π 时，$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta$ 的值与当 θ 从 0 变到 π 时 $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta$ 的值相等。

注　象上题的注那样，若作出表示变化的曲线，则如右图所示。



339. 求 $\sin\left[\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right]$ 所有可能的值，其中 n 为 0 或任意正整数。

解　若假定 $n=0$，则得 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$。再设 $n=1$，则得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

然后再设 $n=2$，则得

$$\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}.$$

再设 $n=3$，则得

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

以后重复地取得上述各值。例如当 $n=4$ 时，

$$\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}.$$

340. 讨论当角 A 从 0° 增大到 360° 时，$1-\cos A$ 的值的变化。

解　当 A 从 0° 变到 90° 时，$\cos A$ 从 1 减少到 0。当 A 从 90° 变到 180° 时，$\cos A$ 从 0 继续减少到 -1。以后当 A 变到 270° 时 $\cos A$ 增大到 0，而当 A 变到 360° 时 $\cos A$ 增大到 1。从而，当 A 从 0° 变到 90° 时 $1-\cos A$ 从 0 增大到 1；A 从 90° 变到 180° 时 $1-\cos A$ 从 1 增大到 2；A 从 180° 变到 270° 时 $1-\cos A$ 从 2 减少到 1，A 从 270° 变到 360° 时 $1-\cos A$ 从 1 减少到 0。

341. 证明：对任何 A 值有

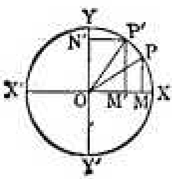
$$\cos(90°-A)=\sin A$$

和

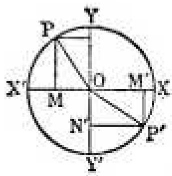
$$\operatorname{ctg}(90°-A)=\operatorname{tg}A.$$

解　两条动半径 OP 和 OP' 同时从始边 OX 出发，分别给出代表 A 和 $90°-A$ 的角。下面的一种思考方法，比把 OP' 看成是直接转出 $90°-A$ 来说更为方便：即把 OP' 看成是先从始边出发转得 $90°$（即到达 OY 的位置），然后改变旋转方向（即向负角方向），旋转一个与 $\angle XOP$ 相等（即大小为 A）的角。设如此得到了 P 和 P'，PM 和 $P'M'$ 是 $X'OX$ 的垂线，$P'N'$ 是 YOY' 的垂线。正如下图的各种情况所示，$N'P'$ 即 OM' 都和 MP 大小相同。而 P 在 $X'OX$ 上方或是下方时，P' 相应地在 $Y'OY$ 的右侧或左侧。因而 MP 和 OM' 的符号常相同，因而常有 $\frac{MP}{OP}=\frac{OM'}{OP'}$，即 $\sin A=\cos(90°-A)$，另一个关系式也可同样地给以证明。

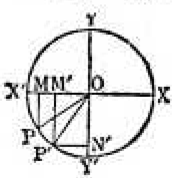
OP 在第一象限



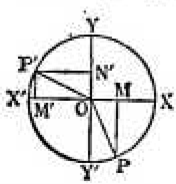
OP 在第二象限



OP 在第三象限



OP 在第四象限



342． 当角 A 从 $0°$ 增大到 $360°$ 时，表示出 $1-\sin A$ 的值的变化情况。

解　$1-\sin A$ 的值的变化如下表：

A	$0°\sim90°$	$90°\sim180°$	$180°\sim270°$	$270°\sim360°$
$\sin A$	$0\cdots1$	$1\cdots0$	$0\cdots-1$	$-1\cdots0$
$1-\sin A$	$1\cdots0$	$0\cdots1$	$1\cdots2$	$2\cdots1$

343． 当角 A 从 $0°$ 增大到 $360°$ 时，研究 $\sin^2 A$ 的变化情况。

解　象上题一样，用下表表示：

A	$0°\sim90°$	$90°\sim180°$	$180°\sim270°$	$270°\sim360°$
$\sin A$	$0\cdots1$	$1\cdots0$	$0\cdots-1$	$-1\cdots0$
$\sin^2 A$	$0\cdots1$	$1\cdots0$	$0\cdots1$	$1\cdots0$

344． 当 A 从 $0°$ 变到 $90°$ 时，考察 $\sec A-\operatorname{tg} A$ 是怎样变化的。

解　$\because\ \sec^2 A-\operatorname{tg}^2 A=1$，

$$\therefore\ \sec A-\operatorname{tg} A=\frac{1}{\sec A+\operatorname{tg} A}.$$

因为 A 为 $0°$ 时 $\sec A=1$，而 $\operatorname{tg} A=0$，所以 $\frac{1}{\sec A+\operatorname{tg} A}$ 亦即 $\sec A-\operatorname{tg} A$ 为 1。当 A 从 $0°$ 增大时 $\sec A$ 和 $\operatorname{tg} A$ 都是增大的，因而 $\frac{1}{\sec A+\operatorname{tg} A}$ 亦即 $\sec A-\operatorname{tg} A$ 减小。而当 A 趋近 $90°$ 时，$\sec A$ 和 $\operatorname{tg} A$ 都趋于 ∞，因而 $\frac{1}{\sec A+\operatorname{tg} A}$ 亦即 $\sec A-\operatorname{tg} A$ 趋于 0。

345． 画出函数 $y=|\sin x+\cos x-1|$ 的图象。

解　如下一章所要说明的，

$$\begin{aligned}&\sin x+\cos x\\&=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\\&=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

因而若设 $y_1=\sin x+\cos x-1$，则 $y=|y_1|$ 和 y_1 的周期都是 2π，由于

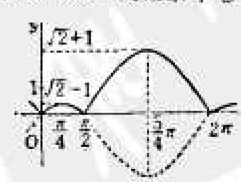
$$y_1=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1,$$

所以 y_1 的图象可由 $\sqrt{2}\sin x$ 的图象平移而得，$y_1=0$ 时有

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2n\pi$$

或

$$\frac{3\pi}{4}+2n\pi,$$



从而 y_1 及 y 的图象和 x 轴交于 $x=2n\pi$ 或 $2n\pi+\frac{\pi}{2}$（n 为整数）。因此图象如上图所示。

346． 画出下列函数的图象：

(1) $y=3\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$；

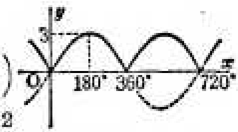
(2) $y=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+60^\circ\right)$；

(3) $y=\log_2(1+\sin x)$.

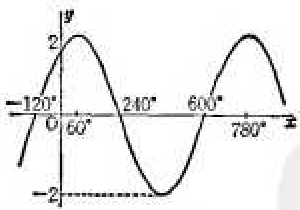
解　(1) 函数 $y=3\sin\dfrac{x}{2}$ 的周期为 720°，而 $y=3\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$ 的周期为 360°，这是因为

$$\left|\sin\frac{x+360^\circ}{2}\right|=\left|-\sin\frac{x}{2}\right|=\left|\sin\frac{x}{2}\right|.$$

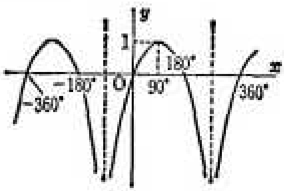
其图象如下。



(2) 函数 $y=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+60^\circ\right)$ 的周期为 $360^\circ\times2=720^\circ$．其图象可由 $y=2\sin\dfrac{x}{2}$ 的图象平移而得如下。



(3) 当 $x=-90^\circ+360^\circ n$（n 为整数）时函数 $y=\log_2(1+\sin x)$ 没有定义．当 x 趋于上述值时 $y\to-\infty$．这个函数的周期为 360°．当 $x=90^\circ+360^\circ n$（n 为整数）时函数取极大值．这个函数的图象还关于直线 $x=90^\circ+360^\circ n$（n 为整数）对称。



347．在半径为 1 的圆周上有 P、Q 两点，同时从圆上的定点 A 出发，分别以角速度每秒 $\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\dfrac{\pi}{5}$ 在圆周上向同一方向旋转。

(1) 出发后几秒时 PQ 的中点 M 和圆心 O 重合？

(2) 圆心 O 与中点 M 的距离 d 如何用经过的时间 t 表示出来？画出这个关系式的大概图象。

解　(1) 设出发 t 秒后 $\angle AOP=\alpha$，$\angle AOQ=\beta$．则

$$\alpha=\frac{\pi}{3}t,\ \beta=\frac{\pi}{5}t.$$

PQ 的中点 M 和圆心 O 重合，就是 P、Q 成为一条直径的两端的时候．因而

$$\alpha-\beta=(2n-1)\pi,\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\therefore\quad \frac{2\pi}{15}\cdot t=(2n-1)\pi,$$

$$\therefore\quad t=\frac{15(2n-1)}{2}=7.5(2n-1)\text{秒}.$$

（n 为正整数）

(2) 设圆心 O 为原点，取 OA 为 x 轴的正向，则 P、Q 的坐标为

$$P\left(\cos\frac{\pi t}{3},\ \sin\frac{\pi t}{3}\right),$$

$$Q\left(\cos\frac{\pi t}{5},\ \sin\frac{\pi t}{5}\right),$$

从而 M 点的坐标为

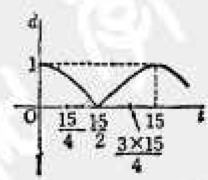
$$x_0=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi t}{3}+\cos\frac{\pi t}{5}\right),$$

$$y_0=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi t}{3}+\sin\frac{\pi t}{5}\right).$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad d^2&=x_0^2+y_0^2\\&=\frac{1}{4}\left[2+2\left(\cos\frac{\pi t}{3}\cos\frac{\pi t}{5}+\sin\frac{\pi t}{3}\sin\frac{\pi t}{5}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi t}{15}\right)\\&=\cos^2\frac{\pi t}{15}.\end{aligned}$$

从而　$d=\left|\cos\dfrac{\pi t}{15}\right|$.

其图象如右图。



348．画出在 $0\leq x\leq2\pi$，$0\leq y\leq2\pi$ 范围内 $\sin^2 2x+\cos^2 y=1$ 的图象。

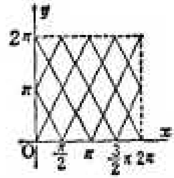
解　$\because\ \cos^2 y=1-\sin^2 2x,$

$\therefore\ \cos^2 y=\cos^2 2x.$

因而 $\cos y=\pm\cos 2x$．由 $\cos y=\cos 2x$ 得 $y=\pm2x+2n\pi$，由 $\cos y=-\cos 2x=\cos(2x+\pi)$

得 $y=\pm 2x+(2m+1)\pi$ (m 是任意整数). 这些关系可以综合成

$$y=2x+n\pi,\quad ①$$
$$y=-2x+n\pi.\quad ②$$



其中 n 为任意整数. 从而在正方形 $0\leq x\leq 2\pi$, $0\leq y\leq 2\pi$ 中, 所求的图象是 ① 式中对应于 $-3\leq n\leq 1$, ② 式中对应于 $1\leq n\leq 5$ 的那些线段.

349. 设 $F=\cos x-\cos y-\sin(x+y)$.

(1) 证明

$$F=4\sin\frac{x+y}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

(2) 满足 $F=0$ 的点 (x, y) 构成怎样的图形? 画出它的略图.

解 (1) 据第四章给出的加法定理,

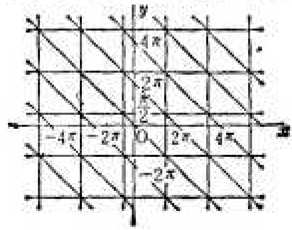
$$\begin{aligned}F&=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\&\quad-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\\&=-2\sin\frac{x+y}{2}\left(\sin\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\right)\\&=-2\sin\frac{x+y}{2}\Big[\sin\frac{x-y}{2}\\&\quad+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x+y}{2}\right)\Big]\\&=-4\sin\frac{x+y}{2}\\&\quad\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\\&=4\sin\frac{x+y}{2}\sin\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\&\quad\times\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]\\&=4\sin\frac{x+y}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\\&\quad\times\sin\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

(2) 由 $F=0$ 可得

$$\frac{x+y}{2}=l\pi\quad 或\quad \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=m\pi$$

或
$$\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}=n\pi,$$

其中 l、m、n 都是整数. 从而



$$x+y=2l\pi,\ x=2m\pi-\frac{\pi}{2},$$
$$y=2n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

(x, y) 构成的图形如上.

350. 已知 $\sin 2x+\sin 2y=\sin(x+y)$, 试求 x、y 之间的关系. 画出这些关系在 $0\leq x\leq 2\pi$, $0\leq y\leq 2\pi$ 范围中的图象.

解 用第四章给出的加法定理:

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

这里若取 $A=2x$, $B=2y$ 则

$$2\sin(x+y)\cos(x-y)=\sin(x+y),$$

从而有 $\sin(x+y)=0$ 或 $2\cos(x-y)=1$. 由 $\sin(x+y)=0$ 得

$$x+y=m\pi,\quad ①$$

由 $2\cos(x-y)=1$ 得

$$x-y=2n\pi\pm\frac{\pi}{3},\quad ②$$

当 $0\leq x\leq 2\pi$, $0\leq y\leq 2\pi$ 时, ① 只能是

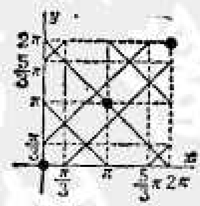
$$x-y=0,\ x+y=\pi,\ x+y=2\pi,$$
$$x+y=3\pi,\ x-y=2\pi.$$

② 只能是

$$x-y=\pm\frac{\pi}{3},$$

$$x-y=\pm\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right).$$

因而图象如右.

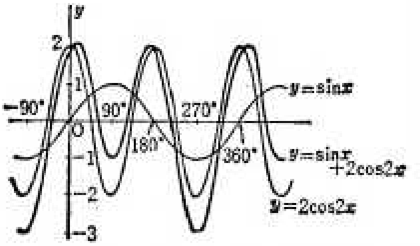


351. (1) 画出 $y=\sin x$ 和 $y=2\cos 2x$ 的图象.

(2) 用上面的结果画出 $y=\sin x+2\cos 2x$ 的图象.

解 (1) $y=2\cos 2x$ 的周期是 $180°$, 振幅是 2. 所求的图象见下图.

(2) 作出了 $y=\sin x$ 和 $y=2\cos 2x$ 的图象后, 只要求两者的和, 即可得出 $y=\sin x+\cos 2x$ 的图象. 由于函数 $y=\sin x+2\cos 2x$



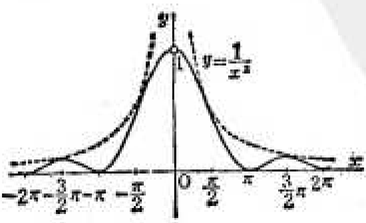
的周期是360°，因此只要画出0°至360°的图象后，其他部分就可同样得到。

352． 画出 $y=\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ 的大概图象。

解 y 在 $x=0$ 处不连续，且

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=1, \qquad ①$$

因此在 $x=0$ 的附近 $y\approx 1$． 又因为 y 是偶函数，它的图象关于 y 轴对称． 另外因为 $0\leq\sin^2 x\leq 1$，故 $0\leq y\leq\dfrac{1}{x^2}$，即 y 的图象在 x 轴与 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 的图象之间． y 的图象与 x 轴的公共点的横坐标，可由 $\sin x=0$ 得到，为 $x=n\pi\,(n\neq 0)$；与 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 的图象公共点的横坐标可由 $\sin^2 x=1$ 得到，为 $\sin x=\pm 1$ 即 $x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$． 由此，可得 y 的图象如下图所示．



353． 画出下列函数的图象，其中 x 以弧度计算．

(1) $y=x+\sin x$;

(2) $y=x-\cos x$.

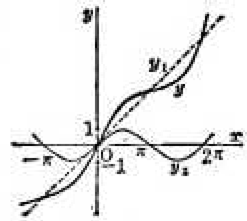
解 (1) 取 $y_1=x$，$y_2=\sin x$，则 $y=y_1+y_2$． 图象如下图(1)中的粗线所示．

(2) 取 $y_1=x$，$y_2=-\cos x$，则 $y=y_1+y_2$． 图象如下图(2)中的粗线所示．

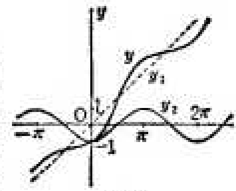
354． x 以弧度为单位，画出下列函数的图象．

(1) $y=x^2\sin x$;

(2) $y=\dfrac{1}{x}\sin x$.



(1)



(2)

解 (1) 由于

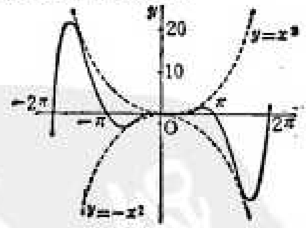
$\sin\dfrac{\pi}{2}=1$,

$\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1$,

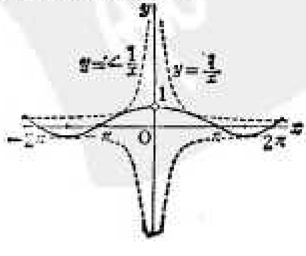
等等，y 的值在

$x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$

时交替地和 $y=x^2$、$y=-x^2$ 取相同的函数值． 又 $x=n\pi$ 时图象与 x 轴相交，因此 $y=x^2\sin x$ 的图象在 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 之间． 若设 $y_1=x^2$，$y_2=\sin x$，$y=y_1\cdot y_2$ 的图象如下图所示．

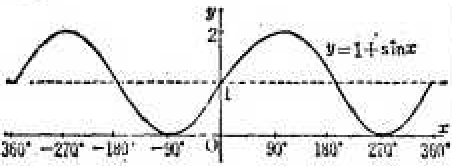


(2) 与(1)相似，y 当 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时交替地与 $y=\dfrac{1}{x}$、$y=-\dfrac{1}{x}$ 有相同的函数值，其图象当 $x=n\pi\,(n\neq 0)$ 时与 x 轴相交． 因此 $y=\dfrac{1}{x}\times\sin x$ 的图象在 $y=\dfrac{1}{x}$ 和 $y=-\dfrac{1}{x}$ 之间，若设 $x=0$ 时 $\dfrac{1}{x}\sin x$ 的值为1，y 就在所有点上都连续了． 从而取 $y_1=\dfrac{1}{x}$，$y_2=\sin x$ 时，$y=y_1\cdot y_2$ 的图象如下图所示．

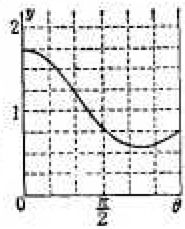


355. 画出 $y=1+\sin x$ 在 $-360°\leq x\leq 360°$ 范围内的图象.

解　$y=1+\sin x$ 的图象，可由 $y=\sin x$ 的图象向 y 轴的正向平移1而得. 故得下图.



356. 假如右图中的波形曲线用 $y=a+b\cos\theta+c\cos 2\theta$ 表示. 试从图中读取一些适当的数据，从而确定 a、b、c 的值.



解　因为未知数有三个，所以要读取三个数值才能求出 a、b、c.

$\theta=0$ 时 $y=\frac{7}{4}$，因此

$$\frac{7}{4}=a+b\cos 0+c\cos 0,$$

$$\therefore\quad a+b+c=\frac{7}{4}. \qquad ①$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $y=\frac{3}{4}$，因此

$$\frac{3}{4}=a+b\cos\frac{\pi}{2}+c\cos\pi,$$

$$\therefore\quad a-c=\frac{3}{4}. \qquad ②$$

$\theta=\pi$ 时 $y=\frac{3}{4}$，因此

$$\frac{3}{4}=a+b\cos\pi+c\cos 2\pi,$$

$$\therefore\quad a-b+c=\frac{3}{4}. \qquad ③$$

①−③，得 $2b=1$，

$$\therefore\quad b=\frac{1}{2}.$$

①+③，得

$$a+c=\frac{5}{4}. \qquad ④$$

②+④，得 $2a=2$，

$$\therefore\quad a=1.$$

②−④，得 $-2c=-\frac{2}{4}$，

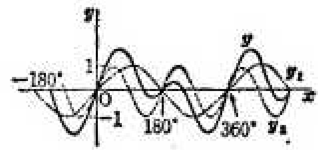
$$\therefore\quad c=\frac{1}{4}.$$

357. 画出下列函数图象的大概形状.

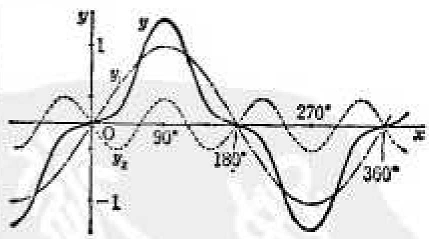
(1) $y=\sin x+\sin 2x$;

(2) $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x$.

解　(1) 只要作出 $y_1=\sin x$ 和 $y_2=\sin 2x$ 的图象，然后再取两者的和即可. 周期是 $360°$.



(2) 取 $y_1=\sin x$，$y_2=-\frac{1}{3}\sin 3x$，则 $y=y_1+y_2$.



358. 考察函数 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$ 的变化并画出图象，其中 $0\leq x\leq 2\pi$.

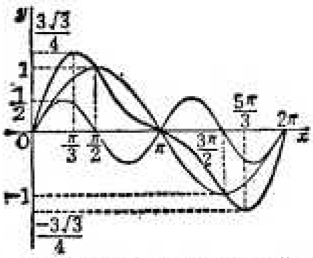
解　把 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$ 求导数，得到：

$$y'=\cos x+\cos 2x=\cos x+2\cos^2 x-1$$
$$=(\cos x+1)(2\cos x-1).$$

当 $0\leq x\leq 2\pi$ 时满足 $y'=0$ 的 x 的值，由 $\cos x+1=0$ 有 $x=\pi$，由 $2\cos x-1=0$ 有 $x=\frac{\pi}{3}$，$x=\frac{5\pi}{3}$. 当 $0\leq x<\frac{\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{3}<x\leq 2\pi$ 时 $y'>0$，因而 y 增加，当 $\frac{\pi}{3}<x<\pi$，$\pi<x<\frac{5\pi}{3}$ 时 $y'<0$，因而 y 减少.

因此，当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时 y 取到极大，极大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 当 $x=\frac{5\pi}{3}$ 时 y 取到极小，极小值为

$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$. $x=\alpha$, π, $2\pi-\alpha$ (α 为满足 $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$ 的角)时图象有拐点. 当 $x=0$, π, 2π 时图象与 x 轴相交. 从而图象如下图所示.



359. 线段 AB 在直线 XOX' 上振动, AB 中点 M 的运动方程为 $x_1=2\sin\pi t$, 其中 $x_1=OM$. 点 P 又在 AB 上作以 M 为中心的简谐振动, 运动方程式为

$$x_2=3\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right),$$

其中 $x_2=MP$.

(1) 求两个简谐振动的周期、振幅.

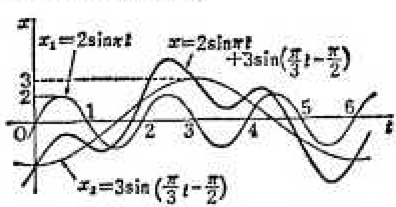
(2) 设 $OP=x$, 求 x 关于 t 的表示式, 并画出这个关系式的图象.

解　(1) x_1 的周期为 $2\pi\div\pi=2$, 振幅为 2. x_2 的周期为 $2\pi\div\frac{\pi}{3}=6$, 振幅为 3. (有关简谐振动的事项见第四章)

(2) 因为 $OP=OM+MP$, 从而

$$x=x_1+x_2=2\sin\pi t+3\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right).$$

这是一个周期运动, 以 x_1、x_2 的周期的最小公倍数 6 为周期. 因而把 x_1、x_2 两个运动合成后, 就得到图象如下.



360. 证明简谐振动 $x_1=a_1\cos(\omega t+\theta_1)$ 与 $x_2=a_2\cos(\omega t+\theta_2)$ 的和, 可用

$$x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\theta)$$

的形式表示. 求 A 和 $\operatorname{tg}\theta$.

解　$x_1=a_1\cos\omega t\cos\theta_1-a_1\sin\omega t\sin\theta_1$,

$x_2=a_2\cos\omega t\cos\theta_2-a_2\sin\omega t\sin\theta_2$,

$$\therefore\quad x_1+x_2=(a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2)\cos\omega t-(a_1\sin\theta_1+a_2\sin\theta_2)\sin\omega t.$$

现取
$$A^2=(a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2)^2+(a_1\sin\theta_1+a_2\sin\theta_2)^2=a_1^2+2a_1a_2\cos(\theta_1-\theta_2)+a_2^2,$$

并设 $A\geq0$, 即得

$$A=\sqrt{a_1^2+2a_1a_2\cos(\theta_1-\theta_2)+a_2^2}.$$

现分 $A=0$, $A>0$ 两种情况讨论.

$A=0$ 的情况是可能出现的. 这时应有

$$a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2=a_1\sin\theta_1+a_2\sin\theta_2=0. \qquad ①$$

当 $a_1=0$ 时由 $a_2\cos\theta_2=a_2\sin\theta_2=0$ 知 $a_2=0$. 当 a_1、a_2 都不为 0 时, 由 ① 可得 $\operatorname{tg}\theta_1=\operatorname{tg}\theta_2$, 从而 $\theta_1-\theta_2=k\pi$. 当 k 为偶数时, 由 ① 得 $a_1=-a_2$; 当 k 为奇数时, 由 ① 得 $a_1=a_2$. 因此有 $a_1=a_2=0$ 或 $a_1=a_2$、$\theta_1-\theta_2=(2n+1)\pi$ 或 $a_1=-a_2$、$\theta_1-\theta_2=2n\pi$ (n 为整数), 这时 $A=0$, θ 可取任意角.

$A>0$ 时, 我们可以求出满足

$$\cos\theta=\frac{a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2}{A},$$

$$\sin\theta=\frac{a_1\sin\theta_1+a_2\sin\theta_2}{A}$$

的角 θ (因为上两式的右边平方和为 1, 故这样的 θ 是存在的). 因而

$$x=x_1+x_2=A\cos\theta\cos\omega t-A\sin\theta\sin\omega t=A\cos(\omega t+\theta),$$

其中, 当 $a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2\neq0$ 时有

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{a_1\sin\theta_1+a_2\sin\theta_2}{a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2}.$$

361. 画出下列函数的图象.

(1) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

(2) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$;

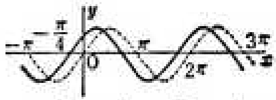
(3) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

解　(1) 因为这个函数是用 $x+\frac{\pi}{4}$ 代替 $y=\sin x$ 中的 x 而得, 因此图象可由正弦曲线

向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 后得到．图象为下图中的一条实线．

(2) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$，

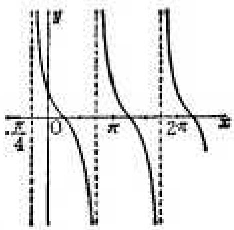
因此这个图象无非就是一条正弦曲线而已．图象如下面图中的虚线．



(3) $y=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\mathrm{tg}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]$

$=\mathrm{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$．

因而它是由余切曲线向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 得到的．图象如图中的实线那样．



3．等式的证明

362． 证明 $\cos 30°\cos 60°+\sin 30°\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

解　$\cos 30°=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\cos 60°=\sin 30°=\frac{1}{2}$，

把它们代入原式左边，有

$$\text{左边}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

363． 设抛物线

$$y=x^2+2x\cos\alpha+\sin^2\alpha$$

的顶点坐标为 (X, Y)．

(1) 求 X, Y；

(2) 从(1)中求得的结果中消去 α；

(3) 当 α 变化时，抛物线的顶点在 (X, Y) 平面上描出怎样的曲线．

解　(1) 把给出的式子变形，

$$y=x^2+2x\cos\alpha+\sin^2\alpha$$
$$=(x+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha.$$

$$\therefore\ \begin{cases}X=-\cos\alpha,\\ Y=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha.\end{cases}\qquad①$$

(2) 为从①中的两式消去 α，把 Y 变形，

$$Y=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=1-2\cos^2\alpha=1-2X^2,$$

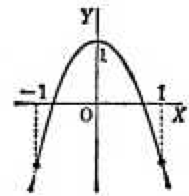
所以　　　$Y=1-2X^2$，

但因为 $X=-\cos\alpha$，所以 $-1\leq X\leq 1$．

(3) 由(2)，抛物线顶点描出的图象，为抛物线

$$Y=1-2X^2$$

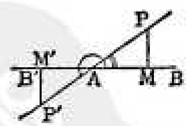
中对应于 $-1\leq X\leq 1$ 的一段．



364． 比较任意角 A 和 $180°+A$ 的三角函数，证明：

$$\sin(180°+A)=-\sin A,$$
$$\cos(180°+A)=-\cos A,$$
$$\mathrm{tg}(180°+A)=\mathrm{tg}\,A.$$

解　设 $\angle PAB$ 为任意角，延长 PA 至 P'，且使 $AP'=AP$．延长 BA 成为直线 BAB'．由 P、P' 作 BAB' 的垂线 PM 和 $P'M'$，M、M' 为垂足，若 $\angle PAB$ 设为角 A，则从 AB 开始，与 $\angle PAB$ 同方向地测定，$\angle P'AB$ 就是 $180°+A$．但 $\triangle PAM$ 和 $\triangle P'AM'$ 全等，所以



$$\sin A=\frac{PM}{AP},\ \sin(180°+A)=\frac{P'M'}{AP'},$$
$$\cos A=\frac{AM}{AP},\ \cos(180°+A)=\frac{AM'}{AP'}.$$

其中 PM 和 $P'M'$、AM 和 AM' 都是绝对值相等符号相反的．因此

$$\sin(180°+A)=-\sin A,$$
$$\cos(180°+A)=-\cos A,$$
$$\therefore\ \mathrm{tg}(180°+A)=\frac{\sin(180°+A)}{\cos(180°+A)}$$
$$=\frac{-\sin A}{-\cos A}=\mathrm{tg}\,A.$$

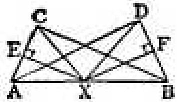
从而　$\csc(180°+A)=-\csc A$，

$\sec(180°+A)=-\sec A$，

$\mathrm{ctg}(180°+A)=\mathrm{ctg}\,A$．

365． ACB、ADB 是两个位于公共斜边

AB 同一侧的确定的直角三角形，X 是 AB 上的一个动点，证明：$\text{tg}\angle ACX\cdot\text{tg}\angle BDX$ 是定值。



解　作 $XE\perp AC$，$XF\perp BD$，这时

$$\text{tg}\angle ACX=\frac{EX}{CE},\ \text{tg}\angle BDX=\frac{XF}{DF},$$

因而

$$\text{tg}\angle ACX\cdot\text{tg}\angle BDX=\frac{EX}{CE}\cdot\frac{XF}{DF}.\quad ①$$

因为 $XE\parallel BC$，所以

$$\frac{CE}{EA}=\frac{BX}{XA}.$$

又因为 $XF\parallel AD$，所以

$$\frac{BF}{DF}=\frac{BX}{XA}.$$

从而 $\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{BF}{DF}$，所以

$$CE\cdot DF=BF\cdot EA,$$

由①得

$$\text{tg}\angle ACX\cdot\text{tg}\angle BDX=\frac{EX}{EA}\cdot\frac{XF}{BF},$$

但 $\dfrac{EX}{EA}=\text{tg}\angle CAB$，$\dfrac{XF}{BF}=\text{tg}\angle DBA$，所以

$$\text{tg}\angle ACX\cdot\text{tg}\angle BDX=\text{tg}\angle CAB\cdot\text{tg}\angle DBA.$$

$\text{tg}\angle CAB$、$\text{tg}\angle DBA$ 都是与 X 的位置无关的确定的数，所以 $\text{tg}\angle ACX\times\text{tg}\angle BDX$ 也是定值。

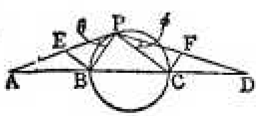
366. 设线段 AD 的三等分点为 B、C，以 BC 为直径的圆上有一任意点 P，记 $\angle APB=\theta$，$\angle CPD=\phi$，证明 $\text{tg}\,\theta\,\text{tg}\,\phi=\dfrac{1}{4}$。

解　作 $BE\parallel CP$，$CF\parallel BP$，这时

$$\angle EBP=\angle BPC=90^\circ=\angle PCF,$$

$$\therefore\quad \text{tg}\,\theta=\frac{BE}{BP},$$

$$\text{tg}\,\phi=\frac{CF}{PC},$$



$$\therefore\quad \text{tg}\,\theta\,\text{tg}\,\phi=\frac{BE}{BP}\cdot\frac{CF}{PC}.$$

因为 B 是 AC 的中点，且 $BE\parallel CP$，所以 $CP=2BE$，同理 $BP=2CF$，从而

$$\text{tg}\,\theta\cdot\text{tg}\,\phi=\frac{BE}{2CF}\cdot\frac{CF}{2BE}=\frac{1}{4}.$$

367. 证明 $\text{ctg}\,60^\circ(1+\cos 30^\circ+\cos 60^\circ)=\sin 30^\circ+\sin 60^\circ$。

解　原式左边 $=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}+3}{3\times 2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\sin 60^\circ+\sin 30^\circ.$$

368. 证明　$(1+\sin 45^\circ+\sin 30^\circ)(1-\cos 45^\circ+\cos 60^\circ)=\dfrac{7}{4}$。

解　由 $\cos 45^\circ=\sin 45^\circ$，$\cos 60^\circ=\sin 30^\circ$ 知，

$$\begin{aligned}\text{原式左边}&=[(1+\sin 30^\circ)+\sin 45^\circ]\\&\quad\times[(1+\sin 30^\circ)-\sin 45^\circ]\\&=(1+\sin 30^\circ)^2-\sin^2 45^\circ\\&=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{7}{4}.\end{aligned}$$

369. 证明：$\sin^2 30^\circ$，$\sin^2 45^\circ$，$\sin^2 60^\circ$，$\sin^2 90^\circ$ 构成一个等差数列。

解　由 $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 90^\circ=1$ 知，给出的四个三角函数式分别等于 $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{4}$，1。因此构成了一个公差为 $\dfrac{1}{4}$ 的等差数列。

370. 证明 $\text{tg}\,60^\circ\sin^2 45^\circ=\cos 30^\circ$。

解　把 $\text{tg}\,60^\circ=\sqrt{3}$，$\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 代入原式左边，得

$$\sqrt{3}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

恰等于 $\cos 30^\circ$ 的值，因而

$$\text{tg}\,60^\circ\sin^2 45^\circ=\cos 30^\circ.$$

371. 证明 $\csc^2 45^\circ\sec^2 30^\circ\cos 60^\circ=1\dfrac{1}{3}$。

解　把 $\csc 45^\circ=\sqrt{2}$，　$\sec 30^\circ=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ 代入原式的左边，则有

$$\text{左边}=(\sqrt{2})^2\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\times\frac{1}{2}=1\frac{1}{3}.$$

372. 证明 $\operatorname{tg}^2 30°+2\sin 60°+\operatorname{tg}45°-\operatorname{tg}60°+\cos^2 30°=2\frac{1}{12}$.

解 $\operatorname{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}45°=1$, $\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}$, $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，把这些值代入原式左边,则有

$$\text{左边}=\frac{1}{3}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}=2\frac{1}{12}.$$

373. 证明

$$3\sin 18°-4\sin^3 18°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

解 若把 $\sin 18°$ 用 $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 代入(参看注)。

$$\text{原式的左边}=\frac{3(\sqrt{5}-1)}{4}-\frac{4(\sqrt{5}-1)^3}{4^3}$$
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{16}[12-(\sqrt{5}-1)^2]$$
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{16}(6+2\sqrt{5})$$
$$=\frac{5+2\sqrt{5}-3}{8}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

注 若 $A=18°$, 则 $5A=90°$.

$$\therefore\quad \cos 3A=\sin 2A,$$

因而

$$4\cos^3 A-3\cos A=2\sin A\cos A,$$

因为 $\cos A\neq 0$, 两边除以 $\cos A$ 后,

$$4\cos^2 A-3=2\sin A,$$

因此 $\quad 4(1-\sin^2 A)-3=2\sin A,$

$$\therefore\quad 4\sin^2 A+2\sin A-1=0.$$

由于 $\sin A=\sin 18°>0$, 所以取正根,得

$$\sin A=\frac{-1+\sqrt{1+4}}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

374. 证明 $\operatorname{tg}30°\operatorname{tg}60°=\operatorname{tg}45°$.

解 把 $\operatorname{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}$ 代入,左边 $=1$, 即等于 $\operatorname{tg}45°$.

375. 证明 $\frac{1-\operatorname{tg}^2 30°}{1+\operatorname{tg}^2 30°}=\cos 60°$.

解 因为 $\operatorname{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$,代入原式后,左边为

$$\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

但 $\cos 60°=\frac{1}{2}$,故原式成立。

376. 证明 $\sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta$ 恒为定值。

解 原式 $=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=1$. 因此不管 θ 的值如何,给出的式子的值总是不变的。

377. 证明

$$\frac{\sin(90°-A)}{\sec(90°-A)}\cdot\frac{\operatorname{tg}(90°-A)}{\cos A}=\cos A.$$

解
$$\text{原式左边}=\frac{\cos A}{\csc A}\cdot\frac{\operatorname{ctg}A}{\cos A}$$
$$=\frac{\operatorname{ctg}A}{\csc A}=\frac{\cos A}{\sin A\csc A}$$
$$=\cos A.$$

378. 证明

$$\sin(90°-A)\operatorname{ctg}(90°-A)=\sin A.$$

解
$$\text{原式左边}=\cos A\operatorname{tg}A=\cos A\times\frac{\sin A}{\cos A}=\sin A,$$

故原式成立。

379. 证明: 若 $\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=1$, $\theta\neq\frac{k\pi}{2}$, 则

$$\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1\right)=0.$$

解 当 $\theta=\alpha+2k\pi$ 时要证的结论显然成立,现设 $\theta\neq\alpha+2k\pi$. 由已知条件

$$\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha.$$

从而

$$\frac{\cos^3\theta-\cos^3\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin^3\alpha-\sin^3\theta}{\sin\alpha}.\qquad ①$$

再由已知条件

$$\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=\cos^2\theta+\sin^2\theta,$$

从而
$$\frac{\cos^2\theta(\cos\theta-\cos\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{\sin^2\theta(\sin\alpha-\sin\theta)}{\sin\alpha}.$$

$$\because\quad \theta\neq\alpha+2k\pi,\quad \theta\neq\frac{k\pi}{2},$$

可知上式两边都不为零. 在①式的两边用上式的两边分别去除, 得

$$\frac{\cos^2\theta+\cos\theta\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\sin\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta},$$

或者说有

$$1+\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1,$$

即

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}+\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}=0,$$

从而

$$\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1\right)=0.$$

380. 证明 $\operatorname{tg} A\cos A\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg}(90^\circ-A)\times\sec(90^\circ-A)=1$.

解 原式的左边 $=\sin A\operatorname{ctg} A\operatorname{tg} A\csc A$
$=(\sin A\csc A)(\operatorname{ctg} A\operatorname{tg} A)$
$=1\times1=1$.

381. 证明 $\sin A\operatorname{tg}(90^\circ-A)\sec(90^\circ-A)=\operatorname{ctg} A$.

解 原式的左边 $=\sin A\operatorname{ctg} A\csc A$
$=(\sin A\csc A)\operatorname{ctg} A=\operatorname{ctg} A$.

382. 证明 $\sec(90^\circ-A)-\operatorname{ctg} A\times\cos(90^\circ-A)\operatorname{tg}(90^\circ-A)=\sin A$.

解 原式的左边 $=\csc A-\operatorname{ctg} A\sin A\operatorname{ctg} A$

$$=\frac{1}{\sin A}-\frac{\cos A}{\sin A}\sin A\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$=\frac{1}{\sin A}-\frac{\cos^2 A}{\sin A}=\frac{1-\cos^2 A}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A}{\sin A}=\sin A.$$

383. 证明 $\sin 60^\circ+\cos 60^\circ+\operatorname{tg} 60^\circ=\sin 30^\circ+\cos 30^\circ+\operatorname{ctg} 30^\circ$.

解 由于 $\sin 60^\circ=\cos 30^\circ$, $\cos 60^\circ=\sin 30^\circ$, $\operatorname{tg} 60^\circ=\operatorname{ctg} 30^\circ$, 把这些式子两边分别相加后, 得

$$\sin 60^\circ+\cos 60^\circ+\operatorname{tg} 60^\circ=\cos 30^\circ+\sin 30^\circ+\operatorname{ctg} 30^\circ.$$

384. 证明 $\cos^2 30^\circ-\sin^2 30^\circ=\cos 60^\circ$.

解 由于 $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, 所以,

$$原式左边=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},$$

而 $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, 故

$$\cos^2 30^\circ-\sin^2 30^\circ=\cos 60^\circ.$$

385. 证明:

$$\sin 30^\circ\cos 60^\circ+\cos 30^\circ\sin 60^\circ=1.$$

解 把 $\cos 60^\circ=\sin 30^\circ$, $\sin 60^\circ=\cos 30^\circ$ 代入原式,

$$左边=\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ=1.$$

注 因 $\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 把这些值代入后左边等于 1, 从而也可证明与右边相等.

386. 证明 n 为正整数时, $\operatorname{tg}(n\times180^\circ+A)=\operatorname{tg} A$.

解 由公式 $\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$ 知,

$$\operatorname{tg}(180^\circ n+A)=\operatorname{tg}[(n-1)180^\circ+A]=\operatorname{tg}[(n-2)180^\circ+A],$$

如此不断地减去 180°. 因为 n 为正整数, 故最后上式总可等于 $\operatorname{tg} A$. 从而

$$\operatorname{tg}(n\times180^\circ+A)=\operatorname{tg} A.$$

387. 证明

$$\operatorname{ctg}(90^\circ-A)\operatorname{ctg} A\cos(90^\circ-A)\operatorname{tg}(90^\circ-A)=\cos A.$$

解 因为 $\operatorname{ctg}(90^\circ-A)$ 与 $\operatorname{tg}(90^\circ-A)$ 的积为 1, 故原式左边可约去两个因子, 变成 $\operatorname{ctg} A\cos(90^\circ-A)$. 在这个式子中 $\operatorname{ctg} A$ 为 $\frac{\cos A}{\sin A}$, $\cos(90^\circ-A)$ 为 $\sin A$, 代入后, 可得到 $\cos A$, 即与右边相同.

388. 证明

$$\frac{\operatorname{ctg}^2 A\sin^2(90^\circ-A)}{\operatorname{ctg} A+\cos A}=\operatorname{tg}(90^\circ-A)-\cos A.$$

解 由于 $\cos A=\operatorname{ctg} A\sin A$, 原式左边为

$$\frac{\operatorname{ctg}^2 A\cos^2 A}{\operatorname{ctg} A(1+\sin A)}=\frac{\operatorname{ctg}^2 A(1-\sin^2 A)}{\operatorname{ctg} A(1+\sin A)}$$
$$=\operatorname{ctg} A(1-\sin A)$$
$$=\operatorname{ctg} A-\operatorname{ctg} A\sin A$$
$$=\operatorname{tg}(90^\circ-A)-\cos A.$$

389. 证明

$$\frac{\csc^2 A\operatorname{tg}^2 A}{\operatorname{ctg}(90^\circ-A)}\cdot\frac{\operatorname{ctg} A}{\sec^2 A}=\sec^2(90^\circ-A)-1.$$

解　因为

$$\csc^2 A=\frac{1}{\sin^2 A},$$

$$\frac{1}{\operatorname{ctg}(90^\circ-A)}=\frac{1}{\operatorname{tg} A}=\operatorname{ctg} A,$$

$$\operatorname{tg}^2 A=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A},\quad \frac{1}{\sec^2 A}=\cos^2 A.$$

从而

$$\text{左边}=\frac{\sin^2 A\operatorname{ctg} A}{\sin^2 A\cos^2 A}\cdot\cos^2 A\operatorname{ctg} A=\operatorname{ctg}^2 A.$$

而右边式中的

$$\sec^2(90^\circ-A)=\csc^2 A=1+\operatorname{ctg}^2 A,$$

从而右边也为 $\operatorname{ctg}^2 A$. 所要证明的式子成立.

390. 证明

$$\frac{\cos^2(90^\circ-A)}{1-\cos A}=1+\sin(90^\circ-A).$$

解　原式左边 $=\dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}=\dfrac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$

$$=1+\cos A=1+\sin(90^\circ-A).$$

391. 证明

$$\frac{\operatorname{ctg}(90^\circ-A)}{\csc^2 A}\cdot\frac{\csc(90^\circ-A)\operatorname{ctg}^3 A}{\sin^2(90^\circ-A)}=\sec A.$$

解　原式左边 $=\dfrac{\operatorname{tg} A\sec A\operatorname{ctg}^3 A}{\csc^2 A\cos^2 A}$

$$=\frac{1}{\csc^2 A\cos^2 A}\sec A\times(\operatorname{tg} A\operatorname{ctg} A)\operatorname{ctg}^2 A$$

$$=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\sec A\operatorname{ctg}^2 A$$

$$=\operatorname{tg}^2 A\sec A\operatorname{ctg}^2 A$$

$$=(\operatorname{tg}^2 A\operatorname{ctg}^2 A)\sec A=\sec A.$$

392. 证明下面两式的值与 A 无关:

(1) $\sin^4 A+(\cos^2 A+2\sin^2 A)\cos^2 A$;

(2) $\operatorname{tg}^2 A(\operatorname{tg}^2 A-2\sec^2 A)+\sec^4 A$.

解　(1) 去括号,

$$\sin^4 A+\cos^4 A+2\sin^2 A\cos^2 A$$

$$=(\sin^2 A+\cos^2 A)^2=1=\text{常数}.$$

(2) 去括号,

$$\operatorname{tg}^4 A-2\operatorname{tg}^2 A\sec^2 A+\sec^4 A$$

$$=(\operatorname{tg}^2 A-\sec^2 A)^2$$

$$=(\operatorname{tg}^2 A-1-\operatorname{tg}^2 A)^2=1=\text{常数}.$$

393. 证明

$$[\sec(90^\circ-\theta)-\sec\theta][\csc(90^\circ-\theta)-\csc\theta]+(1-\operatorname{tg}\theta)^2+(\operatorname{ctg}\theta-1)^2=0.$$

解　原式左边 $=(\csc\theta-\sec\theta)(\sec\theta-\csc\theta)$

$$+1-2\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}^2\theta+\operatorname{ctg}^2\theta-2\operatorname{ctg}\theta+1$$

$$=-\csc^2\theta+2\csc\theta\sec\theta-\sec^2\theta+(1+\operatorname{tg}^2\theta)+(1+\operatorname{ctg}^2\theta)-2(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta)$$

$$=2\csc\theta\sec\theta-2(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta)$$

$$=2(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta)-2(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta)$$

$$=0.$$

394. 证明: 当 x 为实数时,

$$\frac{x^2-2x\cos\alpha+1}{x^2-2x\cos\beta+1}$$

的值 >0, 而且这个值在一定的范围内. 其中 α、β 为不等于 π 整数倍的角.

解　设给出的式子为 y,

$$y=\frac{x^2-2x\cos\alpha+1}{x^2-2x\cos\beta+1}$$

$$=\frac{(x-\cos\alpha)^2+1-\cos^2\alpha}{(x-\cos\beta)^2+1-\cos^2\beta}.\qquad①$$

因为 α、β 不是 π 的整数倍, 所以

$$\cos^2\alpha\neq1,\ \cos^2\beta\neq1.$$

从而 $1-\cos^2\alpha>0$, $1-\cos^2\beta>0$,

$$\therefore\quad y>0.$$

再把 ① 式去分母, 得

$$x^2-2x\cos\alpha+1=yx^2-2yx\cos\beta+y,$$

$$(1-y)x^2-2x(\cos\alpha-y\cos\beta)+1-y=0.$$

因为 x 是实数, 所以判别式

$$\frac{D}{4}=(\cos\alpha-y\cos\beta)^2-(1-y)^2\geq0,$$

把它变形, 有

$$(\cos\alpha-y\cos\beta+1-y)(\cos\alpha-y\cos\beta-1+y)\geq0,$$

$$[(1+\cos\beta)y-(1+\cos\alpha)]\times[(1-\cos\beta)y-(1-\cos\alpha)]\leq0.$$

因为 $1+\cos\beta>0$, $1-\cos\beta>0$, 所以

$$\left(y-\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\beta}\right)\left(y-\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}\right)\leq0,$$

从而, y 只能取 $\dfrac{1+\cos\alpha}{1+\cos\beta}$ 或 $\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}$, 或者两者之间的实数值, 即 y 是在一定范围内的.

395. 若记 $\cos\alpha=C$, $\sin\alpha=S$, 证明

$$C^{12}+4C^{10}S^2+5C^8S^4-5C^4S^8-4C^2S^{10}-S^{12}=C^2-S^2.$$

解　因为 $C^2+S^2=1$，所以 $C^4+2C^2S^2+S^4=1$，从而 $C^4+S^4=1-2C^2S^2$，于是

$$\begin{aligned}
&C^{12}+4C^{10}S^2+5C^8S^4-5C^4S^8-4C^2S^{10}-S^{12}\\
&=C^{12}-S^{12}+4C^2S^2(C^8-S^8)\\
&\quad+5C^4S^4(C^4-S^4)\\
&=(C^4-S^4)[C^8+C^4S^4+S^8\\
&\quad+4C^2S^2(C^4+S^4)+5C^4S^4]\\
&=(C^4-S^4)[(C^4+C^2S^2+S^4)\\
&\quad\times(C^4-C^2S^2+S^4)\\
&\quad+4C^2S^2(1-2C^2S^2)+5C^4S^4]\\
&=(C^2+S^2)(C^2-S^2)[(1-C^2S^2)\\
&\quad\times(1-3C^2S^2)+4C^2S^2\\
&\quad-8C^4S^4+5C^4S^4]\\
&=(C^2-S^2)(1-4C^2S^2+3C^4S^4\\
&\quad+4C^2S^2-8C^4S^4+5C^4S^4)=C^2-S^2.
\end{aligned}$$

396. 证明：若

$$\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=1,$$

$\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$ (k 为整数)，则

$$\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1.$$

解　把已知条件去分母，

$$\cos^4\alpha\sin^2\beta+\sin^4\alpha\cos^2\beta=\cos^2\beta\sin^2\beta,$$

进行一些变形后，成为

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta\\
&\quad+\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta=\cos^2\beta\sin^2\beta,
\end{aligned}$$

或为

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\alpha\sin^2\beta\\
&\quad+\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^2\beta\\
&=\cos^2\beta\sin^2\beta,
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta\\
&\quad-\cos^2\alpha\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)\\
&=\cos^2\beta\sin^2\beta,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\alpha\\
&=\cos^2\beta\sin^2\beta,\\
&\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\alpha\\
&=\cos^2\beta\sin^2\beta(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha),\\
&\sin^2\alpha\cos^2\beta(1-\sin^2\beta)\\
&\quad+\cos^2\alpha\sin^2\beta(1-\cos^2\beta)\\
&=\cos^2\alpha\sin^2\alpha,
\end{aligned}$$

即

$$\sin^2\alpha\cos^4\beta+\cos^2\alpha\sin^4\beta=\cos^2\alpha\sin^2\alpha,$$

从而
$$\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1.$$

397. 证明 $\dfrac{\cos 60^\circ+\cos 30^\circ}{\sec 60^\circ+\csc 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

解　$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sec 60^\circ=2$，$\csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$，所以

$$原式左边=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{4}\sqrt{3}.$$

398. 证明：若 $\sin\alpha=1$，则

$$\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\csc\alpha=1.$$

解　因为 $\sin\alpha=1$，所以

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\sqrt{1-1}=0.$$

因而

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{0}{\sin\alpha}=0,$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=1,$$

所以
$$\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\csc\alpha=1.$$

399. 已知 $\operatorname{tg}A+\sin A=m$，$\operatorname{tg}A-\sin A=n$，$m\geqq n\geqq 0$，证明 $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$.

解　把已知的两式相乘，得

$$\begin{aligned}
mn&=\operatorname{tg}^2A-\sin^2A=\operatorname{tg}^2A(1-\cos^2A)\\
&=\operatorname{tg}^2A\sin^2A,
\end{aligned}$$

把已知的两式相加，得

$$2\operatorname{tg}A=m+n,$$

而把已知的两式相减，得

$$2\sin A=m-n,$$

从而
$$mn=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2\left(\frac{m-n}{2}\right)^2.$$

因为 $m\geqq n\geqq 0$，所以

$$4\sqrt{mn}=m^2-n^2.$$

400. 已知 $\operatorname{tg}^2\theta=\frac{\alpha}{\beta}$，证明

$$\alpha\csc\theta+\beta\sec\theta=(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}},$$

其中 θ 设为正锐角.

解　$\csc\theta=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\theta}=\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}{\operatorname{tg}\theta}$,

$$\sec\theta=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta},$$

从而　$\alpha\csc\theta+\beta\sec\theta$

$$=\frac{\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}{\operatorname{tg}\theta}+\beta\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}$$

$$=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}\left(\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\theta}+\beta\right)$$

$$=\sqrt{1+\frac{\alpha^{\frac{2}{3}}}{\beta^{\frac{2}{3}}}}\left(\frac{\alpha\beta^{\frac{1}{3}}}{\alpha^{\frac{1}{3}}}+\beta\right)$$

$$=(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

401. 已知 $\sin\theta=\frac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}$，证明

$$\operatorname{tg}\theta=\pm\frac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}.$$

解　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$$=1-\left(\frac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}\right)^2$$

$$=\frac{4n^2(m+n)^2}{(m^2+2mn+2n^2)^2},$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\pm\frac{2n(m+n)}{m^2+2mn+2n^2},$$

从而

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\pm\frac{\dfrac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}}{\dfrac{2n(m+n)}{m^2+2mn+2n^2}}$$

$$=\pm\frac{m^2+2mn}{2n(m+n)}=\pm\frac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}.$$

402. 已知 $\cos A=n\sin B$, $\operatorname{ctg}A=\frac{\sin B}{\operatorname{tg}C}$, $\sin B\neq0$，证明

$$\cos C=\pm\frac{n}{\sqrt{1+n^2\cos^2 B}}.$$

解　因为 $\operatorname{ctg}A=\pm\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$，所以

$$\frac{\sin B}{\operatorname{tg}C}=\operatorname{ctg}A=\pm\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$$

$$=\pm\frac{n\sin B}{\sqrt{1-n^2\sin^2 B}}.$$

因为 $\sin B\neq0$，所以

$$\sqrt{1-n^2\sin^2 B}=\pm n\operatorname{tg}C,$$

即　$$1-n^2\sin^2 B=n^2\operatorname{tg}^2 C,$$

或者　$1+n^2-n^2\sin^2 B=n^2+n^2\operatorname{tg}^2 C$,

$$1+n^2\cos^2 B=n^2\sec^2 C,$$

从而　$$\cos^2 C=\frac{n^2}{1+n^2\cos^2 B}.$$

$$\therefore\quad \cos C=\pm\frac{n}{\sqrt{1+n^2\cos^2 B}}.$$

403. 已知 $\sin A=\frac{m}{n}$，证明

$$\sqrt{n^2-m^2}\operatorname{tg}A=\pm m.$$

解　因为 $\sin A=\frac{m}{n}$，所以 $n\sin A=m$，故

$$n^2-n^2\sin^2 A=n^2-m^2,$$

即　$$n^2(1-\sin^2 A)=n^2-m^2,$$

即　$$n^2\cos^2 A=n^2-m^2,$$

从而　$$n\cos A=\pm\sqrt{n^2-m^2},$$

故　$$\sqrt{n^2-m^2}\operatorname{tg}A=\pm n\cos A\operatorname{tg}A$$

$$=\pm n\sin A=\pm m.$$

404. 证明 $\sec(\alpha+3\pi)=-\sec\alpha$.

解　$\sec(\alpha+3\pi)=\sec(\alpha+\pi+2\pi)$

$$=\sec(\alpha+\pi)=-\sec\alpha.$$

405. 证明

$$\cos A+\sin(270^\circ+A)-\sin(270^\circ-A)+\cos(180^\circ+A)=0.$$

解　$\sin(270^\circ+A)=-\cos A$,

$\sin(270^\circ-A)=-\cos A$,

$\cos(180^\circ+A)=-\cos A$,

代入原式，

左边 $=\cos A-\cos A+\cos A-\cos A=0$.

406. 证明

$$\sec(270^\circ-A)\sec(90^\circ-A)-\operatorname{tg}(270^\circ-A)\operatorname{tg}(90^\circ+A)+1=0.$$

解　$\sec(270^\circ-A)=-\csc A$,

$\sec(90^\circ-A)=\csc A$,

$\operatorname{tg}(270^\circ-A)=\operatorname{ctg}A$,

$\operatorname{tg}(90^\circ+A)=-\operatorname{ctg}A$,

把这些式子代入原式，

左边 $=-\csc^2 A+\operatorname{ctg}^2 A+1$

$$=-(\operatorname{ctg}^2 A+1)+1+\operatorname{ctg}^2 A=0.$$

407. 证明

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{tg}(180^\circ+A)+\operatorname{tg}(90^\circ+A)+\operatorname{tg}(360^\circ-A)=0.$$

解　原式左边 $=\operatorname{ctg}A+\operatorname{tg}A-\operatorname{ctg}A-\operatorname{tg}A=0$.

408. 证明 $\cos^2 A+\cos^2(90^\circ+A)+\cos^2(180^\circ+A)+\cos^2(270^\circ+A)=2$.

解 $\cos(90°+A)=-\sin A$,

$\cos(180°+A)=-\cos A$,

$\cos(270°+A)=\sin A$,

把上面这些式子代入原式,

左边 $=\cos^2 A+\sin^2 A+\cos^2 A+\sin^2 A=2$.

409. 证明 $[\sin(90°+A)+\cos(90°+A)]\times[\sec(90°-A)-\sec A]=\sec A\sec(90°-A)-2$.

解 原式的左边

$$=(\cos A-\sin A)(\csc A-\sec A)$$
$$=(\cos A-\sin A)\left(\frac{1}{\sin A}-\frac{1}{\cos A}\right)$$
$$=\frac{(\cos A-\sin A)^2}{\sin A\cos A}$$
$$=\frac{\cos^2 A-2\cos A\sin A+\sin^2 A}{\sin A\cos A}$$
$$=\frac{1-2\cos A\sin A}{\sin A\cos A}$$
$$=\frac{1}{\sin A}\cdot\frac{1}{\cos A}-2$$
$$=\csc A\sec A-2$$
$$=\sec(90°-A)\sec A-2.$$

410. 证明

$$\frac{\sin^3(90°+A)+\cos^3(90°+A)}{\sin(180°+A)+\cos(360°-A)}=1+\sin(90°+A)\cos(270°+A).$$

解 原式左边 $=\dfrac{\cos^3 A-\sin^3 A}{-\sin A+\cos A}$

$=\cos^2 A+\cos A\sin A+\sin^2 A$

$=1+\cos A\sin A$,

右边 $=1+\cos A\sin A$,

从而要求证明的式子成立.

411. 证明 $\sin(270°-A)=-\cos A$,

$\cos(270°-A)=-\sin A$,

$\operatorname{tg}(270°-A)=\operatorname{ctg} A$.

解 $\sin(270°-A)=-\sin(90°-A)$

$=-\cos A$,

$\cos(270°-A)=-\cos(90°-A)$

$=-\sin A$.

从而, $\operatorname{tg}(270°-A)=\operatorname{ctg} A$.

注 $\csc(270°-A)=-\sec A$,

$\sec(270°-A)=-\csc A$,

$\operatorname{ctg}(270°-A)=\operatorname{tg} A$.

412. 证明 $\sin(270°+A)=-\cos A$,

$\cos(270°+A)=\sin A$,

$\operatorname{tg}(270°+A)=-\operatorname{ctg} A$.

解 $\sin(270°+A)=-\sin(90°+A)$

$=-\cos A$,

$\cos(270°+A)=-\cos(90°+A)=\sin A$,

从而 $\operatorname{tg}(270°+A)=-\operatorname{ctg} A$.

413. 证明 $\sin(360°-A)=-\sin A$,

$\cos(360°-A)=\cos A$,

$\operatorname{tg}(360°-A)=-\operatorname{tg} A$.

解 $\sin(360°-A)=\sin(-A)=-\sin A$,

$\cos(360°-A)=\cos(-A)=\cos A$,

从而 $\operatorname{tg}(360°-A)=-\operatorname{tg} A$.

注 $\csc(360°-A)=-\csc A$,

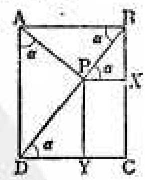
$\sec(360°-A)=\sec A$,

$\operatorname{ctg}(360°-A)=-\operatorname{ctg} A$.

4．与图形有关的题目

414. 长方形 $ABCD$ 中，若 $AP\perp BD$, $PX\perp BC$, $PY\perp CD$, 证明

$$(PX)^{\frac{2}{3}}+(PY)^{\frac{2}{3}}=(BD)^{\frac{2}{3}}.$$



解 现设 $\angle PDY=\alpha$, 显然

$$\angle BPX=\angle PBA=\angle PAD=\alpha,$$

从而

$$\cos\alpha=\frac{PX}{PB}=\frac{PB}{AB}=\frac{AB}{DB},$$

故有 $\cos^3\alpha=\dfrac{PX}{PB}\cdot\dfrac{PB}{AB}\cdot\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{PX}{DB}$,

或者为 $\cos^2\alpha=\dfrac{(PX)^{\frac{2}{3}}}{(DB)^{\frac{2}{3}}}$.

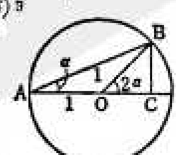
同理，由 $\sin\alpha=\dfrac{PY}{PD}=\dfrac{PD}{AD}=\dfrac{AD}{DB}$,

可得 $\sin^3\alpha=\dfrac{PY}{DB}$,

或者 $\sin^2\alpha=\dfrac{(PY)^{\frac{2}{3}}}{(DB)^{\frac{2}{3}}}$,

从而 $\dfrac{(PX)^{\frac{2}{3}}}{(DB)^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{(PY)^{\frac{2}{3}}}{(DB)^{\frac{2}{3}}}=1$,

于是可以得到要证的结论.



415. 由右图求 $\operatorname{tg}22.5°$ 的值.

解 设圆 O 的半径为

1，图中的 $\angle BOC=45^\circ$，则 $\angle BAC=22.5^\circ$。由于 $OC=BC=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$AC=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，从而

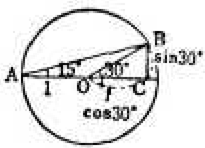
$$\operatorname{tg}22.5^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

416. 由下图求 $\operatorname{tg}15^\circ$ 的值.

解　设圆 O 的半径为 1，$\angle BOC=30^\circ$，则 $\angle BAC=15^\circ$. 从而 $BC=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$，

$$OC=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}15^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$



$$=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}.$$

417. 以满足 $0<x<\pi$，$0<y<\pi$ 和 $\sin(x+y)<\dfrac{1}{2}(\sin 2x+\sin 2y)$ 的 x、y 为坐标，求由此得到的点 (x, y) 的存在范围，并用图表示。

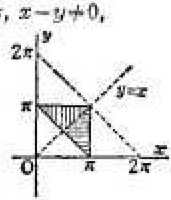
解　$\sin(x+y)-\dfrac{1}{2}(\sin 2x+\sin 2y)<0$，

$$\sin(x+y)-\sin(x+y)\cos(x-y)<0,$$
$$\sin(x+y)[1-\cos(x-y)]<0,$$
$$\therefore\quad \cos(x-y)\neq 1,\ \sin(x+y)<0.$$

从而 x、y 应满足的条件为

$$0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\ x-y\neq 0,$$
$$\pi<x+y<2\pi.$$

以 x、y 为坐标的点，其范围为右图中画斜线的部分，但要除去这个部分的边界和 $y=x$ 上的点。



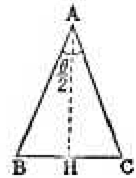
418. 等腰三角形的腰为 10 cm，顶角为 θ，

(1) 给出表示该三角形面积 S 的公式，

(2) 给出表示该三角形底边 l 的式子，

(3) 考察 θ 变化时 S 和 l 的增减情况，分别画出 S、l 关于 θ 的函数的图象。

解　(1) $S=\dfrac{1}{2}\times 10^2\sin\theta=50\sin\theta\,(\text{cm}^2)$，其中 $0^\circ<\theta<180^\circ$。

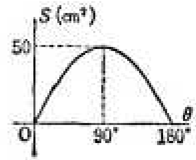


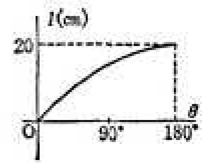
(2) $l=2\times 10\sin\dfrac{\theta}{2}$

$$=20\sin\frac{\theta}{2}\ (\text{cm}),$$

其中 $0^\circ<\theta<180^\circ$。

(3) 图象如下所示。





419. 用图表示出，当 $-\dfrac{2\pi}{3}\leq x\leq\dfrac{2\pi}{3}$ 时，满足 $|y|<\sin|x|$ 的点 (x, y) 的存在范围。

解　分下面四种情况讨论：

$0\leq x\leq\dfrac{2\pi}{3}$，$0\leq y$ 时，应有

$$y<\sin x, \qquad ①$$

$0\leq x\leq\dfrac{2\pi}{3}$，$y<0$ 时，应有 $-y<\sin x$，即

$$y>-\sin x, \qquad ②$$

$-\dfrac{2}{3}\pi\leq x<0$，$0\leq y$ 时，应有 $y<\sin(-x)$，即

$$y<-\sin x, \qquad ③$$

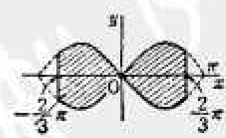
$-\dfrac{2}{3}\pi\leq x<0$，$y<0$ 时，应有

$$-y<\sin(-x),$$

即 $$y>\sin x, \qquad ④$$

因而适合 ①、②、③、④ 的点 (x, y) 分别在第 1，2，3，4 象限内。

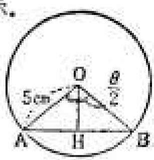
如果用图表示所求的范围，则为右图中画有斜线的部分。其中要除去边界中的曲线部分。

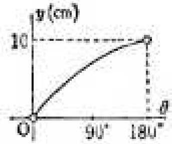


420. 半径 5 cm 的圆 O 中 AB 弦所对的中心角记作 θ，试把 AB 用 θ 的函数表示出来，并画出这个函数关系的图象，其中 $0^\circ<\theta<180^\circ$。

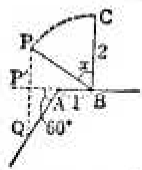
解　设从中心 O 向弦 AB 所作的垂线足

记为 H，因为 $\angle AOB=\theta$，从而 $\angle AOH=\frac{\theta}{2}$，若 $AB=y$(cm)，则 $y=AB=2AH=2\times 5\times\sin\frac{\theta}{2}=10\sin\frac{\theta}{2}$，因而所求的图象如下图所示。





421. 有一个与水平面成倾角 60° 的斜面，两个面的垂直断面如图所示。一根长为 2 m 的棒垂直于水平面，$AB=1$ m。如果太阳光垂直于地面，棒则如图那样倒下，棒影的长度如何变化？设棒的倾角为 x，画出影长和角 x 的函数关系的图象。



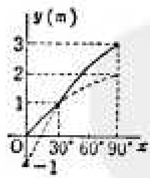
解 当棒的顶端 C 在未到达 A 的正上方以前，也即 x 不大于 30° 时，影子不延伸到斜面上，若设影长为 ym，

当 $0°\leq x\leq 30°$ 时，

$$y=2\sin x\,(\text{m}).$$

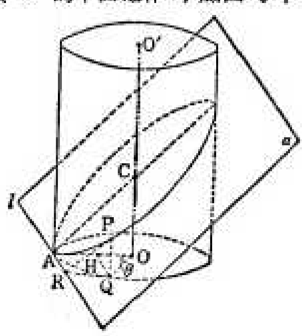
而当 $30°\leq x\leq 90°$ 时

$$\begin{aligned}y&=BA+AP'\sec 60°\\&=1+(2\sin x-1)\times 2\\&=4\sin x-1\,(\text{m}).\end{aligned}$$



422. 在直圆柱表面粘上一张纸，沿与底面成 45° 的方向切割直圆柱后，揭下所粘上的纸，问纸的边缘是什么曲线。

解 设直圆柱两个底面的圆心为 O、O'，与底面成 45° 的平面记作 α，底面与平面 α 的



公共点记为 A。设平面 α 与直圆柱的轴 OO' 交于 C 点。在平面 α 上过 A 且垂直于 AC 的直线记为 l。从平面 α 与直圆柱的截口线上一点 P，向底面所作的垂线足记为 Q，记 $\angle AOQ=\theta$。从 P 向 l 所作的垂线足记为 R，由三垂线定理，$QR\perp l$，

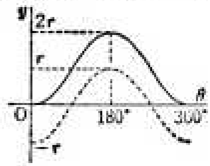
$$\therefore\quad \angle PRQ=\angle CAO=45°,$$

$$\therefore\quad PQ=QR.$$

若从 Q 向 OA 所作垂线的足为 H，设 $y=PQ$，则

$$\begin{aligned}y&=PQ=QR=AH\\&=OA-OQ\cos\theta\\&=r(1-\cos\theta).\end{aligned}$$

从而粘在直圆柱上的纸的边缘，是如右图那样的余弦曲线的一部分。



423. 求满足 $\sin^2 x+\cos^2 y>1$ 的点 (x,y) 的范围，并用图表示。其中 $0\leq x\leq 2\pi$，$0\leq y\leq 2\pi$。

解 若用倍角公式把给出的不等式变形，则有

$$\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}(1+\cos 2y)-1>0,$$

$$-\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 2y)>0,$$

$$\therefore\quad \sin(x+y)\sin(x-y)>0.$$

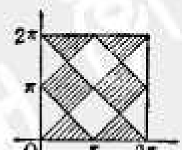
从 $\sin(x+y)>0$，$\sin(x-y)>0$，可得

$$\begin{cases}2m\pi<x+y<(2m+1)\pi,\\2n\pi<x-y<(2n+1)\pi.\end{cases}\qquad ①$$

又从 $\sin(x+y)<0$，$\sin(x-y)<0$，可得

$$\begin{cases}(2m-1)\pi<x+y<2m\pi,\\(2n-1)\pi<x-y<2n\pi.\end{cases}\qquad ②$$

根据①、②，在 $0\leq x\leq 2\pi$，$0\leq y\leq 2\pi$ 时，点 (x,y) 的存在范围是右图中画斜线的部分，但要除去这些部分的边界。



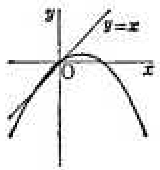
424. 设在不等式

$$y\leq 4x\sin\theta-x^2,\ y\geq x$$

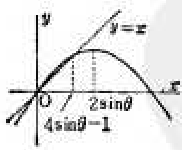
给出的区域内，记 y 的最大值为 $f(\theta)$。画出 $f(\theta)$ 的图象。其中，$0°\leq\theta\leq 90°$，并设能使 $\sin\theta=\frac{1}{4}$ 成立的正锐角 θ 的值 (约 14°30′) 为 α。

解　在
$$y=4x\sin\theta-x^2, \qquad ①$$
$$y=x \qquad ②$$
中，① 是抛物线，② 是直线，并都通过原点。①、② 的交点坐标是 $x=0$, $y=0$ 和 $x=4\sin\theta-1$, $y=4\sin\theta-1$。

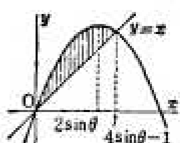
(i) 在 $4\sin\theta-1\leqq 0$ 时，因为 $0\leqq\sin\theta\leqq\frac{1}{4}$ 亦即 $0^\circ\leqq\theta\leqq\alpha$. 满足两个所给不等式的范围是右图中画斜线的部分。因而在这个范围内 y 的最大值显然是 $y=0$，因此　$f(\theta)=0$.　③



(ii) 在 $4\sin\theta-1>0$ 时，因为 $\frac{1}{4}<\sin\theta\leqq 1$ 即 $\alpha<\theta\leqq 90^\circ$,
$$\begin{aligned}y&=4x\sin\theta-x^2\\&=-(x-2\sin\theta)^2+4\sin^2\theta,\end{aligned}$$
所以抛物线的顶点坐标为
$$(2\sin\theta,\ 4\sin^2\theta).$$
从而，在 $4\sin\theta-1\leqq 2\sin\theta$ 即 $\frac{1}{4}<\sin\theta\leqq\frac{1}{2}$ 或者说 $\alpha<\theta\leqq 30^\circ$ 时，y 在 $x=4\sin\theta-1$ 时取得最大值，最大值为
$$f(\theta)=4\sin\theta-1.$$



而当
$$4\sin\theta-1>2\sin\theta \quad ④$$
即 $\frac{1}{2}<\sin\theta\leqq 1$ 或者说 $30^\circ<\theta\leqq 90^\circ$ 时，y 在 $x=2\sin\theta$ 时取得最大值，最大值为 $f(\theta)=4\sin^2\theta$.



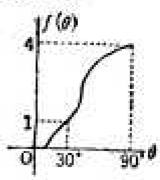
综合上述讨论，从③、④、⑤可得

$0^\circ\leqq\theta\leqq\alpha$　时 $f(\theta)=0$,

$\alpha<\theta\leqq 30^\circ$　时 $f(\theta)=4\sin\theta-1$,

$30^\circ<\theta\leqq 90^\circ$　时 $f(\theta)=4\sin^2\theta$.

因而 $f(\theta)$ 的图象如右图所示。



425. 当 x, y 能成为三角形的两个内角时，试回答下列问题:

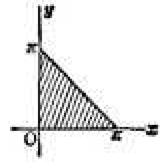
(1) 求以 x、y 的值作为坐标的点的范围，并用图表示出来。

(2) 如果 x、y 还满足下面的不等式，以 x、y 为坐标的点的范围是什么？分别求出它们的范围并用图表示。

(i) $\sin(x-y)+\cos(x-y)\geqq 1$,

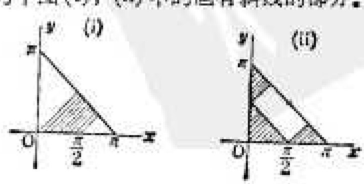
(ii) $\cos 2x+\cos 2y\geqq 0$.

解　(1) 要使 x、y 是三角形的两个内角的条件是 $x>0$, $y>0$, $0<x+y<\pi$. 从而点 (x,y) 的存在范围为右图中画斜线的部分，但要除去这些部分的边界。



(2) (i) 把不等式变形，
$$\sqrt{2}\sin\left[(x-y)+\frac{\pi}{4}\right]\geqq 1,$$
$$\sin\left(x-y+\frac{\pi}{4}\right)\geqq\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\therefore\quad \frac{\pi}{4}\leqq x-y+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3\pi}{4},$$
$$\therefore\quad 0\leqq x-y\leqq\frac{\pi}{2}. \qquad ①$$

(ii) 类似地，有
$$2\cos(x+y)\cos(x-y)\geqq 0,$$
由 $\cos(x+y)\geqq 0$, $\cos(x-y)\geqq 0$ 可得
$$\left.\begin{aligned}-\frac{\pi}{2}\leqq x+y\leqq\frac{\pi}{2},\\ -\frac{\pi}{2}\leqq x-y\leqq\frac{\pi}{2}.\end{aligned}\right\} \qquad ②$$
由 $\cos(x+y)\leqq 0$, $\cos(x-y)\leqq 0$ 可得
$$\left.\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\leqq x+y\leqq\frac{3\pi}{2},\\ -\frac{3\pi}{2}\leqq x-y\leqq-\frac{\pi}{2}\\ \text{或}\quad \frac{\pi}{2}\leqq x-y\leqq\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}\right\} \qquad ③$$
从而关于 (i) 所求的点 (x,y) 的范围，可由 (1) 的解及 ① 式得出，(ii) 的范围可由 (1) 的解及 ② 式或者 (1) 的解及 ③ 式得出，其图示分别为下图 (i)，(ii) 中的画有斜线的部分。



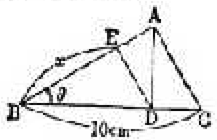
426. 从直角三角形 ABC 的直角顶点 A 向斜边作垂线 AD，从 D 向 AB 作垂线 DE，设 $BC=10$ cm，$\angle B=\theta$，试把 BE 表示成 θ 的函数，并画出 θ 变化时，BE 关于 θ 的函数关系的图象。

解 从下图可得

$$AB=BC\cos\theta=10\cos\theta.$$

另外在三角形 ABD 中

$$BD=AB\cos\theta=10\cos^2\theta.$$

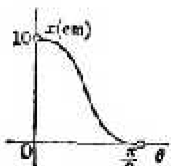


因此，若记 $BE=x$，则在直角三角形 BDE 中

$$BE=BD\cos\theta=10\cos^3\theta.$$

$\therefore\quad x=10\cos^3\theta.$

在这个式子中，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$。因而其图象如右图所示。



注 由三倍角公式

$$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A,$$

得 $\quad\cos^3 A=\frac{3}{4}\cos A+\frac{1}{4}\cos 3A.$

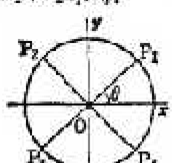
因而 $x=10\cos^3\theta$ 的图象可由

$$x_1=10\times\frac{3}{4}\cos\theta=\frac{15}{2}\cos\theta,$$

$$x_2=10\times\frac{1}{4}\cos 3\theta=\frac{5}{2}\cos 3\theta$$

的图象经过迭加位即从 $x=x_1+x_2$ 求得。

427. 图中 P_2 是 P_1 关于 y 轴的对称点，P_3 是 P_2 关于 x 轴的对称点，P_4 是 P_3 关于 y 轴的对称点，$\angle xOP_1$ 设为 θ。把动半径 OP_2，OP_3，OP_4 所表示的角的正弦、余弦、正切用 θ 的三角函数表示。



解 若记 $P_1(x,\ y)$，则有 $P_2(-x,\ y)$，$P_3(-x,\ -y)$，$P_4(x,\ -y)$。若圆半径为 r，则 $\sin\theta=\frac{y}{r}$，$\cos\theta=\frac{x}{r}$，$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$。

因为 $\angle xOP_2=180°-\theta$，所以 OP_2 所表示的角的三角函数为

$$\sin(180°-\theta)=\frac{y}{r}=\sin\theta,$$

$$\cos(180°-\theta)=\frac{-x}{r}=-\cos\theta,$$

$$\operatorname{tg}(180°-\theta)=\frac{y}{-x}=-\operatorname{tg}\theta.$$

因为 $\angle xOP_3=180°+\theta$，所以对于动半径 OP_3 有

$$\sin(180°+\theta)=\frac{-y}{r}=-\sin\theta,$$

$$\cos(180°+\theta)=\frac{-x}{r}=-\cos\theta,$$

$$\operatorname{tg}(180°+\theta)=\frac{-y}{-x}=\operatorname{tg}\theta.$$

因为 $\angle xOP_4=-\theta$，所以对于动半径 OP_4 有

$$\sin(-\theta)=\frac{-y}{r}=-\sin\theta,$$

$$\cos(-\theta)=\frac{x}{r}=\cos\theta,$$

$$\operatorname{tg}(-\theta)=\frac{-y}{x}=-\operatorname{tg}\theta.$$

428. (1) 填充$\boxed{}$使下面的等式成立：

$$\sin^2(x+y)-\sin^2(x-y)=\sin\boxed{}\sin\boxed{}.$$

(2) 用图表示以满足不等式

$$\sin^2(x+y)-\sin^2(x-y)\geqq 0$$

的 $x,\ y$ 为坐标的点的存在范围。

解 (1) 把左边变形，

$$\begin{aligned}&\sin^2(x+y)-\sin^2(x-y)\\&=\sin[(x+y)+(x-y)]\sin[(x+y)\\&\quad-(x-y)]=\sin 2x\sin 2y.\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 得 $\sin 2x\sin 2y\geqq 0$，从而由 $\sin 2x\geqq 0$，$\sin 2y\geqq 0$ 可得

$$2m\pi\leqq 2x\leqq(2m+1)\pi,$$

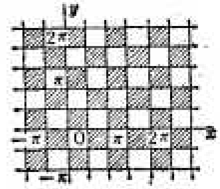
$$2n\pi\leqq 2y\leqq(2n+1)\pi.$$

$$\therefore\quad\left.\begin{aligned}m\pi\leqq x\leqq m\pi+\frac{\pi}{2},\\ n\pi\leqq y\leqq n\pi+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad ①$$

同样，由 $\sin 2x\leqq 0$，$\sin 2y\leqq 0$ 可得

$$\left.\begin{aligned}m\pi-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq m\pi,\\ n\pi-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq n\pi.\end{aligned}\right\}\qquad ②$$

从 ①、② 可得，点 (x,y) 的存在范围应如右图中画上斜线的部分。



429. 首项为 1 的无穷等比数列的和为

$$\frac{\cos^2(x+y)}{\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)-1},$$

求公比，并且用图表示 x、y 可取什么范围的数。

解　设公比为 r，则

$$\frac{1}{1-r}=\frac{\cos^2(x+y)}{\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)-1}.$$

把它变形，

$$(1-r)\cos^2(x+y)$$
$$=\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)-1.$$

$$\therefore\quad r=\frac{1-\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}=\frac{\sin^2(x-y)}{\cos^2(x+y)},$$

其中应有

$$\cos(x+y)\neq 0, \qquad ①$$

$$\frac{\sin^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}<1. \qquad ②$$

从 ① 可得

$$x+y\neq 2k\pi\pm\frac{\pi}{2}, \qquad ③$$

从 ② 可得 $\sin^2(x-y)<\cos^2(x+y)$，

$$\frac{1}{2}[1-\cos 2(x-y)]$$
$$-\frac{1}{2}[1+\cos 2(x+y)]<0,$$
$$\frac{1}{2}[\cos 2(x-y)+\cos 2(x+y)]>0,$$
$$\therefore\quad \cos 2x\cos 2y>0.$$

从 $\cos 2x>0$，$\cos 2y>0$ 可得

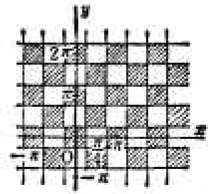
$$2m\pi-\frac{\pi}{2}<2x<2m\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad & m\pi-\frac{\pi}{4}<x<m\pi+\frac{\pi}{4},\\ \text{同理}\quad & n\pi-\frac{\pi}{4}<y<n\pi+\frac{\pi}{4}.\end{aligned}\right\} \qquad ④$$

由 $\cos 2x<0$，$\cos 2y<0$ 可类似地得到

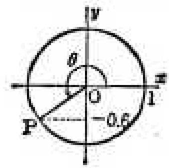
$$\left.\begin{aligned} & m\pi+\frac{\pi}{4}<x<(m+1)\pi-\frac{\pi}{4},\\ & n\pi+\frac{\pi}{4}<y<(n+1)\pi-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}\right\} \qquad ⑤$$

但当 ④、⑤ 成立时，③ 总是成立的。因此，所求的点 (x,y) 的存在范围，可由 ④、⑤ 得出，如右图中画上斜线的部分，但不包含边界。



430. θ 是第三象限的角，且 $\sin\theta=-0.6$，求 $\cos\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$ 的值。

解　单位圆中动半径 OP 的位置如下图所示。又因为



$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

$$\therefore\quad \cos^2\theta=1-(-0.6)^2$$
$$=0.64.$$

得 $\cos\theta=\pm 0.8$。但 θ 是第三象限的角，$\cos\theta<0$，从而 $\cos\theta=-0.8$，

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-0.6}{-0.8}=0.75.$$

431. 已知 $\cos(-100^\circ)=k$，用 k 表示 $\operatorname{tg}80^\circ$。

解　$\cos(-100^\circ)=\cos 100^\circ$

$$=\cos(180^\circ-80^\circ)=-\cos 80^\circ,$$

$$\therefore\quad \cos 80^\circ=-\cos(-100^\circ)=-k.$$

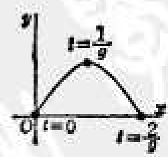
又因为 $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$，故

$$\operatorname{tg}^2 80^\circ=\left(\frac{1}{\cos 80^\circ}\right)^2-1=\frac{1-k^2}{k^2},$$

由 $\cos(-100^\circ)<0$ 得 $k<0$，从而

$$\operatorname{tg}80^\circ=\frac{\sqrt{1-k^2}}{-k}=-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}.$$

432. t 时刻时点 P 的位置 (x,y) 分别由下面的方程(1)，(2)，(3)，(4) 给出。把 t 从 0 变到 2π 时点 P 形成的轨迹，仿照下例那样画出图来。



例 $\begin{cases}x=t,\\ y=t-\dfrac{1}{2}gt^2\left(0\leq t\leq\dfrac{2}{g}\right).\end{cases}$

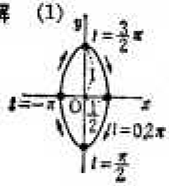
(1) $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=2\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right);\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\cos(t+\pi);\end{cases}$

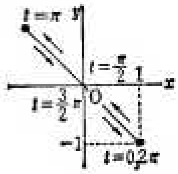
(3) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\cos 2t; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

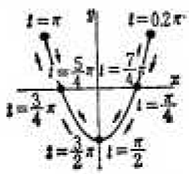
解 (1)



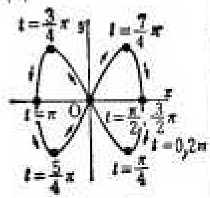
(2)



(3)



(4)



注 (1) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=2\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\sin t. \end{cases}$

$$x^2+\frac{y^2}{2^2}=1\text{(椭圆)}.$$

$$\begin{cases} t=0, & \dfrac{\pi}{2}, & \pi, & \dfrac{3}{2}\pi, & 2\pi; \\ x=1, & 0, & -1, & 0, & 1; \\ y=0, & -2, & 0, & 2, & 0. \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\cos(t+\pi)=-\cos t. \end{cases}$

$y=-x,\ |x|\leq 1$ （线段）.

$$\begin{cases} t=0, & \dfrac{\pi}{2}, & \pi, & \dfrac{3\pi}{2}, & 2\pi; \\ x=1, & 0, & -1, & 0, & 1; \\ y=-1, & 0, & 1, & 0, & -1. \end{cases}$$

(3) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\cos 2t=2\cos^2 t-1. \end{cases}$

$y=2x^2-1,\ |x|\leq 1$ （抛物线的一部分）.

$$\begin{cases} t=0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}, \pi, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}, 2\pi; \\ x=1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \\ \qquad \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1; \\ y=1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1. \end{cases}$$

(4) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin 2t \\ \quad =-2\sin t\cos t. \end{cases}$

$$y^2=4x^2(1-x^2), \qquad ①$$

$$\begin{cases} t=0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}, \pi, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}, \\ \qquad \dfrac{7\pi}{4}, 2\pi; \\ x=1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \qquad 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1; \\ y=0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0. \end{cases}$$

把 ① 写得更详细些就是

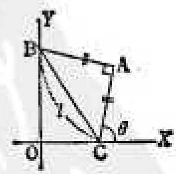
$$y=\begin{cases} -2x\sqrt{1-x^2}, & (0\leq t\leq\pi) \\ 2x\sqrt{1-x^2}. & (\pi\leq t\leq 2\pi) \end{cases}$$

因而有

$$y'=\begin{cases} \dfrac{2(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}, & (0\leq t\leq\pi) \\ -\dfrac{2(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}. & (\pi\leq t\leq 2\pi) \end{cases}$$

当 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时 y 取得极大、极小值为 $+1$、-1.

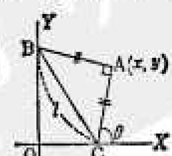
433. 斜边 BC 长为 l 的等腰直角三角形如图放置. OX, OY 是直角坐标系的坐标轴.



(1) 把顶点 A 的坐标 (x, y) 用 l 和 θ 表示.

(2) 当 B、C 分别在 OY、OX 的正半轴上运动时，求点 A 的运动范围，并用图表示.

解 (1) $CA=\dfrac{l}{\sqrt{2}}$, 则 C 的横坐标 c_1 为



$$c_1=l\cos\left[\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=-l\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).$$

要求的 A 点的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x&=c_1+\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\theta, \\ y&=0+\frac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad ①$$

所以 $x=-l\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\theta$

$$=-l\left(\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\theta,$$

$$\therefore\quad x=\frac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta.\qquad ②$$

从①、②可得

$$x=y=\frac{\sqrt{2}\,l\sin\theta}{2}.\qquad ③$$

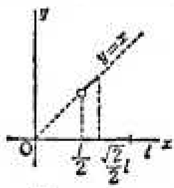
因为 θ 的范围是以 BC 与 y 轴和 x 轴相重合的情形为界限，所以有

$$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4}.\qquad ④$$

(2) 由③，点 A 的方程式是 $y=x$，从④和③得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\theta\leq1,$$

$$\therefore\quad \frac{l}{2}<x\leq\frac{\sqrt{2}\,l}{2}.$$

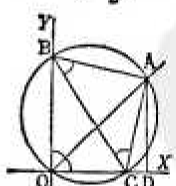


因而所求的轨迹是以

$$y=x$$

$$\left(\frac{l}{2}<x\leq\frac{\sqrt{2}\,l}{2}\right)$$

表示的线段，如右上图所示。



注　这个问题并不一定象上面那样借助计算来解。作以 BC 为直径的圆，于是有

$$\angle AOC=\angle CBA=45°,$$

可知 A 是在 $\angle BOC$ 的角平分线上。从图中也可确定 A 的范围。

从 A 向 x 轴作垂线 AD，则可如下解出 x、y，为

$$x=OD-CD=\frac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta,$$

$$y=AD=AC\sin\theta,$$

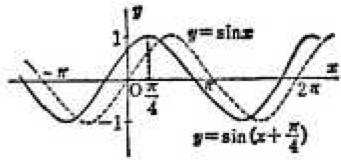
或　$$AC\sin(180°-\theta)=\frac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta.$$

434．画下列函数的图象：

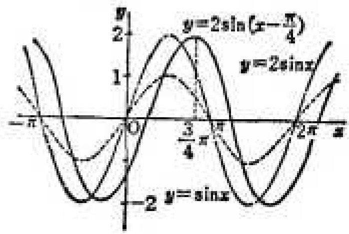
(1) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

(2) $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$。

解　(1) 所求的图象可由 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴的负向平移 $\frac{\pi}{4}$ 得到。



(2) 把 $y=\sin x$ 的图象上各点的纵坐标乘以2，就得到 $y=2\sin x$ 的图象，再把它沿 x 轴正向平移 $\frac{\pi}{4}$ 就得到所求的图象。

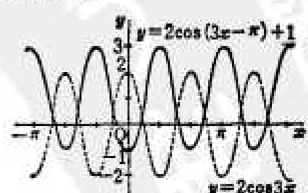


435．画下列函数的图象：

(1) $y=2\cos3x$，

(2) $y=2\cos(3x-\pi)+1$。

解　(1) 把 $y=\cos x$ 的图象在横向缩小到原来的 $\frac{1}{3}$，就得到 $y=\cos3x$ 的图象。再把它在纵向扩大到原来的2倍，就得到 $y=2\cos3x$ 的图象。(2) 把这个图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 就得到 $y=2\cos(3x-\pi)$ 的图象，再在纵向平移 $+1$ 就成为(2)的图象。



436．证明下列等式：

(1) $\cos200°\cos280°-\sin100°\sin160°=-\frac{1}{2}$，

(2) $\sin80°\cos20°+\sin45°\cos145°+\sin55°\cos245°=0$。

解 (1) 左边$=\frac{1}{2}(\cos 480°+\cos 80°)$

$$+\frac{1}{2}(\cos 260°-\cos 60°)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\cos 80°\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cos 260°-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\times 2\cos 170°\cos 90°$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

(2) 左边$=\frac{1}{2}(\sin 100°+\sin 60°)$

$$+\frac{1}{2}(\sin 190°-\sin 100°)$$

$$+\frac{1}{2}(\sin 300°-\sin 190°)$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 60°+\sin 300°)=0.$$

437. 证明下列各式:

(1) $\sin^2 30°+\sin^2 45°+\sin^2 60°=\frac{3}{2}$,

(2) $\mathrm{tg}^2 30°+\mathrm{tg}^2 45°+\mathrm{tg}^2 60°=4\frac{1}{3}$,

(3) $\cos^2 0°+\cos^2 45°+\cos^2 90°=\frac{3}{2}$.

解 (1) 原式左边

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}.$$

(2) 原式左边$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1^2+(\sqrt{3})^2$

$$=\frac{1}{3}+1+3=4\frac{1}{3}.$$

(3) 原式左边$=1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

438. 解方程 $\sin 6x-2\sin 4x+\sin 2x=0$.

解 因为

$$\sin 6x+\sin 2x=2\sin 4x\cos 2x,$$

给出的方程式成为

$$2\sin 4x(\cos 2x-1)=0,$$

由 $\sin 4x=0$ 得 $x=\frac{n\pi}{4}$; 由 $\cos 2x=1$ 得 $2x=2n\pi$, $\therefore x=n\pi$。综合两者,得 $x=\frac{n\pi}{4}$。

439. 解方程 $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$.

解 $\sin^2 x+\frac{1}{2}(1-\cos 4x)$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos 6x),$$

$$\therefore\quad (\cos 4x-\cos 6x)-2\sin^2 x=0.$$

$$\begin{aligned}左边&=2\sin 5x\sin x-2\sin^2 x\\&=2\sin x(\sin 5x-\sin x)\\&=4\sin x\cos 3x\sin 2x\\&=8\sin^2 x\cos x\cos 3x.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sin^2 x\cos x\cos 3x=0.$$

由 $\sin x=0$ 得 $x=n\pi$, 由 $\cos 3x=0$ 得

$$3x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$$

即 $x=\frac{2n\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}$. 因为 $\cos 3x=\cos x(4\cos^2 x-3)$, 所以 $\cos x=0$ 的解包含在 $\cos 3x=0$ 的解中。故最后得到解为

$$x=n\pi,\ x=\frac{2n\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}.$$

440. 解方程 $a\sin x+b\cos x=c$, 其中, $ab\neq 0$.

解 两边用 $\sqrt{a^2+b^2}$ 除后,得

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x$$

$$=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

设 φ 为能使下式成立的角:

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

原方程式成为

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

当 $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$ 即 $a^2+b^2\geq c^2$ 时,若取 α 是正弦等于 $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 的角中的一个,则

$$x+\varphi=n\pi+(-1)^n\alpha.$$

即 $\qquad x=n\pi+(-1)^n\alpha-\varphi.$

当 $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|>1$ 即 $a^2+b^2<c^2$ 时原方程无解.

441. 解方程 $\cos x\cos 3x=\cos 5x\cos 7x$.

解　两边都化成和的形式:

$$\cos 4x+\cos 2x=\cos 12x+\cos 2x,$$

$$\therefore\quad \cos 4x=\cos 12x,$$

$$\therefore\quad 12x=2n\pi\pm 4x.$$

上式取正号时 $x=\dfrac{2n\pi}{8}$, 取负号时 $x=\dfrac{n\pi}{8}$.

综合两者得 $x=\dfrac{n\pi}{8}$.

442. 解方程 $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}3x=2\operatorname{tg}2x$.

解　化简原方程成为

$$\operatorname{tg}x+\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x}=\frac{4\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x},$$

得　　$\operatorname{tg}^3x(1+\operatorname{tg}^2x)=0.$

因为 $1+\operatorname{tg}^2x\neq 0$, 所以 $\operatorname{tg}x=0$, $\therefore x=n\pi$.

443. 确定能使 $\sin^2x+\cos x+a=0$ 有解的 a 的范围. 设 $a=1$, 解这个方程.

解　$1-\cos^2x+\cos x+a=0,$

$$\cos^2x-\cos x-(a+1)=0.$$

$$\because\quad D=1+4(a+1)\geq 0,$$

$$\therefore\quad a\geq -\frac{5}{4}.$$

设 $\cos x=t$, 于是

$$f(t)=t^2-t-(a+1)$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\left(a+\frac{5}{4}\right).$$

由于 $f(t)$ 在 $t=\dfrac{1}{2}$ 时取得最小, 因此 $f(t)=0$ 至少有一个绝对值小于等于1的根, t 的条件是 $f(-1)\geq 0$,

$$\therefore\quad 1-a\geq 0,\quad \therefore\quad -\frac{5}{4}\leq a\leq 1.$$

当 $a=1$ 时, 要解的方程成为

$$\cos^2x-\cos x-2=0,$$

$$\because\quad \cos x\neq 2,\quad \therefore\quad \cos x=-1,$$

$$\therefore\quad x=(2n+1)\pi.$$

444. 解下面的联立方程组:

$$x+y=a, \qquad ①$$
$$\sin x+\sin y=b. \qquad ②$$

解　由②得

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b,$$

$$\therefore\quad 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b.$$

(i) $a=2n\pi$ 时, 因为 $\sin\dfrac{a}{2}=0$, 所以当 $b=0$ 时方程组没有确定解, 当 $b\neq 0$ 时没有解.

(ii) $a\neq 2n\pi$ 时,

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{b}{2\sin\dfrac{a}{2}}. \qquad ③$$

当 $\left|\dfrac{b}{2}\right|\leq\left|\sin\dfrac{a}{2}\right|$ 时, 设满足③的 $\dfrac{x-y}{2}$ 的一个角为 α, 则

$$\frac{1}{2}(x-y)=2n\pi\pm\alpha. \qquad ④$$

由①, ④得

$$x=2n\pi+\frac{1}{2}a\pm\alpha,$$

$$y=-2n\pi+\frac{1}{2}a\mp\alpha.$$

当 $\left|\dfrac{b}{2}\right|>\left|\sin\dfrac{a}{2}\right|$ 时方程组没有解.

445. 解下列联立方程组:

$$\begin{cases}\sin^2x+\sin^2y=\dfrac{1}{2}, & ①\\[2mm] \cos x\cos y=\dfrac{3}{4}. & ②\end{cases}$$

解　由①得

$$\cos^2x+\cos^2y=\frac{3}{2}, \qquad ③$$

由②、③得 $(\cos x-\cos y)^2=0$,

$$\therefore\quad \cos x=\cos y. \qquad ④$$

由②、④得 $\cos^2x=\dfrac{3}{4}$,

$$\therefore\quad \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

当 $\cos x=\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时,

$$\begin{cases}x=2n_1\pi+\dfrac{\pi}{6},\\[2mm] y=2n_2\pi+\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}\qquad \begin{cases}x=2n_1\pi+\dfrac{\pi}{6},\\[2mm] y=2n_2\pi-\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2n_1\pi-\dfrac{\pi}{6},\\[2mm] y=2n_2\pi+\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}\qquad \begin{cases}x=2n_1\pi-\dfrac{\pi}{6},\\[2mm] y=2n_2\pi-\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$$

当 $\cos x=\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，

$$\begin{cases}x=2n_1\pi+\frac{5\pi}{6},\\ y=2n_2\pi+\frac{5}{6}\pi.\end{cases}\quad \begin{cases}x=2n_1\pi+\frac{5\pi}{6},\\ y=2n_2\pi-\frac{5\pi}{6}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2n_1\pi-\frac{5\pi}{6},\\ y=2n_2\pi+\frac{5\pi}{6}.\end{cases}\quad \begin{cases}x=2n_1\pi-\frac{5\pi}{6},\\ y=2n_2\pi+\frac{5\pi}{6}.\end{cases}$$

446. 解下列三角方程式，其中设

$$0\leqq x\leqq\pi.$$

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0.$$

解 左边 $=(\sin 3x+\sin x)+\sin 2x$

$$=2\sin 2x\cos x+\sin 2x$$

$$=\sin 2x(2\cos x+1)=0,$$

$\therefore\ \sin 2x=0$ 或 $2\cos x+1=0$.

(i) $\qquad \sin 2x=0,$ ①

由假设知，$0\leqq x\leqq\pi$,

$$\therefore\ 0\leqq 2x\leqq 2\pi,\quad ②$$

由 ①、② 得 $2x=0,\ \pi,\ 2\pi$;

$$\therefore\ x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi.$$

(ii) $2\cos x+1=0$,

$$\therefore\ \cos x=-\frac{1}{2}.\quad ③$$

其中

$$0\leqq x\leqq\pi.\quad ④$$

由 ③、④ 得，$x=\frac{2\pi}{3}$.

所以解为 $x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi$.

447. 从 $\sec A\csc(90^\circ-A)=x\operatorname{ctg}(90^\circ-A)-1$ 中解出 x.

解 由已知式，$\sec^2 A-x\operatorname{tg}A=1$,

因而 $\qquad 1+\operatorname{tg}^2A-x\operatorname{tg}A=1$,

因而 $\qquad x\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}^2A$,

当 $A\neq n\times180^\circ$ 时，$\operatorname{tg}A\neq0$，故

$$x=\operatorname{tg}A.$$

当 $A=n\times180^\circ$ 时，$\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}^2A=0$，这时 x 可为任意实数.

448. 从 $x\sin(90^\circ-A)\operatorname{ctg}(90^\circ-A)=\cos(90^\circ-A)$ 中解出 x.

解 由已知式

$$x\cos A\operatorname{tg}A=\sin A,$$

或者说，$x\sin A=\sin A$，从而

$$x=1^*.$$

449. 以绳子牵住马，使马作圆周运动. 若当马走过 52.36 m 时绳子转过了 75°，求绳长.

解 因为绳转了 75° 时马走 52.36 m，如绳转动一个圆周时，马走过的路应为 $52.36\times\frac{360}{75}$(m)，这就是以绳长为半径的圆周长. 若设 $\pi=\frac{22}{7}$，则

$$52.36\times\frac{360}{75}=2\times\frac{22}{7}r.$$

其中 r 表示绳长.

由此，得

$$r=\frac{52.36\times360\times7}{75\times2\times22}=39.98(\text{m}).$$

450. 证明

$$\frac{\sin(180^\circ-A)}{\operatorname{tg}(180^\circ+A)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}(90^\circ-A)}{\operatorname{tg}(90^\circ+A)}\cdot\frac{\sin(270^\circ+A)}{\sin(-A)}=-\sin A.$$

解 原式左边

$$=\frac{\sin A}{\operatorname{tg}A}\cdot\frac{\operatorname{tg}A}{-\operatorname{ctg}A}\cdot\frac{-\cos A}{-\sin A}$$

$$=-\frac{\cos A}{\operatorname{ctg}A}=-\sin A.$$

451. 已知 $\sin\alpha=p\sin\beta$, $\cos\alpha=q\cos\beta$, $\sin\alpha+\cos\alpha=r(\sin\beta+\cos\beta)$, $\beta\neq k\pi$ 时，证明

$$(p-r)^2(1-q^2)+(q-r)^2(1-p^2)=0.$$

解 由给出的式子，有

$$p^2\sin^2\beta+q^2\cos^2\beta=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$$

$$=1=\cos^2\beta+\sin^2\beta.$$

当 $\cos\beta\neq0$ 时**，两边若除以 $\cos^2\beta$ 后，有

$$p^2\operatorname{tg}^2\beta+q^2=1+\operatorname{tg}^2\beta,$$

从而 $\qquad (1-p^2)\operatorname{tg}^2\beta=-(1-q^2)$,

---

* 当 $A\neq n\times180^\circ$ 时，$\sin A\neq0$，从而 $x=1$. 当 $A=n\times180^\circ$ 时，$\sin A=0$，x 可为任意实数.——译者

** 当 $\cos\beta=0$ 时由已知条件易得 $\cos\alpha=0$，从而 $\sin\alpha=\pm1$，$\sin\beta=\pm1$. 于是不论何时，有 $p=r=1$ 或 $p=r=-1$. 在这两种情况下都易证原式成立.——译者

而从 $p\sin\beta+q\cos\beta=r(\sin\beta+\cos\beta)$

可有　$(p-r)\operatorname{tg}\beta=-(q-r)$,

从而　$-(1-q^2)(p-r)^2\operatorname{tg}^2\beta$

$=(1-p^2)(q-r)^2\operatorname{tg}^2\beta$.

因为 $\operatorname{tg}\beta\neq0$, 两边除以 $\operatorname{tg}\beta$ 后,有

$$(p-r)^2(1-q^2)+(q-r)^2(1-p^2)=0.$$

452. 已知 $\sin x\sin y=\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma$,

$$\cos x\cos y=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma$$

和　$\cos^2x+\cos^2y=1+\cos^2(\alpha+\beta+\gamma)$,

证明:

$$\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2\gamma=\sin^2(\alpha+\beta+\gamma).$$

解　把第一个式子两边平方,得

$$(1-\cos^2x)(1-\cos^2y)=\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2\gamma,$$

即　$1-(\cos^2x+\cos^2y)+\cos^2x\cos^2y$

$=\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2\gamma$.

而从第二式和第三式得

$$1-[1+\cos^2(\alpha+\beta+\gamma)]+\cos^2(\alpha+\beta)\cos^2\gamma$$

$=\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2\gamma$,

即　$\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)-1$

$+[1-\sin^2(\alpha+\beta)](1-\sin^2\gamma)$

$=\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2\gamma$,

也即

$$\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)-\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\gamma=0.$$

453. 若 $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2+(\cos\alpha\cos\gamma)^2=1$, α、β、γ 都是锐角,证明

$$\sin\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

解　由条件知

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}+\cos^2\alpha(1-\sin^2\gamma)=1,$$

$$\sin^2\alpha-\sin^2\gamma\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha\sin^2\beta,$$

$$\sin^2\gamma\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta),$$

$$\sin^2\gamma\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha\cos^2\beta,$$

$$\sin^2\gamma=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\sin^2\beta}=\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta,$$

从而　　$\sin\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

454. 若 $(1+2\cos^{\frac{2}{3}}\alpha)(1+2\cos^{\frac{2}{3}}\beta)=3$, 证明

$$\frac{(1+8\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sin^3\alpha\cos\alpha}=\frac{(1+8\cos^2\beta)^{\frac{3}{2}}}{\sin^3\beta\cos\beta}.$$

解　由给出的式子得, $\cos^{\frac{2}{3}}\alpha=\dfrac{1-\cos^{\frac{2}{3}}\beta}{1+2\cos^{\frac{2}{3}}\beta}$,

从而,若把 $\dfrac{(1+8\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sin^3\alpha\cos\alpha}$ 中的 $\cos\alpha$ 用

$$\left(\frac{1-\cos^{\frac{2}{3}}\beta}{1+2\cos^{\frac{2}{3}}\beta}\right)^{\frac{3}{2}}$$

代入,把 $\sin^3\alpha$ 用

$$(1-\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}=\left[1-\left(\frac{1-\cos^{\frac{2}{3}}\beta}{1+2\cos^{\frac{2}{3}}\beta}\right)^3\right]^{\frac{3}{2}}$$

代入,并变形,就得到 $\dfrac{(1+8\cos^2\beta)^{\frac{3}{2}}}{\sin^3\beta\cos\beta}$.

455. 若 θ 是第三象限的角, $\operatorname{tg}\theta=2$, 求 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 的值.

解　由 $\operatorname{tg}\theta=2$ 知 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$,因而

$$\sin\theta=2\cos\theta,\ \ \sin^2\theta=4\cos^2\theta,$$

$$\sin^2\theta=4(1-\sin^2\theta),$$

$$\therefore\ \ \sin^2\theta=\frac{4}{5}.$$

因为 θ 是第三象限的角,所以 $\sin\theta<0$,

$$\therefore\ \ \sin\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}},$$

而 $\cos\theta=\dfrac{\sin\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

456. 证明

$$\frac{\csc(180^\circ-A)}{\sec(180^\circ+A)}\cdot\frac{\cos(-A)}{\cos(90^\circ+A)}=\operatorname{ctg}^2A.$$

解　原式左边

$$=\frac{\csc A}{-\sec A}\cdot\frac{\cos A}{-\sin A}=\frac{\csc A\cos A}{\sec A\sin A}$$

$$=\frac{\cos^2A}{\sin^2A}=\operatorname{ctg}^2A.$$

457. 证明

$[\cos(90^\circ+A)\csc(270^\circ+A)\operatorname{tg}(180^\circ-A)]$

$+[\sec(360^\circ-A)\sin(180^\circ+A)$

$\times\operatorname{ctg}(90^\circ-A)]=1$.

解　原式 $=\dfrac{(-\sin A)(-\sec A)(-\operatorname{tg}A)}{\sec A(-\sin A)\operatorname{tg}A}$

$=1$.

458. 求三条边长为 3, 4, $\sqrt{38}$ 的三角形中最大的内角.

解　因为 $\sqrt{38}=6.16\cdots$, 所以三边中最大的边是 $\sqrt{38}$, 从而要求的角就是这条边的对角. 如设这个角为 α, 则

$$38=3^2+4^2-2\times3\times4\cos\alpha,$$

因此, $\cos\alpha=-\dfrac{13}{24}$. 即 α 是一个余弦为 $-\dfrac{13}{24}$ 的钝角.

459. 证明 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

解 原式左边

$$=\operatorname{tg}18^\circ\operatorname{tg}54^\circ=\frac{\operatorname{tg}18^\circ}{\operatorname{tg}36^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

460. 求 $\sin 100^\circ\sin(-160^\circ)+\cos 200^\circ\times\cos(-280^\circ)$ 的值.

解 $\sin 100^\circ=\sin 80^\circ$,

$$\sin(-160^\circ)=\sin(-20^\circ)=-\sin 20^\circ,$$

$$\cos 200^\circ=-\cos 20^\circ,$$

$$\cos(-280^\circ)=\cos 80^\circ.$$

所以

$$\begin{aligned}原式&=\sin 80^\circ(-\sin 20^\circ)\\&\quad+(-\cos 20^\circ)(\cos 80^\circ)\\&=-(\sin 80^\circ\sin 20^\circ+\cos 20^\circ\cos 80^\circ)\\&=-\cos(80^\circ-20^\circ)\\&=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

461. 若 $\cos\alpha=k\sin\beta$, $\cos\beta=k\sin\gamma$, $\cos\gamma=k\sin\alpha$, 把 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 的值用 k 表示. 其中 α、β、γ 都是正的锐角.

解 因为 α、β、γ 都是正的锐角, 所以 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ 都是正的. 从而 $k>0$.

$$\cos\alpha=k\sin\beta,\quad ①$$

$$\cos\beta=k\sin\gamma,\quad ②$$

$$\cos\gamma=k\sin\alpha.\quad ③$$

把 ① 平方, 有

$$\cos^2\alpha=k^2\sin^2\beta=k^2(1-\cos^2\beta),$$

把 ② 代入上式, 有

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha&=k^2(1-k^2\sin^2\gamma)=k^2-k^4\sin^2\gamma\\&=k^2-k^4(1-\cos^2\gamma),\end{aligned}$$

再把 ③ 式代入, 有

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha&=k^2-k^4(1-k^2\sin^2\alpha)\\&=k^2-k^4+k^6\sin^2\alpha\\&=k^2-k^4+k^6(1-\cos^2\alpha).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad(1+k^6)\cos^2\alpha=k^2(1-k^2+k^4),$$

$$\therefore\quad\cos^2\alpha=\frac{k^2(1-k^2+k^4)}{1+k^6}=\frac{k^2}{1+k^2},$$

$$\therefore\quad\cos\alpha=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.\quad ④$$

由 ① 得 $\sin\beta=\frac{1}{k}\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$,

从而

$$\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2$$

$$=1-\frac{1}{1+k^2}=\frac{k^2}{1+k^2},$$

$$\therefore\quad\cos\beta=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

而由 ③ 可得

$$\cos^2\gamma=k^2\sin^2\alpha=k^2(1-\cos^2\alpha),$$

用 ④ 代入后, 得

$$\cos^2\gamma=k^2\left(1-\frac{k^2}{1+k^2}\right)=\frac{k^2}{1+k^2},$$

$$\therefore\quad\cos\gamma=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

462. 设 a, b, c, d 是实数, $f(\theta)=(a\cos\theta+b\sin\theta)^2+(c\cos\theta+d\sin\theta)^2$.

(1) 求 $F(\theta)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(\theta+t)-f(\theta)}{t}$.

(2) 若有满足 $0\leq\theta<\pi$ 的三个 θ 值使 $F(\theta)$ 取等值, 求 a, b, c, d 间的关系.

解

$$\begin{aligned}(1)\ f(\theta)&=(a\cos\theta+b\sin\theta)^2\\&\quad+(c\cos\theta+d\sin\theta)^2\\&=(a^2+c^2)\cos^2\theta+(b^2+d^2)\sin^2\theta\\&\quad+2(ab+cd)\sin\theta\cos\theta\\&=\frac{1}{2}(a^2+c^2)(1+\cos 2\theta)\\&\quad+\frac{1}{2}(b^2+d^2)(1-\cos 2\theta)\\&\quad+(ab+cd)\sin 2\theta\\&=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)\\&\quad+\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2-d^2)\cos 2\theta\\&\quad+(ab+cd)\sin 2\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&f(\theta+t)-f(\theta)\\&=\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2-d^2)\\&\quad\times[\cos 2(\theta+t)-\cos 2\theta]\\&\quad+(ab+cd)[\sin 2(\theta+t)-\sin 2\theta]\\&=-(a^2+c^2-b^2-d^2)\sin t\sin(2\theta+t)\\&\quad+2(ab+cd)\sin t\cos(2\theta+t).\end{aligned}$$

$\therefore\quad \dfrac{f(\theta+t)-f(\theta)}{t}$

$$=\frac{\sin t}{t}[(b^2+d^2-a^2-c^2)\sin(2\theta+t)+2(ab+cd)\cos(2\theta+t)],$$

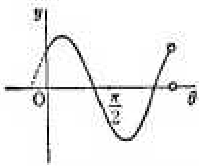
$$\therefore\quad F(\theta)=\lim_{t\to0}\frac{f(\theta+t)-f(\theta)}{t}=(b^2+d^2-a^2-c^2)\sin2\theta+2(ab+cd)\cos2\theta.$$

(2) 设$k=b^2+d^2-a^2-c^2$，$m=2(ab+cd)$，

$$F(\theta)=\sqrt{k^2+m^2}\sin(2\theta+\alpha).$$

$$\left(\text{其中 }\operatorname{tg}\alpha=\frac{m}{k}\right)$$

由于$0\leq\theta<\pi$，并且$y=\sin(2\theta+\alpha)$的周期是π，因而其图象若$mk\neq0$则应如下图，所以不会有三个不同的θ值使y相等。之所以对于θ的三个值能使$F(\theta)$相等，只能是因为



$$\sqrt{k^2+m^2}=0$$

即$k=m=0$。这样，a、b、c、d间的关系就是

$$\begin{cases}b^2+d^2-a^2-c^2=0,\\ab+cd=0.\end{cases}$$

463. 证明：在C为直角的三角形ABC中，

$$\cos2A+\cos2B=0.$$

解　因为A和B互为余角，所以

$$\sin B=\cos A,$$

从而
$$\cos2A+\cos2B=(2\cos^2A-1)+(1-2\sin^2B)=2\cos^2A-2\sin^2B=2\cos^2A-2\cos^2A=0.$$

别解　因为$2A$和$2B$互补，所以

$$\cos2A=-\cos2B,$$

从而
$$\cos2A+\cos2B=0.$$

464. 当$\sin t+\cos t=\dfrac{1}{2}$时，求$\sin^3t+\cos^3t$的值。

解　把$\sin t+\cos t=\dfrac{1}{2}$两边平方，得

$$1+2\sin t\cos t=\frac{1}{4},$$

$$\therefore\quad \sin t\cos t=-\frac{3}{8}.$$

$$\sin^3t+\cos^3t=(\sin t+\cos t)^3-3\sin t\cos t(\sin t+\cos t)=\frac{1}{8}-3\times\left(-\frac{3}{8}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{11}{16}.$$

465. 求$\sin^6\theta+\cos^6\theta$的最大值，最小值。并分别求出$\theta$为怎样的一般角时取得这些值。

解
$$\sin^6\theta+\cos^6\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3-3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta=1-\frac{3}{4}\sin^22\theta.$$

从而当$\sin^22\theta$取最小值时原式取得最大值，即当$\sin2\theta=0$时原式有极大值1，与此对应的θ值是$2\theta=n\pi$即

$$\theta=\frac{1}{2}n\pi.$$

此外，当$\sin^22\theta$取最大值时原式取最小值。从而当$\sin^22\theta=1$即$\sin2\theta=\pm1$时原式有最小值$1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$。与此对应的$\theta$值是$2\theta=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$即$\theta=\dfrac{2n+1}{4}\pi$。

466. 当$\sin A=\dfrac{3}{5}$时求$\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$的值，其中$0<A<90°$。

解
$$\operatorname{tg}A=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2A}}=\frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4},$$

因而
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{-1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2A}}{\operatorname{tg}A}=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{3^2}{4^2}}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}.$$

467. 当$180°<A<360°$，$\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，求$\sin\dfrac{A}{2}$的值。

解　由于$180°<A<360°$，所以$90°<\dfrac{A}{2}<180°$，从而$\sin\dfrac{A}{2}>0$，因此

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

468. 当 $180°<A<540°$, $\cos A=-\frac{1}{2}$ 时，求 $\cos\frac{A}{2}$ 的值.

解 由于 $180°<A<540°$，所以 $90°<\frac{A}{2}<270°$，从而 $\cos\frac{A}{2}$ 的值是负的，因此

$$\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$=-\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=-\frac{1}{2}.$$

469. 当 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\varphi=\frac{1}{3}$ 时求 $\cos\frac{1}{2}\times(\theta+\varphi)$ 的值. 其中 θ 和 φ 都是正的锐角.

解 因为 θ 和 φ 都是正锐角，所以

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

因而

$$\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

故

$$\cos\frac{1}{2}(\theta+\varphi)$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos(\theta+\varphi)}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{7-2\sqrt{6}}{12}}=\frac{(\sqrt{6}-1)\sqrt{3}}{6}.$$

470. 当 $\operatorname{tg}A=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}B=\frac{1}{3}$ 时，求 $\sin(A-B)$ 的值.

解 因为

$$\operatorname{tg}(A-B)=\frac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{3-2}{6+1}=\frac{1}{7},$$

所以

$$\sin(A-B)=\frac{\operatorname{tg}(A-B)}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(A-B)}}$$

$$=\frac{\frac{1}{7}}{\pm\sqrt{1+\frac{1}{49}}}=\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

471. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，求 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\operatorname{tg}\theta$ 的值.

解 (i) 因为 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta=1,$$

即 $\sin\theta\cos 45°+\cos\theta\sin 45°=1$,

亦即 $\sin(\theta+45°)=1$.

若设 $\theta+45°$ 取使上式成立的最小正值，则有 $\theta+45°=90°$，即 $\theta=45°$. 因而

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \operatorname{tg}\theta=1.$$

(ii) 因为 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，所以

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=2,$$

即 $1+\sin 2\theta=2$,

故 $\sin 2\theta=1$,

$\therefore\ \cos 2\theta=0$.

$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

从而 $\operatorname{tg}\theta=\pm 1$.

从上述所得值中选出适合 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ 的值是

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \operatorname{tg}\theta=1.$$

注 解法(i)中取最小角得到的解，和(ii)中一般地求得的解是一致的. 现在，在解法(i)中也用一般角来求的话，有

$$\theta+45°=360°m+90°,$$

故 $\theta=360°m+45°$,

因而 $\sin\theta=\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},$

$$\cos\theta=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}45^\circ=1,$$

即与原来得到的结果一致。

472. 设 A、B 和 $A+B$ 都是正的锐角，$\operatorname{ctg}A=2$，$\csc B=\sqrt{10}$，求 $A+B$。

解　因为 B 是正的锐角，所以

$$\operatorname{ctg}B=\sqrt{\csc^2 B-1}=\sqrt{10-1}=3,$$

从而

$$\operatorname{ctg}(A+B)=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1}{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B}=\frac{2\times3-1}{2+3}=1,$$

由 $A+B$ 为锐角可知 $A+B=45^\circ$。

473. 已知 $\sec A=\frac{17}{8}$，$\csc B=\frac{5}{4}$ 时求 $\sec(A+B)$。

解

$$\sec(A+B)=\frac{1}{\cos(A+B)}=\frac{1}{\cos A\cos B-\sin A\sin B},$$

而

$$\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{8}{17},$$

$$\sin B=\frac{1}{\csc B}=\frac{4}{5},$$

因而

$$\sin A=\pm\sqrt{1-\cos^2 A}=\pm\sqrt{1-\frac{8^2}{17^2}}=\pm\frac{15}{17},$$

$$\cos B=\pm\sqrt{1-\sin^2 B}=\pm\sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}}=\pm\frac{3}{5}.$$

从而

$$\sec(A+B)=\frac{1}{\pm\frac{8}{17}\times\frac{3}{5}\mp\frac{15}{17}\times\frac{4}{5}}=\frac{85}{\pm24\mp60}^{*},$$

$$\therefore\quad \sec(A+B)=\pm\frac{85}{84}\quad 或\quad \pm\frac{85}{36}.$$

474. 已知 $\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos B=\frac{3}{5}$，求 $\sin(A+B)$ 和 $\cos(A-B)$。

解

$$\sin A=\pm\sqrt{1-\cos^2 A}=\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\frac{3}{5},$$

$$\sin B=\pm\sqrt{1-\cos^2 B}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\pm\frac{4}{5}.$$

所以

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\pm\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\pm\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\pm\frac{9}{25}\pm\frac{16}{25}.$$

$$\therefore\quad \sin(A+B)=\pm1\quad 或\quad \pm\frac{7}{25}.$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\pm\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}\pm\frac{12}{25}.$$

$$\therefore\quad \cos(A-B)=\frac{24}{25}\quad 或\quad 0.$$

475. 求用角 A 的正弦、余弦表示角 $3A$ 的正切的式子。

解　$$\operatorname{tg}3A=\frac{\sin 3A}{\cos 3A}=\frac{3\sin A-4\sin^3 A}{4\cos^3 A-3\cos A}.$$

476. 求已知 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的值时计算 $\sin 2\alpha$ 的值的公式。

解　(i)

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

(ii)

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}.$$

477. 已知 $\sin A+\cos A=-\sqrt{1+\sin 2A}$，证明 A 是 135° 和 315° 之间的角。其中 A 是小于 360° 的正角。

解　因为 $\sin A+\cos A$ 是负的，所以 $\sin A$、$\cos A$ 不可能同时为正。因而 A 不是第一象限的角。而当 $\sin A$，$\cos A$ 同时为负时显然适合原式。因而 A 是第三象限的角时是适

---

* 这里分母上的 $\pm24\mp60$ 包括四种可能的搭配，即 $+24-60$，$+24+60$，$-24-60$，$-24+60$。474 题同此。——译者

合原式的．当 $\sin A>0$, $\cos A<0$ 时必须要有 $|\sin A|<|\cos A|$，从而 $135°<A<180°$．最后当 $\sin A<0$, $\cos A>0$ 时必须要有 $|\sin A|>|\cos A|$，从而 $270°<A<315°$．还容易验证，$A=135°$、$315°$ 时都适合原式，因此为使所给的关系式成立要有 $135°\leqq A\leqq 315°$．

478．证明：若 $\sin A+\cos A=\sqrt{1+\sin 2A}$ 则有 $A\leqq 135°$ 或 $A\geqq 315°$，其中 A 是比 $360°$ 小的正角．

解 由于 $\sin A+\cos A=\sqrt{1+\sin 2A}\geqq 0$，$\sin A$、$\cos A$ 都为非负时显然是适合原式的，因而 A 可以是锐角．$\sin A$、$\cos A$ 都为负时不适合原式，因而 A 不是第三象限的角．而当 $\sin A>0$, $\cos A<0$ 时，要使它们的和是正的，就必须 $|\sin A|>|\cos A|$．但 $\sin A>0$, $\cos A<0$ 时 A 是第二象限的角，因而 $|\sin A|>|\cos A|$ 时有 $135°>A>90°$．当 $\sin A<0$, $\cos A>0$ 时，必须有 $|\sin A|<|\cos A|$．从而 $360°>A>315°$，还容易验证，$A=135°$、$315°$ 时也都适合原式，因而 $\sin A+\cos A=\sqrt{1+\sin 2A}$ 时应有 $A\leqq 135°$ 或 $A\geqq 315°$．

479．当 A 为 (1) $80°$; (2) $100°$; (3) $390°$; (4) $1000°$ 时，分别决定下列公式中根号前取什么符号．

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},$$
$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$$

解 (1) $A=80°$ 时 $\frac{A}{2}=40°$，$\sin\frac{A}{2}$，$\cos\frac{A}{2}$ 都是正的，因而两个公式右边都取正号．

(2) $A=100°$ 时 $\frac{A}{2}=50°$，因而符号的取法与(1)同．

(3) $A=390°$ 时，$\frac{A}{2}=195°$ 是第三象限的角．因而符号都取负的．

(4) $A=1000°$ 时，$\frac{A}{2}=500°=360°+140°$ 是第二象限的角．因而 $\sin\frac{A}{2}$ 为正，$\cos\frac{A}{2}$ 为负．由此可以决定公式的符号．

480．$\alpha=190°$ 时下式中根号前取什么符号？

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

解 $\alpha=190°$ 时 $\operatorname{tg}\alpha>0$，$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}95°<0$，因此公式的右边为负．由于式子右边的分母为正，分子必须为负，因此根号前必须取负号．

481．讨论 $\cos A-\sin A=\sqrt{1-\sin 2A}$ 成立的条件，其中 A 为小于 $360°$ 的正角．

解 要使 $\cos A-\sin A$ 为非负，不能是 $\cos A<0$, $\sin A>0$，即 A 不能是第二象限的角．而 $\cos A>0$, $\sin A<0$ 时原式明显成立，即 A 是第四象限的角时原式常成立．当 $\cos A$, $\sin A$ 都是正的时候，必须要有 $|\cos A|\geqq|\sin A|$，所以 $45°\geqq A>0°$．当 $\sin A$, $\cos A$ 都是负的时候，必须要有 $|\cos A|\leqq|\sin A|$，所以 $225°\leqq A<270°$．由此，为使给出的式子成立，必须要有 $A\leqq 45°$ 或 $A\geqq 225°$．

482．当 θ 从 $0°$ 变到 $360°$ 时，研究

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}\theta}$$

的变化情况．

解 当 θ 从 $0°$ 到 $90°$，$90°$ 到 $180°$，$180°$ 到 $270°$，$270°$ 到 $360°$ 变化时，$\operatorname{tg}\theta$ 分别从 0 到 $+\infty$，$-\infty$ 到 0，0 到 $+\infty$，$-\infty$ 到 0．因此，当 θ 如上变化时，$1+\operatorname{tg}\theta$ 分别从 1 到 $+\infty$，$-\infty$ 到 0 再到 1，1 到 $+\infty$，$-\infty$ 到 0 再到 1．原式为 $1+\operatorname{tg}\theta$ 的倒数，所以当 θ 从 $0°$ 变到 $90°$ 时，原式从 1 减少到 0，当 θ 从 $90°$ 变到 $180°$ 时原式先从 0 减小到负无穷(当 θ 为 $135°$ 原式无意义)，再从正无穷减小到 1．当 θ 从 $180°$ 变到 $360°$ 时，原式重复上述变化情况．

483．当 θ 从 $0°$ 变到 $360°$ 时，研究

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

的变化情况．

解 $$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}.$$

设原式的值为 y，它的变化情况如用表列出则如下：

θ	0°	$\cdots$	180°	$\cdots$	360°
$\dfrac{\theta}{2}$	0°	$\cdots$	90°	$\cdots$	180°
$\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}$	0	增	$+\infty,\ -\infty$	增	0
y	0	增	$+\infty$	减	0

484. 求 $\sin 195^\circ$ 的值(精确到四位小数).

解 $\sin 195^\circ=\sin(180^\circ+15^\circ)$

$$=-\sin 15^\circ=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\approx-\frac{2.44948-1.41421}{4}$$

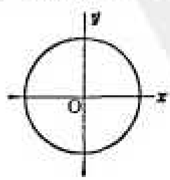
$$=-\frac{1.03527}{4}=-0.2588\cdots.$$

485. (1) 设 $\sin\theta$ 的值标在横轴上, $\cos\theta$ 的值标在纵轴上, 表示 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 之间关系的图象是怎样的?

(2) 设 $\sin\theta$ 的值标在横轴上, $\mathrm{tg}\theta$ 的值标在纵轴上, 画出表示 $\sin\theta$ 和 $\mathrm{tg}\theta$ 之间关系的图象.

(3) 设 $\mathrm{tg}\theta$ 的值标在横轴上, $\cos\theta$ 的值标在纵轴上, 画出表示 $\mathrm{tg}\theta$ 和 $\cos\theta$ 之间关系的图象.

解 (1) 由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, 若设 $\sin\theta=x$, $\cos\theta=y$, 则 $x^2+y^2=1$, 这是一个以原点为圆心, 半径为 1 的圆.



(2) 由

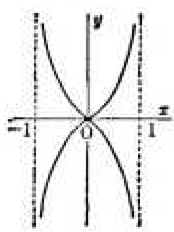
$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\pm\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}},$$

若设 $\sin\theta=x$, $\mathrm{tg}\theta=y$, 则

$$y=\pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

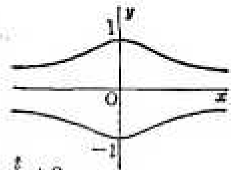
$(-1\leq x\leq 1)$



它的图象如图所示, 是关于两条轴和原点对称的一曲线.

(3) 由 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sec\theta}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}$, 若设 $\mathrm{tg}\theta=x$, $\cos\theta=y$, 则

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$



486. 某曲线上一任意点的坐标 (x, y), 分别由

$$x=\mathrm{tg}\frac{t}{2}+2,$$

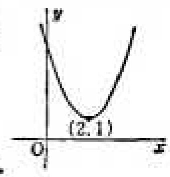
$$y=\frac{2}{\cos t+1}$$

给出, 求 x 与 y 的一个不含 t 的关系式, 并画出这条曲线.

解 从两式中消去 t, 有

$$y=\frac{2}{2\cos^2\dfrac{t}{2}}=\sec^2\frac{t}{2}$$

$$=1+\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}=1+(x-2)^2.$$



$$\therefore\quad y=x^2-4x+5.$$

这是一条象上图那样的抛物线.

487. 从

$$\begin{cases}x+y\sin\theta=a(1+\cos\theta),\\ x\sin\theta+y=a\sin\theta\end{cases}$$

中消去 θ. 若以消去 θ 所得式中的 (x, y) 作为点的直角坐标, 该式表示什么曲线? 设

$$\cos\theta\neq 0,\ a>0.$$

解 把给出的式子变形,

$$(x-a)+y\sin\theta=a\cos\theta, \quad ①$$

$$(x-a)\sin\theta+y=0. \quad ②$$

把 ①、② 两边分别平方, 得

$$(x-a)^2+2(x-a)y\sin\theta+y^2\sin^2\theta=a^2\cos^2\theta, \quad ③$$

$$(x-a)^2\sin^2\theta+2(x-a)y\sin\theta+y^2=0. \quad ④$$

③ − ④, 得

$$(x-a)^2(1-\sin^2\theta)-y^2(1-\sin^2\theta)=a^2\cos^2\theta,$$

$$(x-a)^2\cos^2\theta-y^2\cos^2\theta=a^2\cos^2\theta.$$

因 $\cos\theta\neq 0$, 故

$$(x-a)^2-y^2=a^2,$$

由上式知, 点 (x, y) 在以点 $(a, 0)$ 为中心的等轴双曲线上.

注 现从 ①、② 中解出 $\sin\theta$, $\cos\theta$. 因为 $x\neq a$ ($x=a$ 时 $y=0$, $\cos\theta=0$, 与假设矛盾), 有

$$\sin\theta=\frac{y}{a-x},$$

代入①，因 $a\neq 0$，有

$$\cos\theta=\frac{1}{a}\left(x-a+\frac{y^2}{a-x}\right)=\frac{y^2-(x-a)^2}{a(a-x)}.$$

把上两式代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，有

$$\left(\frac{y}{a-x}\right)^2+\left[\frac{y^2-(x-a)^2}{a(a-x)}\right]^2=1,$$

$$a^2y^2+[y^2-(x-a)^2]^2=a^2(x-a)^2,$$

$$y^4+y^2[a^2-2(x-a)^2]$$
$$+(x-a)^2[(x-a)^2-a^2]=0,$$

$$[y^2-(x-a)^2][y^2-(x-a)^2+a^2]=0.$$

由给出的条件 $\cos\theta\neq 0$，有

$$y^2-(x-a)^2\neq 0,$$

$$\therefore\quad (x-a)^2-y^2=a^2.$$

这种消去法是一般使用的方法，但解答中叙述的方法比较简单些。

488. 若 $\begin{cases}x\cos t=\cos^2 t+1,\\ y\cos^2 t=\cos^4 t+1.\end{cases}$

(1) 怎样用 x 的式子表示 y?

(2) t 从 $0°$ 变到 $180°$ 时，以 (x, y) 为坐标的点描出怎样的曲线?画出它的图象。

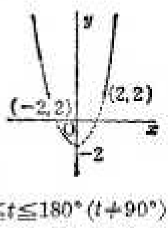
解 (1) $\cos t\neq 0$（否则与给出的式子矛盾）。由第1式得

$$x=\cos t+\frac{1}{\cos t},$$

$$\therefore\quad y=\cos^2 t+\frac{1}{\cos^2 t}$$
$$=\left(\cos t+\frac{1}{\cos t}\right)^2-2=x^2-2.$$

(2) $\cos t>0$ 时，

$$x=\cos t+\frac{1}{\cos t}$$
$$\geq 2\sqrt{\cos t\cdot\frac{1}{\cos t}}$$
$$=2,$$



即 $x\geq 2$。同样地，$\cos t<0$ 时有 $x\leq -2$。因此，在 $0°\leq t\leq 180°$ $(t\neq 90°)$ 的范围内，点 (x, y) 描出了抛物线 $y=x^2-2$ 上的两段（$|x|\geq 2$）。

489. 已知

$$\sqrt{x}=|\cos\pi t-\sin\pi t|,$$
$$\sqrt{y}=|\cos^2\pi t-\sin^2\pi t|.$$

试答下列问题。

(1) 画出表示 x、t 之间关系的图象，其中 $-1\leq t\leq 1$。

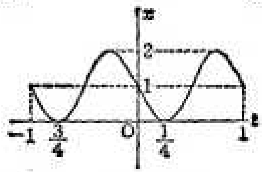
(2) 确定表示 y 和 x 之间关系的式子 $y=f(x)$。

(3) 画出 $y=f(x)$ 的图象，其中 $-1\leq t\leq 1$。

解 (1) 由 $\sqrt{x}=|\cos\pi t-\sin\pi t|$，得

$$x=\cos^2\pi t+\sin^2\pi t-2\sin\pi t\cos\pi t$$
$$=1-\sin 2\pi t. \qquad ①$$

从而得到表示 x 和 t 的关系的图象，在 $-1\leq t\leq 1$ 范围内如右图所示。



(2) 由 $\sqrt{y}=|\cos^2\pi t-\sin^2\pi t|$，得

$$y=(\cos^2\pi t-\sin^2\pi t)^2$$
$$=\cos^2 2\pi t=1-\sin^2 2\pi t.$$

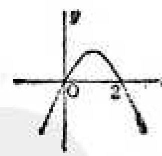
由①，$\sin 2\pi t=1-x$，

$$\therefore\quad y=1-(1-x)^2,$$

即 $\quad y=-x^2+2x$，

但由①还知这个式子中 $0\leq x\leq 2$。

(3) 如右图。



490. 证明：当 θ 变化时，抛物线 $y=x^2+2x\sin\theta+1$ 的顶点总在确定的一段抛物线上。

解 把抛物线的方程式变形，

$$y=x^2+2x\sin\theta+1$$
$$=(x+\sin\theta)^2+1-\sin^2\theta$$
$$=(x+\sin\theta)^2+\cos^2\theta.$$

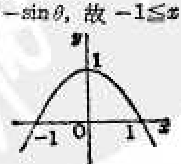
故抛物线的顶点 (x, y) 为

$$x=-\sin\theta,\ y=\cos^2\theta.$$

由这两个式子消去 θ，

$$y=\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-x^2.$$

即 $y=1-x^2$。但由于 $x=-\sin\theta$，故 $-1\leq x\leq 1$。从而抛物线的顶点当 θ 变化时，总在抛物线 $y=1-x^2$ 对应于 $-1\leq x\leq 1$ 的一段上。



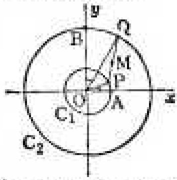
491. 以坐标系原点 O 为圆心的两个同心圆 C_1、C_2，半径分别为 2 cm，6 cm。点 P 在 C_1 上正向旋转，点 Q 在 C_2 上负向旋转，角速度都是每秒 1 弧度。并设 $t=0$ 时点 P 恰通过 x 轴上的 A 点，点 Q

恰通过 y 轴上的 B 点。

(1) 把点 Q 的 y 坐标用 t 的函数表示。

(2) 把线段 PQ 的中点 M 的纵坐标，用 t 的函数表示。

(3) 画出点 M 的运动轨迹。



解　设 t 秒后点 P、Q 的坐标分别为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，线段 PQ 的中点 M 的坐标为 (x, y)。

(1) $y_2=6\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=6\cos t$。

(2) 同样地，$y_1=2\sin t$。因此

$$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(2\sin t+6\cos t)$$
$$=\sin t+3\cos t。\qquad ①$$

(3) 同样地，$x_1=2\cos t$，

$$x_2=6\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=6\sin t。$$

因此，

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{1}{2}(2\cos t+6\sin t)$$
$$=3\sin t+\cos t。\qquad ②$$

①－②×3，得

$$y-3x=-8\sin t,\quad \therefore\quad \sin t=\frac{3x-y}{8}。\qquad ③$$

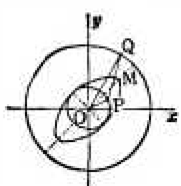
①×3－②，得

$$3y-x=8\cos t,\quad \therefore\quad \cos t=\frac{3y-x}{8}。\qquad ④$$

把③、④两边平方后分别相加，

$$\frac{(3x-y)^2}{64}+\frac{(3y-x)^2}{64}$$
$$=\sin^2 t+\cos^2 t=1,$$
$$10(x^2+y^2)-12xy=64,$$
$$\therefore\quad 5x^2+5y^2-6xy=32。\qquad ⑤$$

这就是表示 M 点运动轨迹的方程，它是如右图的一个椭圆。



注　由二次曲线的理论，或经旋转坐标轴后可知，⑤的曲线是一个椭圆。

492．证明：若 $\cos A=\cos B$，$\sin A=-\sin B$，则 $A+B=2n\pi$。

解　$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$，

用 $\cos A=\cos B$，$\sin A=-\sin B$ 代入上式，

$$上式=\cos^2 A+\sin^2 A=1。$$
$$\therefore\quad \cos(A+B)=1,$$
$$\therefore\quad A+B=2n\pi。$$

493．证明：

$$y=\cos x-\sin x,\qquad ①$$
$$y=\cos x+\sin x\qquad ②$$

这两个函数的图象可沿 x 轴平移后重合。

解　在①中用 $x-90°$ 代替 x，

$$\cos(x-90°)-\sin(x-90°)$$
$$=\cos(90°-x)+\sin(90°-x)$$
$$=\sin x+\cos x。$$

这就是②式。因而只要把①的图象向右平移 $90°$，就可以和②的图象完全重合。

494．证明下列各式：

(1) $\sin A\cos(90°-A)+\cos A\sin(90°-A)=1$，

(2) $\mathrm{tg}^2 A\sec^2(90°-A)-\sin^2 A\csc^2(90°-A)=1$。

解　(1) 原式左边

$$=\sin A\sin A+\cos A\cos A$$
$$=\sin^2 A+\cos^2 A=1。$$

(2) 原式左边

$$=\mathrm{tg}^2 A\csc^2 A-\sin^2 A\sec^2 A$$
$$=\frac{1}{\cos^2 A}-\sin^2 A\sec^2 A$$
$$=\sec^2 A(1-\sin^2 A)$$
$$=\sec^2 A\cos^2 A=1。$$

495．证明 $\sin^2(A+45°)+\sin^2(A-45°)=1$。

解　$\sin(A+45°)=\cos(90°-A-45°)$
$$=\cos(45°-A)=\cos(A-45°),$$

因此，

$$原式左边=\cos^2(A-45°)+\sin^2(A-45°)$$
$$=1。$$

别解　(i)

$$原式左边=(\sin A\cos 45°+\cos A\sin 45°)^2$$
$$+(\sin A\cos 45°-\cos A\sin 45°)^2$$
$$=\frac{1}{2}[(\sin A+\cos A)^2$$
$$+(\sin A-\cos A)^2]$$
$$=\frac{1}{2}[2(\sin^2 A+\cos^2 A)]=1。$$

(ii) 因为 $\sin(45°+A)=\sin(45°-A)=$

$\sqrt{2}\sin A$，因此，

$$\sin^2(45°+A)+\sin^2(45°-A)$$
$$=2\sin^2 A+2\sin(45°+A)\sin(45°-A)$$
$$=2\sin^2 A+\cos 2A-\cos 90°$$
$$=2\sin^2 A+\cos^2 A-\sin^2 A-0$$
$$=\sin^2 A+\cos^2 A=1.$$

496. 化简下面各式：

(1) $(\csc A-\sin A)(\sec A-\cos A)\times(\operatorname{tg} A+\operatorname{ctg} A)$；

(2) $(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B)(\operatorname{ctg} A-\operatorname{ctg} B)+(\operatorname{tg} A-\operatorname{tg} B)(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B)$；

(3) $(\sec x\sec y+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y)^2-(\operatorname{tg} x\sec y+\sec x\operatorname{tg} y)^2$；

(4) $\dfrac{1}{1+\sin^2 x}+\dfrac{1}{1+\cos^2 x}+\dfrac{1}{1+\sec^2 x}+\dfrac{1}{1+\csc^2 x}$.

解 (1)

$$\text{原式}=\left(\frac{1}{\sin A}-\sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A}-\cos A\right)\times\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)$$
$$=\frac{1-\sin^2 A}{\sin A}\cdot\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}\times\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}$$
$$=\frac{\cos^2 A\sin^2 A}{\cos^2 A\sin^2 A}=1.$$

(2)

$$\text{原式}=(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B)\left(\frac{1}{\operatorname{tg} A}-\frac{1}{\operatorname{tg} B}\right)+(\operatorname{tg} A-\operatorname{tg} B)\left(\frac{1}{\operatorname{tg} A}+\frac{1}{\operatorname{tg} B}\right)$$
$$=(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B)\frac{\operatorname{tg} B-\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B}+(\operatorname{tg} A-\operatorname{tg} B)\frac{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B}$$
$$=\frac{\operatorname{tg}^2 B-\operatorname{tg}^2 A+\operatorname{tg}^2 A-\operatorname{tg}^2 B}{\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B}=0.$$

(3)
$$\text{原式}=\sec^2 x\sec^2 y+2\sec x\sec y\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y+\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y-\operatorname{tg}^2 x\sec^2 y-2\operatorname{tg} x\sec y\sec x\operatorname{tg} y-\sec^2 x\operatorname{tg}^2 y$$
$$=\sec^2 x(\sec^2 y-\operatorname{tg}^2 y)+\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}^2 y-\sec^2 y)$$
$$=\sec^2 x-\operatorname{tg}^2 x=1.$$

(4)
$$\text{原式}=\frac{1}{1+\sin^2 x}+\frac{1}{1+\csc^2 x}+\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sec^2 x}$$
$$=\left(\frac{1}{1+\sin^2 x}+\frac{1}{1+\frac{1}{\sin^2 x}}\right)+\left(\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\frac{1}{\cos^2 x}}\right)$$
$$=\frac{1+\sin^2 x}{1+\sin^2 x}+\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$$
$$=1+1=2.$$

497. 求 $\dfrac{\operatorname{tg} 60°-\operatorname{tg} 30°}{\sin 60°-\sin 45°}$ 的值至二位小数.

解
$$\text{原式}=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{3-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{4}{3-\sqrt{6}}=\frac{4(3+\sqrt{6})}{9-6}$$
$$\approx\frac{4(3+2.449)}{3}$$
$$=7.265\cdots\approx 7.27.$$

498. 三角形的三个角成等差数列．最小的角以秒为单位的值，是最大角以分为单位时的值的4倍，求这三个角的角度值．

解 设三个角的度数为 $x-y$，x，$x+y$，则 $(x-y)+x+(x+y)=180°$，即 $3x=180°$，故 $x=60°$．而

$$60\times60(x-y)=4\times60(x+y),$$

故 $900-15y=60+y$，从而 $y=52.5$，所以 $x-y=7.5$，$x+y=112.5$．三个角的值为 $7°30'$，$60°$，$112°30'$．

499. 在 $11\frac{1}{9}$ 分钟间钟表的时针和分针各转过多少角度？

解 时针在一小时即60分钟间转过 $360°\times\frac{1}{12}$ 的角度，故 $11\frac{1}{9}$ 分钟间经过的角为

$$360°\times\frac{1}{12}\times\frac{11\frac{1}{9}}{60}=\frac{50°}{9}=5°33'20''.$$

而分针则转过时针转过角度的 12 倍，因而有

$$\frac{50°}{9}\times12=66°4'.$$

500. 三角形的一个角为 $80°12'45''$，第二个角是第三个角的二倍，求未知的两个角.

解 设第三个角为 x 度，则第二个角为 $2x$ 度. 因而 $2x+x=180°-80°12'45''$，即

$$3x=99°47'15'',$$

从而 $x=33°15'45''$, $2x=66°31'30''$.

501. 三角形的一个内角为 $45°$，一个内角为 $\frac{1}{2}$ 弧度，求第三个角的度数和弧度.

解 $\frac{1}{2}$ 弧度 $=\frac{180°}{2\pi}\approx\frac{57.2957°}{2}$

$$\approx28.6479°.$$

而 $45°=\frac{45\pi}{180}$ 弧度 $=\frac{\pi}{4}$ 弧度 ≈0.785398 弧度. 若三角形的第三个角为 A，则

$$A=180°-(45°+28.6479°)=106.3521°.$$

以弧度计时，

$$A=\pi-(0.785398+0.5)$$
$$=\pi-1.285398\approx1.85619.$$

502. 证明：与 α 同时具有相等正弦、余弦的所有角，都包含在 $2n\pi+\alpha$ 中.

解 与 α 有相同余弦值的所有的角都包含在 $2n\pi\pm\alpha$ 中，这里出现的是 π 的偶倍数. 而与 α 有相同正弦值的所有的角都包含在 $n\pi+(-1)^n\alpha$ 中，在这个式子里 n 取偶数时 α 前的符号为 + 号. 所以与 α 有相同的正弦、余弦的角，显然都包含在 $2n\pi+\alpha$ 中.

503. 求满足 $\operatorname{tg}^2\theta=\operatorname{tg}^2\alpha$ 的 θ 的一般值.

解 $\operatorname{tg}^2\theta=\operatorname{tg}^2\alpha$，故 $\operatorname{tg}\theta=\pm\operatorname{tg}\alpha$. 当取 + 号时，它的最简单的解是 $\theta=\alpha$，而一般解则为 $\theta=n\pi+\alpha$. 当取 − 号时，它的最简单的解为 $\theta=-\alpha$，而一般的解是 $\theta=n\pi-\alpha$. 这两个公式可化简为 $\theta=n\pi\pm\alpha$.

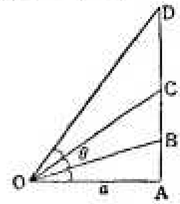
504. 证明：若 $\cos B=\cos A$, $\operatorname{tg}B=-\operatorname{tg}A$，则 $A+B$ 为 $360°$ 的倍数.

解 由 $\cos B=\cos A$，则 $B=2n\pi\pm A$，由 $\operatorname{tg}B=-\operatorname{tg}A$，则 $B=n\pi-A$. 为使上两式同时成立，必须有 $B=2n\pi-A$. 即 $B+A$ 为 $360°$ 的整倍数，这就是所要证明的.

505. 直角三角形 OAD 中 A 为直角顶点，$\angle AOD$ 的三等分线和 AD 相交，交点离 A 较近的是 B，较远的是 C，线段 AB, BC, CD

(1) 能构成等差数列吗?

(2) 能构成等比数列吗?



解 在右图中，设

$\angle AOD=3\theta$,

$OA=a$,

AB, BC, CD 可如下那样用三角函数表示出来.

$$AB=a\operatorname{tg}\theta,$$

$$BC=a(\operatorname{tg}2\theta-\operatorname{tg}\theta)=a\left(\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}-\operatorname{tg}\theta\right)$$

$$=a\operatorname{tg}\theta\,\frac{1+\operatorname{tg}^2\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta},$$

$$CD=a\operatorname{tg}3\theta-a\operatorname{tg}2\theta$$

$$=a\left(\frac{\operatorname{tg}2\theta+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}2\theta\operatorname{tg}\theta}-\operatorname{tg}2\theta\right)$$

$$=a\operatorname{tg}\theta\,\frac{1+\operatorname{tg}^22\theta}{1-\operatorname{tg}2\theta\operatorname{tg}\theta}$$

$$=a\operatorname{tg}\theta\,\frac{1+\left(\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}\right)^2}{1-\frac{2\operatorname{tg}^2\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}}$$

$$=a\operatorname{tg}\theta\cdot\frac{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2}{(1-\operatorname{tg}^2\theta)(1-3\operatorname{tg}^2\theta)},$$

(1) $AB+CD-2BC$

$$=a\operatorname{tg}\theta\left[1+\frac{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2}{(1-\operatorname{tg}^2\theta)(1-3\operatorname{tg}^2\theta)}-\frac{2(1+\operatorname{tg}^2\theta)}{1-\operatorname{tg}^2\theta}\right]$$

$$=\frac{a\operatorname{tg}\theta}{(1-\operatorname{tg}^2\theta)(1-3\operatorname{tg}^2\theta)}$$
$$\times[(1-\operatorname{tg}^2\theta)(1-3\operatorname{tg}^2\theta)+(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2-2(1+\operatorname{tg}^2\theta)\times(1-3\operatorname{tg}^2\theta)]$$

$$=\frac{a\operatorname{tg}\theta(10\operatorname{tg}^4\theta+2\operatorname{tg}^2\theta)}{(1-\operatorname{tg}^2\theta)(1-3\operatorname{tg}^2\theta)}$$

$$=\frac{2a\operatorname{tg}^3\theta(5\operatorname{tg}^2\theta+1)}{(1-\operatorname{tg}^2\theta)(1-3\operatorname{tg}^2\theta)}.$$

这个式子当 $0°<\theta<30°$ 时不会为 0，所以 AB, BC, CD 不能构成等差数列.

(2) $AB\cdot CD-BC^2$

$$=(a\operatorname{tg}\theta)^2\left[\frac{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2}{(1-\operatorname{tg}^2\theta)(1-3\operatorname{tg}^2\theta)}-\frac{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2}{(1-\operatorname{tg}^2\theta)^2}\right]$$

$$=\frac{a^2\operatorname{tg}^2\theta(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2}{1-\operatorname{tg}^2\theta}\times\left(\frac{1}{1-3\operatorname{tg}^2\theta}-\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\theta}\right)$$

$$=\frac{a^2\operatorname{tg}^2\theta(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2}{1-\operatorname{tg}^2\theta}\times\frac{2\operatorname{tg}^2\theta}{(1-3\operatorname{tg}^2\theta)(1-\operatorname{tg}^2\theta)}$$

$$=\frac{2a^2\operatorname{tg}^4\theta(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2}{(1-\operatorname{tg}^2\theta)^2(1-3\operatorname{tg}^2\theta)},$$

同样地，这个式子也不会为0，所以 AB，BC，CD 不能构成等比数列。

5．其他

506． 求出一个最小的正角，使得 θ 加上这个角后 $\operatorname{tg}5\theta$ 的值不变。

解　一般地有 $\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}(A+180°)$，因此 $\operatorname{tg}5\theta=\operatorname{tg}(5\theta+180°)$，即 5θ 可加上使 $\operatorname{tg}5\theta$ 不变的最小正角为 $180°$。从而 θ 可加上的最小正角为 $\frac{180°}{5}=36°$。

507． 根据圆内接正多边形的边与圆半径的比，求 $60°$、$45°$、$30°$、$18°$ 的正弦、余弦值。

解　在圆内接正 n 边形中，边长与外接圆半径的比的一半等于 $\frac{360°}{2n}$ 即 $\frac{180°}{n}$ 角的正弦。当 n 依次取 3、4、6、10 时 $\frac{180}{n}$ 为 60、45、30、18。又从平面几何的定理知，外接圆的半径为1时，内接正三角形、正方形、正六边形、正十边形分别等于 $\sqrt{3}$、$\sqrt{2}$、1、$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。从而 $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 30°=\frac{1}{2}$，$\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$。把它们代入 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$ 后可算出 $\cos 60°=\frac{1}{2}$，$\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 18°=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$。

508． 证明：当 $A<90°$ 时，

$$\sin A+\cos A>1.$$

解　因为 $A<90°$，A 可为直角三角形的一个角。作有一个锐角等于 A 的直角三角形 ABC，其中 C 为直角。这时有 $AC+BC>AB$，从而 $\frac{AC}{AB}+\frac{BC}{AB}>1$。即

$$\sin A+\cos A>1.$$

509． 求 $\operatorname{tg}60°\sin^2 45°$，$\frac{1-\operatorname{tg}^2 30°}{1+\operatorname{tg}^2 30°}$ 和 $\cos A\operatorname{tg}A\operatorname{tg}(90°-A)\csc(90°-A)$ 的值。

解　因为 $\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}$，$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此 $\operatorname{tg}60°\sin^2 45°=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$。因为 $\operatorname{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因此

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 30°}{1+\operatorname{tg}^2 30°}=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}&\cos A\operatorname{tg}A\operatorname{tg}(90°-A)\csc(90°-A)\\&=\cos A\operatorname{tg}A\operatorname{ctg}A\sec A\\&=(\cos A\sec A)(\operatorname{tg}A\operatorname{ctg}A)\\&=1\times1=1.\end{aligned}$$

510． 求 $72°$ 的正弦和余弦。

解　$72°$ 的正弦和余弦分别等于 $18°$ 的余弦和正弦。因此（参见问题373），

$$\sin 72°=\cos 18°=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\cos 72°=\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

511． 求 $22.5°$ 的正弦和余弦。

解　$$\sin 22.5°=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos 22.5°=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

512． 求 $67°30'$ 的各个三角函数的值。

解　因为 $67°30'$ 和 $22.5°$ (即 $22°30'$) 互为余角，因此

$$\sin 67°30' = \cos 22.5° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

$$\cos 67°30' = \sin 22.5° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg} 67°30' = \frac{\sin 67°30'}{\cos 67°30'} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}}$$

$$= \sqrt{\frac{4+4\sqrt{2}+2}{4-2}}$$

$$= \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1.$$

$$\therefore\quad \csc 67°30' = \frac{1}{\sin 67°30'}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{4-2\sqrt{2}},$$

$$\sec 67°30' = \frac{1}{\cos 67°30'}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{4+2\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{ctg} 67°30' = \frac{1}{\operatorname{tg} 67°30'}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1.$$

513. 证明 $\operatorname{ctg}(3A-180°) = \operatorname{ctg} 3A$.

解　$\operatorname{ctg}(3A-180°) = -\operatorname{ctg}(180°-3A)$

$= \operatorname{ctg} 3A$.

514. 已知 $\sin^3 A - \cos^3 A = 1$, 求

$\sin A - \cos A$.

解　由于 $\sin^3 A - \cos^3 A = 1$, 故

$$(\sin A - \cos A)$$
$$\times(\sin^2 A + \sin A\cos A + \cos^2 A) = 1, \quad ①$$

$$\sin A - \cos A$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos A\right)$$
$$= \sqrt{2}\sin(A-45°).$$

若设 $x = \sin A - \cos A$, 则 $|x| \leq \sqrt{2}$,

$$x^2 = \sin^2 A + \cos^2 A - 2\sin A\cos A$$
$$= 1 - 2\sin A\cos A.$$

$$\therefore\quad \sin A\cos A = \frac{1-x^2}{2}.$$

由 ① 得

$$x\left(1+\frac{1-x^2}{2}\right) = 1.$$

整理后，得

$$(x-1)^2(x+2) = 0,$$

$$\therefore\quad x = 1\ (\text{重根}),\ x = -2.$$

由于 $|x| \leq \sqrt{2}$, 所以 $x = 1$,

$$\therefore\quad \sin A - \cos A = 1.$$

515. 设 A 为三角形的内角，$\cos A = -\dfrac{4}{5}$, 求 $\sin A$ 和 $\operatorname{tg} A$ 的值。

解　$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2$

$$= \frac{9}{25},$$

因为 A 是三角形的内角，所以小于 $180°$. 从而 $\sin A$ 为正，故 $\sin A = \dfrac{3}{5}$, 由此得

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}.$$

516. 余弦和正切为负的角在第几象限？有没有这样的角，这个角的所有三角函数都是负的。

解　余弦为负的角是第二象限或第三象限的角，正切为负的角是第二象限或第四象限的角。因此，余弦和正切都为负的角只能是第二象限的角。现假定一个角的正弦、余弦都是负的，则该角的正切是正的。所以，所有三角函数都是负值的角不存在。

517. 已知 $A = -25°22'36.96''$ 和 $\sin A = -\dfrac{3}{7}$ 时，求 $\cos A$ 和 $\operatorname{ctg} A$ 的值。

解　$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(-\dfrac{3}{7}\right)^2$

$$= \frac{40}{49},$$

而 A 为 $-25°22'36.96''$ 是第四象限的角，故 $\cos A = \dfrac{2\sqrt{10}}{7}$, 从而

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{2\sqrt{10}}{7}}{-\frac{3}{7}} = -\frac{2\sqrt{10}}{3}.$$

518. 证明 $\sin\alpha = -\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

解　$-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$=-\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.$$

519. 证明 $\operatorname{ctg}3\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}3\alpha$.

解　$\operatorname{ctg}3\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(2\pi-\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)$

$$=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)$$

$$=-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)=\operatorname{tg}3\alpha.$$

520. 证明 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)$.

解　显然两边分别都等于 $\cos 2\alpha$, 故等式成立。或者由 $\frac{\pi}{2}-2\alpha$ 与 $\frac{\pi}{2}+2\alpha$ 之和为 π, 亦知两个角的正弦相等.

521. 证明 $\operatorname{ctg}(-\alpha)\csc(-\alpha)(1-\cos^2\alpha)=\cos(-\alpha)$.

解　$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, 而

$$\csc(-\alpha)=-\csc\alpha=-\frac{1}{\sin\alpha},$$

$$1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.$$

故原式左边 $=\left(-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\sin\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha$

$$=\cos\alpha.$$

但右边的 $\cos(-\alpha)$ 等于 $\cos\alpha$, 故所给的式子恒成立.

522. 化简 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

解　$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

把上式代入原式,

原式 $=-\cos\alpha\sin\alpha$.

523. 化简 $(a+b)\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)+(a+b)\times\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)$.

解　$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$. 把上式代入原式, 为

$$(a+b)(-\operatorname{tg}\alpha)+(a+b)(-\operatorname{tg}\alpha)$$

$$=-2(a+b)\operatorname{tg}\alpha.$$

524. 化简 $\frac{\sin A\operatorname{tg}(90^\circ+A)}{\operatorname{tg}A\cos(90^\circ-A)}$.

解　原式 $=\frac{\sin A(-\operatorname{ctg}A)}{\operatorname{tg}A\sin A}=-\operatorname{ctg}^2A$.

525. 化简 $\frac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ+A)}-\frac{\operatorname{tg}(90^\circ+A)}{\operatorname{ctg}A}+\frac{\cos A}{\sin(90^\circ+A)}$.

解　原式 $=\frac{-\sin A}{-\sin A}-\frac{-\operatorname{ctg}A}{\operatorname{ctg}A}+\frac{\cos A}{\cos A}$

$$=1+1+1=3.$$

526. 化简

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}+\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}.$$

解　原式 $=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha(-\sin\alpha)}{-\sin\alpha}$

$$=-\sin\alpha+\sin\alpha=0.$$

527. 化简

$$\frac{(a^2-b^2)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}+\frac{(a^2+b^2)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}.$$

解　$\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\therefore\ \frac{(a^2-b^2)(-\operatorname{ctg}\alpha)}{-\cos\alpha}+\frac{(a^2+b^2)\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha}-(a^2+b^2)$$

$$=\frac{a^2-b^2}{\sin\alpha}-(a^2+b^2).$$

第四章　加法定理

1. 正弦和余弦的加法定理

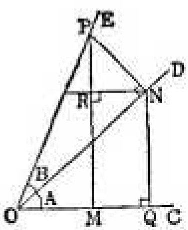
528. 证明正弦和余弦的加法定理.

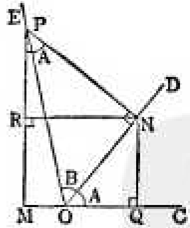
解　已知 A、B 两角的正弦和余弦，要求角 $A+B$ 的正弦和余弦时，可用下面的式子:

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

这两个式子称为正弦和余弦的加法定理.

设 A、B 都是正的锐角，则它们的和可以是锐角、钝角和直角. 下面的图给出了和是锐角与钝角的情形.





设 $\angle COD=A$, $\angle DOE=B$. 由 OE 上任意一点 P 向 OC、OD 分别作垂线 PM, PN. 则 $\angle MPN$ 等于 A. 再从 N 向 OC、PM 分别作垂线 NQ、NR, 则有

$$\begin{aligned}\sin(A+B)&=\frac{PM}{OP}=\frac{PR+RM}{OP}\\&=\frac{PR+NQ}{OP}=\frac{NQ}{OP}+\frac{PR}{OP}\\&=\frac{NQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{PR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}\\&=\sin A\cos B+\cos A\sin B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(A+B)&=\frac{OM}{OP}=\frac{OQ-MQ}{OP}\\&=\frac{OQ-RN}{OP}=\frac{OQ}{OP}-\frac{RN}{OP}\\&=\frac{OQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{RN}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}\\&=\cos A\cos B-\sin A\sin B.\end{aligned}$$

当 $A+B$ 为直角时，OE 垂直于 OC, 因此 M 和 O 重合，R 在 OE 上. 上面的证明仍然是成立的.

以上是关于 A 和 B 都是正锐角时的证明. 在其他的情况下我们也可以用同样的方法进行证明.

在以上的公式中若以 $-B$ 代替 B,

$$\begin{aligned}\sin(A-B)&=\sin[A+(-B)]\\&=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)\\&=\sin A\cos B-\cos A\sin B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(A-B)&=\cos[A+(-B)]\\&=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)\\&=\cos A\cos B+\sin A\sin B.\end{aligned}$$

综合上述结果，有下面的公式

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,\quad ①$$
$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B,\quad ②$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B,\quad ③$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.\quad ④$$

由这四个式子我们不但可以导出后面要叙述的种种公式，而且本书迄今得到的关于三角函数的性质都包含在这四个公式中了. 例如，若在 ① 式中设 $B=90^\circ$, 则

$$\begin{aligned}\sin(A+90^\circ)&=\sin A\cos 90^\circ+\cos A\sin 90^\circ\\&=\cos A.\end{aligned}$$

529. 各举出一个例子说明下面的等式是不成立的.

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$,

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$.

解　设 $\alpha=30^\circ$, $\beta=60^\circ$,

(1) 左边 $=\sin(30^\circ+60^\circ)=\sin 90^\circ=1$,

右边 $=\sin 30^\circ+\sin 60^\circ$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

所以，左边 $\neq$ 右边.

(2) 左边 $=\cos(30^\circ+60^\circ)=\cos 90^\circ=0$,

右边 $=\cos 30^\circ+\cos 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$,

所以，左边 $\neq$ 右边.

530．用加法定理证明下面的公式:

(1) $\sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm\cos\theta$,

(2) $\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)=\mp\sin\theta$,

(3) $\sin(\theta\pm\pi)=-\sin\theta$.

解 (1) $\sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)$

$$=\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}\pm\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=\pm\cos\theta,$$

$$\left(\because\quad \cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \sin\frac{\pi}{2}=1\right).$$

(2)、(3) 同理可证.

531．若 α 为钝角、β 为锐角,且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=\frac{8}{17}$,求下列各式的值:

(1) $\sin(\alpha+\beta)$,　　(2) $\cos(\alpha+\beta)$.

解 α 为钝角时(参见图 1),

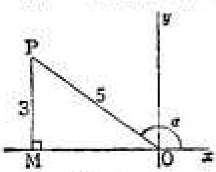


图 1

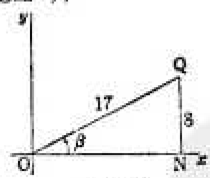


图 2

注意到 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,可设 $\angle xOP=\alpha$, $OP=5$. 从而 $PM=3$, 在直角三角形 OPM 中用勾股定理并注意到 $OM<0$,有

$$OM=-\sqrt{5^2-3^2}=-\sqrt{16}=-4.$$

同样地(参见图 2),

$$ON=\sqrt{17^2-8^2}=\sqrt{225}=15.$$

(1) 由加法定理,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}+\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{8}{17}$$

$$=\frac{45-32}{85}=\frac{13}{85}.$$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{15}{17}-\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{17}$$

$$=\frac{-60-24}{85}=-\frac{84}{85}.$$

532．用加法定理填充下面等式右边的"?".

(1) $\sin 20°\cos 15°+\cos 20°\sin 15°=?$;

(2) $\cos 400°\cos 10°+\sin 400°\sin 10°=?$;

(3) $\sin 80°\cos 130°-\cos 80°\sin 130°=?$;

(4) $\cos 5x\cos 3x-\sin 5x\sin 3x=?$.

解 (1) $\sin(20°+15°)=\sin 35°$.

(2) $\cos(400°-10°)=\cos 390°$.

(3) $\sin(80°-130°)=\sin(-50°)$.

(4) $\cos(5x+3x)=\cos 8x$.

533．用加法定理填充下面等式右边的"?".

(1) $\sin(15°+10°)=?$;

(2) $\cos(300°+70°)=?$;

(3) $\mathrm{tg}(20°+170°)=?$;

(4) $\sin(5°-9°)=?$;

(5) $\cos(15°-4°)=?$;

(6) $\mathrm{tg}(80°-62°)=?$

解 (1) $\sin 15°\cos 10°+\cos 15°\sin 10°$.

(2) $\cos 300°\cos 70°-\sin 300°\sin 70°$.

(3) $\dfrac{\mathrm{tg}\,20°+\mathrm{tg}\,170°}{1-\mathrm{tg}\,20°\,\mathrm{tg}\,170°}$.

(4) $\sin 5°\cos 9°-\cos 5°\sin 9°$.

(5) $\cos 15°\cos 4°+\sin 15°\sin 4°$.

(6) $\dfrac{\mathrm{tg}\,80°-\mathrm{tg}\,62°}{1+\mathrm{tg}\,80°\,\mathrm{tg}\,62°}$.

534．求下面的值:

$\cos 15°$, $\mathrm{tg}\,75°$, $\sin 105°$, $\cos 165°$, $\mathrm{tg}\,195°$.

解

$$\cos 15°=\cos(45°-30°)$$

$$=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\mathrm{tg}\,75°=\mathrm{tg}(45°+30°)$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\,45°+\mathrm{tg}\,30°}{1-\mathrm{tg}\,45°\,\mathrm{tg}\,30°}$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

$$\sin 105°=\sin(90°+15°)=\cos 15°$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos 165° = \cos(180° - 15°) = -\cos 15°$$
$$= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$
$$\operatorname{tg} 195° = \operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°)$$
$$= \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1 + \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°}$$
$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$
$$= 2 - \sqrt{3}.$$

535. 求下式的值:
$$\frac{\sin(180° + \theta)\operatorname{tg}^2(180° - \theta)}{\cos(270° + \theta)} - \frac{\sin(270° - \theta)\sec^2\theta}{\sin(90° + \theta)}.$$

解 $\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$,
$\operatorname{tg}(180° - \theta) = -\operatorname{tg}\theta$,
$\cos(270° + \theta) = \sin\theta$,
$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$,
$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$.

$\therefore$ 原式 $= \dfrac{-\sin\theta \cdot \operatorname{tg}^2\theta}{\sin\theta} - \dfrac{-\cos\theta \cdot \sec^2\theta}{\cos\theta}$
$$= -\operatorname{tg}^2\theta + \sec^2\theta = 1.$$

536. 证明 $\dfrac{\sec\theta - 1}{\sec\theta} = 2\sin^2\dfrac{1}{2}\theta$.

解 $\dfrac{\sec\theta - 1}{\sec\theta} = 1 - \dfrac{1}{\sec\theta} = 1 - \cos\theta$
$$= 1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2\sin^2\frac{1}{2}\theta.$$

537. 证明 $\dfrac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \operatorname{tg}^2 A$.

解 $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$,
$\therefore$ $1 + \cos 2A = 2\cos^2 A$,
$1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$,
$\therefore$ 原式左边 $= \dfrac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A} = \operatorname{tg}^2 A$.

538. 证明
$$\sin\frac{A}{2}(1 + 2\cos A + \cos 2A) = \sin 2A \cos\frac{A}{2}.$$

解 原式左边 $= \sin\dfrac{A}{2}(2\cos A + 2\cos^2 A)$
$$= 2\sin\frac{A}{2}\cos A(1 + \cos A)$$
$$= 2\sin\frac{A}{2}\cos A \cdot 2\cos^2\frac{A}{2}$$
$$= 2\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\cos A\cos\frac{A}{2}$$
$$= 2\cos\frac{A}{2}\sin A\cos A$$
$$= \sin 2A\cos\frac{A}{2}.$$

539. 证明 $\dfrac{1 + \cos A}{\sin A} = \operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}A$.

解 左边 $= \dfrac{1 + \left(2\cos^2\frac{1}{2}A - 1\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$
$$= \frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$
$$= \operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

540. 证明 $\dfrac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{\cos(A-B) - \cos(A+B)}$
$$= \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B.$$

解 原式的左边 $= \dfrac{2\cos A\cos B}{2\sin A\sin B}$
$$= \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B.$$

541. 证明下列等式.

(1) $\sin(45° + \alpha)\cos(45° - \beta)$
$+ \cos(45° + \alpha)\sin(45° - \beta)$
$= \cos(\alpha - \beta)$.

(2) $\sin\alpha\sin(\alpha + 2\beta) - \sin\beta\sin(\beta + 2\alpha)$
$= \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$.

解 (1) 根据加法定理

左边 $= \sin[(45° + \alpha) + (45° - \beta)]$
$= \sin(90° + \alpha - \beta)$
$= \cos(\alpha - \beta)$.

(2) 同样

左边 $= \sin\alpha[\sin(\alpha+\beta)\cos\beta + \cos(\alpha+\beta)\sin\beta]$
$- \sin\beta[\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha$
$+ \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha]$
$= \sin(\alpha+\beta)(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$
$= \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

542. 证明
$$\cos^2 A + \cos^2(60° + A) + \cos^2(60° - A)$$
$$= \frac{3}{2}.$$

解　$\cos(60°+A)$

$$=\cos 60°\cos A-\sin 60°\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A,$$

$$\cos(60°-A)=\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A.$$

$\therefore$　$\cos^2(60°+A)+\cos^2(60°-A)$

$$=\left(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)^2$$

$$=2\left(\frac{1}{4}\cos^2 A+\frac{3}{4}\sin^2 A\right)$$

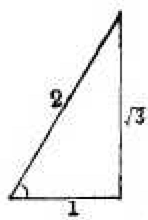
$$=2\left[\frac{1}{4}\cos^2 A+\frac{3}{4}(1-\cos^2 A)\right]$$

$$=-\cos^2 A+\frac{3}{2}.$$

$\therefore$　原式的左边

$$=\cos^2 A-\cos^2 A+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{3}{2}.$$



543. 证明

$$\sin 3°=\frac{\sin^2 2°-\sin^2 1°}{\sin 1°}.$$

解　左边$=\dfrac{\sin 3°\sin 1°}{\sin 1°}$

$$=\frac{\sin(2°+1°)\sin(2°-1°)}{\sin 1°}$$

$$=\frac{\sin^2 2°(1-\sin^2 1°)-\sin^2 1°(1-\sin^2 2°)}{\sin 1°}.$$

这里，分子等于

$$\sin^2 2°-\sin^2 2°\sin^2 1°-\sin^2 1°+\sin^2 1°\sin^2 2°$$

$$=\sin^2 2°-\sin^2 1°.$$

因此　　左边$=\dfrac{\sin^2 2°-\sin^2 1°}{\sin 1°}.$

544. 化简

$$\cos^2 A+\cos^2(A+B)-2\cos A\cos B\cos(A+B).$$

解　原式$=\cos^2 A+\cos^2(A+B)$

$$-2\cos A\cos B\cos(A+B)$$

$$+\cos^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\cos^2 B$$

$$=\cos^2 A+[\cos(A+B)-\cos A\cos B]^2-\cos^2 A\cos^2 B$$

$$=\cos^2 A(1-\cos^2 B)+[-\sin A\sin B]^2$$

$$=\cos^2 A\sin^2 B+\sin^2 A\sin^2 B$$

$$=(\cos^2 A+\sin^2 A)\sin^2 B$$

$$=\sin^2 B.$$

545. 证明

$$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta).$$

解　左边$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta)+(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\cos\beta+(\cos\alpha+\sin\alpha)\sin\beta$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cos\beta+\sin\beta).$$

546. 证明

$$\cos A+\cos(120°-A)+\cos(120°+A)=0.$$

解　$\cos A+\cos(120°-A)+\cos(120°+A)$

$$=\cos A+\cos 120°\cos A+\sin 120°\sin A+\cos 120°\cos A-\sin 120°\sin A$$

$$=\cos A+2\cos 120°\cos A$$

$$=\cos A-\cos A=0.$$

547. 证明

$$\sin(45°+A)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A+\sin A).$$

解　$\sin(45°+A)$

$$=\sin 45°\cos A+\cos 45°\sin A.$$

这里　$\sin 45°=\cos 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}},$

$\therefore$　$\sin(45°+A)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos A+\sin A).$

548. 证明

$$\cos(A+45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A).$$

解　$\cos(A+45°)$

$$=\cos A\cos 45°-\sin A\sin 45°.$$

这里　$\sin 45°=\cos 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}},$

$\therefore$　$\cos(A+45°)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A).$

549. 证明

$$\cos(A+45°)+\sin(A-45°)=0.$$

解　$\cos(A+45°)=\sin[90°-(A+45°)]$

$$=\sin(45°-A)$$

$$=-\sin(A-45°).$$

因此 $\cos(A+45^\circ)+\sin(A-45^\circ)$
$=-\sin(A-45^\circ)+\sin(A-45^\circ)=0.$

550. 求两条弧具有绝对值相等而符号相反的余弦的条件。

解 设 a 和 b 是两条弧。根据题意应使 $\cos a=-\cos b$，也即 $\cos a=\cos(\pi\pm b)$。因此 $\pi\pm b=2n\pi\pm a$。所以 a 和 b 需要满足的条件是，它们的和或差应是 π 的奇数倍。

551. 证明

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta).$$

解

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)=\sin\frac{3\pi}{4}\cos\theta-\cos\frac{3\pi}{4}\sin\theta.$$

这里 $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$

$$\therefore\quad \sin\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta).$$

552. 证明

$$\sin A\cos(B+C)-\sin B\cos(A+C)=\sin(A-B)\cos C.$$

解

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\sin A(\cos B\cos C-\sin B\sin C)\\&\quad-\sin B(\cos A\cos C-\sin A\sin C)\\&=\sin A\cos B\cos C-\sin B\cos A\cos C\\&=(\sin A\cos B-\sin B\cos A)\cos C\\&=\sin(A-B)\cos C.\end{aligned}$$

553. 若 $\sin A=\sin B$，$\cos A=\cos B$，证明 A、B 的差是 4 直角的整数倍。

解 $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$
$=\cos^2A+\sin^2A=1.$

因此 A 和 B 的差是 4 直角的整数倍，即

$$A-B=2n\pi.$$

554. A、B 都是锐角，

$$\sin A=\frac{13}{14},\ \sin B=\frac{11}{14}.$$

(1) 求 $\sin(A+B)$ 的值。

(2) $A+B$ 是几度的角？

解 (1) $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$$\cos B=\sqrt{1-\sin^2B}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sin(A+B)&=\sin A\cos B+\cos A\sin B\\&=\frac{13}{14}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}+\frac{3\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{11}{14}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

(2) $0^\circ<A+B<180^\circ$.

因此 $A+B=60^\circ$ 或 $A+B=120^\circ$。

但是，由于

$$\sin A=\frac{13}{14}>\frac{1}{2},\quad \therefore\quad A>30^\circ;$$

$$\sin B=\frac{11}{14}>\frac{1}{2},\quad \therefore\quad B>30^\circ.$$

因此 $A+B>60^\circ$.

从而得 $A+B=120^\circ$.

555. 已知 $\sin 7846^\circ$，计算 $\sin\frac{7846^\circ}{2}$，并决定公式中的符号。

解 $\frac{7846^\circ}{2}=360^\circ\times11-37^\circ$，

所以 $\cos\frac{7846^\circ}{2}$ 是正的，$\sin\frac{7846^\circ}{2}$ 是负的。并且 $\left|\cos\frac{7846^\circ}{2}\right|>\left|\sin\frac{7846^\circ}{2}\right|$。因此，在

$$\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A},$$

$$\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}$$

中，若将 7846° 代入 A，则右边根号前都应取正号。于是

$$\sin\frac{7846^\circ}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin7846^\circ}-\sqrt{1-\sin7846^\circ}).$$

556. 证明

$$\cos(A-30^\circ)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos A+\sin A).$$

解 $\cos(A-30^\circ)$
$=\cos A\cos30^\circ+\sin A\sin30^\circ.$

这里 $\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin30^\circ=\frac{1}{2},$

所以

$$\begin{aligned}\cos(A-30^\circ)&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos A+\sin A).\end{aligned}$$

557. 证明

$\cos(n-1)A\cos A-\sin(n-1)A\sin A$
$=\cos nA$.

解　左边$=\cos[(n-1)A+A]=\cos nA$.

558. 证明

$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

解　$(\cos\alpha+\cos\beta)^2$

$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta$,

$(\sin\alpha+\sin\beta)^2$

$=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta$.

因此　原式的左边

$$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=2+2\cos(\alpha-\beta)$$
$$=2[1+\cos(\alpha-\beta)].$$

这里　$\cos(\alpha-\beta)=2\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}-1$,

$\therefore\ 1+\cos(\alpha-\beta)=2\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

所以　$(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2$

$=2[1+\cos(\alpha-\beta)]$

$=4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

559. A、B是小于$90°$的正角，$3\sin^2A+2\sin^2B=1$，$3\sin 2A-2\sin 2B=0$，证明这时$A+2B=90°$.

解　因为

$\cos 2B=\cos^2B-\sin^2B=1-2\sin^2B$,

所以，从条件$3\sin^2A+2\sin^2B=1$得

$$\cos 2B=3\sin^2A. \quad ①$$

又，从条件$3\sin 2A-2\sin 2B=0$得

$$\sin 2B=3\sin A\cos A. \quad ②$$

由①、②得

$\cos(A+2B)$

$=\cos A\cos 2B-\sin A\sin 2B$

$=\cos A\cdot 3\sin^2A-\sin A\cdot 3\sin A\cos A$

$=0$.

因为$0°<A+2B<270°$，所以这时

$$A+2B=90°.$$

560. 化简下式：

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin\left(A+\frac{2}{3}\pi\right)}+\frac{1}{\sin\left(A+\frac{4}{3}\pi\right)}.$$

解　将第二项、第三项的分母变形。

$\sin\left(A+\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$=\sin A\cos\dfrac{2}{3}\pi+\cos A\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$=-\dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A$,

$\sin\left(A+\dfrac{4}{3}\pi\right)$

$=\sin\left(2\pi+A-\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$=\sin\left(A-\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$=-\dfrac{1}{2}\sin A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A$.

$$\therefore\ \frac{1}{\sin\left(A+\frac{2}{3}\pi\right)}+\frac{1}{\sin\left(A+\frac{4}{3}\pi\right)}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}\cos A-\sin A}-\frac{2}{\sqrt{3}\cos A+\sin A}$$
$$=\frac{2\cdot 2\sin A}{3\cos^2A-\sin^2A}$$
$$=\frac{4\sin A}{3(1-\sin^2A)-\sin^2A}=\frac{4\sin A}{3-4\sin^2A}.$$

$$\therefore\ 原式=\frac{1}{\sin A}+\frac{4\sin A}{3-4\sin^2A}$$
$$=\frac{3}{3\sin A-4\sin^3A}$$
$$=\frac{3}{\sin 3A}=3\csc 3A.$$

561. (1) 用加法定理证明

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta.$$

(2) 若$\theta=18°$，证明$\sin 2\theta=\cos 3\theta$，并由此求出$\sin 18°$的值.

解　(1) 由加法定理得

$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)$

$=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

(2) 当$\theta=18°$时

$$2\theta=36°,\ 3\theta=54°,$$

它们互为余角。因此

$$\sin 2\theta=\cos 3\theta.$$

$$\therefore\ 2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta.$$

因为　$\cos\theta=\cos 18°\neq 0$,

所以　$2\sin\theta=4\cos^2\theta-3$.

$$\therefore\quad 4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0.$$

对于 $\sin\theta$ 解方程得

$$\sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

因为 $\sin 18^\circ>0$, 所以

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

注　$\theta=36^\circ$ 时, $2\theta=72^\circ$, $3\theta=108^\circ$, 它们互为补角, 因此

$$\sin 2\theta=\sin 3\theta.$$

根据加法定理

$$\sin 2\theta=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta,$$

$$2\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta\cos\theta+(2\cos^2\theta-1)\sin\theta.$$

$\sin 36^\circ\neq 0$, 用 $\sin\theta$ 除上式的两边, 整理后得

$$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0,$$

$$\therefore\quad \cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

562. 证明

$$\cos^2(A+B)-\sin^2(A-B)=\cos 2A\cos 2B.$$

解　$\cos^2(A+B)=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)^2,$

$\sin^2(A-B)=(\sin A\cos B-\cos A\sin B)^2.$

因此　原式的左边

$$\begin{aligned}&=\cos^2A\cos^2B+\sin^2A\sin^2B-\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B\\&=\cos^2A(\cos^2B-\sin^2B)+\sin^2A(\sin^2B-\cos^2B)\\&=(\cos^2B-\sin^2B)(\cos^2A-\sin^2A)\\&=\cos 2B\cos 2A.\end{aligned}$$

563. 将 $\angle A$ 一分为二, 使所分成的两个角的正弦的比是 $m:n$.

解　设所分成的一个角是 x, 则

$$\frac{\sin(A-x)}{\sin x}=\frac{m}{n}.$$

因此　$$\frac{\sin A\cos x-\cos A\sin x}{\sin x}=\frac{m}{n},$$

$$\sin A\operatorname{ctg}x-\cos A=\frac{m}{n},$$

$$\operatorname{ctg}x=\frac{\frac{m}{n}+\cos A}{\sin A}.$$

于是只要作 x, 使它的余切为 $\dfrac{\frac{m}{n}+\cos A}{\sin A}$ 就可以了.

564. 若 $a\sin\alpha+b\sin\beta+c\sin\gamma=0$, $a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0$, 证明

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{a}=\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{b}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{c}.$$

解　从　$a\sin\alpha+b\sin\beta+c\sin\gamma=0,$

$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0,$

根据比的内项之积等于外项之积的性质求 $a:b:c$, 得

$$\frac{a}{\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma}=\frac{b}{\sin\gamma\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta},$$

即　$$\frac{a}{\sin(\beta-\gamma)}=\frac{b}{\sin(\gamma-\alpha)}=\frac{c}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

$$\therefore\quad\frac{\sin(\beta-\gamma)}{a}=\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{b}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{c}.$$

565. 证明

$$\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ=0.$$

解　设 $A=20^\circ$, 则

$$\begin{aligned}&\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ\\&=\cos A+\cos(120^\circ-A)+\cos(120^\circ+A)\\&=\cos A+\cos 120^\circ\cos A+\sin 120^\circ\sin A+\cos 120^\circ\cos A-\sin 120^\circ\sin A\\&=\cos A+2\cos 120^\circ\cos A\\&=\cos A+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos A=0.\end{aligned}$$

566. 证明

$$\sin\theta\sin\varphi=\cos^2\frac{\theta-\varphi}{2}-\cos^2\frac{\theta+\varphi}{2}.$$

解　由公式

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta,$$

得　$$\begin{aligned}&\cos^2\frac{\theta-\varphi}{2}-\cos^2\frac{\theta+\varphi}{2}\\&=\sin^2\frac{\theta+\varphi}{2}-\sin^2\frac{\theta-\varphi}{2}\\&=\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}+\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}-\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\\&=\sin\theta\sin\varphi.\end{aligned}$$

567. 证明

$$\sin(\alpha+\beta)\sin 3(\alpha-\beta)$$
$$=\sin^2(2\alpha-\beta)-\sin^2(2\beta-\alpha).$$

解　$$\text{左边}=\sin[(2\alpha-\beta)+(2\beta-\alpha)]\times\sin[(2\alpha-\beta)-(2\beta-\alpha)]=\sin^2(2\alpha-\beta)-\sin^2(2\beta-\alpha).$$

568. 有两个角，一个角的正弦是 $\frac{1}{2}$，另一个角的正弦是 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，计算这两个角的和的正弦。

解　设这两个角是 α、β，

$$\sin\alpha=\frac{1}{2},\quad \sin\beta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

则
$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos\beta=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

将这些值代入

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

则
$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

或
$$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

求得
$$\sin(\alpha+\beta)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

或
$$\sin(\alpha+\beta)=\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

569. 若 $\sin A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{5}{13}$，求 $\sin(A+B)$。这里 A、B 是锐角。

解
$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5},$$
$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}.$$

因此
$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{63}{65}.$$

注　注意：本题因为 A、B 都是锐角，所以 $\cos A$ 和 $\sin B$ 都是正的。

570. 证明

$$\sin nA\cos A+\cos nA\sin A=\sin(n+1)A.$$

解　在公式

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

中，用 $\alpha=nA$，$\beta=A$ 代入，即得

$$\sin nA\cos A+\cos nA\sin A=\sin(n+1)A.$$

571. 证明 $\sin^2(A-B)+\sin^2 B+2\sin(A-B)\sin B\cos A=\sin^2 A$。

解　原式

$$\begin{aligned}
&=\sin(A-B)[\sin(A-B)+\sin B\cos A]\\
&\quad+\sin B[\sin B+\sin(A-B)\cos A]\\
&=\sin(A-B)\sin A\cos B\\
&\quad+\sin B\{\sin[A-(A-B)]\\
&\quad+\sin(A-B)\cos A\}\\
&=\sin(A-B)\sin A\cos B\\
&\quad+\sin B\sin A\cos(A-B)\\
&=\sin A[\sin(A-B)\cos B\\
&\quad+\cos(A-B)\sin B]\\
&=\sin A\sin(A-B+B)\\
&=\sin A\sin A=\sin^2 A.
\end{aligned}$$

572. 证明

$$\cos^2(A-B)+\cos^2 B-2\cos(A-B)\cos A\cos B=\sin^2 A.$$

解

$$\begin{aligned}
&\cos^2(A-B)+\cos^2 B-2\cos(A-B)\cos A\cos B\\
&=\cos(A-B)[\cos(A-B)-\cos A\cos B]\\
&\quad+\cos B[\cos B-\cos(A-B)\cos A]\\
&=\cos(A-B)\sin A\sin B+\cos B\\
&\quad\times[\cos(A-A+B)-\cos(A-B)\cos A]\\
&=\cos(A-B)\sin A\sin B\\
&\quad+\cos B\sin A\sin(A-B)\\
&=\sin A[\cos(A-B)\sin B\\
&\quad+\sin(A-B)\cos B]\\
&=\sin A\sin(A-B+B)\\
&=\sin A\sin A\\
&=\sin^2 A.
\end{aligned}$$

别解

$$\begin{aligned}
&\cos^2(A-B)+\cos^2 B-2\cos(A-B)\cos A\cos B\\
&=\cos(A-B)[\cos(A-B)\\
&\quad-2\cos A\cos B]+\cos^2 B
\end{aligned}$$

$=\cos(A-B)[\sin A\sin B-\cos A\cos B]+\cos^2 B$

$=-\cos(A-B)\cos(A+B)+\cos^2 B$

$=-\cos^2 B+\sin^2 A+\cos^2 B=\sin^2 A.$

573. 证明

$$\cos(n-1)A\cos(n+1)A-\sin(n-1)A\sin(n+1)A=\cos 2nA.$$

解 左边$=\cos[(n-1)A+(n+1)A]$

$=\cos 2nA.$

574. 化简下列两式:

(1) $\cos(60°+A)-\cos(60°-A)$;

(2) $\sin A+\sin(A+120°)+\sin(A+240°)$.

解 (1) 根据加法定理,

原式$=\cos 60°\cos A-\sin 60°\sin A-(\cos 60°\cos A+\sin 60°\sin A)$

$=-2\sin 60°\sin A$

$=-\sqrt{3}\sin A.$

(2) 同理,

原式$=\sin A+\cos(A+30°)-\cos(A-30°)$

$=\sin A+\cos A\cos 30°-\sin A\sin 30°-(\cos A\cos 30°+\sin A\sin 30°)$

$=\sin A-2\sin A\sin 30°$

$=\sin A-\sin A=0.$

注 (2)中,若用和差化积的公式(参照§5),则

原式$=\sin A+2\sin(A+180°)\cos(-60°)$

$=\sin A-2\sin A\cdot\dfrac{1}{2}=0.$

575. 证明下列等式:

(1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$;

(2) $1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{1-2\sin^2\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$.

解 (1) 将左边变形.

$$左边=\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin(2\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

(2) 同理,

$$左边=1+\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}$$

$$=\frac{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\operatorname{tg}^2\beta)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}$$

$$=\frac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\beta-\sin^2\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$=\frac{1-\sin^2\beta-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta}$$

$$=\frac{1-2\sin^2\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}.$$

576. 证明下列等式:

(1) $\sin(x+y)\sin(x-y)=\sin^2 x-\sin^2 y=\cos^2 y-\cos^2 x.$

(2) $\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2 x-\sin^2 y=\cos^2 y-\sin^2 x.$

解 (1) 根据加法定理,

$\sin(x+y)\sin(x-y)$

$=(\sin x\cos y+\cos x\sin y)\times(\sin x\cos y-\cos x\sin y)$

$=\sin^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\sin^2 y$

$=\sin^2 x(1-\sin^2 y)-(1-\sin^2 x)\sin^2 y$

$=\sin^2 x-\sin^2 y$

$=(1-\cos^2 x)-(1-\cos^2 y)$

$=\cos^2 y-\cos^2 x.$

(2) 同理,

$\cos(x+y)\cos(x-y)$

$=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)\times(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$

$=\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y$

$=\cos^2 x(1-\sin^2 y)-(1-\cos^2 x)\sin^2 y$

$=\cos^2 x-\sin^2 y$

$=(1-\sin^2 x)-(1-\cos^2 y)$

$=\cos^2 y-\sin^2 x.$

577. 化简下列两式:

(1) $\sin\alpha\sin(\alpha+60°)\sin(\alpha-60°)$;

(2) $\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin(A+120°)}+\dfrac{1}{\sin(A+240°)}$.

解 (1) $\sin(\alpha+60°)=\dfrac{1}{2}(\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)$,

$\sin(\alpha-60°)=\dfrac{1}{2}(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha)$.

$\therefore\ \sin\alpha\sin(\alpha+60°)\sin(\alpha-60°)$

$=\dfrac{1}{4}\sin\alpha(\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha)$

$$=\frac{1}{4}\sin\alpha(4\sin^2\alpha-3)$$
$$=-\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

(2) $\sin(A+120^\circ)$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos A-\sin A),$$
$\sin(A+240^\circ)$
$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos A+\sin A).$$

$$\therefore\ 原式=\frac{1}{\sin A}+\frac{2}{\sqrt{3}\cos A-\sin A}$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}\cos A+\sin A}$$
$$=\frac{1}{\sin A}$$
$$+\frac{4\sin A}{(\sqrt{3}\cos A-\sin A)(\sqrt{3}\cos A+\sin A)}$$
$$=\frac{3\cos^2 A-\sin^2 A+4\sin^2 A}{\sin A(3\cos^2 A-\sin^2 A)}$$
$$=\frac{3(\cos^2 A+\sin^2 A)}{\sin A(3-4\sin^2 A)}=\frac{3}{\sin 3A}.$$

578. 用加法定理求 75° 的正弦、余弦和正切的值.

解 $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)$
$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)$
$$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\operatorname{tg}75^\circ=\frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$
$$=2+\sqrt{3}.$$

579. 证明下列两式.

(1) $\sin 4A=\cos A(4\sin A-8\sin^3 A)$.

(2) $\cos 4A=8\cos^4 A-8\cos^2 A+1$.

解 (1) $\sin 4A=2\sin 2A\cos 2A$
$$=4\sin A\cos A\cos 2A$$
$$=4\sin A\cos A(1-2\sin^2 A)$$
$$=\cos A(4\sin A-8\sin^3 A).$$

(2) $\cos 4A=2\cos^2 2A-1$
$$=2(2\cos^2 A-1)^2-1$$
$$=8\cos^4 A-8\cos^2 A+1.$$

580. 证明
$$2\sin^2 A\sin^2 B+2\cos^2 A\cos^2 B$$
$$=1+\cos 2A\cos 2B.$$

解 左边
$$=2\sin^2 A\sin^2 B+4\sin A\cos A\sin B\cos B$$
$$+2\cos^2 A\cos^2 B-4\sin A\cos A\sin B\cos B$$
$$=2(\sin A\sin B+\cos A\cos B)^2$$
$$-4\sin A\cos A\sin B\cos B$$
$$=2\cos^2(A-B)-\sin 2A\sin 2B$$
$$=1+\cos 2(A-B)-\sin 2A\sin 2B$$
$$=1+\cos 2A\cos 2B.$$

581. 求下列两式的值:

(1) $\sin(\theta+75^\circ)+\cos(\theta+45^\circ)$
$$-\sqrt{3}\cos(\theta+15^\circ);$$

(2) $\cos\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\alpha\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)$
$$+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right).$$

解 (1) 设 $\theta+15^\circ=\alpha$, 则

原式$=\sin(\alpha+60^\circ)+\cos(\alpha+30^\circ)$
$$-\sqrt{3}\cos\alpha$$
$$=\sin\alpha\cos 60^\circ+\cos\alpha\sin 60^\circ$$
$$+\cos\alpha\cos 30^\circ-\sin\alpha\sin 30^\circ$$
$$-\sqrt{3}\cos\alpha$$
$$=\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$$
$$-\frac{1}{2}\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$$
$$=0.$$

(2) $2\cos\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)$
$$=\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\frac{2\pi}{3}$$
$$=\frac{1}{2}(-\cos 2\alpha-\sqrt{3}\sin 2\alpha)-\frac{1}{2}.$$

同样地,
$$2\cos\alpha\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)$$
$$=\frac{1}{2}(-\cos 2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha)-\frac{1}{2}.$$

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)$$
$$=\cos 2\alpha-\frac{1}{2}.$$

因此，原式的值是 $-\frac{3}{2}$.

582. 证明

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

解 左边 $=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\alpha+\sin^2\beta$
$$-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta$$
$$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)$$
$$-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=2[1-\cos(\alpha-\beta)]$$
$$=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

583. 证明

$$\frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)}=\operatorname{tg}A.$$

解 左边 $=[(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$
$$+(\sin A\cos B-\cos A\sin B)]$$
$$\div[(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$$
$$+(\cos A\cos B+\sin A\sin B)]$$
$$=\frac{2\sin A\cos B}{2\cos A\cos B}=\frac{\sin A}{\cos A}$$
$$=\operatorname{tg}A.$$

584. 若 $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，求下列两式的值.

(1) $\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$； (2) $\frac{\sin 5x+\sin 3x}{5\sin x-3}$.

解 (1) $\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$
$$=-\cos 2x$$
$$=-(1-2\sin^2 x)$$
$$=-1+2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$
$$=2-\sqrt{5}.$$

(2) $\sin 5x+\sin 3x$
$$=2\sin 4x\cos x$$
$$=4\sin 2x\cos 2x\cos x$$
$$=8\sin x\cos^2 x(1-2\sin^2 x)$$
$$=8\sin x(1-\sin^2 x)(1-2\sin^2 x)$$
$$=8(2\sin^5 x-3\sin^3 x+\sin x). \quad ①$$

因为 $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $\sin^2 x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$$\therefore\ \sin^2 x+\sin x-1=0. \quad ②$$

整式 $2z^5-3z^3+z$ 除以 z^2+z-1，余 $5z-3$. 设商是 $Q(z)$，则

$$2z^5-3z^3+z=(z^2+z-1)Q(z)+(5z-3).$$

取 $z=\sin x$，于是由 ② 得

$$2\sin^5 x-3\sin^3 x+\sin x=5\sin x-3,$$

再由 ① 得

$$\sin 5x+\sin 3x=8(5\sin x-3).$$
$$\therefore\ \frac{\sin 5x+\sin 3x}{5\sin x-3}=8.$$

585. 若 $\cos A=\frac{3}{5}$，求 $2A$ 的所有三角函数的值.

解 $\sin 2A=2\sin A\cos A$
$$=\pm 2\sqrt{1-\cos^2 A}\times\cos A$$
$$=\pm 2\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\times\frac{3}{5}$$
$$=\pm\frac{24}{25}.$$

$$\cos 2A=2\cos^2 A-1=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25}.$$

$$\operatorname{tg}2A=\frac{\sin 2A}{\cos 2A}=\frac{\pm\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}}=\mp\frac{24}{7}.$$

$$\csc 2A=\frac{1}{\sin 2A}=\pm\frac{25}{24}.$$

$$\sec 2A=\frac{1}{\cos 2A}=-\frac{25}{7}.$$

$$\operatorname{ctg}2A=\frac{1}{\operatorname{tg}2A}=\mp\frac{7}{24}.$$

2. 正切、余切的加法定理

586. 证明下列公式：

(1) $\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$;

(2) $\operatorname{tg}(A-B)=\frac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$;

(3) $\operatorname{ctg}(A+B)=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1}{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B}$;

(4) $\operatorname{ctg}(A-B)=-\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+1}{\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B}$
$$=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+1}{\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}A}.$$

解　(1) $\operatorname{tg}(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}.$$

将分子、分母同除以 $\cos A\cos B$，则

$$\text{上式}=\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}.$$

(2) 同样　$\operatorname{tg}(A-B)=\dfrac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}.$

(3) $\operatorname{ctg}(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}$

$$=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}.$$

将分子、分母同除以 $\sin A\sin B$，则

$$\text{上式}=\frac{\dfrac{\cos A}{\sin A}\cdot\dfrac{\cos B}{\sin B}-1}{\dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos A}{\sin A}}$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1}{\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}A}.$$

(4) 若在(3)中将 B 换成 $-B$，则得

$$\operatorname{ctg}(A-B)=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}(-B)-1}{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}(-B)}$$

$$=\frac{-\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1}{\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B}$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+1}{\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}A}.$$

587. 证明下列公式.

(1) $\operatorname{tg}(45^\circ+A)=\dfrac{1+\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}A}$;

(2) $\operatorname{tg}(45^\circ-A)=\dfrac{1-\operatorname{tg}A}{1+\operatorname{tg}A}$;

(3) $\operatorname{ctg}(A\pm B)=\dfrac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\mp1}{\operatorname{ctg}B\pm\operatorname{ctg}A}$;

(4) $\operatorname{ctg}(45^\circ\pm A)=\dfrac{\operatorname{ctg}A\mp1}{\operatorname{ctg}A\pm1}$.

解　(1) 由前面的问题，得

$$\operatorname{tg}(45^\circ+A)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}A}$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}A}.$$

(2) 同样地，

$$\operatorname{tg}(45^\circ-A)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}A}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}A}$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}A}{1+\operatorname{tg}A}.$$

(3) $\operatorname{ctg}(A\pm B)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}(A\pm B)}$

$$=\frac{1\mp\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A\pm\operatorname{tg}B}=\frac{1\mp\dfrac{1}{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B}}{\dfrac{1}{\operatorname{ctg}A}\pm\dfrac{1}{\operatorname{ctg}B}}$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\mp1}{\operatorname{ctg}B\pm\operatorname{ctg}A}.$$

(4) $\operatorname{ctg}(45^\circ\pm A)=\dfrac{\operatorname{ctg}45^\circ\operatorname{ctg}A\mp1}{\operatorname{ctg}A\pm\operatorname{ctg}45^\circ}$

$$=\frac{\operatorname{ctg}A\mp1}{\operatorname{ctg}A\pm1}.$$

588. 证明下列等式:

(1) $\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y=\dfrac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$;

(2) $\operatorname{ctg}x\pm\operatorname{ctg}y=\dfrac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$.

解　(1) 左边 $=\dfrac{\sin x}{\cos x}\pm\dfrac{\sin y}{\cos y}$

$$=\frac{\sin x\cos y\pm\cos x\sin y}{\cos x\cos y}$$

$$=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}.$$

(2) 与(1)相仿，利用公式 $\operatorname{ctg}\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$，将左边变形，推得右边。

589. 若

$$\operatorname{tg}A=\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}},\quad \operatorname{tg}B=\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}},$$

求 $\operatorname{tg}(A-B)$.

解　将 $\operatorname{tg}A$ 和 $\operatorname{tg}B$ 的值代入公式

$$\operatorname{tg}(A-B)=\frac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B},$$

得

$$\operatorname{tg}(A-B)=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$$

590. 证明 $\operatorname{tg}(p+q)A-\operatorname{tg}pA-\operatorname{tg}qA=\operatorname{tg}(p+q)A\operatorname{tg}pA\operatorname{tg}qA$.

解 左边$=\dfrac{\operatorname{tg}pA+\operatorname{tg}qA}{1-\operatorname{tg}pA\operatorname{tg}qA}-(\operatorname{tg}pA+\operatorname{tg}qA)$

$$=\frac{(\operatorname{tg}pA+\operatorname{tg}qA)\operatorname{tg}pA\operatorname{tg}qA}{1-\operatorname{tg}pA\operatorname{tg}qA}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}pA+\operatorname{tg}qA}{1-\operatorname{tg}pA\operatorname{tg}qA}\operatorname{tg}pA\operatorname{tg}qA$$

$=\operatorname{tg}(p+q)A\operatorname{tg}pA\operatorname{tg}qA=$右边.

591. 证明

$$\frac{\operatorname{tg}(n+1)A-\operatorname{tg}nA}{1+\operatorname{tg}(n+1)A\operatorname{tg}nA}=\operatorname{tg}A.$$

解 在公式 $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ 中，将 α 换成 $(n+1)A$，β 换成 nA，则得

$$\frac{\operatorname{tg}(n+1)A-\operatorname{tg}nA}{1+\operatorname{tg}(n+1)A\operatorname{tg}nA}=\operatorname{tg}[(n+1)A-nA]=\operatorname{tg}A.$$

592. 若 $\operatorname{tg}A=\dfrac{1}{2}$，$\operatorname{tg}B=\dfrac{1}{3}$，求 $\operatorname{tg}(A+B)$ 的值.

解 $$\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

593. 若 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{m}{m+1}$，$\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{2m+1}$，证明 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=1$.

解 $$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{m}{m+1}+\frac{1}{2m+1}}{1-\frac{m}{m+1}\cdot\frac{1}{2m+1}}=1.$$

594. 若 $\operatorname{tg}A=m$，$\operatorname{tg}B=\dfrac{1}{m}$，证明 $\operatorname{tg}(A+B)=\infty$.

解 $$\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}=\frac{m+\frac{1}{m}}{1-m\cdot\frac{1}{m}}=\frac{m+\frac{1}{m}}{1-1}=\frac{m+\frac{1}{m}}{0}=\infty.$$

595. 若 $\operatorname{ctg}A=\dfrac{11}{2}$，$\operatorname{tg}B=\dfrac{7}{24}$，求 $\operatorname{ctg}(A-B)$ 和 $\operatorname{tg}(A+B)$ 的值.

解 $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{ctg}B$ 分别是 $\operatorname{ctg}A$ 和 $\operatorname{tg}B$ 的倒数，即 $\dfrac{2}{11}$ 和 $\dfrac{24}{7}$，因此

$$\operatorname{ctg}(A-B)=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+1}{\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}A}=\frac{\frac{11}{2}\cdot\frac{24}{7}+1}{\frac{24}{7}-\frac{11}{2}}=-\frac{278}{29}.$$

又 $$\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}=\frac{\frac{2}{11}+\frac{7}{24}}{1-\frac{2}{11}\times\frac{7}{24}}=\frac{1}{2}.$$

596. 若 $\operatorname{tg}A=\dfrac{1}{2}$，$\operatorname{tg}B=\dfrac{1}{3}$，求 $\sec(A+B)$.

解 因为 $\operatorname{tg}A=\dfrac{1}{2}$，所以 $1+\operatorname{tg}^2A=\dfrac{5}{4}$. 从而

$$\sec A=\pm\frac{\sqrt{5}}{2},\quad \cos A=\pm\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin A=\pm\sqrt{1-\cos^2A}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

用同样的方法求得

$$\cos B=\pm\frac{3}{\sqrt{10}},\quad \sin B=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\frac{1}{\sec(A+B)}=\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\pm\frac{3}{\sqrt{10}}\right)-\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

因此 $$\frac{1}{\sec(A+B)}=\pm\frac{5}{\sqrt{50}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

或 $$\frac{1}{\sec(A+B)}=\pm\frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

从而 $$\sec(A+B)=\pm\sqrt{2}$$

或 $$\sec(A+B)=\pm\frac{5\sqrt{2}}{7}.$$

597. 证明

$$\frac{\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi+1}{1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\cos(\theta-\varphi)}{\cos(\theta+\varphi)}.$$

解 原式的左边$=\dfrac{\dfrac{\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos\varphi}+1}{1-\dfrac{\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos\varphi}}$

$$=\frac{\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi}{\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi}$$

$$=\frac{\cos(\theta-\varphi)}{\cos(\theta+\varphi)}.$$

598. 证明

$$\frac{\operatorname{tg}A\operatorname{ctg}B+1}{\operatorname{tg}A\operatorname{ctg}B-1}=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}.$$

解 原式的左边$=\dfrac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}+1}{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}-1}$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}$$

$$=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}.$$

599. 证明 $\dfrac{1-\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{tg}\delta}=\operatorname{tg}(\gamma-\delta)$.

解 左边$=\dfrac{1-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\gamma}\cdot\operatorname{tg}\delta}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\gamma}+\operatorname{tg}\delta}$.

在分子、分母上同乘 $\operatorname{tg}\gamma$，则

$$\text{左边}=\frac{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\delta}{1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}=\operatorname{tg}(\gamma-\delta).$$

600. 证明 $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\sec\alpha$.

解 原式的左边$=1+\dfrac{\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\cos\left(\alpha-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha.$$

601. 若方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}B$，求 $\operatorname{tg}(A+B)$ 的值.

解 $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B=-\dfrac{b}{a}$, $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=\dfrac{c}{a}$.

$$\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$$

$$=\frac{-\dfrac{b}{a}}{1-\dfrac{c}{a}}=\frac{b}{c-a}.$$

602. 若 $\operatorname{tg}\theta=2k+1$, $\operatorname{tg}\varphi=2k-1$, 证明 $\operatorname{ctg}(\theta-\varphi)=2k^2$.

解 $\operatorname{ctg}(\theta-\varphi)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}(\theta-\varphi)}$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\varphi}$$

$$=\frac{1+(2k+1)(2k-1)}{(2k+1)-(2k-1)}$$

$$=\frac{4k^2}{2}=2k^2.$$

603. 若 $\alpha+\beta=45°$，证明

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2.$$

解 因为 $\alpha+\beta=45°$，所以 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=1$.

因此 $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=1$,

即 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$,

或 $1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=2$.

$\therefore\ (1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2$.

604. 若

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{x\sin\alpha}{y-x\cos\alpha},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y\sin\alpha}{x-y\cos\alpha},$$

证明 $\operatorname{tg}(\theta+\varphi)=-\operatorname{tg}\alpha$.

解 $\operatorname{tg}(\theta+\varphi)=\dfrac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi}$

$$=\frac{\sin\alpha\left(\dfrac{x}{y-x\cos\alpha}+\dfrac{y}{x-y\cos\alpha}\right)}{1-\dfrac{xy\sin^2\alpha}{(y-x\cos\alpha)(x-y\cos\alpha)}}$$

$$=-\operatorname{tg}\alpha.$$

605. 证明 $\operatorname{tg}A+\operatorname{ctg}A=\dfrac{2}{\sin 2A}$.

解 $\operatorname{tg}A+\operatorname{ctg}A=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}$

$$=\frac{\sin^2A+\cos^2A}{\sin A\cos A}=\frac{1}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{2}{2\sin A\cos A}=\frac{2}{\sin 2A}.$$

606. 证明 $\dfrac{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}3\alpha}{1+\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{tg}3\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

解 在公式

$$\operatorname{tg}(A-B)=\frac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$$

中,设 $A=4\alpha$, $B=3\alpha$,则

$$\frac{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}3\alpha}{1+\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{tg}3\alpha}=\operatorname{tg}(4\alpha-3\alpha)=\operatorname{tg}\alpha.$$

607. 证明

$$\operatorname{tg}(45^\circ+A)-\operatorname{tg}(45^\circ-A)=2\operatorname{tg}2A.$$

解 $\operatorname{tg}(45^\circ+A)-\operatorname{tg}(45^\circ-A)$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}A}-\frac{1-\operatorname{tg}A}{1+\operatorname{tg}A}$$

$$=\frac{(1+\operatorname{tg}A)^2-(1-\operatorname{tg}A)^2}{1-\operatorname{tg}^2A}$$

$$=\frac{4\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2A}=2\operatorname{tg}2A.$$

608. 证明 $\sin 2A=\dfrac{2\operatorname{tg}A}{1+\operatorname{tg}^2A}$.

解 $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$$=\frac{2\sin A\cos A}{\sin^2A+\cos^2A}$$

$$=\frac{\dfrac{2\sin A}{\cos A}}{1+\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}}=\frac{2\operatorname{tg}A}{1+\operatorname{tg}^2A}.$$

609. 证明 $\csc A+\operatorname{ctg}A=\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$.

解 $\csc A+\operatorname{ctg}A=\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}$

$$=\frac{1+\cos A}{\sin A}=\frac{2\cos^2\dfrac{A}{2}}{2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

610. 若 $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$,

证明 $$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\pm\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}.$$

解 从条件得

$$2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}.$$

因此 $2\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{1-\cos\alpha\cos\beta}$,

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1-\dfrac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{2(1-\cos\alpha\cos\beta)}}{\dfrac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{2(1-\cos\alpha\cos\beta)}}$$

$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\pm\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}.$$

611. 证明

$$\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-8\operatorname{ctg}8\alpha.$$

解 $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{ctg}8\alpha$

$$=\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+\frac{8}{\operatorname{tg}8\alpha}$$

$$=\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+\frac{8(1-\operatorname{tg}^24\alpha)}{2\operatorname{tg}4\alpha}$$

$$=\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+\frac{4}{\operatorname{tg}4\alpha}$$

$$=\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+\frac{4(1-\operatorname{tg}^22\alpha)}{2\operatorname{tg}2\alpha}$$

$$=\operatorname{tg}\alpha+\frac{2}{\operatorname{tg}2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha+\frac{2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{2\operatorname{tg}\alpha}$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-8\operatorname{ctg}8\alpha.$$

612. 证明

$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}(60^\circ+A)\operatorname{tg}(120^\circ+A)=-\operatorname{tg}3A.$$

解 $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}(60^\circ+A)\operatorname{tg}(120^\circ+A)$

$$=\frac{\sin A\sin(60^\circ+A)\sin(120^\circ+A)}{\cos A\cos(60^\circ+A)\cos(120^\circ+A)}$$

$$=-\frac{\sin A\sin(60^\circ+A)\sin(60^\circ-A)}{\cos A\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)}$$

$$=-\frac{\sin 3A}{\cos 3A}=-\operatorname{tg}3A.$$

613. 证明

$$\frac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\varphi}{\operatorname{ctg}\varphi-\operatorname{tg}\theta}=\cos(\theta-\varphi)\sec(\theta+\varphi).$$

解 原式的左边$=\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}{\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$$=\frac{\dfrac{\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi}{\cos\theta\sin\varphi}}{\dfrac{\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta\sin\varphi}}$$

$$=\frac{\cos(\theta-\varphi)}{\cos(\theta+\varphi)}$$

$$=\cos(\theta-\varphi)\sec(\theta+\varphi).$$

614. 证明

$$\frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\sin(A+B)-\sin(A-B)}=\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}.$$

解 原式的左边

$$=[(\sin A\cos B+\cos A\sin B)+(\sin A\cos B-\cos A\sin B)]\div[(\sin A\cos B+\cos A\sin B)-(\sin A\cos B-\cos A\sin B)]$$

$$=\frac{2\sin A\cos B}{2\cos A\sin B}=\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A}}{\dfrac{\sin B}{\cos B}}=\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}.$$

615. 证明 $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\alpha=\csc\alpha$.

解 原式的左边$=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$=\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha-\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin\left(\alpha-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha}=\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}=\csc\alpha.$$

616. 若 $\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，证明 $A+B$ 的一个值是 $45°$。

解

$$\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}}$$

$$=\pm\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos B=\pm\sqrt{1-\sin^2 B}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

因此

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}},$$

或

$$\sin(A+B)=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

它的一个值是 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，从而证得 $A+B$ 的一个值是 $45°$。

617. 证明

$$\cos(45°-A)-\sin(45°+A)=0.$$

解 $(45°-A)$ 和 $(45°+A)$ 是互为余角，因此

$$\cos(45°-A)=\sin(45°+A),$$

$$\therefore\ \cos(45°-A)-\sin(45°+A)=0.$$

618. 证明

$$2\sin(30°-A)=\cos A-\sqrt{3}\sin A.$$

解 $2\sin(30°-A)$

$$=2(\sin 30°\cos A-\cos 30°\sin A)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)$$

$$=\cos A-\sqrt{3}\sin A.$$

619. 证明

$$\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin(2A+B)}{\sin A}-2\cos(A+B).$$

解 $\dfrac{\sin(2A+B)}{\sin A}-2\cos(A+B)$

$$=\frac{\sin(A+B+A)-2\sin A\cos(A+B)}{\sin A}$$

$$=[\sin(A+B)\cos A+\cos(A+B)\sin A-2\sin A\cos(A+B)]\div\sin A$$

$$=\frac{\sin(A+B)\cos A-\cos(A+B)\sin A}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin(A+B-A)}{\sin A}=\frac{\sin B}{\sin A}.$$

620. 证明下列等式:

(1) $\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)+\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)+\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)=0.$

(2) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\delta)$
$=\cos(\alpha-\gamma)\cos(\beta-\delta)$
$-\cos(\alpha-\delta)\cos(\beta-\gamma)$。

解　(1) 将左边变形。

$$\text{左边}=\cos\alpha(\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)+\cos\beta(\sin\gamma\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha)+\cos\gamma(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=0.$$

(2) 同样地，

$$\begin{aligned}\text{右边}&=(\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma)\times(\cos\beta\cos\delta+\sin\beta\sin\delta)\\&\quad-(\cos\alpha\cos\delta+\sin\alpha\sin\delta)\times(\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)\\&=\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta\cos\delta+\sin\beta\sin\delta\cos\alpha\cos\gamma\\&\quad-\sin\alpha\sin\delta\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha\cos\delta\\&=\sin\alpha\cos\beta(\sin\gamma\cos\delta-\cos\gamma\sin\delta)\\&\quad-\cos\alpha\sin\beta(\sin\gamma\cos\delta-\cos\gamma\sin\delta)\\&=\sin(\gamma-\delta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\\&=\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\delta).\end{aligned}$$

621．证明下列等式：

(1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

(2) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=-\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

解　(1) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

$\therefore\quad \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

(2) $$\text{左边}=\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}}=\frac{-(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\times\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

622．证明

$$\frac{1}{\operatorname{tg}3A-\operatorname{tg}A}+\frac{1}{\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}3A}=\operatorname{ctg}2A.$$

解　$$\operatorname{tg}3A-\operatorname{tg}A=\frac{\sin3A}{\cos3A}-\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin3A\cos A-\sin A\cos3A}{\cos3A\cos A}=\frac{\sin(3A-A)}{\cos3A\cos A}=\frac{\sin2A}{\cos3A\cos A}.$$

用同样的方法得

$$\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}3A=\frac{\sin2A}{\sin A\sin3A}.$$

因此 $$\frac{1}{\operatorname{tg}3A-\operatorname{tg}A}+\frac{1}{\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}3A}=\frac{\cos3A\cos A}{\sin2A}+\frac{\sin3A\sin A}{\sin2A}=\frac{\cos3A\cos A+\sin3A\sin A}{\sin2A}=\frac{\cos(3A-A)}{\sin2A}=\frac{\cos2A}{\sin2A}=\operatorname{ctg}2A.$$

623．若 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$，证明 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{1+m}{1-m}\operatorname{tg}\alpha$．(这里 $m\neq1$)

解　$\sin\beta=\sin(\alpha+\beta-\alpha)$
$=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$.

又　$m\sin(2\alpha+\beta)$
$=m[\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha]$.

因此　$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$
$=m\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+m\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$.

两边同除以 $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$，得

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha=m\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+m\operatorname{tg}\alpha.$$

因此　$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{1+m}{1-m}\operatorname{tg}\alpha$.

624．若 $b\sin(x+\theta)=c\sin(y-\theta)$，$b\cos x=c\cos y$，证明 $2\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}x$.

解　从所给的两个已知条件得

$$\frac{\sin(x+\theta)}{\cos x}=\frac{\sin(y-\theta)}{\cos y}.$$

因此 $$\frac{\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta}{\cos x}=\frac{\sin y\cos\theta-\sin\theta\cos y}{\cos y}.$$

$\therefore\quad \operatorname{tg}x\cos\theta+\sin\theta=\operatorname{tg}y\cos\theta-\sin\theta$.

在上式的两边同除以 $\cos\theta$，得

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}\theta.$$

$$\therefore\quad 2\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}x.$$

625．证明

$$\csc2A+\operatorname{ctg}4A=\operatorname{ctg}A-\csc4A.$$

解 $\csc 2A+\operatorname{ctg} 4A=\dfrac{1}{\sin 2A}+\dfrac{\cos 4A}{\sin 4A}$

$$=\frac{2\cos 2A}{2\cos 2A\sin 2A}+\frac{\cos 4A}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\cos 2A+\cos 4A}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\cos 2A+2\cos^2 2A-1}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\cos 2A(1+\cos 2A)-1}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\cos 2A(1+\cos 2A)}{2\sin 2A\cos 2A}-\frac{1}{\sin 4A}$$

$$=\frac{1+\cos 2A}{\sin 2A}-\frac{1}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\cos^2 A}{\sin 2A}-\frac{1}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\cos^2 A}{2\sin A\cos A}-\frac{1}{\sin 4A}$$

$$=\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{1}{\sin 4A}$$

$$=\operatorname{ctg} A-\csc 4A.$$

626. 若 $\operatorname{tg}^2\theta=2\operatorname{tg}^2\varphi+1$，证明 $\cos 2\varphi=2\cos 2\theta+1$，从而 $\cos 2\theta+\sin^2\varphi=0$。

解 从 $\operatorname{tg}^2\theta=2\operatorname{tg}^2\varphi+1$ 得 $1+\operatorname{tg}^2\theta=2\operatorname{tg}^2\varphi+2$，因此 $\sec^2\theta=2\sec^2\varphi$，即 $\cos^2\varphi=2\cos^2\theta$。因此

$$2\cos^2\varphi-1=4\cos^2\theta-2+1,$$

即 $$\cos 2\varphi=2\cos 2\theta+1.$$

从而 $$\cos 2\theta+\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)=0,$$

即 $$\cos 2\theta+\sin^2\varphi=0.$$

627. 证明 $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ-A)}{1+\operatorname{tg}^2(45^\circ-A)}=\sin 2A$.

解 $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ-A)}{1+\operatorname{tg}^2(45^\circ-A)}$

$$=\frac{1-\dfrac{\sin^2(45^\circ-A)}{\cos^2(45^\circ-A)}}{1+\dfrac{\sin^2(45^\circ-A)}{\cos^2(45^\circ-A)}}$$

$$=\frac{\cos^2(45^\circ-A)-\sin^2(45^\circ-A)}{\cos^2(45^\circ-A)+\sin^2(45^\circ-A)}$$

$$=\frac{\cos 2(45^\circ-A)}{1}$$

$$=\cos(90^\circ-2A)=\sin 2A.$$

628. 证明 $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 A+1}{\operatorname{ctg}^2 A-1}=\sec 2A$.

解 原式的左边

$$=\frac{\csc^2 A}{\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}-1}=\frac{\csc^2 A}{\dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\sin^2 A}}$$

$$=\frac{\sin^2 A\csc^2 A}{\cos^2 A-\sin^2 A}=\frac{1}{\cos^2 A-\sin^2 A}$$

$$=\frac{1}{\cos 2A}=\sec 2A.$$

629. 若 $\cos\theta=\dfrac{5}{11}$，求 $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$、$\operatorname{tg}\theta$ 及 $\operatorname{tg}2\theta$。

解 $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$$=\pm\sqrt{\frac{1-\dfrac{5}{11}}{1+\dfrac{5}{11}}}=\pm\sqrt{\frac{6}{16}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\operatorname{tg}\theta=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{11}\right)^2}}{\dfrac{5}{11}}=\pm\frac{4\sqrt{6}}{5}.$$

$$\operatorname{tg}2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta-1}$$

$$=\pm\frac{2\cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}}{2\cos^2\theta-1},$$

用 $\dfrac{5}{11}$ 代入 $\cos\theta$，求得

$$\operatorname{tg}2\theta=\pm\frac{40\sqrt{6}}{71}.$$

630. 证明 $\dfrac{1-\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{tg}\delta}=\operatorname{tg}(\gamma+\delta)$.

解 原式的左边

$$=\left(1+\frac{\cos\gamma\sin\delta}{\sin\gamma\cos\delta}\right)$$

$$\div\left(\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}-\frac{\sin\delta}{\cos\delta}\right)$$

$$=\frac{\sin\gamma\cos\delta+\cos\gamma\sin\delta}{\cos\gamma\cos\delta-\sin\gamma\sin\delta}$$

$$=\frac{\sin(\gamma+\delta)}{\cos(\gamma+\delta)}=\operatorname{tg}(\gamma+\delta).$$

631. 证明 $\cos 2A=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 A}{1+\operatorname{tg}^2 A}$.

解 $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$

$$=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A}=\frac{1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2 A}{1+\operatorname{tg}^2 A}.$$

632．证明 $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}$.

解 原式的左边

$$=\frac{\left(\sin\frac{1}{2}\theta+\cos\frac{1}{2}\theta\right)^2}{\cos^2\frac{1}{2}\theta-\sin^2\frac{1}{2}\theta}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}\theta+\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta-\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$=\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}+\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\right)$$

$$\div\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}-\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\right)$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta+1}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}.$$

633．证明

$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}2A+\operatorname{ctg}4A$

$=\csc 4A(2+2\cos 2A+3\cos 4A)$.

解 原式的左边

$$=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos 2A}{\sin 2A}+\frac{\cos 4A}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\cos^2 A}{2\sin A\cos A}+\frac{\cos 2A}{\sin 2A}+\frac{\cos 4A}{\sin 4A}$$

$$=\frac{1+2\cos 2A}{\sin 2A}+\frac{\cos 4A}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\cos 2A(1+2\cos 2A)}{2\sin 2A\cos 2A}+\frac{\cos 4A}{\sin 4A}$$

$$=\frac{1}{\sin 4A}(2\cos 2A+4\cos^2 2A+\cos 4A)$$

$$=\frac{1}{\sin 4A}[2\cos 2A+2(\cos 4A+1)+\cos 4A]$$

$$=\csc 4A(2+2\cos 2A+3\cos 4A).$$

634．证明 $\operatorname{tg}\left(30^\circ+\frac{1}{2}\alpha\right)\operatorname{tg}\left(30^\circ-\frac{1}{2}\alpha\right)$

$$=\frac{2\cos\alpha-1}{2\cos\alpha+1}.$$

解 原式的左边

$$=\frac{\sin\left(30^\circ+\frac{1}{2}\alpha\right)\sin\left(30^\circ-\frac{1}{2}\alpha\right)}{\cos\left(30^\circ+\frac{1}{2}\alpha\right)\cos\left(30^\circ-\frac{1}{2}\alpha\right)}$$

$$=\frac{\sin^2 30^\circ-\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2 30^\circ-\sin^2\frac{1}{2}\alpha}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}-\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\frac{3}{4}-\sin^2\frac{1}{2}\alpha}=\frac{1-4\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{3-4\sin^2\frac{1}{2}\alpha}$$

$$=\frac{2-4\sin^2\frac{1}{2}\alpha-1}{2-4\sin^2\frac{1}{2}\alpha+1}=\frac{2\cos\alpha-1}{2\cos\alpha+1}.$$

635．证明

$$\frac{1+\cos\theta+\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\theta+\sin\frac{1}{2}\theta}=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

解 原式的左边

$$=\frac{1+\left(2\cos^2\frac{1}{2}\theta-1\right)+\cos\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta+\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}\theta+\cos\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta+\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}\theta\left(2\cos\frac{1}{2}\theta+1\right)}{\sin\frac{1}{2}\theta\left(2\cos\frac{1}{2}\theta+1\right)}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta.$$

636．若 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$，$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2}$，证明

$$\operatorname{tg}(\beta-2\alpha)=\frac{2}{11}.$$

解　$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{\frac{2}{7}}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\dfrac{7}{24}$.

$$\operatorname{tg}(\beta-2\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{7}{24}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{7}{24}}=\frac{2}{11}.$$

637. 若 $\operatorname{tg}A=\dfrac{1}{3}$，求 $\operatorname{tg}2A$ 的值.

解　$\operatorname{tg}2A=\dfrac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2A}$

$$=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}.$$

638. 将某角的2倍和4倍角的正切，用这个角的正切表示出来。即要证明

$$\operatorname{tg}2A=\frac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2A},$$

及　$$\operatorname{tg}4A=\frac{4\operatorname{tg}A-4\operatorname{tg}^3A}{1-6\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^4A}.$$

解　在公式

$$\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$$

中，设 $A=B$，则得

$$\operatorname{tg}2A=\frac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2A}.$$

连续两次使用上面所得的公式，即得

$$\operatorname{tg}4A=\frac{2\operatorname{tg}2A}{1-\operatorname{tg}^22A}=\frac{2\cdot\frac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2A}}{1-\left(\frac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2A}\right)^2}$$

$$=\frac{4\operatorname{tg}A-4\operatorname{tg}^3A}{1-6\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^4A}.$$

639. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{m}{n}$，计算 $m\cos2\alpha+n\sin2\alpha$.

解　$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$,

$$\sin2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

因此　$m\cos2\alpha+n\sin2\alpha$

$$=m\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+n\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}(m-m\operatorname{tg}^2\alpha+2n\operatorname{tg}\alpha)$$

$$=\frac{n^2}{m^2+n^2}\left(m-m\cdot\frac{m^2}{n^2}+2n\cdot\frac{m}{n}\right)$$

$$=\frac{m(3n^2-m^2)}{m^2+n^2}.$$

640. 当 $\operatorname{tg}A=3$ 时，$2A$ 的各三角函数的值是多少？

解　$\sin2A=\dfrac{2\operatorname{tg}A}{1+\operatorname{tg}^2A}=\dfrac{2\times3}{1+3^2}=\dfrac{3}{5}$.

$$\cos2A=\frac{1-\operatorname{tg}^2A}{1+\operatorname{tg}^2A}=\frac{1-3^2}{1+3^2}=-\frac{4}{5}.$$

$$\operatorname{tg}2A=\frac{\sin2A}{\cos2A}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}.$$

从而 $\csc2A=\dfrac{5}{3}$，$\sec2A=-\dfrac{5}{4}$，$\operatorname{ctg}2A=-\dfrac{4}{3}$.

641. 证明 $\csc2A=\dfrac{\operatorname{ctg}^2A+1}{2\operatorname{ctg}A}$.

解　$\csc2A=\dfrac{1}{\sin2A}=\dfrac{1+\operatorname{tg}^2A}{2\operatorname{tg}A}$

$$=\frac{1+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2A}}{\frac{2}{\operatorname{ctg}A}}=\frac{\operatorname{ctg}^2A+1}{2\operatorname{ctg}A}.$$

别解　$\dfrac{\operatorname{ctg}^2A+1}{2\operatorname{ctg}A}=\dfrac{\frac{1}{\sin^2A}}{\frac{2\cos A}{\sin A}}=\csc2A$.

642. 已知 $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\sqrt{2}-1$，计算 x 所有的三角函数的值.

解　$\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{1+(\sqrt{2}-1)^2}$

$$=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1+2+1-2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

据此，其他各三角函数的值也就可以计算出来。即

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{tg}x=1,\ \csc x=\sqrt{2},$$

$$\sec x=\sqrt{2},\ \operatorname{ctg}x=1.$$

643. 若 $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta=2\left(\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)$，求 $\cos 2\theta$。

解 从条件得 $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2\left(\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)$。

因此 $$\sin 2\theta=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}.$$

从而 $$\cos 2\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2}=\pm\frac{2mn}{m^2+n^2}.$$

644. 证明 $\frac{\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}\varphi}{\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{ctg}\varphi}=-\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin(\theta-\varphi)}$。

解 左边 $$=\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}=\frac{\cos\theta\sin\varphi+\cos\varphi\sin\theta}{\cos\theta\sin\varphi-\cos\varphi\sin\theta}=\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin(\varphi-\theta)}=-\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin(\theta-\varphi)}.$$

别解 用 $\operatorname{ctg}\theta\operatorname{ctg}\varphi$ 除左边的分子、分母，得
$$\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\theta}=\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin(\varphi-\theta)}.$$

645. 在圆周上顺次取四点 A、B、C、D，如果 $\operatorname{ctg}\angle AOB+\operatorname{ctg}\angle AOD=2\operatorname{ctg}\angle AOC$，试证 $\sin\angle AOB:\sin\angle BOC=\sin\angle AOD:\sin\angle DOC$。(这里各角都是指有向角)

解 从假定得
$$\operatorname{ctg}\angle AOB-\operatorname{ctg}\angle AOC=\operatorname{ctg}\angle AOC-\operatorname{ctg}\angle AOD,$$

即 $$\frac{\sin(\angle AOC-\angle AOB)}{\sin\angle AOB\sin\angle AOC}=\frac{\sin(\angle AOD-\angle AOC)}{\sin\angle AOC\sin\angle AOD}.$$

因此 $$\frac{\sin\angle BOC}{\sin\angle AOB}=\frac{\sin\angle DOC}{\sin\angle AOD}.$$

从而得 $$\sin\angle AOB:\sin\angle BOC=\sin\angle AOD:\sin\angle DOC.$$

646. 证明
$$\operatorname{ctg}A\pm\operatorname{tg}B=\frac{\cos(A\mp B)}{\sin A\cos B}.$$

解 $$\operatorname{ctg}A\pm\operatorname{tg}B=\frac{\cos A}{\sin A}\pm\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\cos A\cos B\pm\sin A\sin B}{\sin A\cos B}=\frac{\cos(A\mp B)}{\sin A\cos B}.$$

647. 证明 $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}\cdot\frac{\cos A}{1+\cos A}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}$。

解 左边 $$=\frac{2\sin A\cos A}{1+(2\cos^2 A-1)}\times\frac{\cos A}{1+\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)}=\frac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A}\cdot\frac{\cos A}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\sin A}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

别解 $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{\sin A\cdot 2\cos^2 A}{(1+\cos A)(1+\cos 2A)}=\frac{\cos A}{1+\cos A}\cdot\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}.$$

648. 证明
$$\frac{\sin 2A}{1+\sin 2A}=\frac{2}{(1+\operatorname{tg}A)(1+\operatorname{ctg}A)}.$$

解 左边
$$=\frac{2\sin A\cos A}{\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A}=\frac{2\sin A\cos A}{(\sin A+\cos A)^2}=\frac{2}{\frac{\sin A+\cos A}{\sin A}\cdot\frac{\sin A+\cos A}{\cos A}}=\frac{2}{(1+\operatorname{ctg}A)(1+\operatorname{tg}A)}.$$

649. 证明
$$4\sin A\sin(60^\circ-A)\sin(60^\circ+A)=\sin 3A.$$

解 左边 $$=4\sin A(\sin^2 60^\circ-\sin^2 A)=4\sin A\left(\frac{3}{4}-\sin^2 A\right)=3\sin A-4\sin^3 A=\sin 3A.$$

650. 若 $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{7}$，求 $\sin 2\theta$ 及 $\cos 2\theta$ 的值.

解　$\sin 2\theta=\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}=\frac{\frac{2}{7}}{1+\frac{1}{49}}=\frac{7}{25}$.

$$\cos 2\theta=\frac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}=\frac{1-\frac{1}{49}}{1+\frac{1}{49}}=\frac{24}{25}.$$

651. 证明

$4\cos A\cos(60°-A)\cos(60°+A)=\cos 3A$.

解　左边$=4\cos A(\cos^2 A-\sin^2 60°)$

$$=4\cos A\left(\cos^2 A-\frac{3}{4}\right)$$

$$=4\cos^3 A-3\cos A=\cos 3A.$$

652. 证明　$\frac{1-\cos A}{\sin A}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

解　左边$=\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$

$$=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

653. 证明　$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}+1}{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-1}$.

解　$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}$,

$$1-\sin\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$=\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2.$$

因此　$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}.$$

将分子、分母同除以 $\sin\frac{\theta}{2}$，再将 $\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ 写成 $\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$，即得

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}+1}{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-1}.$$

654. 若 $\sin A=\frac{15}{17}$，$\operatorname{tg}B=\frac{4}{3}$，求 $\cos(A-B)$. 这里，A、B 都是锐角.

解　因为 A、B 是锐角，所以 $\cos A$、$\cos B$ 都是正的.

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17},$$

$$\cos B=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 B}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}=\frac{3}{5}.$$

因此

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$=\cos B(\cos A+\sin A\operatorname{tg}B)$$

$$=\frac{3}{5}\left(\frac{8}{17}+\frac{15}{17}\cdot\frac{4}{3}\right)$$

$$=\frac{84}{85}.$$

655. 若 $\operatorname{tg}A=a$，$\operatorname{tg}B=b$，证明

$$\sin(A+B)=\frac{a+b}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}.$$

这里设 A、B 都是锐角.

解　$\frac{a+b}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}$

$$=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2A)(1+\operatorname{tg}^2B)}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{\sec A\sec B}$$

$$=\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}\right)\cdot\frac{1}{\sec A\sec B}$$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B\sec A\sec B}$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$=\sin(A+B).$$

656. 证明

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}.$$

解　左边$=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$=[(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\times(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)]\div\cos^2\alpha\cos^2\beta$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}.$$

657. 证明

$$\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}=\operatorname{tg}2A+\sec 2A.$$

解　将左边的分子、分母同乘以 $\cos A+\sin A$，则

$$\text{左边}=\frac{(\cos A+\sin A)^2}{(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)}$$

$$=\frac{1+2\sin A\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 A}=\frac{1+\sin 2A}{\cos 2A}$$

$$=\frac{\sin 2A}{\cos 2A}+\frac{1}{\cos 2A}$$

$$=\operatorname{tg}2A+\sec 2A.$$

3. 倍角、半角的公式

658. 证明下列公式.

(1) $\sin 2A=2\sin A\cos A$;

(2) $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$
$=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A$;

(3) $\operatorname{tg}2A=\dfrac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2 A}$;

(4) $\operatorname{ctg}2A=\dfrac{\operatorname{ctg}^2 A-1}{2\operatorname{ctg}A}$.

解　(1) 在 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ 中，设 B 等于 A，即得

$$\sin 2A=2\sin A\cos A.$$

(2) 在 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ 中，设 B 等于 A，即得

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$$
$$=(1-\sin^2 A)-\sin^2 A$$
$$=1-2\sin^2 A.$$

又，如果用 $\sin^2 A=1-\cos^2 A$ 代入上式，则得

$$\cos 2A=2\cos^2 A-1.$$

(3) 在 $\operatorname{tg}(A+B)=\dfrac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$ 中，设 B 等于 A，即得

$$\operatorname{tg}2A=\frac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2 A}.$$

(4) 在 $\operatorname{ctg}(A+B)=\dfrac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1}{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B}$ 中，设 B 等于 A，即得

$$\operatorname{ctg}2A=\frac{\operatorname{ctg}^2 A-1}{2\operatorname{ctg}A}.$$

659. 证明下列公式.

(1) $\cos\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$;

(2) $\sin\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$.

解　(1) 从公式 $\cos 2A=2\cos^2 A-1$ 得

$$\cos^2 A=\frac{1+\cos 2A}{2}.$$

在上面的式子中，将 A 换成 $\dfrac{A}{2}$，即得

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}.$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$$

(2) 同样，在 $\cos 2A=1-2\sin^2 A$ 中，将 A 换成 $\dfrac{A}{2}$，得

$$\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}.$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}.$$

注　正、负号视 $\dfrac{A}{2}$ 是哪个象限的角而定.

660. 若 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{3}{5}$，求下列各值.

(1) $\sin(\alpha-\beta)$;　　(2) $\cos(\alpha-\beta)$;

(3) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

解　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$,

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

这里 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，因为 $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$；$-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$，因为 $\cos\beta=\dfrac{3}{5}$，所以 $\sin\beta=-\dfrac{4}{5}$，$\operatorname{tg}\beta=-\dfrac{4}{3}$. 将这些值代入上面三个式子，得

(1) $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{4\sqrt{5}+6}{15}$.

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3\sqrt{5}-8}{15}$.

(3) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{4\sqrt{5}+6}{3\sqrt{5}-8}$.

661. 证明下列等式:

(1) $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm\sin 2\theta$;

(2) $\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{tg}\theta=2\operatorname{ctg}2\theta$.

解 (1) 左边$=\sin^2\theta+\cos^2\theta\pm2\sin\theta\cos\theta$
$=1\pm\sin 2\theta$.

(2) 将两边用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 来表示.

$$\text{左边}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}.$$

$$\text{右边}=2\cdot\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}=2\cdot\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}.$$

$\therefore$ 左边$=$右边.

662. 证明

$$\left(\sin\frac{A}{2}\pm\cos\frac{A}{2}\right)^2=1\pm\sin A.$$

解 $\left(\sin\dfrac{A}{2}\pm\cos\dfrac{A}{2}\right)^2$

$$=\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\pm2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

由于 $\sin^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{A}{2}=1$,

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin A,$$

所以 $\left(\sin\dfrac{A}{2}\pm\cos\dfrac{A}{2}\right)^2=1\pm\sin A$.

663. 证明

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}[(\pm\sqrt{1+\sin A})+(\pm\sqrt{1-\sin A})]$$

及 $$\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}[(\pm\sqrt{1+\sin A})-(\pm\sqrt{1-\sin A})].$$

解 $\left(\sin\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{A}{2}\right)^2=1+\sin A$.

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}.\quad ①$$

同样 $$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}.\quad ②$$

①+②,得

$$2\sin\frac{A}{2}=(\pm\sqrt{1+\sin A})+(\pm\sqrt{1-\sin A}).$$

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}[(\pm\sqrt{1+\sin A})+(\pm\sqrt{1-\sin A})].$$

用同样的方法,证得

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}[(\pm\sqrt{1+\sin A})-(\pm\sqrt{1-\sin A})].$$

注 看 $\dfrac{A}{2}$ 在哪个象限而确定正、负号的取法.

664. 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, 求下列两式的值.

(1) $\sin2\alpha$;　　(2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

解 (1) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$
$=\dfrac{1}{4}-1=-\dfrac{3}{4}$.

(2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\times(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$
$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{11}{16}$.

665. 当 $\operatorname{tg}A=\dfrac{3}{4}$ 时, $\sin\dfrac{A}{2}$ 的值是多少?

解 $\sec A=\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}$
$=\pm\sqrt{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\pm\dfrac{5}{4}$.

$\therefore\ \cos A=\pm\dfrac{4}{5}$,

或 $1-2\sin^2\dfrac{A}{2}=\pm\dfrac{4}{5}$.

因此 $\sin\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1\mp\dfrac{4}{5}\right)}$.

即 $\sin\dfrac{A}{2}$ 的值是 $\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ 或 $\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

666. 若 $\cos A=\dfrac{1}{5}$, 求 $\cos2A$ 的值.

解 $\cos2A=2\cos^2A-1$
$=2\left(\dfrac{1}{5}\right)^2-1=\dfrac{2}{25}-1=-\dfrac{23}{25}$.

667. 计算 $\sin 165°+\cos 165°$ 的值.

解 $\sin 165°=\sin(180°-15°)=\sin 15°$.

$\cos 165°=\cos(90°+75°)=-\sin 75°$.

$$\sin 165°+\cos 165°=\sin 15°-\sin 75°$$
$$=2\cos 45°\sin(-30°)$$
$$=-2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

668. 若 $\sin A=\frac{1}{5}$，求 $2A$ 所有的三角函数的值.

解 $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$$=2\sin A\left(\pm\sqrt{1-\sin^2 A}\right)$$
$$=2\times\frac{1}{5}\left(\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\right)=\pm\frac{4\sqrt{6}}{25}.$$

$$\cos 2A=1-2\sin^2 A=1-2\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{23}{25}.$$

$$\operatorname{tg} 2A=\frac{\sin 2A}{\cos 2A}=\frac{\pm\frac{4\sqrt{6}}{25}}{\frac{23}{25}}=\pm\frac{4\sqrt{6}}{23}.$$

从而 $\csc 2A=\frac{1}{\sin 2A}=\pm\frac{25}{4\sqrt{6}}$,

$$\sec 2A=\frac{1}{\cos 2A}=\frac{25}{23},$$

$$\operatorname{ctg} 2A=\frac{1}{\operatorname{tg} 2A}=\pm\frac{23}{4\sqrt{6}}.$$

669. 若 $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$，$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，计算 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 和 $\cos\frac{\alpha}{2}$.

解 这里 $\frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\pi$，因此

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{1+\sin\alpha},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\sin\alpha}.$$

所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\sin\alpha}-\sqrt{1+\sin\alpha}\right),$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right).$$

将 $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$ 代入上面两式，得

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{5}.$$

670. (1) 设 $\alpha=18°$，则 $5\alpha=90°$，$2\alpha=90°-3\alpha$，因此

$$\sin 2\alpha=\sin(90°-3\alpha)=\cos 3\alpha.$$

由此请导出

$$4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0.$$

(2) 求下列各式的值:

(i) $\sin 18°$;

(ii) $\cos 18°$;

(iii) $\sin 36°$;

(iv) $\cos 36°$.

解 (1) 由 $\sin 2\alpha=\cos 3\alpha$ 得

$$2\sin\alpha\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

这里 $\alpha=18°$ 是锐角，$\cos\alpha>0$，所以 $\cos\alpha\neq 0$. 用 $\cos\alpha$ 除上式的两边，得

$$2\sin\alpha=4\cos^2\alpha-3=4(1-\sin^2\alpha)-3$$
$$=1-4\sin^2\alpha.$$

$$\therefore\quad 4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0. \qquad ①$$

(2) (i) ① 式中，设 $\sin\alpha=x$，则

$$4x^2+2x-1=0.$$

解这个方程，得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

因为 $x=\sin\alpha=\sin 18°>0$,

所以 $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

(ii) 因为 $\cos 18°>0$，所以

$$\cos 18°=\sqrt{1-\sin^2 18°}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

(iii) 为了利用(i)、(ii)的答案，采用倍角公式.

$$\sin 36°=2\sin 18°\cos 18°=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

(iv) 可以利用 (iii) 的答案，用 $\cos 36°=\sqrt{1-\sin^2 36°}$ 进行计算，也可以利用倍角公式进行计算，即

$$\cos 36°=1-2\sin^2 18°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

671. 若 $\sin 2A=\frac{1}{4}$，求 $\sin A$ 的值.

解 $\sin A=\frac{1}{2}\left[\left(\pm\sqrt{1+\sin 2A}\right)\right.$

$$\left.+\left(\pm\sqrt{1-\sin 2A}\right)\right].$$

在上式的右边将 $\frac{1}{4}$ 代入 $\sin 2A$，得

$$\sin A=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{3}}{4},$$

或 $$\sin A=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{4}}\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}}\right)$$
$$=\frac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{3}}{4}.$$

672. 若 $\sin A=\frac{1}{4}$，求 $\cos 2A$ 的值。

解 $$\cos 2A=1-2\sin^2 A=1-2\left(\frac{1}{4}\right)^2$$
$$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

673. 若 $\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}$，求 $\sin 2x$、$\cos 2x$ 的值。

解 从 608 题的关系式得

$$\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}.$$

$$\cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}.$$

674. 若 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，计算 $\sin\frac{\alpha}{2}$。

解 因为 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 在 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间。因此

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1+\sin\alpha}=\sqrt{\frac{5}{3}},$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\sin\alpha}=\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

从而 $$2\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}.$$

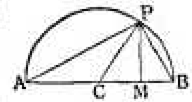
675. 用角 A 的正弦和余弦表示角 $2A$ 的正弦，即要证明

$$\sin 2A=2\sin A\cos A.$$

解 在两角和的正弦公式中，设 $A=B$，即得

$$\sin 2A=2\sin A\cos A.$$

别解 本题公式的几何证明如下。以 C 为圆心，AB 为直径作半圆 APB，设 $\angle BAP=A$，然后连结 B、P，并向 AB 作垂线 PM。于是，$\angle APB$ 是半圆上的角，所以它是直角。同时，由于 $\angle PCB$ 是同弧上圆周角的 2 倍，所以



$$\angle PCB=2\angle PAB=2A,$$

并且 $$\angle BPM=90^\circ-\angle PBM$$
$$=\angle PAB=A.$$

因此 $$\sin 2A=\frac{PM}{CP}=\frac{2PM}{AB}=2\cdot\frac{PM}{AP}\cdot\frac{AP}{AB}$$
$$=2\sin A\cos A.$$

676. 设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，用 t 表示 $\sin x$ 和 $\cos x$。又，用 $\sin x$、$\cos x$ 表示 $t^2-\frac{1}{t^2}$。

解 $$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-1$$
$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\sin x=\operatorname{tg} x\cos x$$
$$=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

$$t^2-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2+1}{t}\cdot\frac{t^2-1}{t}$$
$$=\frac{2}{\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{-2}{\frac{2t}{1-t^2}}$$
$$=\frac{-4}{\sin x\operatorname{tg} x}=\frac{-4\cos x}{\sin^2 x}.$$

677. 若 $\sin A=\frac{1}{2}$，求 A 小于 90°、大于 0° 时 $\sin 2A$ 的值。

解 $\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}$，因为 $0^\circ<A<90^\circ$，所以 $\cos A$ 是正的。因此

$$\cos A=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

从而 $$\sin 2A=2\sin A\cos A$$
$$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

678. 化简

$\cos(15°-A)\sec 15°-\sin(15°-A)\csc 15°$。

解 原式$=\dfrac{\cos(15°-A)}{\cos 15°}-\dfrac{\sin(15°-A)}{\sin 15°}$

$=\dfrac{\sin 15°\cos(15°-A)-\cos 15°\sin(15°-A)}{\cos 15°\sin 15°}$

$=\dfrac{\sin(15°-15°+A)}{\cos 15°\sin 15°}=\dfrac{2\sin A}{\sin 30°}$

$=4\sin A$.

679. 若

$$\frac{\sin(\theta-\beta)\cos\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)\cos\beta}+\frac{\cos(\alpha+\theta)\sin\beta}{\cos(\varphi-\beta)\sin\alpha}=0,$$

$$\frac{\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\beta}+\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=0,$$

证明 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha)$,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta).$$

解 已知

$$\frac{\sin(\theta-\beta)\cos\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)\cos\beta}+\frac{\cos(\alpha+\theta)\sin\beta}{\cos(\varphi-\beta)\sin\alpha}=0.$$

将上式各项乘以 $\dfrac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos(\alpha+\theta)}$,得

$$\frac{\sin(\theta-\beta)\cos\alpha}{\cos(\alpha+\theta)\cos\beta}+\frac{\sin(\varphi-\alpha)\sin\beta}{\cos(\varphi-\beta)\sin\alpha}=0.$$

因此 $\dfrac{(\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta)\cos\alpha}{(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)\cos\beta}$

$$+\frac{(\sin\varphi\cos\alpha-\cos\varphi\sin\alpha)\sin\beta}{(\cos\varphi\cos\beta+\sin\varphi\sin\beta)\sin\alpha}=0,$$

$$\frac{(\operatorname{tg}\theta\cos\beta-\sin\beta)\cos\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha\operatorname{tg}\theta)\cos\beta}+\frac{(\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\beta}{(\cos\beta+\operatorname{tg}\varphi\sin\beta)\sin\alpha}=0.$$

用分子和分母中括号外的因式分别除以分子和分母,得

$$\frac{\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}+\frac{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{tg}\varphi}=0.$$

化去分母得

$$(\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{tg}\varphi)+(\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}\alpha-1)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta)=0.$$

因此

$$\operatorname{tg}\theta(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)+\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)=2.$$

可是,从第二个已知条件又得

$$\operatorname{tg}\theta=-\operatorname{tg}\varphi\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

因此

$$-\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}+\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)=2,$$

$$-\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cos(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)\cos(\alpha+\beta)=2\cos(\alpha+\beta),$$

$$\operatorname{tg}\varphi\{\operatorname{ctg}\alpha[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]-\operatorname{tg}\beta[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\}=2\cos(\alpha+\beta).$$

$$\operatorname{tg}\varphi[\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha\sin\beta+\operatorname{tg}\beta\cos\alpha\cos\beta]=-\cos(\alpha+\beta).$$

因此 $\operatorname{tg}\varphi=-\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\sin\beta}$

$$=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta).$$

并且 $\operatorname{tg}\theta=-\operatorname{tg}\varphi\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

$$=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2\sin\alpha\cos\beta}=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta).$$

680. 从 $\cos\beta\sqrt{a^2-x^2}+a\sin\alpha=x\sin\beta$ 求 x。

解 $\cos\beta\sqrt{a^2-x^2}=x\sin\beta-a\sin\alpha$.

因此 $\cos^2\beta(a^2-x^2)$

$$=x^2\sin^2\beta-2xa\sin\alpha\sin\beta+a^2\sin^2\alpha,$$

$$x^2-2xa\sin\alpha\sin\beta=a^2\cos^2\beta-a^2\sin^2\alpha.$$

因此 $(x-a\sin\alpha\sin\beta)^2$

$$=a^2\cos^2\beta-a^2\sin^2\alpha+a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta,$$

$$=a^2\cos^2\beta-a^2\sin^2\alpha\cos^2\beta$$

$$=a^2\cos^2\alpha\cos^2\beta,$$

$$x-a\sin\alpha\sin\beta=\pm a\cos\alpha\cos\beta.$$

因此根是

$$x=a(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=a\cos(\alpha-\beta)$$

或

$$x=a(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta)=-a\cos(\alpha+\beta).$$

注 在上面的无理方程中,$\sqrt{a^2-x^2}\geqq 0$,所以

(1) (i) 当 $a\sin(\beta-\alpha)\geqq 0$ 时,$x=a\cos(\beta-\alpha)$ 是原方程的根。

(ii) 当 $a\sin(\beta-\alpha)<0$ 时,原方程用 $x=a\cos(\beta-\alpha)$ 代入后,变成 $\sin\alpha=\sin(2\beta-\alpha)$,因此一般来说,$a\cos(\beta-\alpha)$ 不是原方程的根。

(2) (i) 当 $a\sin(\beta+\alpha)\geqq 0$ 时,原方程用

$x=-a\cos(\beta+\alpha)$ 代入以后，变成 $\sin\alpha=-\sin(2\beta+\alpha)$，因此一般来说，$-a\cos(\beta+\alpha)$ 不是原方程的根。

(ii) 当 $a\sin(\beta+\alpha)<0$ 时，$x=-a\cos(\beta+\alpha)$ 是原方程的根。

(图解) $y=\cos\beta\sqrt{a^2-x^2}$ 是椭圆，$y=x\sin\beta-a\sin\alpha$ 是直线。因为椭圆是取 x 轴上方的部分，所以它和直线的交点数可能是 2、1 或 0。因此所给的方程也可能一个根也没有。

681. 若 $\operatorname{tg}A=2\operatorname{tg}B$，证明 $\sin(A+B)=3\sin(A-B)$。

解 因为 $\operatorname{tg}A=2\operatorname{tg}B$，所以

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{2\sin B}{\cos B},$$

即 $$\sin A\cos B=2\cos A\sin B. \quad ①$$

在①的两边同时加上 $\cos A\sin B$，得

$$\sin(A+B)=3\cos A\sin B. \quad ②$$

在①的两边再同时减去 $\cos A\sin B$，得

$$\sin(A-B)=\cos A\sin B. \quad ③$$

将②除以③，得

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}=3.$$

$$\therefore\ \sin(A+B)=3\sin(A-B).$$

682. 设 α、β 是正的锐角，用 $\sec\alpha$ 和 $\sec\beta$ 表示 $\sec(\alpha+\beta)$。

解 $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}$$
$$=\frac{1}{\sec\alpha\sec\beta}-\frac{\sqrt{(\sec^2\alpha-1)(\sec^2\beta-1)}}{\sec\alpha\sec\beta}.$$

因此 $$\sec(\alpha+\beta)=\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{\sec\alpha\sec\beta}{1-\sqrt{(\sec^2\alpha-1)(\sec^2\beta-1)}}.$$

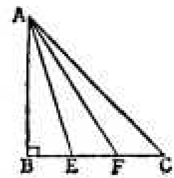
683. 若 $\operatorname{tg}^2x=\operatorname{tg}(\alpha+x)\operatorname{tg}(\alpha-x)$，证明 $\sin 2x=\pm\sqrt{2}\sin\alpha$。

解 $$\operatorname{tg}^2x=\frac{\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)}{\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2x}{\cos^2x-\sin^2\alpha}.$$

因此 $$\sin^2x(\cos^2x-\sin^2\alpha)=\cos^2x(\sin^2\alpha-\sin^2x),$$
$$2\sin^2x\cos^2x=\sin^2\alpha(\sin^2x+\cos^2x)=\sin^2\alpha.$$

因此 $$4\sin^2x\cos^2x=2\sin^2\alpha,$$
$$2\sin x\cos x=\pm\sqrt{2}\sin\alpha,$$
$$\sin 2x=\pm\sqrt{2}\sin\alpha.$$

684. 在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle B$ 是直角，E、F 将 BC 三等分，求 $\angle EAF$ 和 $\angle FAC$ 的正切。



解 $$\operatorname{tg}\angle FAE=\operatorname{tg}(\angle FAB-\angle EAB)$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\angle FAB-\operatorname{tg}\angle EAB}{1+\operatorname{tg}\angle FAB\operatorname{tg}EAB}$$
$$=\frac{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{3}{11}.$$

$$\operatorname{tg}\angle FAC=\operatorname{tg}(\angle CAB-\angle FAB)$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\angle CAB-\operatorname{tg}\angle FAB}{1+\operatorname{tg}\angle CAB\operatorname{tg}\angle FAB}$$
$$=\frac{1-\frac{2}{3}}{1+1\times\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}.$$

685. 在角 A 是直角的三角形 ABC 中，$\frac{b}{c}=2+\sqrt{3}$，求 $\cos\frac{B-C}{2}$。

解 $$\frac{b}{c}=\operatorname{tg}B=2+\sqrt{3},$$
$$\therefore\ B=75^\circ,\ C=90^\circ-75^\circ=15^\circ.$$

因此 $$\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}$$
$$=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

686. 若 $3\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x+4\cos^2x+k$ 能变成 $\sin(2x+\alpha)$ 的形式，那么这时 k 和 α 的值是多少？这里 $0\leq\alpha\leq\pi$。

解 $$3\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x+4\cos^2x+k$$
$$=\frac{3}{2}(1-\cos 2x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+2(1+\cos 2x)+k$$
$$=\frac{7}{2}+k+\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right).$$
$$\therefore\ k=-\frac{7}{2},\ \alpha=\frac{\pi}{6}.$$

687. 不管 θ 的值如何，证明 $a\sin^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$ 的值在 $\frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(a-c)^2}$ 和 $\frac{1}{2}(a+c)-\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(a-c)^2}$

之间。

解 $a\sin^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$

$$=\frac{1}{2}[a(1-\cos2\theta)+b\sin2\theta+c(1+\cos2\theta)]$$

$$=\frac{1}{2}[a+c+b\sin2\theta-(a-c)\cos2\theta].$$

设 α 是适合 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a-c}{b}$ 的角，则

$$\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{b^2+(a-c)^2}},$$

$$\sin\alpha=\frac{a-c}{\sqrt{b^2+(a-c)^2}}.$$

这时
$$\text{上式}=\frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(a-c)^2}\times(\sin2\theta\cos\alpha-\cos2\theta\sin\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(a-c)^2}\times\sin(2\theta-\alpha).$$

由于 $\sin(2\theta-\alpha)$ 在 -1 和 1 之间，所以本题得证。

688. 若 $\cos\theta=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}$，证明 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}$.

解
$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}}{1+\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}}}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{1-e\cos u-\cos u+e}{1-e\cos u+\cos u-e}}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{(1+e)(1-\cos u)}{(1-e)(1+\cos u)}}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

689. 若 $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$ 和 $\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{a'}{b'}$，证明 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{aa'+bb'}{ab'+a'b}$.

解 从已知条件得

$$\frac{\sin[\theta-\beta-(\alpha-\beta)]}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{\sin(\theta-\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos(\theta-\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\theta-\beta)}$$
$$=\frac{a}{b}.$$

因此

$$\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\operatorname{ctg}(\theta-\beta)=\frac{a}{b}.$$

又
$$\frac{\cos[\theta-\beta-(\alpha-\beta)]}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{a'}{b'}.$$

因此

$$\frac{\cos(\theta-\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\theta-\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\theta-\beta)}$$
$$=\frac{a'}{b'},$$

$$\cos(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\theta-\beta)\sin(\alpha-\beta)=\frac{a'}{b'}.$$

因此

$$\sin(\alpha-\beta)\operatorname{ctg}(\theta-\beta)\sin(\alpha-\beta)\operatorname{tg}(\theta-\beta)$$
$$=\left[\cos(\alpha-\beta)-\frac{a}{b}\right]\left[\frac{a'}{b'}-\cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$=-\frac{aa'}{bb'}+\left(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha-\beta),$$

$$1+\frac{aa'}{bb'}=\left(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right)\cos(\alpha-\beta).$$

因此
$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{aa'+bb'}{ab'+a'b}.$$

别解 也可以先只是消去 θ。

从
$$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b},$$

得
$$b(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)$$
$$=a(\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta).$$

因此

$$b\cos\alpha\operatorname{tg}\theta-b\sin\alpha=a\cos\beta\operatorname{tg}\theta-a\sin\beta,$$

$$(b\cos\alpha-a\cos\beta)\operatorname{tg}\theta=b\sin\alpha-a\sin\beta. \quad ①$$

又，从
$$\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{a'}{b'},$$

得
$$b'(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)$$
$$=a'(\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\beta).$$

因此

$$b'\cos\alpha+b'\sin\alpha\operatorname{tg}\theta=a'\cos\beta+a'\sin\beta\operatorname{tg}\theta,$$

$$(b'\sin\alpha-a'\sin\beta)\operatorname{tg}\theta=a'\cos\beta-b'\cos\alpha. \quad ②$$

将①除以②，得

$$\frac{b\cos\alpha-a\cos\beta}{b'\sin\alpha-a'\sin\beta}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{a'\cos\beta-b'\cos\alpha}.$$

化去分母，得

$$(b\cos\alpha-a\cos\beta)(a'\cos\beta-b'\cos\alpha)$$
$$=(b\sin\alpha-a\sin\beta)(b'\sin\alpha-a'\sin\beta),$$

即 $$a'b\cos\alpha\cos\beta-bb'\cos^2\alpha-aa'\cos^2\beta+ab'\cos\alpha\cos\beta$$
$$=bb'\sin^2\alpha-a'b\sin\alpha\sin\beta-ab'\sin\alpha\sin\beta+aa'\sin^2\beta,$$

即 $$(a'b+ab')(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=aa'+bb'.$$

因此 $$\cos(\alpha-\beta)=\frac{aa'+bb'}{a'b+ab'}.$$

690. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1.$$

解 $$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos A).$$

同样 $$\sin^2\frac{B}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos B),$$
$$\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos C).$$

因此 $$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}(3-\cos A-\cos B-\cos C).$$

进而，由 $A+B+C=180°$ 得

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left(3-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1\right)$$
$$=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

691. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+2.$$

解 $$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A).$$

同样 $$\cos^2\frac{B}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos B),$$
$$\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos C).$$

因此

$$\text{左边}=\frac{1}{2}(3+\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$=\frac{1}{2}\left(3+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1\right)$$
$$=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+2.$$

注 因为 $\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos^2\frac{A}{2}$，所以如果将这个式子代入上题的结果，本题就能立即得证。

692. 已知 $\operatorname{tg}A$ 的值而要求 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$，可以用 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2A}}{\operatorname{tg}A}$ 进行计算。试说明理由。

解 $$\operatorname{tg}A=\frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}.$$

设 $\operatorname{tg}A=c$，得

$$c\cdot\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+2\operatorname{tg}\frac{A}{2}-c=0.$$

解这个关于 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ 的二次方程，得

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+c^2}}{c}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2A}}{\operatorname{tg}A}.$$

693. 若 $\frac{\sin^2(x+A)}{\sin^2(x+B)}=\frac{\sin 2A}{\sin 2B}$，证明 $\operatorname{tg}^2x=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B$.

解 从条件得

$$\frac{\sin^2(x+A)}{\sin 2A}=\frac{\sin^2(x+B)}{\sin 2B}.$$

$$\therefore\quad \frac{(\sin x\cos A+\cos x\sin A)^2}{2\sin A\cos A}=\frac{(\sin x\cos B+\cos x\sin B)^2}{2\sin B\cos B}.$$

$$\therefore\quad \frac{(\operatorname{tg}x\cos A+\sin A)^2}{\sin A\cos A}=\frac{(\operatorname{tg}x\cos B+\sin B)^2}{\sin B\cos B}.$$

$$\therefore\quad \frac{(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}A)^2}{\operatorname{tg}A}=\frac{(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}B)^2}{\operatorname{tg}B}.$$

$$\therefore\quad \frac{\operatorname{tg}^2x}{\operatorname{tg}A}+\operatorname{tg}A=\frac{\operatorname{tg}^2x}{\operatorname{tg}B}+\operatorname{tg}B.$$

因此 $$\operatorname{tg}^2x=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B.$$

694. 若 $\frac{6\sin B}{\cos(A+B)}=\frac{3\sin 2B}{\cos(A+2B)}=\frac{2\sin 3B}{\cos(A+3B)}$，证明 B 不可能是 $n\pi$ 以外的值。

解 $\dfrac{6\sin B}{\cos(A+B)}=\dfrac{6\sin B\cos B}{\cos(A+2B)}$.

因此 $\qquad \sin B=0$,

或 $\quad \cos(A+2B)=\cos(A+B)\cos B$.

后面一个式子可化成

$$\cos(A+B)\cos B-\sin(A+B)\sin B$$
$$=\cos(A+B)\cos B.$$

因此得 $\sin B=0$ 或 $\sin(A+B)=0$.

假定 $\sin(A+B)=0$, 则因为

$$\frac{3\sin 2B}{\cos(A+B+B)}=\frac{2\sin 3B}{\cos(A+B+2B)},$$
$$\frac{3\sin 2B}{\cos(A+B)\cos B}=\frac{2\sin 3B}{\cos(A+B)\cos 2B},$$

所以

$$\frac{3\sin B}{\cos(A+B)}=\frac{\sin 3B}{\cos(A+B)\cos 2B},$$
$$\therefore\quad 3\sin B\cos 2B=\sin 3B,$$
$$\therefore\quad 3\sin B(1-2\sin^2 B)=3\sin B-4\sin^3 B,$$
$$\therefore\quad 6\sin^3 B=4\sin^3 B.$$

因此 $\qquad \sin B=0$.

从而得 $\qquad B=n\pi$.

695. 若 x, y, z 成等差数列, 证明

$$\frac{1}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}z}+\frac{\operatorname{tg}y}{2}=\frac{1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}z}+\frac{\operatorname{ctg}y}{2}.$$

解 $\dfrac{1}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}z}+\dfrac{\operatorname{tg}y}{2}$

$$=\frac{\cos x\cos z}{\sin(x+z)}+\frac{\sin y}{2\cos y}$$
$$=\frac{\cos x\cos z}{\sin 2y}+\frac{\sin y}{2\cos y}$$
$$=\frac{\cos x\cos z+\sin^2 y}{\sin 2y}$$
$$=\frac{\cos(x+z)+\sin x\sin z+\sin^2 y}{\sin 2y}$$
$$=\frac{\cos 2y+\sin x\sin z+\sin^2 y}{\sin 2y}$$
$$=\frac{\sin x\sin z+1-\sin^2 y}{\sin 2y}$$
$$=\frac{\sin x\sin z}{\sin 2y}+\frac{\cos^2 y}{\sin 2y}$$
$$=\frac{\sin x\sin z}{\sin(x+z)}+\frac{\cos^2 y}{2\sin y\cos y}$$
$$=\frac{1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}z}+\frac{\operatorname{ctg}y}{2}.$$

696. 若 $\sin\alpha$ 和 $\sin\beta$ 分别是 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的等差中项和等比中项, 证明

$$\cos 2\alpha=\frac{1}{2}\cos 2\beta=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right).$$

解 由题意得

$$2\sin\alpha=\sin\theta+\cos\theta,$$
$$\sin^2\beta=\sin\theta\cos\theta.$$

因此 $\quad \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$$=1-\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta)^2$$
$$=\frac{1}{2}(1-2\sin\theta\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{2}(1-2\sin^2\beta)$$
$$=\frac{1}{2}\cos 2\beta.$$

又 $\quad \cos 2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-2\sin\theta\cos\theta)$

$$=\frac{1}{2}(1-\sin 2\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)\right]$$
$$=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right).$$

因此

$$\cos 2\alpha=\frac{1}{2}\cos 2\beta=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right).$$

697. 若 $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, 证明

$$2\operatorname{ctg}2\alpha=\pm\operatorname{ctg}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\mp\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right).$$

解 由已知条件得

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right).$$

因此 $\quad \operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)$.

$$2\operatorname{ctg}2\alpha=2\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$
$$=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$$
$$=\pm\operatorname{ctg}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\mp\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right).$$

698. 证明

$$\frac{1}{a+b\cos\theta}=\frac{\sec^2\dfrac{\theta}{2}}{a+b+(a-b)\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}}.$$

解 左边 $=\dfrac{1}{a+b\left(2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1\right)}$

$$=\frac{\sec^2\dfrac{\theta}{2}}{(a-b)\sec^2\dfrac{\theta}{2}+2b}$$

$$=\frac{\sec^2\dfrac{\theta}{2}}{(a-b)\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}\right)+2b}$$

$$=\frac{\sec^2\dfrac{\theta}{2}}{a+b+(a-b)\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}}.$$

699. 证明

$$[\sec A+\csc A(1+\sec A)]\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)$$
$$\times\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{4}\right)$$
$$=\left(\sec\frac{A}{2}+\csc\frac{A}{2}\right)\sec^2\frac{A}{4}.$$

解 $\sec A+\csc A(1+\sec A)$

$$=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\sin A}\left(1+\frac{1}{\cos A}\right)$$
$$=\frac{1+\cos A+\sin A}{\cos A\sin A}$$
$$=\frac{2\cos^2\dfrac{A}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}{2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos A}$$
$$=\frac{\cos\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\cos A}$$
$$=\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\cos A}\left(\sec\frac{A}{2}+\csc\frac{A}{2}\right).$$

$$1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{\cos^2\dfrac{A}{2}-\sin^2\dfrac{A}{2}}{\cos^2\dfrac{A}{2}}=\frac{\cos A}{\cos^2\dfrac{A}{2}}.$$

$$1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{4}=\frac{\cos^2\dfrac{A}{4}-\sin^2\dfrac{A}{4}}{\cos^2\dfrac{A}{4}}=\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\cos^2\dfrac{A}{4}}.$$

因此

$$\text{左边}=\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\cos A}\left(\sec\frac{A}{2}+\csc\frac{A}{2}\right)$$
$$\times\frac{\cos A}{\cos^2\dfrac{A}{2}}\cdot\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\cos^2\dfrac{A}{4}}$$
$$=\frac{\sec\dfrac{A}{2}+\csc\dfrac{A}{2}}{\cos^2\dfrac{A}{4}}$$
$$=\left(\sec\frac{A}{2}+\csc\frac{A}{2}\right)\sec^2\frac{A}{4}$$
$=$ 右边.

700. 已知 $\cos\alpha$ 求 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$,有几个答案?

解 $$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

从而 $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

$\cos\alpha$ 是正的时候,α 是第一或第四象限的角;$\cos\alpha$ 是负的时候,α 是第二或第三象限的角。

因此 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ 有两个值。

701. 求 15° 和 75° 这两个角的三角函数的值。

解 $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\operatorname{tg}15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}=2-\sqrt{3}.$$

$$\csc 15^\circ=\frac{1}{\sin 15^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}.$$

$$\sec 15^\circ=\frac{1}{\cos 15^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}.$$

$$\operatorname{ctg}15^\circ=\frac{1}{\operatorname{tg}15^\circ}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

又 $\sin 75° = \cos 15° = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$,

$$\cos 75° = \sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

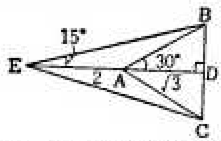
$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{ctg} 15° = 2+\sqrt{3},$$

$$\csc 75° = \sec 15° = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1},$$

$$\sec 75° = \csc 15° = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1},$$

$$\operatorname{ctg} 75° = \operatorname{tg} 15° = 2-\sqrt{3}.$$

别解 本题可用几何方法解答如下. 设 BAC 是等边三角形(正三角形), AD 是 BC 的垂线. 这时 $\angle BAD=30°$. 如果再设 $AB=2$, 则 $BD=1$, $AD=\sqrt{3}$. 延长 DA 到 E, 使 $AE=AB$, 连结 BE、CE. 于是



$$\angle AEB=\angle ABE=\frac{1}{2}\angle BAD=15°.$$

由于

$$EB^2=BD^2+ED^2=1+(2+\sqrt{3})^2,$$

$$\therefore\quad EB=\sqrt{6}+\sqrt{2},$$

所以

$$\sin 15° = \frac{BD}{EB}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos 15° = \frac{ED}{EB}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg} 15° = \frac{BD}{ED}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

702. 求 18° 的正弦、余弦、正切和余切.

解 设 $A=18°$, 则 $2A=36°$, $3A=54°$, $36°+54°=90°$, 所以 $\sin 2A=\cos 3A$, 即 $2\sin A\cos A=4\cos^3 A-3\cos A$, 两边同时除以 $\cos A$, 得

$$2\sin A=4\cos^2 A-3=1-4\sin^2 A.$$

因此 $\quad 4\sin^2 A+2\sin A-1=0.$

解这个关于 $\sin A$ 的二次方程, 得

$$\sin A=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

因为 18° 的正弦是正的, 所以

$$\sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

从而

$$\cos 18° = \sqrt{1-\sin^2 18°}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\operatorname{tg} 18° = \frac{\sin 18°}{\cos 18°}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}},$$

$$\operatorname{ctg} 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

别解 设 $\operatorname{tg} 18°=x$, 则

$$x^2=\frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{5-2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\therefore\quad x=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}.$$

703. 若 A、B 是正的锐角, $\operatorname{tg} A=\dfrac{4}{3}$, $\cos B=\dfrac{7}{25}$, 求 $\cos(A-B)$.

解 $\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{16}{9}}}$

$$=\frac{3}{5}.$$

从而 $\sin A=\dfrac{4}{5}$. 又因为 $\cos B=\dfrac{7}{25}$, 从而求得 $\sin B=\dfrac{24}{25}$. 因此

$$\begin{aligned}\cos(A-B)&=\cos A\cos B+\sin A\sin B\\&=\frac{3}{5}\times\frac{7}{25}+\frac{4}{5}\times\frac{24}{25}\\&=\frac{117}{125}.\end{aligned}$$

704. 证明 $\cos 40°\cos 80°+\cos 80°\cos 160°+\cos 160°\cos 40°=-\dfrac{3}{4}$.

解 左边 $=\cos 40°(\cos 80°+\cos 160°)+\cos 80°\cos 160°$

$$\begin{aligned}&=\cos 40°\left[2\cos\frac{1}{2}(80°+160°)\times\cos\frac{1}{2}(160°-80°)\right]\\&\quad+\frac{1}{2}(\cos 240°+\cos 80°)\\&=\cos 40°\times 2\cos 120°\cos 40°\\&\quad+\frac{1}{2}(-\cos 60°+\cos 80°)\end{aligned}$$

$$=2\cos 120^\circ \cos^2 40^\circ + \frac{1}{2}(-\cos 60^\circ+\cos 80^\circ)$$

$$=-\cos^2 40^\circ + \frac{1}{2}(-\cos 60^\circ+\cos 80^\circ)$$

$$=-\frac{1}{2}(1+\cos 80^\circ) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\cos 80^\circ\right)$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 80^\circ-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 80^\circ$$

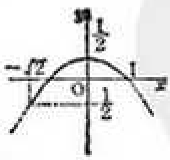
$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}.$$

705. (1) 若 $x=\cos t-\sin t, y=\sin t\cos t$, 试消去 t, 用 x 表示 y.

(2) 对于 $x=\cos t-\sin t$, $y=\sin t\cos t$ 来说, 当 t 在 $0\leq t\leq \frac{3}{4}\pi$ 的范围内变动时, 以 x, y 为坐标的点 $P(x, y)$ 描出怎样的曲线? 用图表示.

解 (1) $x^2=1-2\sin t\cos t$
$=1-\sin 2t$. ①

$2y=2\sin t\cos t$
$=\sin 2t$. ②



①+②得

$x^2+2y=1$.

$\therefore\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2$.

(2) $x=\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$,

$$y=\frac{1}{2}\sin 2t.$$

根据上面两式及 $0\leq t\leq \frac{3}{4}\pi$, 得

$$-\sqrt{2}\leq x\leq 1,\ -\frac{1}{2}\leq y\leq \frac{1}{2}.$$

因此, 点 $P(x,y)$ 描出如上图所示的抛物线的弧.

706. 若 $\sin\theta\sin\varphi=\sin\alpha\sin\beta$, $\operatorname{tg}\varphi\cos\beta=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, 证明 $\sin\frac{\theta}{2}$ 的一个值是 $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta$.

解 将已知等式的两边平方, 得

$$\sin^2\theta\sin^2\varphi=\sin^2\alpha\sin^2\beta. \quad ①$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi=\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\sec^2\beta.$$

$$\therefore\ \operatorname{ctg}^2\varphi=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\beta.$$

$$\therefore\ \csc^2\varphi=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\beta+1. \quad ②$$

①×②得

$$\sin^2\theta=\sin^2\alpha\sin^2\beta\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\beta\right).$$

这里 $\sin^2\theta=4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$,

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

将这两个式子代入上式, 设 $\sin\frac{\theta}{2}=x$, 整理后得

$$x^4-x^2+A=0, \quad ③$$

其中

$$A=\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

又 $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$=\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+(1-\sin^2\beta)\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$=1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta.$$

$$\therefore\ 1-4A=\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\right)^2.$$

从而解③得

$$x^2=\frac{1\pm\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\right)}{2}.$$

取负号时

$$x^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta.\quad \therefore\ x=\pm\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta.$$

上式取正号得

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta.$$

注 如果不将所给的式子平方, 而直接消去 φ, 设 $x=\sin\frac{\theta}{2}$、$y=\cos\frac{\theta}{2}$, 那么就得到 $xy=A$. 再从 φ 和 α、β 间的关系确定 A 的正负号, 从而得到两支直角双曲线. 因为这双曲线和圆 $x^2+y^2=1$ 有四个交点, 所以本题就变成了取其中一个交点的问题.

707. 若 $\frac{2}{1+x}=\frac{\sin\beta\sin\theta}{\cos(\beta-\theta)}=\frac{\operatorname{tg}(\theta-\alpha)}{\operatorname{ctg}\beta}$,

证明 $x^2=\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-2\operatorname{ctg}\beta\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{ctg}\beta\right)$.

解 $\frac{2}{1+x}=\frac{\sin\beta\sin\theta}{\cos(\beta-\theta)}$

$$=\frac{\sin\beta\sin\theta}{\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\theta+1}.$$

因此 $\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\theta+1=\frac{1+x}{2}$,

$$\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\theta=\frac{1+x}{2}-1=\frac{x-1}{2}. \quad ①$$

又 $\frac{2}{1+x}=\frac{\operatorname{tg}(\theta-\alpha)}{\operatorname{ctg}\beta}=\frac{(\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\alpha}$.

因此

$$2(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\alpha)=(1+x)(\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}\beta,$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{2+(1+x)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{(1+x)\operatorname{tg}\beta-2\operatorname{tg}\alpha}. \quad ②$$

①×②得

$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{2+(1+x)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{(1+x)\operatorname{tg}\beta-2\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{x-1}{2}.$$

因此 $2\operatorname{ctg}\beta[(1+x)\operatorname{tg}\beta-2\operatorname{tg}\alpha]$

$$=2(x-1)+(x^2-1)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta,$$

$$2(1+x)-4\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\alpha=2(x-1)+(x^2-1)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta,$$

$$x^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=4-4\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta,$$

$$x^2=4\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-4\operatorname{ctg}^2\beta+1$$

$$=2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\beta-4\operatorname{ctg}^2\beta+1$$

$$=\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-2\operatorname{ctg}\beta\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{ctg}\beta\right).$$

708. 证明在公式

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2A}-1}{\operatorname{tg}A}$$

中,"±"号可以用$(-1)^m$来代替. 这里m是小于$\frac{A+90^\circ}{180^\circ}$的最大的整数, A是度数.

解 设$0^\circ\le\theta<90^\circ$, $A=90^\circ N+\theta$. 这里N可分为$4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$等四种情况. 公式中$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2A}=\frac{1}{\cos A}$, 由此可见, 当$\cos A$是正的时候, 根号前应取正号, 当$\cos A$是负的时候, 根号前应取负号. 余弦只有当角在第一或第四象限时才是正的. 现在按上面所说的四种情况来考察$\angle A$所在的象限.

$$\frac{A}{180^\circ}=\frac{N}{2}+\frac{\theta}{180^\circ},\quad 0\le\frac{\theta}{180^\circ}<0.5,$$

所以算得$\frac{A}{180^\circ}$在上述四种情况下分别是

$2n+0.\cdots$ $\qquad 2n+0.\cdots$

$(2n+1)+0.\cdots$ $\qquad (2n+1)+0.\cdots$

为了使表示象限的数更加明显, 把上面的各个数加上$\frac{90^\circ}{180^\circ}=0.5$, 于是得$\frac{A+90^\circ}{180^\circ}$是

$2n+0.\cdots$ $\qquad (2n+1)+0.\cdots$

$(2n+1)+0.\cdots$ $\qquad (2n+2)+0.\cdots$

因此,若设小于它的最大整数

$$\left[\frac{A+90^\circ}{180^\circ}\right]=m,$$

则 $\frac{1}{\cos A}=(-1)^m\sqrt{1+\operatorname{tg}^2A}$.

$$\therefore\ \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{(-1)^m\sqrt{1+\operatorname{tg}^2A}-1}{\operatorname{tg}A}.$$

当m是偶数时, A是在第一、第四象限.

709. 证明:

(1) $\sum\operatorname{tg}(\beta-\gamma)=\prod\operatorname{tg}(\beta-\gamma)$.

(2) $\sum\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}(\beta-\gamma)=-\prod\operatorname{tg}(\beta-\gamma)$.

解 (1) 当 $A+B+C=0$时

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C.$$

现若记 $A=\beta-\gamma$, $B=\gamma-\alpha$, $C=\alpha-\beta$,

则 $\sum\operatorname{tg}(\beta-\gamma)=\prod\operatorname{tg}(\beta-\gamma)$.

(2) 从 $\operatorname{tg}(\beta-\gamma)$, $\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$得

$$\sum[(1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)\operatorname{tg}(\beta-\gamma)]=\sum(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma)=0.$$

因此 $\sum\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}(\beta-\gamma)$

$$=-\sum\operatorname{tg}(\beta-\gamma)=-\prod\operatorname{tg}(\beta-\gamma).$$

710. 证明 $\sum\cos(\alpha+\theta)\sin(\beta-\gamma)=0$.

解 $\sum\cos(\alpha+\theta)\sin(\beta-\gamma)$

$$=\sum(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)\sin(\beta-\gamma)$$

$$=\cos\theta\sum\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)-\sin\theta\sum\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)$$

$$=\cos\theta\times0-\sin\theta\times0=0.$$

711. 从$\cos\theta+\cos\varphi=a$及$\sin\theta+\sin\varphi=b$, 求$\cos(\theta+\varphi)$及$\sin2\theta+\sin2\varphi$的值.

解 将所给的已知式平方,得

$$\cos^2\theta+2\cos\theta\cos\varphi+\cos^2\varphi=a^2, \quad ①$$

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\sin\varphi+\sin^2\varphi=b^2. \quad ②$$

①+②得 $\cos(\theta-\varphi)=\frac{a^2+b^2-2}{2}$.

①-②, 当$a^2+b^2\ne0$时, 就得到

$$\cos(\theta+\varphi)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

由上式进一步可得

$$\sin(\theta+\varphi)=\pm\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

所以

$$\sin 2\theta+\sin 2\varphi=2\sin(\theta+\varphi)\cos(\theta-\varphi)$$
$$=\pm\frac{2ab(a^2+b^2-2)}{a^2+b^2}.$$

712. 证明

$$\cos\theta\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)+\cos\theta\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$$
$$+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=-\frac{3}{4}.$$

解　左边

$$=\cos\theta\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\theta\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)\right]$$
$$+\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\theta\right)\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)$$
$$=\cos\theta\left[2\cos\frac{2}{3}\pi\cos\theta\right]$$
$$+\cos^2\theta-\sin^2\frac{2}{3}\pi$$
$$=-\cos^2\theta+\cos^2\theta-\sin^2\frac{2}{3}\pi$$
$$=-\sin^2\frac{2}{3}\pi=-\frac{3}{4}.$$

713. 若 $l\cos(\theta-\beta)-m\cos(\theta-\alpha)=n$，证明

$$l\sin(\theta-\beta)-m\sin(\theta-\alpha)$$
$$=\pm\sqrt{l^2+m^2-n^2-2lm\cos(\alpha-\beta)}.$$

解　设 $l\sin(\theta-\beta)-m\sin(\theta-\alpha)$ 的值是 x，将

$$l\cos(\theta-\beta)-m\cos(\theta-\alpha)=n$$

和　$$l\sin(\theta-\beta)-m\sin(\theta-\alpha)=x$$

的两边平方，然后相加，得

$$l^2+m^2-2lm[\cos(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)$$
$$+\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\alpha)]=n^2+x^2,$$

即　$$l^2+m^2-2lm\cos(\alpha-\beta)=n^2+x^2.$$

因此

$$x=\pm\sqrt{l^2+m^2-n^2-2lm\cos(\alpha-\beta)}.$$

714. 若 $\frac{\operatorname{tg}(A-B)}{\operatorname{tg}A}+\frac{\sin^2C}{\sin^2A}=1$，证明 $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}^2C$.

解　由已知条件得

$$\frac{\sin^2C}{\sin^2A}=1-\frac{\operatorname{tg}(A-B)}{\operatorname{tg}A}$$
$$=1-\frac{\sin(A-B)\cos A}{\cos(A-B)\sin A}$$
$$=\frac{\sin A\cos(A-B)-\cos A\sin(A-B)}{\cos(A-B)\sin A}$$
$$=\frac{\sin[A-(A-B)]}{\cos(A-B)\sin A}$$
$$=\frac{\sin B}{\cos(A-B)\sin A}.$$

因此　$$\sin^2C=\frac{\sin A\sin B}{\cos(A-B)},$$

$$\cos^2C=1-\sin^2C=1-\frac{\sin A\sin B}{\cos(A-B)}$$
$$=\frac{\cos(A-B)-\sin A\sin B}{\cos(A-B)}$$
$$=\frac{\cos A\cos B}{\cos(A-B)}.$$

因此

$$\frac{\sin^2C}{\cos^2C}=\frac{\dfrac{\sin A\sin B}{\cos(A-B)}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos(A-B)}}=\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}.$$

即　$$\operatorname{tg}^2C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B.$$

715. 若 $\operatorname{tg}B=\frac{2\sin A\sin C}{\sin(A+C)}$，证明 $\operatorname{ctg}A$、$\operatorname{ctg}B$、$\operatorname{ctg}C$ 成等差数列.

解　从已知条件得

$$\operatorname{tg}B=\frac{2\sin A\sin C}{\sin A\cos C+\cos A\sin C}.$$

将右边的分子、分母同除以 $\sin A\sin C$，得

$$\operatorname{tg}B=\frac{2}{\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A},$$

即　$$\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A=2\operatorname{ctg}B.$$

因此 $\operatorname{ctg}A$、$\operatorname{ctg}B$、$\operatorname{ctg}C$ 成等差数列.

716. 已知 $\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，证明 $\csc 15^\circ=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

解　由 $\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 得 $\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$，由 $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 得 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$. 因此

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$$
$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 30^\circ\cos 45^\circ$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

从而

$$\csc 15^\circ=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$
$$=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

717. 从 $x=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi\cos\theta$, $y=x'\sin\varphi-y'\cos\varphi\cos\theta$, $z=y'\sin\theta$ 消去 θ 和 φ.

解　$x^2=x'^2\cos^2\varphi+y'^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+2x'y'\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta$.　①

$y^2=x'^2\sin^2\varphi+y'^2\cos^2\varphi\cos^2\theta-2x'y'\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta$.　②

$z^2=y'^2\sin^2\theta$.　③

①+②+③, 得

$$x^2+y^2+z^2=x'^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+y'^2\cos^2\theta(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+y'^2\sin^2\theta,$$

即　$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=x'^2+y'^2$.

718. (1) 若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{4}$, 求 $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$. 这里 $90^\circ<\alpha<180^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$.

(2) 若 $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{tg}\beta=2$, 求 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$. 这里 α、β 是正的锐角.

(3) 求 $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\operatorname{tg}75^\circ$ 的值.

解　(1) 因为 $90^\circ<\alpha<180^\circ$, 所以 $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 因为 $0^\circ<\beta<90^\circ$, 所以 $\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}$. 因此

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=\frac{1-2\sqrt{30}}{12}.$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}-2\sqrt{2}}{12}.$$

(2) 因为 α、β 是锐角, 所以由 $\operatorname{tg}\alpha=3$ 得

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

同样, 由 $\operatorname{tg}\beta=2$ 得

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{3+2}{1-3\times2}=-1,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

(3) 注意到 $75^\circ=30^\circ+45^\circ$, 所以

$$\sin 75^\circ=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

同样　$\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$,

$$\operatorname{tg}75^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}.$$

如果 15° 的三角函数值是已知的, 那么也可以利用 $75^\circ=90^\circ-15^\circ$ 来计算.

719. 证明 $\dfrac{\frac{1}{2}}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=2$.

解　左边 $=\dfrac{\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ}$

$$=\frac{\sin 30^\circ\cos 10^\circ-\sin 10^\circ\cos 30^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{\sin(30^\circ-10^\circ)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=2.$$

720. 设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}x=\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, 用 $\cos(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha-\beta)$ 表示 $\sqrt[3]{\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x}$.

解　由 3 倍角的公式, 得

$$\sqrt[3]{\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x}=\sqrt[3]{(\cos^2 x-\sin^2 x)^3}=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

721. 求 $\cos 105°$，$\operatorname{tg} 105°$.

解　$\cos 105°=\cos(60°+45°)$

$$=\cos 60°\cos 45°-\sin 60°\sin 45°$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

$\operatorname{tg}105°=\operatorname{tg}(60°+45°)$

$$=\frac{\operatorname{tg}60°+\operatorname{tg}45°}{1-\operatorname{tg}60°\operatorname{tg}45°}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{1-3}=-2-\sqrt{3}.$$

注　用这样的方法可以求出所有 $15°$ 倍角的三角函数.

722. 对于三角形 ABC，解答下列问题.

(1) $b=3$，$c=4$，$A=60°$，求 a.

(2) $c=4$，$a=3\sqrt{2}$，$B=45°$，求 b.

(3) $a=2\sqrt{3}$，$b=5$，$C=150°$，求 c.

解　都可用余弦定理来解.

(1) $a^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos 60°$，

$$a=\sqrt{13}.$$

(2) $b^2=(3\sqrt{2})^2+4^2-2\cdot4\cdot3\sqrt{2}\cos 45°$，

$$b=\sqrt{10}.$$

(3) 因为 $150°=180°-30°$，所以 $\cos 150°=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而求得

$$c=\sqrt{67}.$$

723. 求下列两式的值:

(1) $\sin 50°+\sin 10°-\sin 70°$;

(2) $\cos 175°+\cos 65°+\cos 55°$.

解　(1) 原式

$$=2\sin\frac{50°+10°}{2}\cos\frac{50°-10°}{2}-\sin 70°$$

$$=2\times\frac{1}{2}\cos 20°-\sin(90°-20°)$$

$$=\cos 20°-\cos 20°=0.$$

(2) 原式 $=2\cos 120°\cos 55°+\cos 55°$

$$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\cos 55°+\cos 55°$$

$$=0.$$

724. 化简下列两式:

(1) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$;

(2) $\operatorname{tg}(45°+\alpha)+\operatorname{tg}(45°-\alpha)$.

解　(1) 原式 $=\frac{\sin 3\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos 3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$$=\frac{\sin(3\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=2.$$

(2) $\operatorname{tg}(45°\pm\alpha)=\frac{\operatorname{tg}45°\pm\operatorname{tg}\alpha}{1\mp\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}\alpha}$

$$=\frac{1\pm\operatorname{tg}\alpha}{1\mp\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\cos\alpha\pm\sin\alpha}{\cos\alpha\mp\sin\alpha}.$$

因此

$$\text{原式}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$$

$$=\frac{2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2}{\cos 2\alpha}$$

$$=2\sec 2\alpha.$$

725. 证明 $\sin(36°+\alpha)-\sin(36°-\alpha)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\sin\alpha$.

解　原式的左边 $=2\sin\alpha\cos 36°$

$$=2\sin\alpha\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\sin\alpha.$$

726. 将 $y=\frac{1}{3}(\sin x-\cos x)$ 化成 $y=a\sin(x-\alpha)$ 的形式，讨论在 $x\geq 0$ 的范围内，当 x 增加的时候 y 怎样变化.

解　着眼 $\sin 45°=\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$，原式可以变形如下:

$$y=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}(\cos 45°\sin x-\sin 45°\cos x)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\sin(x-45°).$$

可是 $\sin\theta$ 是以 $360°$ 为周期的函数，当 $-90°<\theta<90°$ 时，它逐渐增大，到 $\theta=90°$ 时 $\sin\theta=1$，当 $90°<\theta<270°$ 时，它逐渐减小，到 $\theta=270°$ 时 $\sin\theta=-1$，就这样反复地变化. 利用这一性质就得到下表所示的结果.

$x-45°$	x	$\sin(x-45°)$	y
$-45°$	$0°$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3}$
		↗	↗
$90°$	$135°$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
		↘	↘
$270°$	$315°$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$
		↗	↗
$450°$	$495°$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
		↘	↘
$630°$	$675°$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$

727. 证明
$$\operatorname{tg}^2\left(45°+\frac{1}{2}A\right)=\frac{2\csc 2A+\sec A}{2\csc 2A-\sec A}.$$

解 $\operatorname{tg}^2\left(45°+\frac{A}{2}\right)=\frac{1+\sin A}{1-\sin A}.$

将右边的分子、分母同除以 $\sin A\cos A$ 或 $\frac{1}{2}\sin 2A$，得
$$\operatorname{tg}^2\left(45°+\frac{A}{2}\right)=\frac{2\csc 2A+\sec A}{2\csc 2A-\sec A}.$$

728. 若 $A+B+C=180°$，证明 $\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A=1$.

解 在 $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$ 的两边同乘以 $\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C$，就得到
$$\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B=1.$$

729. 证明 $\frac{\csc 2A}{1+\csc 2A}=\frac{1+\operatorname{tg}^2 A}{(1+\operatorname{tg}A)^2}.$

解 原式的左边 $=\frac{1}{1+\sin 2A}$
$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A}$$
$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{(\sin A+\cos A)^2}=\frac{\operatorname{tg}^2 A+1}{(\operatorname{tg}A+1)^2}.$$

730. 证明
$$\operatorname{tg}(\alpha+60°)\operatorname{tg}(\alpha-60°)=\frac{1+2\cos 2\alpha}{1-2\cos 2\alpha}.$$

解 原式的左边
$$=\frac{\sin(\alpha+60°)\sin(\alpha-60°)}{\cos(\alpha+60°)\cos(\alpha-60°)}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2 60°}{\cos^2\alpha-\sin^2 60°}=\frac{\sin^2\alpha-\frac{3}{4}}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{4\sin^2\alpha-3}{4\cos^2\alpha-3}=\frac{(4\sin^2\alpha-2)-1}{(4\cos^2\alpha-2)-1}$$
$$=\frac{-2\cos 2\alpha-1}{2\cos 2\alpha-1}=\frac{1+2\cos 2\alpha}{1-2\cos 2\alpha}.$$

731. 若 $\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$，证明
$$(a-b\cos 2\theta)(a-b\cos 2\varphi)=a^2-b^2.$$

解 由 $\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ 得
$$\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}=\frac{a-b}{a+b}.$$
$$\frac{(1-\cos 2\theta)(1-\cos 2\varphi)}{(1+\cos 2\theta)(1+\cos 2\varphi)}=\frac{a-b}{a+b}.$$
去分母，合并同类项，化简得
$$-a(\cos 2\theta+\cos 2\varphi)+b(1+\cos 2\theta\cos 2\varphi)=0,$$
即
$$-a(\cos 2\theta+\cos 2\varphi)+b\cos 2\theta\cos 2\varphi=-b.$$
因此
$$(a-b\cos 2\theta)(a-b\cos 2\varphi)$$
$$=a^2-ab(\cos 2\varphi+\cos 2\theta)+b^2\cos 2\theta\cos 2\varphi$$
$$=a^2+b[-a(\cos 2\theta+\cos 2\varphi)+b\cos 2\theta\cos 2\varphi]=a^2-b^2.$$

732. 若 $\sin\alpha=\operatorname{tg}\beta$，证明 $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta=\sin 2\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}.$

解 $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta$
$$=(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\cos\beta$$
$$=\sin\alpha\cos^2\beta-\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\beta}\times 2\sin\beta\cos\beta-\frac{\cos\alpha}{2}\times 2\sin\beta\cos\beta$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\beta}\times\sin 2\beta-\frac{\cos\alpha}{2}\times\sin 2\beta$$
$$=\sin 2\beta\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\beta}-\frac{\cos\alpha}{2}\right)$$

$$=\sin 2\beta\left(\frac{\sin\alpha}{2\operatorname{tg}\beta}-\frac{\cos\alpha}{2}\right)$$

$$=\sin 2\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos\alpha}{2}\right)=\sin 2\beta\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

733. 若 $n^2\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$，证明 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1\pm n}{1\mp n}\times\operatorname{tg}\beta$.

解 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$

$$=\sin\alpha[\sin\alpha-\sin\beta\cos(\alpha-\beta)]$$
$$+\sin\beta[\sin\beta-\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)]$$
$$=\sin\alpha\{\sin[(\alpha-\beta)+\beta]-\sin\beta\cos(\alpha-\beta)\}$$
$$+\sin\beta\{\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]$$
$$-\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)\}$$
$$=\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\sin(\alpha-\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)$$
$$=\sin^2(\alpha-\beta).$$

由此得 $\sin^2(\alpha-\beta)=n^2\sin^2(\alpha+\beta)$.

因此 $\sin(\alpha-\beta)=\pm n\sin(\alpha+\beta)$,

$$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\pm n(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta).$$

将上式的两边同除以 $\cos\alpha\cos\beta$，得

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\pm n(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta).$$

因此 $(1\mp n)\operatorname{tg}\alpha=(1\pm n)\operatorname{tg}\beta$,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1\pm n}{1\mp n}\operatorname{tg}\beta.$$

734. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\cos\left(\frac{3\alpha}{2}+\beta-2\gamma\right)+\cos\left(\frac{3\beta}{2}+\gamma-2\alpha\right)$$
$$+\cos\left(\frac{3\gamma}{2}+\alpha-2\beta\right)$$
$$=4\cos\frac{5\alpha-2\beta-\gamma}{4}\cos\frac{5\beta-2\gamma-\alpha}{4}$$
$$\times\cos\frac{5\gamma-2\alpha-\beta}{4}.$$

解 $\left(\frac{3\alpha}{2}+\beta-2\gamma\right)+\left(\frac{3\beta}{2}+\gamma-2\alpha\right)$

$$+\left(\frac{3\gamma}{2}+\alpha-2\beta\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\pi}{2}.$$

将上面括弧内的角顺次记成 A、B、C，则

$$A+B+C=\frac{\pi}{2},$$

并且，所证式子的右边变成

$$4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{B+C}{2}.$$

又因为

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$
$$\cos C=\sin(A+B)$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+B}{2},$$

所以 所证式子的左边

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\right).$$

将括号内展开，变形得

$$\left(\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)$$
$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right).$$
$$\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}=\frac{A+B+C}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+C}{2},$$
$$\therefore\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{A+C}{2}.$$

同理，得 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{B+C}{2}$.

$\therefore$ 所证式子的左边

$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}.$$

（公式[11](4)）

735. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $\sin 2\alpha:\sin 2\beta:\sin 2\gamma=5:4:3$，证明 $\operatorname{tg}\alpha=\pm1$, $\operatorname{tg}\beta=\pm2$, $\operatorname{tg}\gamma=\pm3$.

解 根据条件

$$\sin 2\beta=\frac{4}{5}\sin 2\alpha,\qquad \sin 2\gamma=\frac{3}{5}\sin 2\alpha.$$

因此

$$\sin 2\beta+\sin 2\gamma=2\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$$
$$=\frac{7}{5}\sin 2\alpha=\frac{14}{5}\sin\alpha\cos\alpha.$$

因此 $\cos(\beta-\gamma)=\frac{7}{5}\cos\alpha.$ ①

又 $\sin 2\beta-\sin 2\gamma$

$$=2\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma)$$
$$=\frac{1}{5}\sin 2\alpha=\frac{2}{5}\sin\alpha\cos\alpha.$$

因此 $\sin(\beta-\gamma)=-\frac{1}{5}\sin\alpha.$ ②

将①、②两式的两边平方，然后相加，得

$$\frac{49}{25}\cos^2\alpha+\frac{1}{25}\sin^2\alpha=1.$$

$$\therefore\quad 49+\mathrm{tg}^2\alpha=25(1+\mathrm{tg}^2\alpha).$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}\,\alpha=\pm1.$$

用同样的方法，得

$$\mathrm{tg}\,\beta=\pm2,\quad \mathrm{tg}\,\gamma=\pm3.$$

736. 证明

$$\sin A\cos^5 A-\cos A\sin^5 A=\frac{1}{4}\sin 4A.$$

解 原式的左边

$$=\frac{1}{2}(\sin 2A\cos^4 A-\sin 2A\sin^4 A)$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2A(\cos^4 A-\sin^4 A)$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2A(\cos^2 A-\sin^2 A)$$

$$\times(\cos^2 A+\sin^2 A)$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2A\cos 2A=\frac{1}{4}\sin 4A.$$

737. 已知 $\mathrm{tg}\,x=2$, $\mathrm{tg}\,y=\frac{1}{3}$，求 $\mathrm{tg}[2(x+y)]$ 的值。

解 $\mathrm{tg}(x+y)=\dfrac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}$

$$=\frac{2+\frac{1}{3}}{1-2\times\frac{1}{3}}=\frac{6+1}{3-2}=7.$$

$$\mathrm{tg}[2(x+y)]=\frac{2\,\mathrm{tg}(x+y)}{1-\mathrm{tg}^2(x+y)}$$

$$=\frac{2\times7}{1-7^2}=-\frac{7}{24}.$$

738. 若 $\mathrm{tg}\,A=\frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\,B=\frac{1}{5}$, $\mathrm{tg}\,C=\frac{1}{8}$，求 $A+B+C$ 的值。这里，如果有一个以上的值，那么要表示出它的所有的值。

解 $\mathrm{tg}(A+B+C)=\mathrm{tg}[A+(B+C)]$

$$=\frac{\mathrm{tg}\,A+\mathrm{tg}(B+C)}{1-\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}(B+C)}$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\,A+\dfrac{\mathrm{tg}\,B+\mathrm{tg}\,C}{1-\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C}}{1-\mathrm{tg}\,A\cdot\dfrac{\mathrm{tg}\,B+\mathrm{tg}\,C}{1-\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C}}.\qquad①$$

将 $\mathrm{tg}\,A=\frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\,B=\frac{1}{5}$, $\mathrm{tg}\,C=\frac{1}{8}$ 代入①，得

$$\mathrm{tg}(A+B+C)=1.$$

$$\therefore\quad A+B+C=n\pi+\frac{\pi}{4}.\quad (n\text{ 是整数})$$

739. 设 A、B 是锐角，若 $\mathrm{tg}\,A=\frac{24}{7}$, $\sin B=\frac{5}{13}$，求 $\mathrm{ctg}(A-B)$。

解 因为 $\mathrm{tg}\,A=\frac{24}{7}$，所以 $\mathrm{ctg}\,A=\frac{7}{24}$。又因为 $\sin B=\frac{5}{13}$，所以

$$\mathrm{ctg}\,B=\frac{\sqrt{1-\sin^2 B}}{\sin B}=\frac{12}{5}.$$

因此

$$\mathrm{ctg}(A-B)=\frac{\frac{7}{24}\times\frac{12}{5}+1}{\frac{12}{5}-\frac{7}{24}}=\frac{204}{253}.$$

740. 求 $22.5°$ 的三角函数。

解 $22.5°$ 是第一象限的角，所以它的各个三角函数都具有正值。因此

$$\sin 22.5°=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

$$\cos 22.5°=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

$$\mathrm{tg}\,22.5°=\frac{\sin 22.5°}{\cos 22.5°}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\sqrt{2}-1.$$

$$\csc 22.5°=\frac{1}{\sin 22.5°}=\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$=\sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

$$\sec 22.5°=\frac{1}{\cos 22.5°}=\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\sqrt{4-2\sqrt{2}}.$$

$$\mathrm{ctg}\,22.5°=\frac{1}{\mathrm{tg}\,22.5°}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\sqrt{2}+1.$$

741. 在三角形 ABC 中，若 $\mathrm{ctg}\frac{A}{2}$、$\mathrm{ctg}\frac{B}{2}$、$\mathrm{ctg}\frac{C}{2}$ 成等差数列，证明 $\mathrm{ctg}\frac{A}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{C}{2}=3$。

解 由题意得

$$\mathrm{ctg}\frac{A}{2}+\mathrm{ctg}\frac{C}{2}=2\,\mathrm{ctg}\frac{B}{2}.$$

利用半角公式，将上式化成边的关系，得

$$\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}+\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}-2\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-c)(s-a)}}=0,$$

$$\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}\times[s-a+s-c-2(s-b)]=0.$$

$$\therefore\quad a+c=2b.$$

利用这一关系，得

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}\cdot\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}=\frac{s}{s-b}=\frac{2s}{2s-2b}=\frac{a+b+c}{a+b+c-2b}=\frac{3b}{b}=3.$$

742. 化简 $\cos 2A+\dfrac{2}{\operatorname{ctg}^2 A+1}$.

解 原式 $=\cos 2A+\dfrac{2}{\csc^2 A}$

$$=\cos 2A+2\sin^2 A$$
$$=1-2\sin^2 A+2\sin^2 A=1.$$

743. 若 $\sin\theta$ 和 $\sin\dfrac{\theta}{2}$ 的比是 8:5，$\cos\theta$ 的值是多少？

解 $\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$，所以 $2\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{8}{5}$。从而 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{4}{5}$。因此

$$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}.$$

744. 导出由 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的值计算 $\sin 2\alpha$ 的公式.

解 $\sin 2\alpha=\dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

745. 比较 $\left|\dfrac{\sin x+\sin y}{2}\right|$ 和 $\left|\sin\dfrac{x+y}{2}\right|$ 的大小.

解 因为

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

所以

$$\left|\frac{1}{2}(\sin x+\sin y)\right|=\left|\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right|=\left|\sin\frac{x+y}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x-y}{2}\right|.$$

由于不管 θ 的值如何，$|\cos\theta|\leqq 1$，所以这里 $\left|\cos\dfrac{x-y}{2}\right|\leqq 1$。因此

$$\left|\frac{\sin x+\sin y}{2}\right|\leqq\left|\sin\frac{x+y}{2}\right|.$$

当 $\left|\cos\dfrac{x-y}{2}\right|=1$，即 $\dfrac{x-y}{2}=n\pi$（n 是整数）时，等号成立.

746. 用 $\sec\alpha$ 表示 $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

解 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$,

因此 $$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

当 $\cos\alpha$ 用 $\sec\alpha$ 的倒数来表示时，则有

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{\sec\alpha+1}{\sec\alpha-1}}.$$

747. 证明 $\dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^4 x}=\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{2+\operatorname{tg}^2 2x}$ 是恒等式.

解 将原式去分母，变形得

$$\operatorname{tg}^2 2x(1-2\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)=4\operatorname{tg}^2 x,$$

即 $$\operatorname{tg}^2 2x(1-\operatorname{tg}^2 x)^2=4\operatorname{tg}^2 x.$$

两边开平方，得

$$\operatorname{tg}2x(1-\operatorname{tg}^2 x)=2\operatorname{tg}x.$$

因此 $$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$$

上式是一个恒等式，所以原式也是恒等式.

748. 已知 $\operatorname{tg}2\alpha=\sqrt{3}$，计算 $\operatorname{tg}3\alpha$.

解 $$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}. \qquad ①$$

又 $$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

将 $\operatorname{tg}2\alpha=\sqrt{3}$ 代入上式，变形得

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{3}=0.$$

由此得到 $$\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$$

或 $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

将这两个值分别代入①，得

$$\operatorname{tg}3\alpha=0\quad 和\quad \operatorname{tg}3\alpha=\infty.$$

749. 若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，求 $\sin 2\alpha$、$\cos 2\alpha$、$\operatorname{tg}2\alpha$ 的值。$(90^\circ<\alpha<180^\circ)$

解 由 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ 得 $\cos^2\alpha=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$。因为 $90^\circ<\alpha<180^\circ$，所以 $\cos\alpha<0$。因此得到 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$。从而

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=2\times\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25},$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25},$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{24}{7}.$$

750. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\beta\sin\gamma\sin\alpha$$
$$+\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta$$
$$=1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

解 $\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$$=\cos\alpha[\cos\beta\cos\gamma-\cos(\beta+\gamma)]$$
$$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\alpha.$$

因此，所要证明的式子的左边

$$=3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\Sigma\cos^2\alpha.$$

又因为

$$\Sigma\cos^2\alpha=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

所以，左边等于右边。

751. 若 $\operatorname{tg}\alpha=2$，求 $\sin 2\alpha$，$\operatorname{tg}2\alpha$。这里设 $0^\circ<\alpha<90^\circ$。

解 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

因此 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$=2\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}.$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\times2}{1-4}=-\frac{4}{3}.$$

752. 若 $\operatorname{tg}\theta=m$，$\operatorname{tg}\varphi=n$，证明

$$\sin 2(\theta+\varphi)=\frac{2(m+n)(1-mn)}{(1+m^2)(1+n^2)}.$$

解 $\frac{2(m+n)(1-mn)}{(1+m^2)(1+n^2)}$

$$=\frac{2(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\varphi)(1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^2\theta)(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}$$
$$=\frac{2(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\varphi)(1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi)}{\sec^2\theta\sec^2\varphi}$$
$$=2(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\varphi)(1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\theta\cos^2\varphi$$
$$=2\cdot\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos\theta\cos\varphi}\cdot\frac{\cos(\theta+\varphi)}{\cos\theta\cos\varphi}\cdot\cos^2\theta\cos^2\varphi$$
$$=2\sin(\theta+\varphi)\cos(\theta+\varphi)$$
$$=\sin 2(\theta+\varphi).$$

753. (1) 求 $\sin 36^\circ$，$\cos 36^\circ$，$\operatorname{tg}36^\circ$ 的值。

(2) 怎样求 3° 的三角函数的值？试求 $\sin 3^\circ$，$\cos 3^\circ$。

解 (1) $\sin 36^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,

$$\cos 36^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{5}+1,$$
$$\operatorname{tg}36^\circ=\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

(2) $3^\circ=18^\circ-15^\circ$.

$$\sin 3^\circ=\frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)$$
$$-\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}.$$
$$\cos 3^\circ=\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+\frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1).$$

754. 从 $x=\sin\theta+\cos\theta\sin 2\theta$，$y=\cos\theta+\sin\theta\sin 2\theta$ 消去 θ。

解 $x=\sin\theta(1+2\cos^2\theta)$,

$y=\cos\theta(1+2\sin^2\theta)$.

所以 $x+y=(\sin\theta+\cos\theta)^3$,

$x-y=(\sin\theta-\cos\theta)^3$.

$$(x+y)^{\frac{2}{3}}=(\sin\theta+\cos\theta)^2,$$
$$(x-y)^{\frac{2}{3}}=(\sin\theta-\cos\theta)^2.$$

因此 $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2$.

755. 已知

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta+1=0,$$
$$\Sigma\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta=0,$$

证明

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)$$
$$=0.$$

解 从已知的两个式子消去 $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta$，得

$$\Sigma \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma \times\left(\Sigma \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)=0,$$

即 $\Sigma \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\gamma\right)=0.$

因为 $$2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha},$$

所以将上式的各项乘上 $4\cos^2\frac{1}{2}\alpha\cos^2\frac{1}{2}\beta\times\cos^2\frac{1}{2}\gamma$ 得

$$\Sigma 2\sin\alpha\left(\cos^2\frac{1}{2}\beta\cos^2\frac{1}{2}\gamma-\sin^2\frac{1}{2}\beta\sin^2\frac{1}{2}\gamma\right)=0.$$

因此 $\Sigma\sin\alpha(\cos\beta+\cos\gamma)=0,$

$\Sigma\sin(\alpha+\beta)=0.$

756. 证明

$(\operatorname{ctg}^2A-\operatorname{tg}^2A)(1-\cos 4A)=8\cos 2A.$

解 原式的左边

$$=\left(\frac{\cos^2A}{\sin^2A}-\frac{\sin^2A}{\cos^2A}\right)\times 2\sin^2 2A$$
$$=\frac{\cos^4A-\sin^4A}{\sin^2A\cos^2A}\times 2\sin^2 2A$$
$$=\frac{4(\cos^2A-\sin^2A)}{4\sin^2A\cos^2A}\times 2\sin^2 2A$$
$$=\frac{4\cos 2A}{\sin^2 2A}\times 2\sin^2 2A=8\cos 2A.$$

757. 若 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$、$\cos\frac{\alpha}{2}$、$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 的值．这里 $270°<\alpha<360°$。

解 因为 $270°<\alpha<360°$，所以 $135°<\frac{\alpha}{2}<180°$．因此 $\sin\frac{\alpha}{2}>0$，$\cos\frac{\alpha}{2}<0$，$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<0$。

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}.$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

758. 若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$ 的值．这里设 $90°<\alpha<180°$。

解 因为 $90°<\alpha<180°$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}.$$

这时 $45°<\frac{\alpha}{2}<90°$，从而得

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

759. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$
$$=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\sec\frac{\alpha}{2}\sec\frac{\beta}{2}\sec\frac{\gamma}{2}$$
$$=\frac{4+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}.$$

解 左边 $=\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}+\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$
$$=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}+\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$
$$=\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$
$$=\frac{1+\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$
$$=\frac{1+\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$
$$=\frac{1+\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$
$$=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}+\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$=\sec\frac{\alpha}{2}\sec\frac{\beta}{2}\sec\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

又 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$

$$=\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$=\frac{4+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

这里

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma,$$

因此 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$

$$=\frac{4+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}.$$

760. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}$$
$$=\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\sec\frac{A}{2}$$
$$=\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}.$$

解 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

上式的分子是

$$1-\sin^2\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=1+\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)$$
$$=1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

因此，这个分式是

$$\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

同样，其他两个式子也可以化成上面这个形式，因此，三个式子相等。

761. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}$$
$$+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1.$$

解 左边

$$=\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\right)$$
$$+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$=\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$=\cos^2\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$=1-\sin^2\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$=1+\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$=1+\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=1+\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$
$$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1.$$

762. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$$
$$=4\cos\frac{180°+A}{4}\cos\frac{180°-B}{4}$$
$$\times\cos\frac{180°+C}{4}.$$

解 $\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$$=\sin\frac{180°-A}{2}-\sin\frac{180°-B}{2}$$
$$+\sin\frac{180°-C}{2}$$
$$=4\sin\frac{180°-A}{4}\cos\frac{180°+B}{4}$$
$$\times\sin\frac{180°-C}{4}$$

$$=4\cos\frac{180^\circ+A}{4}\cos\frac{180^\circ-B}{4}$$
$$\times\cos\frac{180^\circ+C}{4}.$$

763. 若 $A+B+C=180^\circ$，证明
$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

解 左边 $=\frac{1}{2}(\sin A+\sin B+\sin C)$
$$=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\text{右边}.$$

764. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明
$$\sin\alpha\sin\beta+\cos^2\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)=\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

解 左边 $=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$
$$+\frac{1}{2}[1+\cos(2\alpha+\gamma)]$$
$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma+1$$
$$+\cos(\pi+\alpha-\beta)]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+2\cos^2\frac{\gamma}{2}\right.$$
$$\left.-\cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$=\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

765. 证明
$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A-B}{2},$$
这里 $A+B+C=180^\circ$.

解 所要证明的式子的左边
$$=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}$$
$$=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}.$$

766. 证明 在三角形 ABC 中 $\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ 和 $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

解 因为 $A+B+C=180^\circ$，所以 $\frac{A+B}{2}$ 和 $\frac{C}{2}$ 互为余角，因而所要证明的式子成立.

767. 在三角形 ABC 中，若 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=x$，$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=y$，求 $\operatorname{tg}C$ 的值.

解 从 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=x$，$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=y$ 得
$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\frac{x+y}{1-xy}.$$
又因为 $\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$，
所以 $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{x+y}{1-xy}$，即 $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1-xy}{x+y}$. 从而求得
$$\operatorname{tg}C=\frac{2\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}=\frac{2\left(\frac{1-xy}{x+y}\right)}{1-\left(\frac{1-xy}{x+y}\right)^2}$$
$$=\frac{2(1-xy)(x+y)}{(x+y+1-xy)(x+y-1+xy)}.$$

768. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明
$$(\sin\beta-\sin\gamma)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+(\sin\gamma-\sin\alpha)\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$
$$+(\sin\alpha-\sin\beta)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=0.$$

解 $(\sin\beta-\sin\gamma)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$
$$=2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}$$
$$=2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$
$$=\cos\gamma-\cos\beta.$$
同样
$$(\sin\gamma-\sin\alpha)\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\cos\alpha-\cos\gamma,$$
$$(\sin\alpha-\sin\beta)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\cos\beta-\cos\alpha.$$
因此，它们的和等于 0.

769. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明
$$8(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$
$$=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma.$$

解 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$
$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$
因此 左边
$$=32\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$
$$=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma.$$

770. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明 $\sin 4\alpha+\sin 4\beta+\sin 4\gamma=-4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$。

解 左边

$$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha-2\beta)+2\sin 2\gamma\cos 2\gamma$$
$$=-2\sin 2\gamma\cos(2\alpha-2\beta)+2\sin 2\gamma\cos 2\gamma$$
$$=-2\sin 2\gamma[\cos(2\alpha-2\beta)-\cos 2\gamma]$$
$$=-2\sin 2\gamma[\cos(2\alpha-2\beta)-\cos(2\alpha+2\beta)]$$
$$=-2\sin 2\gamma(2\sin 2\alpha\sin 2\beta)$$
$$=-4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma.$$

771. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}=4\cos\frac{180°-A}{4}\cos\frac{180°-B}{4}\times\cos\frac{180°-C}{4}.$$

解 $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$$=\sin\frac{B+C}{2}+\sin\frac{C+A}{2}+\sin\frac{A+B}{2}$$
$$=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}$$
$$=4\cos\frac{180°-A}{4}\cos\frac{180°-B}{4}\times\cos\frac{180°-C}{4}.$$

772. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

解 左边

$$=\sin(A-C)+\sin(B-A)+\sin(C-B)$$
$$=2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{2A-B-C}{2}+2\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{C-B}{2}$$
$$=2\sin\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{2A-B-C}{2}-\cos\frac{C-B}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{B-C}{2}\left(2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C-A}{2}\right)$$
$$=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

773. 若 $A+B+C=180°$，证明 $\sin^2\frac{C}{2}=(\sin B+\sin C-\sin A)(\sin C+\sin A-\sin B)\div 4\sin A\sin B$。

解 右边

$$=\frac{(\sin B+\sin C-\sin A)(\sin C+\sin A-\sin B)}{4\sin A\sin B}$$
$$=\frac{16\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{16\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$$
$$=\sin^2\frac{C}{2}.$$

774. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)+1=4\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\beta-\gamma}{4}\cos\frac{\gamma-\alpha}{4}.$$

解 $\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\left[90°-\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\right]=\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}.$

因此 左边

$$=\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+1$$
$$=2\cos\frac{\gamma-\beta}{4}\cos\frac{\gamma+\beta-2\alpha}{4}+2\cos^2\frac{\beta-\gamma}{4}-1+1$$
$$=2\cos\frac{\gamma-\beta}{4}\cos\frac{\pi-3\alpha}{4}+2\cos^2\frac{\beta-\gamma}{4}$$
$$=2\cos\frac{\beta-\gamma}{4}\left(\cos\frac{\pi-3\alpha}{4}+\cos\frac{\beta-\gamma}{4}\right)$$
$$=2\cos\frac{\beta-\gamma}{4}\times 2\cos\frac{\pi-3\alpha+\beta-\gamma}{8}\times\cos\frac{\pi-3\alpha-\beta+\gamma}{8}$$
$$=4\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\beta-\gamma}{4}\cos\frac{\gamma-\alpha}{4}=\text{右边}.$$

775. 求 $9°$ 和 $81°$ 这两个角的正弦和余弦。

解 由公式 $(\sin A\pm\cos A)^2=1\pm\sin 2A$ 得

$$\sin 9°+\cos 9°=\sqrt{1+\sin 18°}=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2},$$

$$\sin 9^\circ-\cos 9^\circ=-\sqrt{1-\sin 18^\circ}=-\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}.$$

因此 $$\sin 9^\circ=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4},$$

$$\cos 9^\circ=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}.$$

又 $$\sin 81^\circ=\cos 9^\circ,$$
$$\cos 81^\circ=\sin 9^\circ.$$

776. 证明 $\sec^2 A(1+\sec 2A)=2\sec 2A$.

解 原式的左边 $$=\frac{1}{\cos^2 A}\left(1+\frac{1}{\cos 2A}\right)=\frac{1}{\cos^2 A}\times\frac{1+\cos 2A}{\cos 2A}=\frac{1}{\cos^2 A}\times\frac{2\cos^2 A}{\cos 2A}=\frac{2}{\cos 2A}=2\sec 2A.$$

777. 证明

$$\cos x+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\sin x=\left(1+\frac{2x}{\pi-y}\right)\left(1-\frac{2x}{\pi+y}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi-y}\right)\times\left(1-\frac{2x}{3\pi+y}\right)\cdots.$$

解 $$\cos x+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\sin x=\frac{\cos x\cos\frac{y}{2}+\sin x\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}}=\frac{\cos\left(x-\frac{y}{2}\right)}{\cos\frac{y}{2}}.$$

$$\cos\left(x-\frac{y}{2}\right)=\left[1-\frac{(2x-y)^2}{\pi^2}\right]\left[1-\frac{(2x-y)^2}{3^2\pi^2}\right]\times\left[1-\frac{(2x-y)^2}{5^2\pi^2}\right]\cdots,$$

$$\cos\frac{y}{2}=\left(1-\frac{y^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots.$$

用后式除前式，则

$$\frac{1-\frac{(2x-y)^2}{\pi^2}}{1-\frac{y^2}{\pi^2}}=\frac{\pi^2-(2x-y)^2}{\pi^2-y^2}=\frac{\pi^2-y^2-4x^2+4xy}{\pi^2-y^2}=1-\frac{4x^2}{\pi^2-y^2}+\frac{4xy}{\pi^2-y^2}=\left(1+\frac{2x}{\pi-y}\right)\left(1-\frac{2x}{\pi+y}\right).$$

同样

$$\frac{1-\frac{(2x-y)^2}{3^2\pi^2}}{1-\frac{y^2}{3^2\pi^2}}=\left(1+\frac{2x}{3\pi-y}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi+y}\right),$$

…………

因此得到所要证明的结果.

778. 证明

$$\cos x-\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin x=\left(1-\frac{2x}{y}\right)\left(1+\frac{2x}{2\pi-y}\right)\times\left(1-\frac{2x}{2\pi+y}\right)\left(1+\frac{2x}{4\pi-y}\right)\cdots.$$

解 $$\cos x-\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin x=\frac{\cos x\sin\frac{y}{2}-\sin x\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{y}{2}-x\right)}{\sin\frac{y}{2}}.$$

$$\sin\left(\frac{y}{2}-x\right)=\left(\frac{y}{2}-x\right)\left[1-\frac{(y-2x)^2}{4\pi^2}\right]\left[1-\frac{(y-2x)^2}{4\times 2^2\pi^2}\right]\times\left[1-\frac{(y-2x)^2}{4\times 3^2\pi^2}\right]\cdots,$$

$$\sin\frac{y}{2}=\frac{y}{2}\left(1-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{4\times 2^2\pi^2}\right)\times\left(1-\frac{y^2}{4\times 3^2\pi^2}\right)\cdots.$$

用后式除前式，则

$$\frac{\frac{y}{2}-x}{\frac{y}{2}}=1-\frac{2x}{y},$$

$$\frac{1-\dfrac{(y-2x)^2}{4x^2}}{1-\dfrac{y^2}{4x^2}}=\frac{4x^2-(y-2x)^2}{4x^2-y^2}$$

$$=\frac{4x^2-y^2-4x^2+4xy}{4x^2-y^2}$$

$$=1-\frac{4x^2}{4x^2-y^2}+\frac{4xy}{4x^2-y^2}$$

$$=\left(1+\frac{2x}{2x-y}\right)\left(1-\frac{2x}{2x+y}\right).$$

同样

$$\frac{1-\dfrac{(y-2x)^2}{4\times 2^2x^2}}{1-\dfrac{y^2}{4\times 2^2x^2}}$$

$$=\left(1+\frac{2x}{4x-y}\right)\left(1-\frac{2x}{4x+y}\right),$$

…………。

因此原式得证.

779. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}$$
$$=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

解 因为 $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$，所以

原式的左边

$$=\frac{1+\cos A}{2}+\frac{1+\cos B}{2}-\frac{1+\cos C}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B-\cos C)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1\right)$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

780. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\cos A+\cos B-\cos C$$
$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1.$$

解 $\cos A+\cos B-\cos C$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$-\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin^2\frac{C}{2}-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)-1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)-1$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1.$$

781. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-1$$
$$=4\sin\frac{180°-A}{4}\sin\frac{180°-B}{4}$$
$$\times\sin\frac{180°-C}{4}.$$

解 由 $A+B+C=180°$ 得

$$\frac{B+C}{2}+\frac{C+A}{2}+\frac{A+B}{2}=180°.$$

由于

$$\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{C+A}{2}+\cos\frac{A+B}{2}-1$$
$$=4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4},$$

所以 $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-1$

$$=4\sin\frac{180°-A}{4}\sin\frac{180°-B}{4}$$
$$\times\sin\frac{180°-C}{4}.$$

782. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\sin\frac{B+C-A}{2}+\sin\frac{C+A-B}{2}$$
$$+\sin\frac{A+B-C}{2}-1$$
$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

解 设 $\frac{B+C-A}{2}=\alpha$，$\frac{C+A-B}{2}=\beta$，$\frac{A+B-C}{2}=\gamma$，则

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°.$$

因此，根据前面的问题立即可得所要证明的结果.

783. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\sin(A+2B-C)+\sin(2A-B+C)$$
$$+\sin(-A+B+2C)$$
$$=4\cos\left(A-\frac{C}{2}\right)\cos\left(C-\frac{B}{2}\right)\cos\left(B-\frac{A}{2}\right).$$

解　原式的左边

$$=2\sin\frac{3A+B}{2}\cos\frac{A-3B+2C}{2}$$
$$-\sin(3A+B)$$
$$=2\sin\frac{3A+B}{2}\cos\frac{A-3B+2C}{2}$$
$$-2\sin\frac{3A+B}{2}\cos\frac{3A+B}{2}$$
$$=2\sin\frac{3A+B}{2}$$
$$\times\left(\cos\frac{A-3B+2C}{2}-\cos\frac{3A+B}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{3A+B}{2}\times2\sin\frac{4A-2B+2C}{4}$$
$$\times\sin\frac{2A+4B-2C}{4}$$
$$=4\sin\frac{3A+B}{2}\sin\frac{2A-B+C}{2}$$
$$\times\sin\frac{A+2B-C}{2}$$
$$=4\cos\left(90^\circ-\frac{3A+B}{2}\right)$$
$$\times\cos\left(90^\circ-\frac{2A-B+C}{2}\right)$$
$$\times\cos\left(90^\circ-\frac{A+2B-C}{2}\right)$$
$$=4\cos\left(A-\frac{C}{2}\right)\cos\left(B-\frac{A}{2}\right)$$
$$\times\cos\left(C-\frac{B}{2}\right).$$

784. 若 $A+B+C=180^\circ$，证明

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}$$
$$=4\cos\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)$$
$$\times\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)-1.$$

解　左边

$$=2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}$$
$$=2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}$$
$$-\left(1-2\sin^2\frac{A+B}{4}\right)$$
$$=2\sin\frac{A+B}{4}$$
$$\times\left(\cos\frac{A-B}{4}+\sin\frac{A+B}{4}\right)-1$$
$$=2\sin\frac{A+B}{4}\left[\cos\frac{A-B}{4}\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{A+B+C}{2}-\frac{A+B}{4}\right)\right]-1$$
$$=2\sin\frac{A+B}{4}\left[\cos\frac{A-B}{4}\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{A+B}{4}+\frac{C}{2}\right)\right]-1$$
$$=2\sin\frac{A+B}{4}\times2\cos\frac{A+C}{4}$$
$$\times\cos\frac{B+C}{4}-1$$
$$=4\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)$$
$$\times\cos\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)-1.$$

785. 若 $A+B+C=180^\circ$，证明

$$\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}$$
$$=4\Sigma\left(\Sigma-\cos\frac{A}{2}\right)\left(\Sigma-\cos\frac{B}{2}\right)$$
$$\times\left(\Sigma-\cos\frac{C}{2}\right).$$

这里　$2\Sigma=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$.

解　$4\Sigma\left(\Sigma-\cos\frac{A}{2}\right)\left(\Sigma-\cos\frac{B}{2}\right)$

$$\times\left(\Sigma-\cos\frac{C}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$$
$$\times\left(\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)$$
$$\times\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{B}{2}\right)$$
$$\times\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)$$

将上面的各个因子变形，得

$$\left[8\cos\frac{180^\circ-A}{4}\cos\frac{180^\circ-B}{4}\right.$$
$$\times\cos\frac{180^\circ-C}{4}\cos\frac{180^\circ+A}{4}$$
$$\left.\times\cos\frac{180^\circ+B}{4}\cos\frac{180^\circ+C}{4}\right]^2,$$

即 $$\left[8\cos\frac{180°-A}{4}\cos\frac{180°-B}{4}\times\cos\frac{180°-C}{4}\sin\frac{180°-A}{4}\times\sin\frac{180°-B}{4}\sin\frac{180°-C}{4}\right]^2,$$

即 $$\left[\sin\frac{180°-A}{2}\sin\frac{180°-B}{2}\times\sin\frac{180°-C}{2}\right]^2.$$

因此 $$右边=\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}.$$

786. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\sin(A-60°)+\sin(B-60°)+\sin(C-60°)$$
$$=-4\sin\left(\frac{A}{2}-30°\right)\sin\left(\frac{B}{2}-30°\right)\times\sin\left(\frac{C}{2}-30°\right).$$

解 原式的左边

$$=2\sin\frac{1}{2}(A+B-120°)\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{1}{2}(C-60°)\cos\frac{1}{2}(C-60°)$$
$$=2\sin\frac{1}{2}(A+B+C-120°-C)\times\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{1}{2}(C-60°)\times\cos\frac{1}{2}(C-60°)$$
$$=2\sin\frac{1}{2}(60°-C)\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{1}{2}(C-60°)\cos\frac{1}{2}(C-60°)$$
$$=2\sin\frac{1}{2}(C-60°)\times\left[-\cos\frac{1}{2}(A-B)+\cos\frac{1}{2}(C-60°)\right]$$
$$=2\sin\frac{1}{2}(C-60°)\times\left[2\sin\frac{1}{4}(A-B+C-60°)\times\sin\frac{1}{4}(A-B-C+60°)\right]$$
$$=-4\sin\frac{1}{2}(C-60°)\sin\frac{1}{2}(B-60°)\times\sin\frac{1}{2}(A-60°).$$

787. 证明

$$\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}+\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}+\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}$$
$$=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

这里设 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

解 $$\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$=\cos\frac{\alpha}{2}-\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$=\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)+\frac{1}{4}(\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha)$$
$$=\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)+\frac{1}{4}(\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha).$$

其他两项也可同样变形，因此

$$原式的左边=\frac{1}{4}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$
$$=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

788. 若 $A+B+C=\pi$，$\sin\left(A+\dfrac{C}{2}\right)=n\sin\dfrac{C}{2}$，证明 $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}=\dfrac{n-1}{n+1}$.

解 $$\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)=\sin\left(A+\frac{\pi-A-B}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B-A}{2}\right)=\cos\frac{B-A}{2}.$$

$$\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}.$$

从而 $$\cos\frac{B-A}{2}=n\cos\frac{A+B}{2}.$$

因此　$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

$$=n\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right),$$

即　$(n+1)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

$$=(n-1)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2},$$

$$\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{n-1}{n+1}.$$

因此　$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{n-1}{n+1}.$

789. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，$\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=x:y:z$，证明 $(x-y)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+(y-z)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+(z-x)\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=0$。

解　设 $\frac{\sin\alpha}{x}=\frac{\sin\beta}{y}=\frac{\sin\gamma}{z}=\frac{1}{k}$，则

$$x=k\sin\alpha,\quad y=k\sin\beta,\quad z=k\sin\gamma.$$

因此

$$(x-y)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=k(\sin\alpha-\sin\beta)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$=2k\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$=2k\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$=2k\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$=2k\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$=2k\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}\right).$$

同样

$$(y-z)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=2k\left(\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$(z-x)\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=2k\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

因此这三项的和等于 0。

790. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$$

$$=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

$$+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

解　原式的左边

$$=\frac{1}{2}(\cos\beta+\cos\gamma)+\frac{1}{2}(\cos\gamma+\cos\alpha)$$

$$+\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)$$

$$=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

$$\times\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

$$+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

791. 若 $2\operatorname{tg}A=3\operatorname{tg}B$，证明

$$\operatorname{tg}(A-B)=\frac{\operatorname{tg}B}{2+3\operatorname{tg}^2B}=\frac{\sin 2B}{5-\cos 2B}.$$

解　$\operatorname{tg}(A-B)$

$$=\frac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}=\frac{\frac{3}{2}\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}B}{1+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2B}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}B}{2+3\operatorname{tg}^2B}=\frac{\sin B\cos B}{2\cos^2B+3\sin^2B}$$

$$=\frac{\sin 2B}{2(1+\cos 2B)+3(1-\cos 2B)}$$

$$=\frac{\sin 2B}{5-\cos 2B}.$$

792. 在三角形 ABC 中，若 $(\sin A+\sin B+\sin C)\times(\sin A+\sin B-\sin C)=3\sin A\sin B$，那么 $\angle C$ 是多少度？

解　将原式变形，得

$$(\sin A+\sin B)^2-\sin^2C-3\sin A\sin B=0,$$

$$\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C-\sin A\sin B=0. \quad ①$$

这里　$\sin^2B-\sin^2C$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos 2B)-\frac{1}{2}(1-\cos 2C)$$

$$=-\frac{1}{2}(\cos 2B-\cos 2C)$$

$$=-\frac{1}{2}[-2\sin(B+C)\sin(B-C)]$$

$$=\sin(180^\circ-A)\sin(B-C)$$

$$=\sin A\sin(B-C).$$

代入①，得

$$\sin A(\sin A-\sin B)+\sin A\sin(B-C)=0,$$

$$\sin A[\sin(B+C)+\sin(B-C)-\sin B]=0,$$

$$\sin A(2\sin B\cos C-\sin B)=0.$$

$$\therefore\quad \sin A\sin B(2\cos C-1)=0.$$

因为 $\sin A\sin B\neq 0$，所以

$$\cos C=\frac{1}{2},\qquad \therefore\quad C=60^\circ.$$

793. 在三角形 ABC 中，证明

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}\cdots(*)$$

解 根据正弦定理，得

$$b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C,$$

$$\therefore\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{2R(\sin B-\sin C)}{2R(\sin B+\sin C)}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}.$$

[(*)式的其他部分中出现 B 和 C 两角和的一半及差的一半，所以将上式的分子、分母都化成积的形式，然后再用 tg 来表示，是有希望的.]

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\div\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}.$$

将这代入(*)式的右边，可立即导出左边.

注 这叫正切定理. 已知两边 b、c 和它们的夹角 A 时，(*)式的右边是已知的，从而可以由左边求得 $B-C$，并由 $B-C$ 及 $B+C=\pi-A$ 求得 B 和 C.

总之，这对于已知两边和它们的夹角而要求其余两角是有用的.

794. 若 $p=2\cos\alpha-5\cos^3\alpha+4\cos^5\alpha$，$q=2\sin\alpha-5\sin^3\alpha+4\sin^5\alpha$，证明 $p\cos 3\alpha+q\sin 3\alpha=\cos 2\alpha$，及 $p\sin 3\alpha-q\cos 3\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

解 $p\cos 3\alpha+q\sin 3\alpha$

$$\begin{aligned}
&=(2\cos\alpha-5\cos^3\alpha+4\cos^5\alpha)\\
&\quad\times(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)\\
&\quad+(2\sin\alpha-5\sin^3\alpha+4\sin^5\alpha)\\
&\quad\times(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)\\
&=16(\cos^8\alpha-\sin^8\alpha)-32(\cos^6\alpha-\sin^6\alpha)\\
&\quad+23(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)-6(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\\
&=16(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\\
&\quad\times(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-32(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\\
&\quad\times(\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha)\\
&\quad+23(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\\
&\quad-6(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\\
&=16(1-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha)\times 1\times\cos 2\alpha\\
&\quad-32\cos 2\alpha(1-\cos^2\alpha\sin^2\alpha)\\
&\quad+23\times 1\times\cos 2\alpha-6\cos 2\alpha=\cos 2\alpha.
\end{aligned}$$

同样算得

$p\sin 3\alpha-q\cos 3\alpha$

$$\begin{aligned}
&=(2\cos\alpha-5\cos^3\alpha+4\cos^5\alpha)\\
&\quad\times(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)\\
&\quad-(2\sin\alpha-5\sin^3\alpha+4\sin^5\alpha)\\
&\quad\times(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)\\
&=-16\sin^3\alpha\cos^3\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\
&\quad+40\sin^3\alpha\cos^3\alpha\\
&\quad+12\sin\alpha\cos\alpha(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)\\
&\quad-23\sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\
&\quad+12\sin\alpha\cos\alpha\\
&=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha.
\end{aligned}$$

795. 将

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C-2\cos A\cos B\cos C-1$$

因式分解.

解 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C-2\cos A\cos B\cos C-1$

$$\begin{aligned}
&=(\cos A-\cos B\cos C)^2+\cos^2B\\
&\quad+\cos^2C-1-\cos^2B\cos^2C\\
&=(\cos A-\cos B\cos C)^2\\
&\quad-(1-\cos^2B)(1-\cos^2C)\\
&=(\cos A-\cos B\cos C)^2-\sin^2B\sin^2C\\
&=(\cos A-\cos B\cos C+\sin B\sin C)\\
&\quad\times(\cos A-\cos B\cos C-\sin B\sin C)\\
&=[\cos A-\cos(B+C)]\\
&\quad\times[\cos A-\cos(B-C)]\\
&=4\sin\frac{A+B+C}{2}\sin\frac{B+C-A}{2}\\
&\quad\times\sin\frac{A+B-C}{2}\sin\frac{B-C-A}{2}\\
&=-4\sin\frac{A+B+C}{2}\sin\frac{B+C-A}{2}\\
&\quad\times\sin\frac{A+C-B}{2}\sin\frac{A+B-C}{2}.
\end{aligned}$$

796. 将 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin A\sin B\sin C-1$

化成四个因式的乘积。

解
$$
\begin{aligned}
&\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin A\sin B\sin C-1\\
&=(\sin A-\sin B\sin C)^2+\sin^2 B+\sin^2 C-1-\sin^2 B\sin^2 C\\
&=(\sin A-\sin B\sin C)^2-(1-\sin^2 B)(1-\sin^2 C)\\
&=(\sin A-\sin B\sin C)^2-\cos^2 B\cos^2 C\\
&=(\sin A-\sin B\sin C-\cos B\cos C)\times(\sin A-\sin B\sin C+\cos B\cos C)\\
&=[\sin A-\cos(B-C)]\times[\sin A+\cos(B+C)]\\
&=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)-\cos(B-C)\right]\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)+\cos(B+C)\right]\\
&=4\sin\left(\frac{B-C-A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(\frac{B-C+A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\
&\quad\times\cos\left(\frac{B+C-A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{B+C+A}{2}-\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}
$$

可是

$$
\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{B-C-A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{B-C+A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\
&=-\cos\left(\frac{A+C-B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{A+B-C}{2}+\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}
$$

因此上式变成

$$
\begin{aligned}
&-4\cos\left(\frac{A+B+C}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{B+C-A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\\
&\times\cos\left(\frac{A+C-B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{A+B-C}{2}+\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}
$$

797. 若 $\sec(\theta+\alpha)+\sec(\theta-\alpha)=2\sec\theta$，证明 $\cos\theta=\pm\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$。

解 从条件得

$$\frac{\cos(\theta-\alpha)+\cos(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)}=\frac{2}{\cos\theta}.$$

因此
$$
\begin{aligned}
\frac{4\cos\theta\cos\alpha}{\cos 2\theta+\cos 2\alpha}&=\frac{2}{\cos\theta},\\
\frac{\cos\theta\cos\alpha}{\cos^2\theta+\cos^2\alpha-1}&=\frac{1}{\cos\theta},\\
\cos^2\theta\cos\alpha&=\cos^2\theta+\cos^2\alpha-1,\\
\cos^2\theta&=1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2},
\end{aligned}
$$

因此 $$\cos\theta=\pm\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

798. 证明 $\sin^4 A\cos^3 A=\frac{1}{2^6}(\cos 7A-\cos 5A-3\cos 3A+3\cos A)$。

解
$$
\begin{aligned}
\sin^4 A\cos^3 A&=\frac{1}{2}\sin^3 A\cos^2 A\sin 2A\\
&=\frac{1}{2^2}\sin^2 A\cos A\sin^2 2A\\
&=\frac{1}{2^4}\sin A\sin 2A(1-\cos 4A)\\
&=\frac{1}{2^5}(\cos A-\cos 3A)(1-\cos 4A)\\
&=\frac{1}{2^5}(\cos A-\cos 3A-\cos A\cos 4A+\cos 3A\cos 4A)\\
&=\frac{1}{2^6}(2\cos A-2\cos 3A-\cos 5A-\cos 3A+\cos 7A+\cos A)\\
&=\frac{1}{2^6}(\cos 7A-\cos 5A-3\cos 3A+3\cos A).
\end{aligned}
$$

799. 若 $2\sec\theta=\sec(\theta+2\alpha)+\sec(\theta-2\alpha)$，证明 $\cos 2\alpha+\sin^2\theta=0$。

解 从条件得

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\cos\theta}&=\frac{1}{\cos(\theta+2\alpha)}+\frac{1}{\cos(\theta-2\alpha)}\\
&=\frac{\cos(\theta-2\alpha)+\cos(\theta+2\alpha)}{\cos(\theta+2\alpha)\cos(\theta-2\alpha)}.
\end{aligned}
$$

因此 $$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{2\cos\theta\cos 2\alpha}{\cos 2\theta+\cos 4\alpha}.$$

去分母，得

$$\cos 2\theta+\cos 4\alpha=2\cos^2\theta\cos 2\alpha.$$

因此

$$
\begin{aligned}
2\cos^2\theta-1+\cos 4\alpha&=2\cos^2\theta\cos 2\alpha,\\
2\cos^2\theta(1-\cos 2\alpha)&=1-\cos 4\alpha,\\
2\cos^2\theta\cdot 2\sin^2\alpha&=2\sin^2 2\alpha=8\sin^2\alpha\cos^2\alpha.
\end{aligned}
$$

从而 $$\cos^2\theta-1=2\cos^2\alpha-1,$$

所以 $\cos 2\alpha+\sin^2\theta=0$。

800. 若 $\alpha-\beta\neq 2k\pi$，

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=n^2(\sin\alpha-\sin\beta)^2,$$

证明 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1\pm n}{1\mp n}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$。

解 从条件得

$$(\sin\alpha-\sin\beta)^2-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)+2\sin\alpha\sin\beta=n^2(\sin\alpha-\sin\beta)^2.$$

因此 $(n^2-1)(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2\sin\alpha\sin\beta[1-\cos(\alpha-\beta)]$,

$$4(n^2-1)\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=4\sin\alpha\sin\beta\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

即 $(n^2-1)\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\alpha\sin\beta$

$$=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

因此 $n\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\pm\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$。

从而证得 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1\pm n}{1\mp n}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$。

801. 若

$$\frac{\operatorname{tg}(\theta+\alpha)}{x}=\frac{\operatorname{tg}(\theta+\beta)}{y}=\frac{\operatorname{tg}(\theta+\gamma)}{z},$$

证明 $\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$。

解 设三个分式的值都是 $\frac{1}{k}$，则

$$x=k\operatorname{tg}(\theta+\alpha),\quad y=k\operatorname{tg}(\theta+\beta),\quad z=k\operatorname{tg}(\theta+\gamma).$$

于是

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\operatorname{tg}(\theta+\alpha)+\operatorname{tg}(\theta+\beta)}{\operatorname{tg}(\theta+\alpha)-\operatorname{tg}(\theta+\beta)}\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)+\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)-\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)}\times\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\sin(2\theta+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$=\sin(2\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{1}{2}[\cos(2\theta+2\beta)-\cos(2\theta+2\alpha)].$$

同样地，有

$$\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)=\frac{1}{2}[\cos(2\theta+2\gamma)-\cos(2\theta+2\beta)],$$

$$\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=\frac{1}{2}[\cos(2\theta+2\alpha)-\cos(2\theta+2\gamma)],$$

因此，上面三项的和等于 0。

802. 试由

$$x^2\cos\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+x\cos(\alpha-\beta)=2\cos\frac{\beta}{2}$$

求出 x，其中

$$\cos\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\neq 0.$$

解 $x^2\cos\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+x\cos(\alpha-\beta)=2\cos\frac{\beta}{2}$,

可化成 $x^2+\frac{x\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{2\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}$,

故有

$$\left[x+\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}\right]^2=\frac{2\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}+\frac{\cos^2(\alpha-\beta)}{4\cos^2\alpha\cos^2\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}$$
$$=\frac{\cos^2(\alpha-\beta)+8\cos\alpha\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}{4\cos^2\alpha\cos^2\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}$$
$$=\frac{\cos^2(\alpha-\beta)+4\cos\alpha[\cos\alpha+\cos(\alpha-\beta)]}{4\cos^2\alpha\cos^2\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$=\frac{[\cos(\alpha-\beta)+2\cos\alpha]^2}{4\cos^2\alpha\cos^2\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)},$$

所以 $x+\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}$

$$=\pm\frac{\cos(\alpha-\beta)+2\cos\alpha}{2\cos\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}.$$

当取正号时，

$$x=\frac{2\cos\alpha}{2\cos\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}=\sec\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right).$$

当取负号时，

$$x=-\frac{\cos\alpha+\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$=-\frac{2\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$=-2\cos\frac{\beta}{2}\sec\alpha.$$

803. 已知

$$x^2\cos\alpha\cos\beta+x(\sin\alpha+\sin\beta)+1=0,$$
$$x^2\cos\beta\cos\gamma+x(\sin\beta+\sin\gamma)+1=0,$$

且 $\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\neq0$，求证

$$x^2\cos\gamma\cos\alpha+x(\sin\gamma+\sin\alpha)+1=0.$$

解 显然 $x\neq0$，把已知的两个式子相减后两边都除以 x，得

$$x\cos\beta(\cos\gamma-\cos\alpha)=-(\sin\gamma-\sin\alpha),$$

把第一个已知式乘以 $\cos\gamma$，第二个已知式乘以 $\cos\alpha$，再把得到的两式相减，得

$$x\sin\beta(\cos\gamma-\cos\alpha)$$
$$=x\sin(\gamma-\alpha)-(\cos\gamma-\cos\alpha),$$

把上面两个得到的式子平方后相加，并进行一些变形，得

$$x^2[(\cos\gamma-\cos\alpha)^2-\sin^2(\gamma-\alpha)]$$
$$+2x\sin(\gamma-\alpha)(\cos\gamma-\cos\alpha)$$
$$+2\cos(\gamma-\alpha)-2=0.$$

其中 $(\cos\gamma-\cos\alpha)^2-\sin^2(\gamma-\alpha)$

$$=4\sin^2\frac{\gamma-\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\gamma+\alpha}{2}-\cos^2\frac{\gamma-\alpha}{2}\right),$$

$$\sin(\gamma-\alpha)(\cos\gamma-\cos\alpha)$$
$$=-4\sin^2\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2},$$

$$2\cos(\gamma-\alpha)-2=-4\sin^2\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

因为 $\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\neq0$，所以可约去这些式子的公因式 $4\sin^2\dfrac{\gamma-\alpha}{2}$，得

$$x^2\left(\sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}-\cos^2\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)$$
$$-2x\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}-1=0.$$

即 $x^2\cos\gamma\cos\alpha+x(\sin\gamma+\sin\alpha)+1=0.$

804. 已知

$$x+y\cos\alpha+z\sin\alpha=\cos(\beta-\gamma),$$
$$x+y\cos\beta+z\sin\beta=\cos(\gamma-\alpha),$$
$$x+y\cos\gamma+z\sin\gamma=\cos(\alpha-\beta),$$
$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\neq0.$$

求证

$$x=4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

解 第一式乘以 λ，第二式乘以 μ，第三式乘以 1，然后把得到的三式相加，得

$$x(\lambda+\mu+1)+y(\lambda\cos\alpha+\mu\cos\beta+\cos\gamma)$$
$$+z(\lambda\sin\alpha+\mu\sin\beta+\sin\gamma)$$
$$=\lambda\cos(\beta-\gamma)+\mu\cos(\gamma-\alpha)$$
$$+\cos(\alpha-\beta). \qquad ①$$

为了使 $\lambda\cos\alpha+\mu\cos\beta+\cos\gamma=0$

和 $\lambda\sin\alpha+\mu\sin\beta+\sin\gamma=0$,

应该选择 λ、μ 为

$$\lambda=\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\alpha-\beta)},\quad \mu=\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

代入①后，有

$$x[\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$=\frac{1}{2}[\sin2(\beta-\gamma)+\sin2(\gamma-\alpha)$$
$$+\sin2(\alpha-\beta)],$$

由此，可得

$$x=4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

805. α、β、γ 为任意角，证明

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4}\left(\cos\frac{3\alpha-\beta-\gamma+\pi}{4}\right.$$
$$\left.+\cos\frac{3\beta-\alpha-\gamma+\pi}{4}+\cos\frac{3\gamma-\alpha-\beta+\pi}{4}\right.$$

$+\cos\dfrac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4}\Big)$.

解 $4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$

$$=2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

$$=\cos\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.$$

所以，原式左边

$$=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.$$

而 $2\sin\dfrac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4}\cos\dfrac{3\alpha-\beta-\gamma+\pi}{4}$

$$=\sin\alpha+\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha-\pi}{2}=\sin\alpha-\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2},$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4}\cos\frac{3\beta-\alpha-\gamma+\pi}{4}=\sin\beta-\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2},$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4}\cos\frac{3\gamma-\alpha-\beta+\pi}{4}=\sin\gamma-\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2},$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4}\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4}=\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{2}=-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

由此可得要证的结论.

606. 已知 A、B、C 为任意实数，

$$A\operatorname{ctg}\alpha+B\operatorname{ctg}\beta+C\operatorname{ctg}\gamma=(A+B+C)\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma,$$

$$(B+C)\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+(C+A)\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha+(A+B)\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta=0.$$

求证 $A\sin 2\alpha+B\sin 2\beta+C\sin 2\gamma=0$.

解 已知两式可化为

$$A\operatorname{ctg}\alpha(1-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma)+B\operatorname{ctg}\beta(1-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma)+C\operatorname{ctg}\gamma(1-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\alpha)=0,$$

$$A\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)+B\operatorname{ctg}\beta(\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha)+C\operatorname{ctg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)=0.$$

上两式可进一步改写如下，

$$A\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)+B\cos\beta\cos(\gamma+\alpha)+C\cos\gamma\cos(\alpha+\beta)=0,$$

$$A\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)+B\cos\beta\sin(\gamma+\alpha)+C\cos\gamma\sin(\alpha+\beta)=0,$$

由此得

$$A=k\cos\beta\cos\gamma[\cos(\gamma+\alpha)\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\alpha)],$$

$$B=k\cos\gamma\cos\alpha[\cos(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta)],$$

$$C=k\cos\alpha\cos\beta[\cos(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)-\cos(\gamma+\alpha)\sin(\beta+\gamma)],$$

其中 k 是任意常数，因此

$$A=k\cos\beta\cos\gamma\sin(\beta-\gamma),$$

$$B=k\cos\gamma\cos\alpha\sin(\gamma-\alpha),$$

$$C=k\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha-\beta).$$

故

$$A\sin 2\alpha+B\sin 2\beta+C\sin 2\gamma=2k\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma[\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)],$$

而右边方括号中的式子为 0，这是因为

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)=\frac{1}{2}[\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)],$$

$$\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma-\alpha)],$$

$$\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}[\cos(\beta+\gamma-\alpha)-\cos(\gamma+\alpha-\beta)].$$

别解 若用 σ 代表 $\alpha+\beta+\gamma$，则有

$$A\cos\alpha\cos(\sigma-\alpha)+B\cos\beta\cos(\sigma-\beta)+C\cos\gamma\cos(\sigma-\gamma)=0,$$

$$A\cos\alpha\sin(\sigma-\alpha)+B\cos\beta\sin(\sigma-\beta)+C\cos\gamma\sin(\sigma-\gamma)=0,$$

所以有

$$(A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma)\cos\sigma=-(A\sin\alpha\cos\alpha+B\sin\beta\cos\beta+C\sin\gamma\cos\gamma)\sin\sigma \quad ①$$

和 $$(A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma)\sin\sigma=(A\sin\alpha\cos\alpha+B\sin\beta\cos\beta+C\sin\gamma\cos\gamma)\cos\sigma. \quad ②$$

①式乘以 $\sin\sigma$，②式乘以 $\cos\sigma$，再把得到的两式相减，得

$$A\sin\alpha\cos\alpha+B\sin\beta\cos\beta+C\sin\gamma\cos\gamma=0,$$

这就容易得到要求证的式子.

注 把①式乘以 $\cos\sigma$，②式乘以 $\sin\sigma$，然后把得到的式子相加，就得到

$$A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma=0.$$

这是由本题的假设条件可以推导出的另一个结果.

807. 已知 $\cos 315^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 157.5° 的正弦和余弦.

解 因为 157.5° 是第二象限中的角，故余弦为负，所以

$$\cos 157.5^\circ=-\sqrt{\frac{1+\cos 315^\circ}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

同样地

$$\sin 157.5^\circ=+\sqrt{\frac{1-\cos 315^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

808. 设 n 为任意正整数，$-\pi\leq A\leq\pi$，试把 $\cos\frac{A}{2^n}$ 用 $\cos A$ 表示.

解 $2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A,$

故 $4\cos^2\frac{A}{2}=2+2\cos A,$

$$2\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2+2\cos A},$$

又 $2\cos^2\frac{A}{4}=1+\cos\frac{A}{2},$

故 $4\cos^2\frac{A}{4}=2+2\cos\frac{A}{2},$

$$2\cos\frac{A}{4}=\sqrt{2+2\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos A}},$$

同样地，

$$2\cos\frac{A}{8}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cos A}}},$$

继续使用这种方法，可得

$$\cos\frac{A}{2^n}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\cos A}}}.$$

809. 已知 $\cos 60^\circ=\sin 36^\circ\cos A$，$\cos 36^\circ=\sin 60^\circ\cos B$，$\cos C=\cos A\cos B$，$A$、$B$、$C$ 都是锐角. 证明 $A+B+C=90^\circ$.

解 $\cos A=\frac{\cos 60^\circ}{\sin 36^\circ}$，所以(因为 A 是锐角)

$$\sin A=\frac{\sqrt{\sin^2 36^\circ-\cos^2 60^\circ}}{\sin 36^\circ}.$$

而

$$\sin^2 36^\circ-\cos^2 60^\circ=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}-\frac{1}{4}=\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2,$$

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{5}-1}{4\sin 36^\circ}.$

由此 $\operatorname{tg} A=\frac{\sqrt{5}-1}{4\cos 60^\circ}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

又 $\cos B=\frac{\cos 36^\circ}{\cos 60^\circ},$

故

$$\sin B=\frac{\sqrt{\sin^2 60^\circ-\cos^2 36^\circ}}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{\sin^2 36^\circ-\cos^2 60^\circ}}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{5}-1}{4\sin 60^\circ},$$

由此，

$$\operatorname{tg} B=\frac{\sqrt{5}-1}{4\cos 36^\circ}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

所以

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1,$$

即 $\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}=1,$

故 $\sin(A+B)=\cos A\cos B=\cos C,$

因为 A、B、C 都是锐角，所以

$$A+B=90^\circ-C,$$

即　　$A+B+C=90°$.

810. 证明

$$4\sin 20°\sin 40°\sin 80°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解　左边$=2\sin 20°(2\sin 40°\sin 80°)$

$$=2\sin 20°(\cos 40°-\cos 120°)$$

$$=2\sin 20°\left(\cos 40°+\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\sin 20°\cos 40°+\sin 20°$$

$$=\sin 60°-\sin 20°+\sin 20°$$

$$=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

811. 证明

$$\sin 36°\sin 30°=\sin^2 33°-\sin^2 3°$$

和　　$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=2.$$

解　$\sin 36°\sin 30°$

$$=\frac{1}{2}(\cos 6°-\cos 66°)$$

$$=\frac{1}{2}[(1-2\sin^2 3°)-(1-2\sin^2 33°)]$$

$$=\sin^2 33°-\sin^2 3°.$$

又

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}-\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}}=2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$$

$$=2.$$

别解　$\sin 36°\sin 30°$

$$=\sin(33°+3°)\sin(33°-3°)$$

$$=(\sin 33°\cos 3°+\cos 33°\sin 3°)\times(\sin 33°\cos 3°-\cos 33°\sin 3°)$$

$$=\sin^2 33°\cos^2 3°-\cos^2 33°\sin^2 3°$$

$$=\sin^2 33°\cos^2 3°+\sin^2 33°\sin^2 3°-\sin^2 33°\sin^2 3°-\cos^2 33°\sin^2 3°$$

$$=\sin^2 33°(\cos^2 3°+\sin^2 3°)-(\sin^2 33°+\cos^2 33°)\sin^2 3°$$

$$=\sin^2 33°-\sin^2 3°.$$

812. 证明 $$\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^8+\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)^8+\left(\cos\frac{5\pi}{8}\right)^8+\left(\cos\frac{7\pi}{8}\right)^8=\frac{17}{16}.$$

解　$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$,

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\cos\frac{5\pi}{8}=-\sin\frac{\pi}{8}=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\cos\frac{7\pi}{8}=-\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

由此，求它们的八次方之和就可得证。

别解　$\cos^8\frac{\pi}{8}+\cos^8\frac{3\pi}{8}+\cos^8\frac{5\pi}{8}+\cos^8\frac{7\pi}{8}=2\left(\cos^8\frac{\pi}{8}+\cos^8\frac{3\pi}{8}\right)$

$$=2\left(\cos^8\frac{\pi}{8}+\sin^8\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\frac{1}{32}\left(\cos\pi+28\cos\frac{\pi}{2}+35\right)$$

$$=\frac{34}{32}=\frac{17}{16}.$$

813. 证明

$$\cos 55°\cos 65°\cos 175°=-\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}.$$

解　$\cos 55°\cos 65°\cos 175°$

$$=\frac{1}{2}(\cos 10°+\cos 120°)\cos 175°$$

$$=\frac{1}{4}(\cos 165°+\cos 185°)+\frac{1}{4}(\cos 55°+\cos 295°)$$

$$=\frac{1}{4}(-\cos 15°+\cos 175°+\cos 55°+\cos 65°)$$

$$=\frac{1}{4}(-\cos 15°-\cos 5°+2\cos 60°\cos 5°)$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 15°=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}.$$

814. 证明 $$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\times\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

解　左边 $=\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 36^\circ\cos 48^\circ$

$\times\cos 60^\circ\cos 72^\circ\cos 84^\circ$

$=\cos 60^\circ(\cos 12^\circ\cos 48^\circ)$

$\times(\cos 24^\circ\cos 84^\circ)\cos 36^\circ\cos 72^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 36^\circ)$

$\times\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 108^\circ)$

$\times\cos 36^\circ\sin 18^\circ$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}+\cos 36^\circ\right)$

$\times\left(\frac{1}{2}-\sin 18^\circ\right)\cos 36^\circ\sin 18^\circ$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}+1-2\sin^2 18^\circ\right)$

$\times\left(\frac{1}{2}-\sin 18^\circ\right)$

$\times(1-2\sin^2 18^\circ)\sin 18^\circ$,

但因 $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，所以

左边 $=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left[\frac{3}{2}-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\right]$

$\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left[1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\right]$

$\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{4}$

$\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{9-5}{16}\cdot\frac{5-1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^7$.

815. 求 $\operatorname{tg}97.5^\circ$ 的值。

解　由 $\frac{2\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得

$$\operatorname{tg}15^\circ=2-\sqrt{3},$$

由 $\frac{2\operatorname{tg}7.5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 7.5^\circ}=\operatorname{tg}15^\circ=2-\sqrt{3}$，得

$\operatorname{tg}7.5^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$,

因此，

$\operatorname{tg}97.5^\circ=-\operatorname{ctg}7.5^\circ$

$=-\frac{1}{\operatorname{tg}7.5^\circ}$

$=-\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}$

$=-(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$.

816. 证明

$$\sin 36^\circ\sin 72^\circ\sin 108^\circ\sin 144^\circ=\frac{5}{16}.$$

解　由　$\sin 36^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,

$\sin 72^\circ=\cos 18^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$,

得　左边 $=\sin 36^\circ\cos 18^\circ\cos 18^\circ\sin 36^\circ$

$=\sin^2 36^\circ\cos^2 18^\circ$

$=\frac{1}{16}(10-2\sqrt{5})\frac{1}{16}(10+2\sqrt{5})$

$=\frac{1}{16^2}(100-20)=\frac{1}{16^2}\times 80$

$=\frac{5}{16}$.

817. 证明 $\operatorname{tg}6^\circ\operatorname{tg}42^\circ\operatorname{tg}66^\circ\operatorname{tg}78^\circ=1$.

解　左边 $=\frac{\sin(36^\circ-30^\circ)\sin(36^\circ+30^\circ)}{\cos(36^\circ-30^\circ)\cos(36^\circ+30^\circ)}$

$\times\frac{\sin(60^\circ-18^\circ)\sin(60^\circ+18^\circ)}{\cos(60^\circ-18^\circ)\cos(60^\circ+18^\circ)}$

$=\frac{(\sin^2 36^\circ-\sin^2 30^\circ)}{(\cos^2 30^\circ-\sin^2 36^\circ)}$

$\times\frac{(\sin^2 60^\circ-\sin^2 18^\circ)}{(\cos^2 60^\circ-\sin^2 18^\circ)}$,

但　$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$,

$\cos 30^\circ=\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$\sin 36^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,

$\sin 18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$,

代入上式，得

左边 $=\frac{6-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+2}\times\frac{6+2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-2}$

$=\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}\times\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=1$.

818. 求 $\frac{\operatorname{tg}52.5^\circ+\operatorname{tg}7.5^\circ}{\operatorname{tg}82.5^\circ+\operatorname{tg}37.5^\circ}$ 的值。

解　$\operatorname{tg}82.5^\circ=\operatorname{ctg}7.5^\circ=\frac{1}{\operatorname{tg}7.5^\circ}$,

$$\operatorname{tg}37.5^\circ=\operatorname{ctg}52.5^\circ=\frac{1}{\operatorname{tg}52.5^\circ},$$

所以 原式$=\dfrac{\operatorname{tg}52.5^\circ+\operatorname{tg}7.5^\circ}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}7.5^\circ}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}52.5^\circ}}$

$$=\operatorname{tg}7.5^\circ\operatorname{tg}52.5^\circ,$$

但因为

$$\operatorname{tg}52.5^\circ=\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2,$$

$$\operatorname{tg}7.5^\circ=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1),$$

∴ 原式的值$=(\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2)\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$

$$=[(\sqrt{6}-\sqrt{3})-(\sqrt{2}-2)]\times[(\sqrt{6}-\sqrt{3})+(\sqrt{2}-2)]$$

$$=(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-2)^2$$

$$=3-2\sqrt{2}.$$

819. 证明

$$\cos84^\circ+\cos60^\circ+\cos12^\circ=\cos48^\circ+\cos24^\circ.$$

解 $\cos36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ$

$$=1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

所以

$$\cos36^\circ\sin18^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{4},$$

$$4\cos36^\circ\sin18^\circ=1,$$

$$4\cos36^\circ\sin18^\circ\sin30^\circ=\sin30^\circ=\cos60^\circ,$$

$$2\cos36^\circ(\cos12^\circ-\cos48^\circ)=\cos60^\circ,$$

即 $2\cos36^\circ\cos12^\circ-2\cos36^\circ\cos48^\circ=\cos60^\circ,$

$$\cos48^\circ+\cos24^\circ-(\cos84^\circ+\cos12^\circ)=\cos60^\circ,$$

所以 $\cos84^\circ+\cos60^\circ+\cos12^\circ=\cos48^\circ+\cos24^\circ.$

820. 化简

$$\cos47^\circ-\cos61^\circ-\cos11^\circ+\cos25^\circ.$$

解 原式$=2\sin54^\circ\sin7^\circ-2\sin18^\circ\sin7^\circ$

$$=2\cos36^\circ\sin7^\circ-2\sin18^\circ\sin7^\circ$$

$$=2[(1-2\sin^2 18^\circ)-\sin18^\circ]\sin7^\circ$$

$$=2\left[1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]\sin7^\circ$$

$$=\sin7^\circ.$$

821. 证明

$$1+\operatorname{tg}65^\circ+\operatorname{tg}70^\circ=\operatorname{tg}65^\circ\operatorname{tg}70^\circ.$$

解 设 $1+\operatorname{tg}65^\circ+\operatorname{tg}70^\circ$

$$=\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}65^\circ+\operatorname{tg}70^\circ$$

$$=\frac{P}{\cos45^\circ\cos65^\circ\cos70^\circ},$$

则 $P=\sin45^\circ\cos65^\circ\cos70^\circ+\cos45^\circ\sin65^\circ\cos70^\circ+\cos45^\circ\cos65^\circ\sin70^\circ$

$$=\sin45^\circ\cos65^\circ\cos70^\circ+\cos45^\circ(\sin65^\circ\cos70^\circ+\cos65^\circ\sin70^\circ)$$

$$=\sin45^\circ\cos65^\circ\cos70^\circ+\cos45^\circ\sin135^\circ$$

$$=\sin45^\circ\cos65^\circ\cos70^\circ-\cos135^\circ\sin45^\circ$$

$$=\sin45^\circ\cos65^\circ\cos70^\circ-\sin45^\circ\cos(65^\circ+70^\circ)$$

$$=\sin45^\circ\cos65^\circ\cos70^\circ-\sin45^\circ\times(\cos65^\circ\cos70^\circ-\sin65^\circ\sin70^\circ)$$

$$=\sin45^\circ\sin65^\circ\sin70^\circ,$$

所以 $1+\operatorname{tg}65^\circ+\operatorname{tg}75^\circ$

$$=\frac{\sin45^\circ\sin60^\circ\sin70^\circ}{\cos45^\circ\cos65^\circ\cos70^\circ}$$

$$=\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}65^\circ\operatorname{tg}70^\circ$$

$$=\operatorname{tg}65^\circ\operatorname{tg}70^\circ.$$

822. 求 $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin10^\circ\cos40^\circ$ 的值.

解 原式

$$=\frac{1}{2}(1-\cos20^\circ)+\frac{1}{2}(1+\cos80^\circ)+\frac{1}{2}(\sin50^\circ-\sin30^\circ)$$

$$=1-\frac{1}{2}(\cos20^\circ-\cos80^\circ)+\frac{1}{2}\left(\sin50^\circ-\frac{1}{2}\right)$$

$$=1-\sin50^\circ\sin30^\circ+\frac{1}{2}\sin50^\circ-\frac{1}{4}$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin50^\circ+\frac{1}{2}\sin50^\circ-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

823. 求 $\cos^4 20^\circ+\cos^4 40^\circ+\cos^4 60^\circ+\cos^4 80^\circ$ 的值.

解 $\left(\dfrac{1+\cos40^\circ}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1+\cos80^\circ}{2}\right)^2$

$$+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1+\cos160^\circ}{2}\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(\cos 40°+\cos 80°+\cos 160°)$$
$$+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}(\cos^2 40°+\cos^2 80°+\cos^2 160°)$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\times[(\cos 40°+\cos 80°+\cos 160°)^2-2\cos 40°\cos 80°-2\cos 40°\cos 160°-2\cos 80°\cos 160°]$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{19}{16}.$$

注　$\cos 40°=\cos(60°-20°)$,
$\cos 80°=\cos(60°+20°)$,
$\cos 160°=\cos(180°-20°)$

把上面的式子展开，就可知道有
$$\cos 40°+\cos 80°+\cos 160°=0$$
和
$$\cos 40°\cos 80°+\cos 40°\cos 160°+\cos 80°\cos 160°=-\frac{3}{4}.$$

824. 证明 $\cos^4 22.5°+\cos^4 67.5°+\cos^4 112.5°+\cos^4 157.5°=\frac{3}{2}$.

解　原式左边
$$=\cos^4 22.5°+\cos^4 67.5°+\cos^4(180°-112.5°)+\cos^4(180°-157.5°)$$
$$=\cos^4 22.5°+\cos^4 67.5°+\cos^4 67.5°+\cos^4 22.5°$$
$$=2(\cos^4 22.5°+\cos^4 67.5°)$$
$$=2[\cos^4 22.5°+\sin^4(90°-67.5°)]$$
$$=2(\cos^4 22.5°+\sin^4 22.5°)$$
$$=2[(\cos^2 22.5°+\sin^2 22.5°)^2-2\cos^2 22.5°\sin^2 22.5°]$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 45°\right)$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}.$$

825. 证明
$$\sin^4 22.5°+\sin^4 67.5°+\sin^4 112.5°+\sin^4 157.5°=\frac{3}{2}.$$

解　原式左边 $=2\sin^4 22.5°+2\sin^4 67.5°$
$$=2\sin^4 22.5°+2\cos^4 22.5°$$
$$=2(\sin^2 22.5°+\cos^2 22.5°)^2-4\sin^2 22.5°\cos^2 22.5°$$
$$=2-\sin^2 45°=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

826. 证明
$$16\cos 24°\cos 48°\cos 96°\cos 168°=1.$$

解　原式左边乘以 $\sin 24°$ 后，
$$16\sin 24°\cos 24°\cos 48°\cos 96°\cos 168°$$
$$=8\sin 48°\cos 48°\cos 96°\cos 168°$$
$$=4\sin 96°\cos 96°\cos 168°$$
$$=2\sin 192°\cos 168°$$
$$=2(-\sin 12°)(-\cos 12°)=\sin 24°,$$
从而　$16\cos 24°\cos 48°\cos 96°\cos 168°=1$.

827. 已知 $\alpha=\left(n+\frac{1}{4}\pm\frac{1}{6}\right)\pi$, 证明
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=4.$$

解　$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(n+\frac{1}{4}\pm\frac{1}{6}\right)\pi$
$$=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pm\frac{1}{6}\right)\pi$$
$$=\frac{1\pm\operatorname{tg}\frac{1}{6}\pi}{1\mp\operatorname{tg}\frac{1}{6}\pi}=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{3}\mp1},$$
从而
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{3}\mp1}+\frac{\sqrt{3}\mp1}{\sqrt{3}\pm1}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}\pm1)^2+(\sqrt{3}\mp1)^2}{(3-1)}$$
$$=\frac{2[(\sqrt{3})^2+1^2]}{2}=4.$$

828. 已知 $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\theta}$, 证明：
$$\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\theta=\operatorname{ctg}(\alpha+\theta)+\operatorname{ctg}(\alpha-\beta).$$

解　从已知条件得
$$\sin\theta\sin(\alpha-\beta)=\sin\beta\sin(\alpha+\theta),$$
因而
$$(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\theta)-[\operatorname{ctg}(\alpha+\theta)+\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)]$$
$$=[\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}(\alpha+\theta)]-[\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)]$$
$$=\frac{\sin(\alpha+\theta)\cos\beta-\cos(\alpha+\theta)\sin\beta}{\sin\beta\sin(\alpha+\theta)}-\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos\theta+\cos(\alpha-\beta)\sin\theta}{\sin\theta\sin(\alpha-\beta)}$$
$$=\frac{\sin(\alpha+\theta-\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\theta)}-\frac{\sin(\alpha-\beta+\theta)}{\sin\theta\sin(\alpha-\beta)}$$
$$=\frac{\sin(\alpha-\beta+\theta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\theta)}-\frac{\sin(\alpha-\beta+\theta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\theta)}=0.$$

故　$\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\theta=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)+\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$。

829. 求正切分别为$\sqrt{7}+\sqrt{6}$，$\sqrt{7}-\sqrt{6}$的二个锐角的和。

解　设

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{7}+\sqrt{6},\quad \operatorname{tg}\beta=\sqrt{7}-\sqrt{6},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{1-(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})}=\frac{0}{2\sqrt{7}}=0,$$

因为α、β都是锐角，所以$\alpha+\beta$比180°小，又由于$\alpha+\beta$的余切为0，所以$\alpha+\beta$必为90°。

830. 已知$A+B+C=180°$，证明

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+4\cos A\cos B\cos C+1=0.$$

解
$$\cos 2A+\cos 2B=2\cos(A+B)\cos(A-B)=-2\cos C\cos(A-B),$$

$$\cos 2C=2\cos^2C-1=-2\cos C\cos(A+B)-1,$$

所以

$$\begin{aligned}&\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\\&=-2\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]-1\\&=-2\cos C\times 2\cos A\cos B-1\\&=-4\cos A\cos B\cos C-1,\end{aligned}$$

故
$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+4\cos A\cos B\cos C+1=0.$$

831. 已知$\operatorname{tg}\beta$，$\operatorname{tg}2\beta$，$\operatorname{tg}\alpha$成等差数列，证明$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\sin 2\beta$。

解　因为$\operatorname{tg}\beta$，$\operatorname{tg}2\beta$，$\operatorname{tg}\alpha$成等差数列，故

$$2\operatorname{tg}2\beta=\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha,$$

因此
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\beta(3+\operatorname{tg}^2\beta)}{1-\operatorname{tg}^2\beta},$$

代入下式

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

得
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\beta\left(\dfrac{3+\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}-1\right)}{1+\dfrac{\operatorname{tg}^2\beta(3+\operatorname{tg}^2\beta)}{1-\operatorname{tg}^2\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\beta(2+2\operatorname{tg}^2\beta)}{1+2\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^4\beta}=\frac{2\operatorname{tg}\beta(1+\operatorname{tg}^2\beta)}{(1+\operatorname{tg}^2\beta)^2}=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{\sec^2\beta}=\sin 2\beta.$$

832. 证明

$$\frac{\operatorname{tg}5A+\operatorname{tg}3A}{\operatorname{tg}5A-\operatorname{tg}3A}=4\cos 2A\cos 4A.$$

解　左边的分子、分母都乘以$\cos 5A\cos 3A$后，

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{\sin 5A\cos 3A+\cos 5A\sin 3A}{\sin 5A\cos 3A-\cos 5A\sin 3A}\\&=\frac{\sin(5A+3A)}{\sin(5A-3A)}=\frac{\sin 8A}{\sin 2A}\\&=\frac{2\sin 4A\cos 4A}{\sin 2A}\\&=\frac{4\sin 2A\cos 2A\cos 4A}{\sin 2A}\\&=4\cos 2A\cos 4A.\end{aligned}$$

833. 证明

$$\sin^3A\cos^3A=\frac{1}{32}(3\sin 2A-\sin 6A).$$

解
$$\begin{aligned}\sin^3A\cos^3A&=\frac{1}{16}(3\sin A-\sin 3A)\times(3\cos A+\cos 3A)\\&=\frac{1}{16}(9\sin A\cos A-3\sin 3A\cos A+3\cos 3A\sin A-\sin 3A\cos 3A)\\&=\frac{1}{32}[9\sin 2A-6\sin(3A-A)-\sin 6A]\\&=\frac{1}{32}(3\sin 2A-\sin 6A).\end{aligned}$$

834. 证明　$\dfrac{1+\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}A+\operatorname{ctg}A}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2A$.

解
$$\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}A=\frac{2\operatorname{tg}^2A}{1-\operatorname{tg}^2A},$$

$$\therefore\ 1+\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}A=\frac{1+\operatorname{tg}^2A}{1-\operatorname{tg}^2A}=\frac{1}{\cos 2A},$$

另外，
$$\operatorname{tg}A+\operatorname{ctg}A=\frac{2}{\sin 2A},$$

$$\therefore\ \text{原式左边}=\frac{\sin 2A}{2\cos 2A}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2A.$$

别解　因为

$$\operatorname{tg}2A(1-\operatorname{tg}^2A)=2\operatorname{tg}A,$$

所以
$$\operatorname{tg}2A=2\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}^2A,$$

在该式两边除以$\operatorname{tg}A$，得

$$\operatorname{tg}2A\operatorname{ctg}A=2+\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}A,$$

两边加上 $\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}A$,

$$\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}2A\operatorname{ctg}A=2+2\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}A,$$

即 $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2A(\operatorname{tg}A+\operatorname{ctg}A)=1+\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}A,$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}2A=\frac{1+\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}A+\operatorname{ctg}A}.$$

835. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$，求 $\sin 2\theta$ 和 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$。

解 把 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$ 两边平方，得

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{25}{16},$$

故 $$1+\sin 2\theta=\frac{25}{16},$$

从而 $$\sin 2\theta=\frac{9}{16}.$$

另外 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$=\frac{5}{4}\left(1-\frac{9}{32}\right)=\frac{5}{4}\times\frac{23}{32}=\frac{115}{128}.$$

836. 证明

$$16(\cos^6A-\sin^6A)=\cos 6A+15\cos 2A.$$

解 左边 $=16(\cos^2A-\sin^2A)$

$$\times(\cos^4A+\cos^2A\sin^2A+\sin^4A)$$

$$=16\cos 2A[(\cos^2A+\sin^2A)^2-\cos^2A\sin^2A]$$

$$=16\cos 2A\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2A\right).$$

右边 $=4\cos^3 2A-3\cos 2A+15\cos 2A$

$$=16\cos 2A\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos^2 2A\right)$$

$$=16\cos 2A\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(1-\sin^2 2A)\right]$$

$$=16\cos 2A\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2A\right).$$

从而得　　左边=右边.

837. 证明

$$\operatorname{tg}A+2\operatorname{tg}2A+4\operatorname{ctg}4A=\operatorname{ctg}A.$$

解 $2\operatorname{tg}2A+4\operatorname{ctg}4A$

$$=\frac{2\sin 2A}{\cos 2A}+\frac{4\cos 4A}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\sin^2 2A}{\sin 2A\cos 2A}+\frac{2(1-2\sin^2 2A)}{\sin 2A\cos 2A}$$

$$=\frac{2(1-\sin^2 2A)}{\sin 2A\cos 2A}=\frac{2\cos 2A}{\sin 2A}$$

$$=\frac{1-2\sin^2A}{\sin A\cos A},$$

所以 $\operatorname{tg}A+2\operatorname{tg}2A+4\operatorname{ctg}4A$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{1-2\sin^2A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{1-\sin^2A}{\sin A\cos A}=\frac{\cos A}{\sin A}=\operatorname{ctg}A.$$

838. 在三角形 ABC 中，已知

$$\cos A=\frac{a\cos B-b}{a-b\cos B},$$

证明 $$\frac{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A}{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}B}=\frac{a+b}{a-b}$$

即 $$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A}{\sqrt{a+b}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}B}{\sqrt{a-b}}$$

成立.

解 $1-\cos A=\frac{(a+b)(1-\cos B)}{a-b\cos B},$

$$1+\cos A=\frac{(a-b)(1+\cos B)}{a-b\cos B}.$$

$$\therefore\quad \frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{1-\cos B}{1+\cos B},$$

即 $$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A=\frac{a+b}{a-b}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}B.$$

839. 证明

$$\sin^2\frac{A+B}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}+\cos^2\frac{A+B}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}=1-\frac{1}{2}\cos^2A-\frac{1}{2}\cos^2B.$$

解 原式左边

$$=\left(\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)^2$$

$$-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\times\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$=\sin^2A-\frac{1}{2}\sin(A+B)\sin(A-B)$$

$=\sin^2 A-\frac{1}{2}\sin^2 A+\frac{1}{2}\sin^2 B$

$=\frac{1}{2}\sin^2 A+\frac{1}{2}\sin^2 B$

$=1-\frac{1}{2}\cos^2 A-\frac{1}{2}\cos^2 B$。

840. 证明

$$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{1+\sin\theta}.$$

解 $\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}$

$=\pm\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$

$=\pm\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$=\pm\sqrt{1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$=\pm\sqrt{1+\sin\theta}$。

841. 已知 $A+B+C=180°$，证明

$$\sin A\cos A-\sin B\cos B+\sin C\cos C=2\cos A\sin B\cos C.$$

解 $\sin A\cos A-\sin B\cos B+\sin C\cos C$

$=\frac{1}{2}(\sin 2A-\sin 2B+2\sin C\cos C)$

$=\frac{1}{2}[2\cos(A+B)\sin(A-B)+2\sin C\cos C]$

$=-\cos C\sin(A-B)+\sin(A+B)\cos C$

$=\cos C[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$

$=\cos C(2\cos A\sin B)$

$=2\cos A\sin B\cos C$。

842. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}}{\cos A+\cos B+\cos C}=\frac{a+b+c}{2}.$$

解 因为

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{2a\sin B\sin C}{a+b+c},$$

$$2a\sin B\sin C=a\cos A+b\cos B+c\cos C,$$

代入原式，原式左边成为

$$\frac{(a+b+c)\left(a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}\right)}{a(1+\cos A)+b(1+\cos B)+c(1+\cos C)}$$

$$=\frac{(a+b+c)\left(a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}\right)}{2a\cos^2\frac{A}{2}+2b\cos^2\frac{B}{2}+2c\cos^2\frac{C}{2}}$$

$=\frac{a+b+c}{2}$。

843. 在三角形 ABC 中，证明

$$a(\cos B\cos C+\cos A)=b(\cos A\cos C+\cos B)=c(\cos A\cos B+\cos C).$$

解 $a(\cos B\cos C+\cos A)$

$=a[\cos B\cos C-\cos(B+C)]$

$=a\sin B\sin C=\frac{a}{\sin A}\sin A\sin B\sin C$，

同理，$b(\cos A\cos C+\cos B)$

$=\frac{b}{\sin B}\sin A\sin B\sin C$，

$c(\cos A\cos B+\cos C)$

$=\frac{c}{\sin C}\sin A\sin B\sin C$。

因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以 $a(\cos B\cos C+\cos A)$

$=b(\cos A\cos C+\cos B)$

$=c(\cos A\cos B+\cos C)$。

844. 证明：在三角形 ABC 中，

$$4(a\sin A+b\sin B+c\sin C)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=(a+b+c)(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C).$$

解 因为

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

所以 $(a\sin A+b\sin B+c\sin C)$

$=2R(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$， ①

又 $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=\sin A+\sin B+\sin C$

$=\frac{1}{2R}(a+b+c)$。 ②

把①、②两式两边分别相乘，得

$4(a\sin A+b\sin B+c\sin C)$

$\times\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=(a+b+c)(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$。

845. 证明：在三角形 ABC 中，

$$\frac{a\cos 2(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{b\cos 2(C-A)}{\cos C\cos A}+\frac{c\cos 2(A-B)}{\cos A\cos B}=8(a\cos A+b\cos B+c\cos C).$$

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$, 则

$$\frac{a\cos 2(B-C)}{\cos B\cos C}=\frac{k\sin A\cos 2(B-C)}{\cos B\cos C}$$

$$=\frac{k\sin 2A\cos 2(B-C)}{2\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{k[\sin(2A+2B-2C)+\sin(2A+2C-2B)]}{4\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{-k(\sin 4C+\sin 4B)}{4\cos A\cos B\cos C}.$$

同样地,

$$\frac{b\cos 2(C-A)}{\cos C\cos A}=\frac{-k(\sin 4A+\sin 4C)}{4\cos A\cos B\cos C},$$

$$\frac{c\cos 2(A-B)}{\cos A\cos B}=\frac{-k(\sin 4B+\sin 4A)}{4\cos A\cos B\cos C}.$$

从而 原式左边

$$=\frac{-k(\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C)}{2\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{2k\sin 2A\sin 2B\sin 2C}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=16k\sin A\sin B\sin C$$

$$=4k(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$

$$=8k(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C)$$

$$=8(a\cos A+b\cos B+c\cos C).$$

846. 设 θ 为满足 $\cos\theta=\frac{a-b}{c}$ 的角，证明在任意三角形 ABC 中,

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{(a+b)\sin\theta}{2\sqrt{ab}},$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{c\sin\theta}{2\sqrt{ab}}.$$

其中 $0<\theta<\pi$。

解 $$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{C}{2}}.$$

故 $$\cos\frac{1}{2}(A-B)=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{c},$$

现在，因为设 $\cos\theta=\frac{a-b}{c}$，所以

$$\sin^2\theta=\frac{c^2-(a-b)^2}{c^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2-2ab\cos C-(a-b)^2}{c^2}$$

$$=\frac{2ab(1-\cos C)}{c^2}=\frac{4ab}{c^2}\sin^2\frac{C}{2},$$

故 $$\sin\theta=\frac{2\sqrt{ab}}{c}\sin\frac{C}{2},$$

所以 $$\cos\frac{1}{2}(A-B)=\frac{(a+b)\sin\theta}{2\sqrt{ab}},$$

另外， $$\sin\theta=\frac{2\sqrt{ab}}{c}\sin\frac{C}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{ab}}{c}\cos\frac{1}{2}(A+B),$$

所以 $$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{c\sin\theta}{2\sqrt{ab}}.$$

847. 已知 $\sec A=\frac{17}{15}$, $\csc B=\frac{61}{11}$, 求 $\sin(A+B)$。

解 因为 $\sec A=\frac{17}{15}$, 所以 $\cos A=\frac{15}{17}$,

从而 $$\sin A=\pm\sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$=\pm\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\pm\frac{8}{17}.$$

因为 $\csc B=\frac{61}{11}$, 所以 $\sin B=\frac{11}{61}$,

从而 $$\cos B=\pm\sqrt{1-\left(\frac{11}{61}\right)^2}=\pm\frac{60}{61},$$

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$=\left(\pm\frac{8}{17}\right)\left(\pm\frac{60}{61}\right)+\frac{15}{17}\times\frac{11}{61}=\frac{645}{1037},$$

或 上式 $$=\left(\pm\frac{8}{17}\right)\left(\mp\frac{60}{61}\right)+\frac{15}{17}\times\frac{11}{61}$$

$$=-\frac{315}{1037}.$$

848. 已知 $\cos A=\frac{3}{5}$, $\cos B=-\frac{5}{13}$, 求 $\sin(A+B)$ 的值。

解 因为 $\cos A=\frac{3}{5}$, 所以 $\sin A=\pm\frac{4}{5}$; 因为 $\cos B=-\frac{5}{13}$, 所以 $\sin B=\pm\frac{12}{13}$. 所以

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$$

$$=\left(\pm\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-5}{13}\right)+\left(\pm\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\pm\frac{16}{65},$$

或 上式 $$=\left(\mp\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-5}{13}\right)+\left(\pm\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$=\pm\frac{56}{65}$.

849. 已知 $90°<\theta<180°$，$\operatorname{tg}\theta=-\frac{5}{12}$，求 $\cos\theta$、$\sin\theta$ 和 $\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$ 的值．

解　$\sqrt{12^2+5^2}=13$，所以

$$\cos\theta=-\frac{12}{13},\quad \sin\theta=\frac{5}{13},$$

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\sin(\theta+45°)\\&=\sqrt{2}(\sin\theta\cos45°+\cos\theta\sin45°)\\&=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\\&=\sin\theta+\cos\theta\\&=-\frac{12}{13}+\frac{5}{13}=-\frac{7}{13}.\end{aligned}$$

850. 证明

$\operatorname{tg}(45°+A)+\operatorname{tg}(45°-A)=2\sec2A$.

解　$45°+A$ 和 $45°-A$ 是互余的角，故

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}(45°+A)+\operatorname{tg}(45°-A)\\&=\operatorname{tg}(45°+A)+\operatorname{ctg}(45°+A)\\&=2\csc2(45°+A)=2\csc(90°+2A)\\&=2\sec2A.\end{aligned}$$

851. 解下面的联立方程式：

(1) $\sin(2x-y)=\cos(x+2y)=\frac{1}{2}$;

(2) $a\cos^2x+b\sin^2x=p\cos^2y$,　(i)

$a\sin^2x+b\cos^2x=q\sin^2y$.　(ii)

解　(1) $\sin(2x-y)=\frac{1}{2}$,　①

$\cos(x+2y)=\frac{1}{2}$.　②

由①得，$2x-y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$,　③

由②得，$x+2y=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.　④

用③的 2 倍加上④，得

$$5x=4n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3},$$

故　$x=\frac{4}{5}n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{15}\pm\frac{\pi}{15}$

$=\frac{\pi}{15}[12n+(-1)^n\pm1]$.

另外，用④的 2 倍减去③，得

$$5y=3n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{6}\pm\frac{2\pi}{3},$$

所以

$$y=\frac{3}{5}n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{30}\pm\frac{2}{15}\pi$$

$$=\frac{\pi}{30}[18n-(-1)^n\pm4].$$

因此 x、y 的值分别为

$$\frac{\pi}{15}[12n+(-1)^n\pm1],$$

$$\frac{\pi}{30}[18n-(-1)^n\pm4].$$

(2) 把(i)、(ii)两边相加，得

$$a(\cos^2x+\sin^2x)+b(\sin^2x+\cos^2x)=p\cos^2y+q\sin^2y,$$

即　$a+b=p(1-\sin^2y)+q\sin^2y$,

故　$(p-q)\sin^2y=p-a-b$,

$$\sin^2y=\frac{p-a-b}{p-q}.\qquad\text{(iii)}$$

又从(ii)、(iii)得，

$$a\sin^2x+b(1-\sin^2x)=\frac{q(p-a-b)}{p-q},$$

所以　$(a-b)\sin^2x=\frac{q(p-a-b)}{p-q}-b$

$=\frac{q(p-a)-bp}{p-q}$.

从而　$\sin x=\pm\sqrt{\frac{q(p-a)-bp}{(a-b)(p-q)}}$.

因此，$\sin x$、$\sin y$ 的值分别是

$$\pm\sqrt{\frac{q(p-a)-bp}{(a-b)(p-q)}},\quad \pm\sqrt{\frac{p-a-b}{p-q}}.$$

852. 证明下面各式：

(1) $\cos4\theta\cos\theta+\sin4\theta\sin\theta$

$=\cos2\theta\cos\theta-\sin2\theta\sin\theta$;

(2) $\sin5A+\sin2A-\sin A$

$=\sin2A(2\cos3A+1)$;

(3) $\sin\alpha-\sin2\alpha+\sin3\alpha$

$=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{3\alpha}{2}$;

(4) $\sin2A\cos A+\cos4A\sin A$

$=\sin3A\cos2A$.

解　(1) 原式左边

$$\begin{aligned}&=\cos(4\theta-\theta)=\cos3\theta\\&=\cos(2\theta+\theta)\\&=\cos2\theta\cos\theta-\sin2\theta\sin\theta.\end{aligned}$$

(2) 原式左边 $=\sin5A-\sin A+\sin2A$

$=2\cos3A\sin2A+\sin2A$

$=\sin2A(2\cos3A+1)$.

(3) 原式左边

$=-2\cos\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{3}{2}\alpha\cos\frac{3}{2}\alpha$

$=2\cos\frac{3}{2}\alpha\left(\sin\frac{3}{2}\alpha-\sin\frac{1}{2}\alpha\right)$

$=2\cos\frac{3}{2}\alpha\cdot2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$

$=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{3}{2}\alpha.$

(4) 原式左边

$=\frac{1}{2}(\sin3A+\sin A+\sin5A-\sin3A)$

$=\frac{1}{2}\times2\sin3A\cos2A$

$=\sin3A\cos2A.$

853. 证明下列各式:

(1) $\cos3A\sin2A-\cos4A\sin A$
$=\cos2A\sin A;$

(2) $\sin\theta\sin2\theta+\sin3\theta\sin6\theta$
$=\sin4\theta\sin5\theta;$

(3) $\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)+\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)$
$+\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)=0;$

(4) $\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)$
$+\sin C\sin(A-B)=0;$

(5) $\sin(A+B)\cos(A-B)$
$=\sin A\cos A+\sin B\cos B.$

解 (1) 原式左边

$=\frac{1}{2}(\sin5A-\sin A-\sin5A+\sin3A)$

$=\frac{1}{2}(\sin3A-\sin A)=\cos2A\sin A.$

(2) 原式左边

$=\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos3\theta+\cos3\theta-\cos9\theta)$

$=\frac{1}{2}\times2\sin5\theta\sin4\theta=\sin4\theta\sin5\theta.$

(3) 原式左边

$=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha-\beta+\gamma)$
$+\sin(\beta+\gamma-\alpha)-\sin(\beta-\gamma+\alpha)$
$+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\gamma-\alpha+\beta)]$
$=0.$

(4) 原式左边

$=\frac{1}{2}[\cos(A-B+C)-\cos(A+B-C)$
$+\cos(B-C+A)-\cos(B+C-A)$
$+\cos(C-A+B)-\cos(C+A-B)]$
$=0.$

(5) 原式左边

$=\frac{1}{2}(\sin2A+\sin2B)$

$=\frac{1}{2}(2\sin A\cos A+2\sin B\cos B)$

$=\sin A\cos A+\sin B\cos B.$

854. 在$\angle A$为直角的三角形ABC中,若$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$, a, $b>0$, φ为锐角. 证明

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi)},$$

$$c=\frac{a\sqrt{\cos2\varphi}}{\cos\varphi}.$$

解 $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}}$

$=\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}}=\sqrt{\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi)}.$

另外,

$\frac{a\sqrt{\cos2\varphi}}{\cos\varphi}=a\sqrt{\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}$

$=a\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\varphi}=a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

$=\sqrt{a^2-b^2}=c.$

855. 在三角形ABC中,证明下列各式:

(1) $\sin^2A-\sin^2B+\sin^2C$
$=2\sin A\cos B\sin C;$

(2) $\sin^2A+2\sin B\sin C\cos A$
$=\sin^2B+\sin^2C;$

(3) $\sin8A+\sin8B+\sin8C$
$=-4\sin4A\sin4B\sin4C;$

(4) $\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{\cos A-\cos B+\cos C+1}=\operatorname{tg}\frac{A}{2};$

(5) $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B=\sec A\sec B\sin C;$

(6) $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A$
$=1+\sec A\sec B\sec C.$

解 (1) 原式左边

$=\frac{1}{2}(1-\cos2A-1+\cos2B)+\sin^2C$

$=\sin(A+B)\sin(A-B)+\sin^2C$

$=\sin(A+B)\sin(A-B)+\sin^2(A+B)$

$=\sin(A+B)[\sin(A-B)+\sin(A+B)]$

$=\sin C\cdot 2\sin A\cos B$

$=2\sin A\cos B\sin C$.

(2) 方法一：

$$\text{原式左边}=\sin^2(B+C)-[\cos(B-C)-\cos(B+C)]\cos(B+C)$$
$$=\sin^2(B+C)+\cos^2(B+C)-\cos(B+C)\cos(B-C)$$
$$=1-\cos^2 B+\sin^2 C$$
$$=\sin^2 B+\sin^2 C.$$

方法二：把原式改写成

$$\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C=-2\sin B\sin C\cos A.$$

这个式子的左边

$=\sin(A+B)\sin(A-B)-\sin^2(A+B)$

$=-\sin(A+B)[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$

$=-\sin C\cdot 2\cos A\sin B$

$=-2\sin B\sin C\cos A$.

(3) 原式的左边

$=\sin 8A+\sin 8B-\sin(8A+8B)$

$=2\sin(4A+4B)\cos(4A-4B)-2\sin(4A+4B)\cos(4A+4B)$

$=2\sin(4A+4B)[\cos(4A-4B)-\cos(4A+4B)]$

$=-2\sin 4C\cdot 2\sin 4A\sin 4B$

$=-4\sin 4A\sin 4B\sin 4C$.

(4) $$\text{原式左边}=\frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

(5) $$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}=\frac{\sin C}{\cos A\cos B}=\sec A\sec B\sin C.$$

(6) $\cos(A+B+C)$

$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C$,

但因为 $A+B+C=180°$，故

$$\cos(A+B+C)=-1.$$

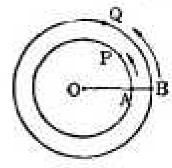
因此，上面的恒等式变为

$$\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C=\cos A\cos B\cos C+1.$$

上式中两边各除以 $\cos A\cos B\cos C$，得

$$\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=1+\sec A\sec B\sec C.$$

856. P、Q 两点分别在以 O 为圆心，半径为 3cm、4cm 的同心圆上，以每秒 $\frac{1}{3}$ 弧度、$\frac{1}{2}$ 弧度的匀角速度照图示的方向运动。点 P、Q 的出发的位置分别为 A、B，t 秒后 P、Q 间的距离记为 x，试导出 x 和 t 之间的关系式，其中 $0\leqslant t\leqslant 10$。



解 设 O 为坐标系的原点，OA 为 x 轴，P、Q 的坐标为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，单位取 cm。出发 t 秒之后，

$$x_1=3\cos\frac{t}{3},\quad y_1=3\sin\frac{t}{3},$$
$$x_2=4\cos\frac{t}{2},\quad y_2=4\sin\frac{t}{2}.$$

$$x=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{\left(4\cos\frac{t}{2}-3\cos\frac{t}{3}\right)^2+\left(4\sin\frac{t}{2}-3\sin\frac{t}{3}\right)^2}$$
$$=\sqrt{16+9-24\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{t}{3}\right)}$$
$$=\sqrt{25-24\cos\frac{t}{6}}.$$

857. 在三角形 ABC 中，证明下列各式：

(1) $\sin(2A+2B)=-\sin 2C$;

(2) $\cos(2A+2B)=\cos 2C$;

(3) $\operatorname{tg}(2A+2B)=-\operatorname{tg}2C$;

(4) $\sin\frac{3A+3B}{2}=-\cos\frac{3C}{2}$;

(5) $\cos\frac{3A+3B}{2}=-\sin\frac{3C}{2}$;

(6) $\operatorname{tg}\frac{3A+3B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{3C}{2}$.

解 (1) $\sin(2A+2B)$

$=-\sin[360°-(2A+2B)]$

$=-\sin[(2A+2B+2C)-(2A+2B)]$

$=-\sin 2C$.

(2) $\cos(2A+2B)=\cos[360°-(2A+2B)]$

$=\cos[(2A+2B+2C)-(2A+2B)]$

$=\cos 2C$.

(3) $\operatorname{tg}(2A+2B)=\dfrac{\sin(2A+2B)}{\cos(2A+2B)}$

$$=-\frac{\sin 2C}{\cos 2C}=-\operatorname{tg}2C.$$

(4) $\sin\dfrac{3A+3B}{2}$

$$=-\cos\left(270^\circ-\frac{3A+3B}{2}\right)$$
$$=-\cos\left(\frac{3A+3B+3C}{2}-\frac{3A+3B}{2}\right)$$
$$=-\cos\frac{3C}{2}.$$

(5) $\cos\dfrac{3A+3B}{2}$

$$=-\sin\left(270^\circ-\frac{3A+3B}{2}\right)=-\sin\frac{3C}{2}.$$

(6) $\operatorname{tg}\dfrac{3A+3B}{2}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(3A+3B)}{\cos\frac{1}{2}(3A+3B)}$

$$=\frac{-\cos\frac{3C}{2}}{-\sin\frac{3C}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{3C}{2}.$$

858. 在三角形 ABC 中，已知 $\cos A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{12}{13}$，证明 $\cos C=-\dfrac{16}{65}$。

解 $\cos C=-\cos(A+B)$
$$=-(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$$
$$=\sin A\sin B-\cos A\cos B$$
$$=\sqrt{1-\cos^2 A}\sqrt{1-\cos^2 B}-\cos A\cos B$$
$$=\sqrt{1-\frac{3^2}{5^2}}\sqrt{1-\frac{12^2}{13^2}}-\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}$$
$$=\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}-\frac{3\times12}{5\times13}=-\frac{16}{65}.$$

859. 已知 $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$，用 t 表示 $\cos x$。

解 $$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1,$$

而 $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$，$\therefore\ \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}=t^2$，

$$\therefore\ \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=t^2,$$

$$\therefore\ \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=1+t^2.$$

$$\therefore\ \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+t^2},$$

$$\therefore\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

860. 已知 $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求下式的值：

$$(2-\cos 2A)(2-\cos 2B).$$

解 把 $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 两边平方，

$$\frac{\sin^2 A\sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}=\frac{1}{3},$$

去分母，得

$$3\sin^2 A\sin^2 B=\cos^2 A\cos^2 B,$$
$$3\sin^2 A\sin^2 B=(1-\sin^2 A)(1-\sin^2 B),$$
$$\therefore\ 2\sin^2 A\sin^2 B+\sin^2 A+\sin^2 B=1.\quad ①$$

又由二倍角公式得

$$(2-\cos 2A)(2-\cos 2B)$$
$$=[2-(1-2\sin^2 A)][2-(1-2\sin^2 B)]$$
$$=(1+2\sin^2 A)(1+2\sin^2 B)$$
$$=2(2\sin^2 A\sin^2 B+\sin^2 A+\sin^2 B)+1,$$

把①代入上式，得　原式 $=2\times1+1=3$。

注　把 $\sin^2 A$、$\sin^2 B$ 化成 $\cos^2 A$、$\cos^2 B$ 也同样可解。

861. 把 $\dfrac{2}{3}$，$\sin 29^\circ$，$\cos 43^\circ$ 按大小排列。

解 $$\sin 29^\circ<\sin 30^\circ=\frac{1}{2}<\frac{2}{3},$$

而 $$\cos 43^\circ>\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{2}{3},$$

所以 $$\cos 43^\circ>\frac{2}{3}>\sin 29^\circ.$$

862. 证明

$$\sec 2A-\cos 2A=\frac{4\operatorname{tg}^2 A}{1-\operatorname{tg}^4 A}.$$

解 $\dfrac{1}{\cos 2A}-\cos 2A$

$$=\frac{1-\cos^2 2A}{\cos 2A}=\frac{\sin^2 2A}{\cos 2A}$$
$$=\frac{4\sin^2 A\cos^2 A}{\cos^2 A-\sin^2 A}=\frac{4\sin^2 A}{1-\operatorname{tg}^2 A}$$
$$=\frac{4\sin^2 A\sec^2 A}{1-\operatorname{tg}^4 A}=\frac{4\operatorname{tg}^2 A}{1-\operatorname{tg}^4 A}.$$

863． 证明 $\operatorname{ctg}^2 A-\operatorname{tg}^2 A=\dfrac{4\operatorname{ctg}2A}{\sin 2A}$．

解　$\operatorname{tg}A+\operatorname{ctg}A=\dfrac{2}{\sin 2A}$，

而　$\operatorname{ctg}A-\operatorname{tg}A=2\operatorname{ctg}2A$，

所以　原式 $=(\operatorname{ctg}A+\operatorname{tg}A)(\operatorname{ctg}A-\operatorname{tg}A)$

$$=\frac{4\operatorname{ctg}2A}{\sin 2A}.$$

864． 已知 $A+B+C=360°$，证明

(1) $\sin A+\sin B+\sin C$
$$=4\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2};$$

(2) $\cos A+\cos B+\cos C+1$
$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}.$$

解　(1) 原式左边

$$=\sin A+\sin B-\sin(A+B)$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\quad-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$
$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{A+C}{2}$$
$$=4\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}.$$

(2) 原式左边

$$=\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\quad+2\cos\frac{A+B+2C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}\right.$$
$$\quad\left.+\cos\frac{A+B+2C}{2}\right)$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}$$
$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}.$$

865． 已知 $x\cos A+y\sin A=x\cos B+y\sin B=z$，$A-B\neq 2k\pi$，$A+B\neq k\pi$，证明

$$\frac{x}{\cos\dfrac{A+B}{2}}=\frac{y}{\sin\dfrac{A+B}{2}}=\frac{z}{\cos\dfrac{A-B}{2}}.$$

解　由已知条件，

$$x(\cos A-\cos B)=y(\sin B-\sin A),$$

即
$$2x\sin\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2}$$
$$=2y\cos\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2}.$$

因为 $A-B\neq 2k\pi$，所以 $\sin\dfrac{B-A}{2}\neq 0$，又因为 $A+B\neq k\pi$，故

$$\frac{x}{\cos\dfrac{A+B}{2}}=\frac{y}{\sin\dfrac{A+B}{2}}$$
$$=\frac{x\cos A+y\sin A}{\cos\dfrac{A+B}{2}\cos A+\sin\dfrac{A+B}{2}\sin A}$$
$$=\frac{z}{\cos\dfrac{A-B}{2}}.$$

866． 证明 $\operatorname{tg}^2\left(45°+\dfrac{1}{2}A\right)=\dfrac{\csc A+1}{\csc A-1}$．

解　$\operatorname{tg}^2\left(45°+\dfrac{1}{2}A\right)=\dfrac{\sin^2\left(45°+\dfrac{1}{2}A\right)}{\cos^2\left(45°+\dfrac{1}{2}A\right)}$

$$=\frac{1-\cos(90°+A)}{1+\cos(90°+A)}=\frac{1+\sin A}{1-\sin A},$$

把上式右边的分子分母同除以 $\sin A$，得

$$\operatorname{tg}^2\left(45°+\frac{1}{2}A\right)=\frac{\csc A+1}{\csc A-1}.$$

867． 证明

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}A\csc^2\frac{A}{2}-\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}A.$$

解　原式左边

$$=\operatorname{tg}A\left(\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}A}-\frac{\cos A}{2\sin^2\frac{1}{2}A}\right)$$
$$=\operatorname{tg}A\cdot\frac{1-\cos A}{2\sin^2\frac{1}{2}A}=\operatorname{tg}A.$$

868． 证明 $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}=2$．

解　$\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}$

$$=\frac{\sin 3A\cos A-\cos 3A\sin A}{\sin A\cos A}$$
$$=\frac{\sin(3A-A)}{\sin A\cos A}=\frac{\sin 2A}{\sin A\cos A}$$
$$=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A\cos A}=2.$$

869. 把下列各式化为积的形式：

(1) $\sin 10°+\sin 20°-\sin 30°$;

(2) $1+\sin\alpha$;

(3) $1-\sin\alpha$;

(4) $\cos 2A-\cos 3A+2\sin\frac{3}{2}A\sin\frac{1}{2}A$;

(5) $\cos^2(x-y)+\cos^2(y-z)+\cos^2(z-x)-1$;

(6) $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z+\sin^2(x+y+z)-2$.

解 (1) 原式
$$=2\sin 15°\cos 5°-2\sin 15°\cos 15°$$
$$=2\sin 15°(\cos 5°-\cos 15°)$$
$$=4\sin 15°\sin 10°\sin 5°.$$

(2) $1+\sin\alpha=\sin 90°+\sin\alpha$
$$=2\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right).$$

(3) $1-\sin\alpha=\sin 90°-\sin\alpha$
$$=2\cos\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right).$$

(4) 原式$=2\sin\frac{5}{2}A\sin\frac{1}{2}A$
$$+2\sin\frac{3}{2}A\sin\frac{1}{2}A$$
$$=2\sin\frac{1}{2}A\left(\sin\frac{5}{2}A+\sin\frac{3}{2}A\right)$$
$$=4\sin\frac{1}{2}A\sin 2A\cos\frac{1}{2}A$$
$$=2\sin 2A\sin A.$$

(5) 原式$=\frac{1}{2}[1+\cos 2(x-y)+1+\cos 2(y-z)+2\cos^2(z-x)-2]$
$$=\frac{1}{2}[2\cos(x-z)\cos(x-2y+z)+2\cos^2(z-x)]$$
$$=\cos(z-x)[\cos(x-2y+z)+\cos(z-x)]$$
$$=2\cos(z-x)\cos(y-z)\cos(x-y).$$

(6) 原式$=\frac{1}{2}[1-\cos 2x+1-\cos 2y+1-\cos 2z+1-\cos 2(x+y+z)-4]$
$$=-\frac{1}{2}[2\cos(x+y)\cos(x-y)+2\cos(x+y+2z)\cos(x+y)]$$
$$=-\cos(x+y)[\cos(x-y)+\cos(x+y+2z)]$$
$$=-2\cos(x+y)\cos(x+z)\times\cos(y+z).$$

870. 已知 $\operatorname{tg}\theta=\frac{A}{B}$，证明
$$A\cos\omega+B\sin\omega=\pm\sqrt{A^2+B^2}\sin(\theta+\omega).$$

解 $A\cos\omega+B\sin\omega$
$$=B\operatorname{tg}\theta\cos\omega+B\sin\omega$$
$$=B\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\omega+\sin\omega\right)$$
$$=\frac{B}{\cos\theta}(\sin\theta\cos\omega+\cos\theta\sin\omega)$$
$$=B\sec\theta\sin(\theta+\omega),$$

$\because$ $|B\sec\theta|=|B\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}|$
$$=\left|B\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}\right|=\sqrt{A^2+B^2},$$

$\therefore$ 原式左边$=\pm\sqrt{A^2+B^2}\sin(\theta+\omega)$.

注　在最后答案里

(i) 当 $B\cos\theta>0$ 取 $+$,

(ii) 当 $B\cos\theta<0$ 取 $-$.

871. 把式子
$$\theta+\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6} \quad ①$$
和
$$\theta-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3} \quad ②$$
两边取正弦和余弦，证明这两个式子代表相同的一些角.

解 在①式两边取正弦，得
$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left[n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right],$$
$$\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{6},$$
即
$$\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2},$$
$$\therefore\quad \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad ③$$

在②式两边取余弦，得
$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{3},$$

$$\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad \cos\theta+\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad ④$$

由此可见，③和④是完全相同的方程式．故①、②表示同样的一组角．

注　在①中依次设$n=0, 1, 2, \cdots$，则

$$\theta=-\frac{\pi}{12},\ \frac{7\pi}{12},\ \frac{23\pi}{12},\cdots;$$

设$n=-1, -2, -3, \cdots$，则

$$\theta=-\frac{17\pi}{12},\ -\frac{25\pi}{12},\ -\frac{41\pi}{12},\cdots;$$

又在②中依次设$n=0, 1, 2, \cdots$，则

$$\theta=-\frac{\pi}{12},\ \frac{7\pi}{12},\ \frac{23\pi}{12},\ \frac{31\pi}{12},\ \cdots;$$

设$n=-1, -2, \cdots$，则

$$\theta=-\frac{17\pi}{12},\ -\frac{25\pi}{12},\ -\frac{41\pi}{12},\ -\frac{49\pi}{12},\cdots.$$

由此可知两式表示的角是完全相同的．

872． 证明下列各式：

(1) $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 5\alpha+\cos\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha;$

(2) $\dfrac{\sin A\sin 2A+\sin A\sin 4A+\sin 2A\sin 7A}{\sin A\cos 2A+\sin 2A\cos 5A+\sin A\cos 8A}$
$=\operatorname{tg}5A.$

解　(1) 原式左边

$$=\frac{\sin 2\alpha+2\cos 3\alpha\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+2\cos 3\alpha\cos 2\alpha}$$

$$=\frac{\sin 2\alpha(1+2\cos 3\alpha)}{\cos 2\alpha(1+2\cos 3\alpha)}=\operatorname{tg}2\alpha.$$

(2) 原式左边

$$=\frac{\sin A(\sin 2A+\sin 4A+2\cos A\sin 7A)}{\sin A(\cos 2A+2\cos A\cos 5A+\cos 8A)}$$

$$=\frac{2\sin 3A\cos A+2\cos A\sin 7A}{2\cos 5A\cos 3A+2\cos A\cos 5A}$$

$$=\frac{2\cos A(\sin 3A+\sin 7A)}{2\cos 5A(\cos 3A+\cos A)}$$

$$=\frac{2\cos A\sin 5A\cos 2A}{2\cos 5A\cos 2A\cos A}=\frac{\sin 5A}{\cos 5A}$$

$$=\operatorname{tg}5A.$$

873． 已知$2A+B=90°$，证明

$$\cos A=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sin B)}.$$

解　因为　$2A+B=90°$，

所以　$\cos 2A=\sin B,$

即　$2\cos^2 A-1=\sin B,$

故　$\cos^2 A=\dfrac{1}{2}(1+\sin B),$

从而　$\cos A=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\sin B)}.$

874． 证明

$$\frac{\cos 3\alpha-\sin\beta\sin 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin 3\alpha+\sin\beta\cos 5\alpha-\sin 7\alpha}$$

的值与β无关．

解　原式$=\dfrac{2\sin 5\alpha\sin 2\alpha-\sin\beta\sin 5\alpha}{-2\sin 2\alpha\cos 5\alpha+\sin\beta\cos 5\alpha}$

$$=\frac{\sin 5\alpha(2\sin 2\alpha-\sin\beta)}{-\cos 5\alpha(2\sin 2\alpha-\sin\beta)}$$

$$=-\operatorname{tg}5\alpha.$$

因此，它的值与β无关．

875． 把$\cos(30°+\alpha)+\sin(30°-\alpha)$变形成$k\sin(45°-\alpha)$，并求$k$的值．

解　$\cos(30°+\alpha)+\sin(30°-\alpha)$

$$=\sin(60°-\alpha)+\sin(30°-\alpha)$$

$$=2\sin(45°-\alpha)\cos 15°$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\sin(45°-\alpha),$$

故

$$k=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\frac{2.449489\cdots+1.414213\cdots}{2}$$

$$\approx\frac{3.86370}{2}\approx 1.93185.$$

876． 证明下列各式：

(1) $\dfrac{\cos A}{1-\sin A}=\operatorname{tg}\left(45°+\dfrac{A}{2}\right);$

(2) $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\sin 3B}{\sin B}$
$=4\sin(A+B)\sin(B-A);$

(3) $\dfrac{\sin 3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha;$

(4) $\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}$
$+\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}=0.$

解　(1) 原式左边$=\dfrac{\cos^2\dfrac{A}{2}-\sin^2\dfrac{A}{2}}{1-2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}$

$$=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)^2}=\frac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right).$$

(2) 原式左边

$$=\frac{3\sin A-4\sin^3 A}{\sin A}-\frac{3\sin B-4\sin^3 B}{\sin B}$$

$$=3-4\sin^2 A-3+4\sin^2 B$$

$$=4\sin(A+B)\sin(B-A).$$

别解　原式左边

$$=\frac{\sin 3A}{\sin A}-1-\frac{\sin 3B}{\sin B}+1$$

$$=\frac{\sin 3A-\sin A}{\sin A}-\frac{\sin 3B-\sin B}{\sin B}$$

$$=\frac{2\cos 2A\sin A}{\sin A}-\frac{2\cos 2B\sin B}{\sin B}$$

$$=2(\cos 2A-\cos 2B)$$

$$=4\sin(A+B)\sin(B-A).$$

(3) 原式左边

$$=\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha-4\cos^3\alpha+3\cos\alpha}$$

$$=\frac{3\sin\alpha-3\sin^3\alpha}{3\cos\alpha-3\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

(4) 把原式左边通分，则

分子 $=\cos A\sin(B-C)+\cos B\sin(C-A)+\cos C\sin(A-B)=0$，

分母 $=\cos A\cos B\cos C\neq 0$，

故　　原式左边 $=0$。

877. 证明下列各式：

(1) $\cos^2\theta(1-\operatorname{tg}^2\theta)=\cos 2\theta$；

(2) $\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-1\right)^2=1-\sin\theta$；

(3) $\cos 2A\cos 5A=\cos^2\frac{7A}{2}-\sin^2\frac{3A}{2}$；

(4) $1+\cos 6\theta-\cos 10\theta-\cos 4\theta=4\sin 2\theta\cos 3\theta\sin 5\theta$；

(5) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(1+\sec\alpha)$。

解　(1) 原式左边

$$=\cos^2\theta\times\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta.$$

(2) 原式左边

$$=\sin^2\frac{\theta}{2}\times\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$=\cos^2\frac{\theta}{2}-2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$=1-\sin\theta.$$

(3) 原式左边

$$=\frac{1}{2}(\cos 7A+\cos 3A)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(2\cos^2\frac{7A}{2}-1\right)+\left(1-2\sin^2\frac{3A}{2}\right)\right]$$

$$=\cos^2\frac{7A}{2}-\sin^2\frac{3A}{2}.$$

(4) 原式左边 $=2\cos^2 3\theta-2\cos 7\theta\cos 3\theta$

$$=2\cos 3\theta(\cos 3\theta-\cos 7\theta)$$

$$=4\cos 3\theta\sin 5\theta\sin 2\theta.$$

(5) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$$=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right)$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(1+\sec\alpha).$$

别解

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha+1)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(1+\sec\alpha).$$

878. 证明下列各式:

(1) $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin(A+B)}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$;

(2) $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2(A+B)}=\dfrac{\operatorname{tg} A-\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}$;

(3) $\dfrac{\dfrac{\sin^4 A-\cos^4 A}{\sin 2A-1}}{\dfrac{\sin A+\cos A}{\operatorname{ctg} A-1}}=\csc A$;

(4) $\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\cos 3x+\cos x}+\dfrac{\sin 3x+\sin x}{\cos 3x-\cos x}$
$=-2\operatorname{ctg} 2x$.

解 (1) 原式左边

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}.$$

(2) 原式左边

$$=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2(A+B)}$$

$$=\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{\operatorname{tg} A-\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}.$$

(3) 原式左边

$$=\frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)(\sin^2 A-\cos^2 A)}{\sin 2A-1}$$

$$\times\frac{\operatorname{ctg} A-1}{\sin A+\cos A}$$

$$=\frac{\sin A-\cos A}{\sin 2A-1}\cdot\frac{\cos A-\sin A}{\sin A}$$

$$=-\frac{(\sin A-\cos A)^2}{(\sin 2A-1)\sin A}$$

$$=\frac{-(1-\sin 2A)}{(\sin 2A-1)\sin A}=\csc A.$$

(4) 原式左边

$$=\frac{2\cos 2x\sin x}{2\cos 2x\cos x}+\frac{2\sin 2x\cos x}{2\sin 2x\sin(-x)}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos x\sin x}$$

$$=-\frac{2(\cos^2 x-\sin^2 x)}{2\sin x\cos x}=-\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$=-2\operatorname{ctg} 2x.$$

879. 考察 $2\sin(\theta-30^\circ)\cos\theta$ 的值的变化情况.

解 $2\sin(\theta-30^\circ)\cos\theta$

$$=\sin(2\theta-30^\circ)-\sin 30^\circ$$

$$=\sin(2\theta-30^\circ)-\frac{1}{2}.$$

因此，利用上式可将原式的变化情况表示如下表:

θ $2\theta-30^\circ$	15° 0°		60° 90°		105° 180°		150° 270°		195° 360°
$\sin(2\theta-30^\circ)$	0	增	1	减	0	减	-1	增	0
$\sin(2\theta-30^\circ)$ $-1/2$	$-\frac{1}{2}$	增	$\frac{1}{2}$	减	$-\frac{1}{2}$	减	$-\frac{3}{2}$	增	$-\frac{1}{2}$

θ 从 195° 起再增加，原式的值将重复上述变化情况，而从 15° 起再减少，则逆向重复上述变化情况.

880. 已知 $\cos 315^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 157.5° 的正弦和余弦.

解 157.5° 是第二象限的角，所以它的正弦为正，余弦为负. 用公式

$$\cos A=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2A}{2}},$$

$$\sin A=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2A}{2}},$$

可得 $\sin 157.5^\circ=\sqrt{\dfrac{1-\cos 315^\circ}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

$$\cos 157.5^\circ=-\sqrt{\frac{1+\cos 315^\circ}{2}}$$

$$=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

881. 已知 $33\frac{3}{4}^\circ$ 角的正弦值为 0.55557,

余弦值为 0.83147. 分别求(1) $67\frac{1}{2}^\circ$ $\left(=33\frac{3}{4}^\circ\right.$ 的二倍$\left.\right)$角的正弦值, (2) $101\frac{1}{4}^\circ$ ($=33\frac{3}{4}^\circ$ 的三倍)角的余弦值至五位小数.

解 (1) $\sin 67\frac{1}{2}^\circ=\sin 2\left(33\frac{3}{4}^\circ\right)$

$$=2\sin 33\frac{3}{4}^\circ\cos 33\frac{3}{4}^\circ$$

$$=2\times 0.55557\times 0.83147$$

$$=1.11114\times 0.83147\approx 0.92388.$$

(2) $\cos 101\frac{3}{4}^\circ=4\cos^3 33\frac{3}{4}^\circ-3\cos 33\frac{3}{4}^\circ$

$$=0.83147(4\times 0.83147^2-3)$$

$$\approx -0.19509.$$

882. 求下列各式的值:

(1) $\cos 138^\circ+\cos 102^\circ+\cos 18^\circ$;

(2) $\sin 20^\circ\sin 35^\circ\sin 45^\circ+\cos 25^\circ\cos 45^\circ\cos 80^\circ$.

解 (1) 原式 $=2\cos 120^\circ\cos 18^\circ+\cos 18^\circ$

$$=-\cos 18^\circ+\cos 18^\circ=0.$$

(2) 原式 $=\sin 45^\circ(\sin 20^\circ\sin 35^\circ+\cos 25^\circ\cos 80^\circ)$

$$=\frac{1}{2}\sin 45^\circ(\cos 15^\circ-\cos 55^\circ+\cos 55^\circ+\cos 105^\circ)$$

$$=\sin 45^\circ\cos 60^\circ\cos 45^\circ$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

883. 证明

$$\sin 12^\circ=\frac{1}{8}[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)].$$

解 $\sin 12^\circ=\sin(30^\circ-18^\circ)$

$$=\sin 30^\circ\cos 18^\circ-\cos 30^\circ\sin 18^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$=\frac{1}{8}[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)].$$

884. 证明

$$\operatorname{tg}82.5^\circ=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1).$$

解 $\operatorname{tg}82.5^\circ=\operatorname{ctg}(90^\circ-82.5^\circ)$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}7.5^\circ}=\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}$$

$$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1).$$

885. 证明

$$\operatorname{tg}52.5^\circ=\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2.$$

解 $\operatorname{tg}52.5^\circ=\sqrt{\dfrac{1-\cos 105^\circ}{1+\cos 105^\circ}}$

$$=\sqrt{\frac{1+\sin 15^\circ}{1-\sin 15^\circ}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}}$$

$$=\sqrt{\frac{4+(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4-(\sqrt{6}-\sqrt{2})}}$$

$$=\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2.$$

886. 证明

$$\sin 36^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\cos 36^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

解 $\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ$

$$=1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$=1-\frac{6-2\sqrt{5}}{8}$$

$$=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

$$\sin 36^\circ=\sqrt{1-\cos^2 36^\circ}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

887. 证明

$$\cos 12^\circ=\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1+\sqrt{30+6\sqrt{5}}).$$

解 $\cos 12^\circ=\cos(30^\circ-18^\circ)$

$$=\cos 30^\circ\cos 18^\circ+\sin 30^\circ\sin 18^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$=\frac{1}{8}[\sqrt{5}-1+\sqrt{30+6\sqrt{5}}].$$

888. 证明

$$\sin 105^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$$

$$\cos 105^\circ=-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

解 $\sin 105^\circ=\sin(90^\circ+15^\circ)=\cos 15^\circ$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$$

$$\cos 105^\circ=\cos(90^\circ+15^\circ)=-\sin 15^\circ$$

$$=-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

889. 证明

$$\cos 36^\circ-\sin 18^\circ=\frac{1}{2}.$$

解 因为

$$\cos 36^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1),$$

$$\sin 18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1),$$

所以 $\cos 36^\circ-\sin 18^\circ$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1)=\frac{1}{2}.$$

890. 证明

$$\sin 3(\alpha-15^\circ)=4\cos(\alpha-45^\circ)\times\cos(\alpha+15^\circ)\sin(\alpha-15^\circ).$$

解 右边$=4\sin[90^\circ-(\alpha-45^\circ)]$

$$\times\sin[90^\circ-(\alpha+15^\circ)]\times\sin(\alpha-15^\circ)$$

$$=4\sin(\alpha+45^\circ)\sin(75^\circ-\alpha)\times\sin(\alpha-15^\circ)$$

$$=4\sin(\alpha-15^\circ)\times\sin[60^\circ-(\alpha-15^\circ)]\times\sin[60^\circ+(\alpha-15^\circ)]$$

$$=4\sin(\alpha-15^\circ)\times\left[\frac{3}{4}-\sin^2(\alpha-15^\circ)\right]$$

$$=3\sin(\alpha-15^\circ)-4\sin^3(\alpha-15^\circ),$$

由此可知，它等于 $\sin 3(\alpha-15^\circ)$.

891. 证明

$$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\frac{3}{16}.$$

解 $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ\sin 60^\circ$

$$=\sin 20^\circ\sin(60^\circ-20^\circ)\times\sin(60^\circ+20^\circ)\sin 60^\circ$$

$$=\sin 20^\circ(\sin^2 60^\circ-\sin^2 20^\circ)\sin 60^\circ$$

$$=\sin 20^\circ\left(\frac{3}{4}-\sin^2 20^\circ\right)\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{4}(3\sin 20^\circ-4\sin^3 20^\circ)\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{4}\sin^2 60^\circ=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{16}.$$

892. 证明

$$\operatorname{tg}36^\circ=\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{5}{5+2\sqrt{5}}}$$

和 $$\operatorname{ctg}36^\circ=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.$$

解 $\operatorname{tg}36^\circ=\dfrac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$

$$=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}$$

$$=\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{5}{5+2\sqrt{5}}}.$$

从而 $\operatorname{ctg}36^\circ=\dfrac{1}{\operatorname{tg}36^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$

$$=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.$$

893. 证明

$$\cos 27^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}).$$

解 $\cos 27^\circ=\sqrt{\dfrac{1+\cos 54^\circ}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{1+\sin 36^\circ}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}).$$

894. 证明

$$\sin 27^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}).$$

解 $\sin 27^\circ=\sqrt{1-\cos^2 27^\circ}$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{16-(\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}).$$

895. 证明

$$\operatorname{tg}27^\circ=\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

解　$\operatorname{tg}27^\circ=\dfrac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ}$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)}{\frac{1}{4}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)}$$

$$=\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

896. 证明

$$\cos 42^\circ=\frac{1}{8}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right).$$

解　$\cos 42^\circ=\cos(60^\circ-18^\circ)$

$$=\cos60^\circ\cos18^\circ+\sin60^\circ\sin18^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right).$$

897. 证明

$$\operatorname{tg}54^\circ=\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

解　$\operatorname{tg}54^\circ=\operatorname{ctg}(90^\circ-54^\circ)=\operatorname{ctg}36^\circ$

$$=\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

898. 证明

$$\sec 54^\circ=\sqrt{\frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}}}.$$

解　$\sec 54^\circ=\dfrac{1}{\cos 54^\circ}=\dfrac{1}{\sin(90^\circ-54^\circ)}$

$$=\frac{1}{\sin 36^\circ}=\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{\frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}}}.$$

899. 证明

$$\sin 87^\circ=\frac{1}{8}\left[(\sqrt{5}-1)\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{(10+2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})}\right].$$

解　$\sin 87^\circ=\cos 3^\circ=\cos(18^\circ-15^\circ)$

$$=\frac{1}{16}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[(\sqrt{5}-1)\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{(10+2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})}\right].$$

900. 证明

$$\operatorname{tg}37\frac{1}{2}^\circ=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2.$$

解　$\operatorname{tg}37\dfrac{1}{2}^\circ=\sqrt{\dfrac{1-\cos75^\circ}{1+\cos75^\circ}}$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{1+\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}}$$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2.$$

901. 证明

$$\cos^2\frac{A}{2}(1-2\cos A)^2+\sin^2\frac{A}{2}(1+2\cos A)^2=1.$$

解　原式左边

$$=\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}-4\left(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)\cos A+4\left(\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\right)\cos^2 A$$

$$=1-4\cos^2 A+4\cos^2 A=1.$$

902. 证明

$$\cos A-\cos 2A=6\sin^2\frac{A}{2}-8\sin^4\frac{A}{2}.$$

解　$\cos A-\cos 2A$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}-(1-2\sin^2 A)$$

$$=2\sin^2 A-2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=8\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}-2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=8\sin^2\frac{A}{2}\left(1-\sin^2\frac{A}{2}\right)-2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=6\sin^2\frac{A}{2}-8\sin^4\frac{A}{2}.$$

903. 在三角形 ABC 中，若 a^2、b^2、c^2 构成等差数列，则 $\operatorname{ctg}A$、$\operatorname{ctg}B$、$\operatorname{ctg}C$ 也构成等差数列。

解　因为 a^2、b^2、c^2 构成等差数列，所以 $\sin^2 A$、$\sin^2 B$、$\sin^2 C$ 也构成等差数列。因此

$$2\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C,$$

从而，左边用 $\sin(A+C)$ 代替一个 $\sin B$，右边用 $\sin(B+C)$、$\sin(A+B)$ 代替一个 $\sin A$、$\sin C$ 后，

$$\sin^2 B+\sin B\sin(C+A)$$
$$=\sin A\sin(B+C)+\sin C\sin(A+B),$$

即

$$\sin^2 B+\sin B\sin C\cos A+\sin B\cos C\sin A$$
$$=\sin A\sin B\cos C+\sin A\cos B\sin C$$
$$+\sin C\sin A\cos B+\sin C\cos A\sin B,$$

故 $$\sin^2 B=2\sin A\sin C\cos B,$$

从而 $$\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=2\operatorname{ctg}B,$$

即 $$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}C=2\operatorname{ctg}B.$$

904. 在第一象限中，作半径 $OM=r$ 的圆的一条切线 PQ（P、Q 为切线与 x 轴、y 轴的交点），且使 $OP+OQ=m$（定长）。

解 设过切点的半径与 x 轴的夹角为 α，把 $OP=\frac{r}{\cos\alpha}$ 与 $OQ=\frac{r}{\sin\alpha}$ 两边相加，得

$$\frac{r}{\cos\alpha}+\frac{r}{\sin\alpha}=m,$$

去分母，得

$$r(\sin\alpha+\cos\alpha)=m\sin\alpha\cos\alpha,$$

两边平方，得

$$m^2\sin^2 2\alpha-4r^2\sin 2\alpha-4r^2=0,$$

其正根为

$$\sin 2\alpha=\frac{2r(r+\sqrt{r^2+m^2})}{m^2}.$$

在 $\sin 2\alpha\leq 1$ 的情况下，可求得 2α，即可求得 α。由此可作出 PQ。

905. 已知 $\operatorname{tg}^2x=\operatorname{tg}(\alpha+x)\operatorname{tg}(\alpha-x)$，证明

$$\sin 2x=\pm\sqrt{2}\sin\alpha.$$

解 $$\operatorname{tg}^2x=\frac{\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)}{\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2x}{\cos^2x-\sin^2\alpha},$$

所以

$$\sin^2x(\cos^2x-\sin^2\alpha)=\cos^2x(\sin^2\alpha-\sin^2x),$$

故

$$2\sin^2x\cos^2x=\sin^2\alpha(\sin^2x+\cos^2x)=\sin^2\alpha,$$

故 $$4\sin^2x\cos^2x=2\sin^2\alpha,$$

即 $$2\sin x\cos x=\pm\sqrt{2}\sin\alpha,$$

从而 $$\sin 2x=\pm\sqrt{2}\sin\alpha.$$

906. 已知 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma$$
$$=4\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\gamma}{2},$$

其中 n 为 $4m+1$ 型或 $4m+3$ 型的正整数。

解 原式左边

$$=2\sin\frac{n\alpha+n\beta}{2}\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}+\sin n\gamma$$
$$=2\sin\frac{n\pi-n\gamma}{2}\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}+\sin n\gamma.\quad ①$$

但 n 为 $4m\pm1$ 型的正整数，所以

$$\sin\frac{n\pi-n\gamma}{2}=\sin\left[2m\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}\mp\frac{n\gamma}{2}\right)\right]$$
$$=\pm\cos\frac{n\gamma}{2}.$$

又 $$\sin\frac{n\pi}{2}=\pm1,$$

从而，若把上两式先后代入①，则原式左边

$$=\pm2\cos\frac{n\gamma}{2}\left(\cos\frac{n\alpha-n\beta}{2}+\cos\frac{n\alpha+n\beta}{2}\right)$$
$$=\text{原式右边}.$$

907. 证明 $\sin x$、$\cos x$ 可以表示成 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 的有理式，并且求出这两个表达式。

解 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. 由于 $\sin\frac{x}{2}$、$\cos\frac{x}{2}$ 用 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 表出时分母都含 $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$，相乘后 $\sin x$ 的分母中就不含此根号，因此 $\sin x$ 是有理式。

又 $$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2},$$

所以用 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 表出时分母中的根号都因平方而消去，因此 $\cos x$ 是有理式。现为表出 $\sin x$、$\cos x$ 的值，设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，于是

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$=2\cdot\frac{\pm t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{\pm1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$$
$$=\frac{1}{1+t^2}-\frac{t^2}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

908. 已知 $\operatorname{tg}^2\theta=\operatorname{tg}(\theta-\alpha)\operatorname{tg}(\theta-\beta)$，证明

$$\operatorname{tg}2\theta=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

解 由已知式得

$$\operatorname{tg}^2\theta=\frac{(\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\beta)}{(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\beta)},$$

去分母并化简得

$$\operatorname{tg}\theta(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(\operatorname{tg}^2\theta-1)=0.$$

由此,得

$$\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

即 $$\operatorname{tg}2\theta=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

909. 已知

$$\operatorname{tg}\frac{\theta-\alpha}{2}=\frac{3\sin\alpha}{5-3\cos\alpha},$$

证明 $$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

解 由已知式得

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{6\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{5-3\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)},$$

即 $$\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(4-3\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=3\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{4}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-3\right)$$
$$=3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1\right)$$
$$=3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

由此易得 $$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

910. 已知 $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}B$、$\operatorname{tg}C$ 成等差数列, $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}B$、$\operatorname{tg}D$ 成调和数列,证明

$$\frac{\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}D}=1-\frac{8\sin^2(A-B)}{\sin2A\sin2B}.$$

解 已知 $$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}C=2\operatorname{tg}B$$

和 $$\frac{1}{\operatorname{tg}A}+\frac{1}{\operatorname{tg}D}=\frac{2}{\operatorname{tg}B}.$$

所以

$$\frac{\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}D}=(2\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}A)\left(\frac{2}{\operatorname{tg}B}-\frac{1}{\operatorname{tg}A}\right)$$
$$=5-2\left(\frac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A}+\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}\right)$$
$$=5-2\left(\frac{\sin B\cos A}{\cos B\sin A}+\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}\right)$$
$$=5-2\,\frac{\sin^2B\cos^2A+\sin^2A\cos^2B}{\sin A\cos A\sin B\cos B}$$
$$=1-2\,\frac{(\sin A\cos B-\cos A\sin B)^2}{\sin A\cos A\sin B\cos B}$$
$$=1-\frac{8\sin^2(A-B)}{\sin2A\sin2B}.$$

911. 已知 $\cos A=\frac{40}{41}$, $\cos B=\frac{60}{61}$, A、B 是小于直角的正角,证明

$$\sin^2\frac{A-B}{2}=\frac{1}{41\times61}.$$

解 $$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{40}{41}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{(41-40)(41+40)}}{41}$$
$$=\frac{\sqrt{81}}{41}=\frac{9}{41},$$

$$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{60}{61}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{(61-60)(61+60)}}{61}$$
$$=\frac{\sqrt{121}}{61}=\frac{11}{61}.$$

所以

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$
$$=\frac{40\times60+9\times11}{41\times61}=\frac{2499}{2501}.$$

因而 $$1-2\sin^2\frac{1}{2}(A-B)=\frac{2499}{2501}.$$

故 $$2\sin^2\frac{1}{2}(A-B)=\frac{2}{41\times61},$$
$$\sin^2\frac{1}{2}(A-B)=\frac{1}{41\times61}.$$

912. 已知

$$a\sin\theta+b\cos\theta=c=a\csc\theta+b\sec\theta,$$

证明 $$\sin2\theta=\frac{2ab}{c^2-a^2-b^2}.$$

解 由已知条件,有 $a\sin\theta+b\cos\theta=c$ 和 $\frac{a\cos\theta+b\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=c$。由此得

$$(a\sin\theta+b\cos\theta)(a\cos\theta+b\sin\theta)$$
$$=c^2\sin\theta\cos\theta.$$

故 $$(a^2+b^2)\sin\theta\cos\theta+ab=c^2\sin\theta\cos\theta,$$

所以 $\sin 2\theta(c^2-a^2-b^2)=2ab$.

913. 已知 $\sin A=\frac{1}{3}$, $\sin B=\frac{1}{2}$, A、B 是比 $90°$ 小的正角，求 $\sin 2(A+B)$。

解 因为 $\sin A=\frac{1}{3}$,所以

$$\cos 2A=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9},$$

$$\sin 2A=\sqrt{1-\frac{49}{81}}=\frac{\sqrt{32}}{9}.$$

因为 $\sin B=\frac{1}{2}$,

所以 $\cos 2B=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$$\sin 2B=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因此 $$\sin(2A+2B)=\frac{\sqrt{32}+7\sqrt{3}}{18}=\frac{4\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}.$$

914. 证明

$$\cos\alpha\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha.$$

解 $$\cos\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$$
$$=\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-\sin^2\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\cos\alpha\,(4\cos^2\alpha-3)$$
$$=\frac{\cos 3\alpha}{4}.$$

915. $x=83°24'36''$ 时求

$$\frac{\sin 7x}{\sin x}-2\cos 2x-2\cos 4x-2\cos 6x$$

的值。

解 设给出的式子的值为 A,则

$$A\sin x=\sin 7x-2\cos 2x\sin x-2\cos 4x\sin x-2\cos 6x\sin x$$
$$=\sin 7x-(\sin 3x-\sin x)-(\sin 5x-\sin 3x)-(\sin 7x-\sin 5x)$$
$$=\sin x,$$

所以 $A=1$.

916. 求 $\operatorname{tg}(\alpha-\beta+\gamma-\delta)$ 的展开式。

解 $$\operatorname{tg}(\alpha-\beta+\gamma-\delta)$$
$$=\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\gamma-\delta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}(\gamma-\delta)}$$
$$=\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}+\frac{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\delta}{1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}\right)\div\left(1-\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\delta}{1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}\right)$$
$$=[(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)(1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta)+(\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\delta)(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)]\div[(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)(1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta)-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\delta)]$$
$$=(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\delta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\delta)\div(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\delta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\delta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta).$$

917. 已知

$$f(x)=\sqrt{1+\cos 2x}-\sqrt{1-\cos 2x},$$

画出 $y=f(x)$ 的图象。

解 $$f(x)=\sqrt{1+\cos 2x}-\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\,(|\cos x|-|\sin x|),$$

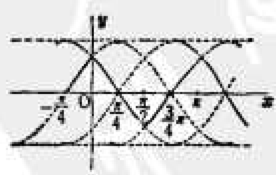
这是一个周期为 π 的周期函数，只要考察 $0\leqq x\leqq\pi$ 的范围即可。当 $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ 时，

$$f(x)=\sqrt{2}\,(\cos x-\sin x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right),$$

当 $\frac{\pi}{2}\leqq x<\pi$ 时，

$$f(x)=-\sqrt{2}\,(\cos x+\sin x)=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

图象的概况如下。



918. 设三角形 ABC 的内心为 I,且

$$\triangle IAB+\triangle IAC=2\triangle IBC,$$

求 $\angle A$ 的最大值。

解 设内切圆的半径为 r, $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. 则

$$\triangle IAB=\frac{1}{2}rc,\ \triangle IAC=\frac{1}{2}rb,$$

$$\triangle IBC=\frac{1}{2}ra.$$

因为　$\triangle IAB+\triangle IAC=2\triangle IBC$,

故　$\frac{1}{2}rc+\frac{1}{2}rb=2\cdot\frac{1}{2}ra$,

$$\therefore\ b+c=2a,$$

由余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$\therefore\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3b^2+3c^2-2bc}{8bc}$$

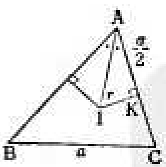
$$=\frac{3(b-c)^2+4bc}{8bc}\geqq\frac{1}{2}.$$

故当 $b=c$ 时 $\cos A$ 取最小值为 $\frac{1}{2}$，从而 $\angle A$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$.

别解　用海伦公式也可证明.

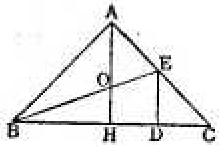
设 $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3a}{2}$ 为定值，则对于 $\triangle ABC$ 的面积

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,



可以容易地证明 S 当 $b=c$ 时达到最大．另一方面，如图中的 $\triangle AKI$，$AK=\frac{b+c-a}{2}=\frac{2a-a}{2}=\frac{a}{2}$ 为定值，$\triangle AKI$ 为直角三角形，所以 r 取最大时 $\angle IAK=\frac{\angle A}{2}$ 也取最大．因此，$\angle A$ 最大仅当 r 最大才行，而 r 最大又仅当 $\triangle ABC$ 面积最大才行（因为 s 为常数，$S=rs$）．由上面可知，这仅当 $b=c$，即 $b=c=a$（$\because b+c=2a$），$\triangle ABC$ 为正三角形时才行，所以 $\angle A$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$.

919．下图的 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=1$，$BC=\sqrt{3}$．$\triangle ABC$ 的内心设为 O，BO 的延长线交 AC 于 E，由 E 向 BC 边作垂线，垂足为 D．求 AE、EC、ED、BE 的长.



解　因为 BE 为 $\angle A$ 的角平分线，所以

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EC}{BC}=\frac{AE+EC}{AB+BC}=\frac{1}{1+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

$$\therefore\ AE=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot AB=\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

$$EC=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot BC=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

又因为 $AC=1$，$CH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle C=30°$.

$$\therefore\ ED=EC\sin 30°=\frac{3-\sqrt{3}}{4},$$

再在 $\triangle BCE$ 中用余弦定理，得

$$BE^2=BC^2+EC^2-2BC\cdot BC\cdot\cos 30°$$

$$=3+\frac{6-3\sqrt{3}}{2}-2\cdot\sqrt{3}$$

$$\times\frac{3-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2},$$

$$\therefore\ BE=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

920．化简函数

$$f(x)=[(\cos x+\cos 2x+\cos 3x)^2+(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

解　$\cos x+\cos 2x+\cos 3x$

$$=(\cos 3x+\cos x)+\cos 2x$$

$$=2\cos 2x\cos x+\cos 2x$$

$$=\cos 2x(2\cos x+1),$$

同样地，

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x$$

$$=2\sin 2x\cos x+\sin 2x$$

$$=\sin 2x(2\cos x+1),$$

$$\therefore\ f(x)=[\cos^2 2x(2\cos x+1)^2+\sin^2 2x(2\cos x+1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{(2\cos x+1)^2(\sin^2 2x+\cos^2 2x)}$$

$$=\sqrt{(2\cos x+1)^2},$$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}2\cos x+1 & \left(\cos x\geqq-\frac{1}{2}\text{时}\right),\\ -(2\cos x+1) & \left(\cos x\leqq-\frac{1}{2}\text{时}\right).\end{cases}$$

921．已知 $\cos 4\theta+\cos 3\theta+\cos 2\theta+\cos\theta+1=0$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求 $\cos\theta$ 的值．答案用小数表示，第四位小数起四舍五入.

解　$\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1$,

$$\cos 3\theta+\cos\theta=2\cos 2\theta\cos\theta。$$

因此原方程为

$$2\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta=0,$$

$$\therefore\quad \cos 2\theta(2\cos 2\theta+2\cos\theta+1)=0,$$

$$\therefore\quad \cos 2\theta(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)=0,$$

$$\therefore\quad \cos 2\theta=0$$

或 $$4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0。$$

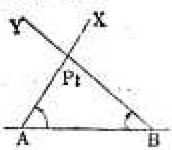
因为 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $0<\cos\theta<1$，从而

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.4142\cdots}{2}\approx 0.707,$$

或 $$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\frac{1.2360\cdots}{4}\approx 0.309。$$

922．下面的 $\boxed{}$ 应填入什么数?

图中 A、B 两点的距离为 l．射线 AX 以每秒 $\dfrac{\pi}{6}$ 的角速度绕点 A 正向旋转，射线 BY 以每秒 $\dfrac{\pi}{12}$ 的角速度绕 B 点负向旋转．$t=0$ 时这两条射线分别位于 AB 和 BA 的位置．经过 t_0 秒之后，AX 与 BY 平行，$t_0=\boxed{}$．



对于 $0<t<t_0$ 的 t，AX、BY 交于一点 P_t．设 A、P_t 的距离为 $f(t)$，则

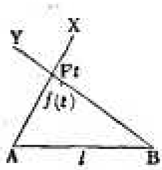
$$f(t)=\frac{l}{\boxed{}\cos(\boxed{}\pi t)+\boxed{}},$$

其中，每一个 $\boxed{}>0$．

解 $\dfrac{\pi t_0}{6}+\dfrac{\pi t_0}{12}=\pi$，　$\therefore\quad t_0=4$．

由正弦定理

$$\frac{f(t)}{\sin\dfrac{\pi}{12}t}=\frac{l}{\sin\left(\pi-\dfrac{\pi t}{12}-\dfrac{\pi t}{6}\right)},$$



$$\therefore\quad \frac{f(t)}{\sin\dfrac{\pi t}{12}}=\frac{l}{\sin\dfrac{\pi t}{4}},$$

再用三倍角公式，得

$$f(t)=\frac{l}{3-4\sin^2\dfrac{\pi t}{12}}=\frac{l}{2\cos\dfrac{\pi t}{6}+1}.$$

923．把函数 $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ 变形成

$$r\sin(2x+\alpha)\quad 和\quad r\cos(2x+\beta)$$

的形式，其中 $0\leqq\alpha<2\pi$，$0\leqq\beta<2\pi$．

解 设 $y=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$，

$$y=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)$$

$$=2\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$$

又 $$y=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\left(-\frac{1}{2}\right)\sin 2x\right]$$

$$=2\left(\cos 2x\cos\frac{11\pi}{6}-\sin 2x\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$=2\cos\left(2x+\frac{11\pi}{6}\right).$$

924．确定 $\sin\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{A}{2}$ 和 $\sin\dfrac{A}{2}-\cos\dfrac{A}{2}$ 的符号．

解 $$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{A}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{A}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

而 $\sin\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 当 $\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $2n\pi$ 与 $(2n+1)\pi$ 之间时为正，当 $\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $(2n+1)\pi$ 与 $(2n+2)\pi$ 之间时为负，其中 n 为任意整数．因此，$\sin\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{A}{2}$ 当 $\dfrac{A}{2}$ 在 $2n\pi-\dfrac{\pi}{4}$ 与 $2n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$ 之间时为正，当 $\dfrac{A}{2}$ 在 $2n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$ 与 $2n\pi+\dfrac{7\pi}{4}$ 之间时为负．同样地，$\sin\dfrac{A}{2}-\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{A}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$，所以 $\sin\dfrac{A}{2}-\cos\dfrac{A}{2}$，当 $\dfrac{A}{2}$ 在 $2m\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 与 $2m\pi+\dfrac{5\pi}{4}$ 之间时为正，$\dfrac{A}{2}$ 在 $2m\pi+\dfrac{5\pi}{4}$ 与 $2m\pi+\dfrac{9\pi}{4}$ 之间时为负，其中 m 为任意整数．

925．证明 $\csc A-\operatorname{ctg}A=\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$．

解 $\csc A-\operatorname{ctg}A$

$$=\frac{1}{\sin A}-\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{1-\cos A}{\sin A}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

926. 证明下列等式:

(1) $\sin 50^\circ+\sin 10^\circ=\cos 20^\circ$;

(2) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$;

(3) $\dfrac{\sin(n-1)\theta+\sin(n+1)\theta}{\sin n\theta}=2\cos\theta$.

解 (1) 把左边变形,得

$$\text{左边}=2\sin\frac{60^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ}{2}=2\times\frac{1}{2}\cos 20^\circ=\cos 20^\circ.$$

(2) $$\text{左边}=\frac{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}.$$

(3) $$\text{左边}=\frac{2\sin\dfrac{2n\theta}{2}\cos\dfrac{-2\theta}{2}}{\sin n\theta}=\frac{2\sin n\theta\cos\theta}{\sin n\theta}=2\cos\theta.$$

927. 求下列各式的值:

(1) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$;

(2) $\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ$.

解 (1) 原式

$$=\sin 20^\circ\left[-\frac{1}{2}(\cos 120^\circ-\cos 40^\circ)\right]$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 20^\circ\cos 40^\circ-\sin 20^\circ\cos 120^\circ)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\sin 60^\circ-\sin 20^\circ)+\frac{1}{2}\sin 20^\circ\right]$$
$$=\frac{1}{4}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

(2) 原式

$$=\cos 40^\circ\left[\frac{1}{2}(\cos 240^\circ+\cos 80^\circ)\right]$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 40^\circ\cos 240^\circ+\cos 40^\circ\cos 80^\circ)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos 40^\circ\cos(180^\circ+60^\circ)+\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 40^\circ)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 40^\circ+\frac{1}{2}\cos 120^\circ+\frac{1}{2}\cos 40^\circ\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}.$$

928. 证明下列等式:

(1) $\cos 200^\circ\cos 280^\circ-\sin 100^\circ\sin 160^\circ=-\dfrac{1}{2}$;

(2) $\cos 175^\circ+\cos 65^\circ+\cos 55^\circ=0$;

(3) $\sin 80^\circ\cos 20^\circ+\sin 45^\circ\cos 145^\circ+\sin 55^\circ\cos 245^\circ=0$.

解 (1) 左边

$$=\cos(360^\circ-160^\circ)\cos(180^\circ+100^\circ)-\sin 100^\circ\sin 160^\circ$$
$$=\cos(-160^\circ)(-\cos 100^\circ)-\sin 100^\circ\sin 160^\circ$$
$$=-(\cos 160^\circ\cos 100^\circ+\sin 160^\circ\sin 100^\circ)$$
$$=-\cos(160^\circ-100^\circ)=-\frac{1}{2}.$$

(2) $$\text{左边}=\cos 175^\circ+2\cos\frac{120^\circ}{2}\cos\frac{10^\circ}{2}=\cos(180^\circ-5^\circ)+2\cos 60^\circ\cos 5^\circ=-\cos 5^\circ+\cos 5^\circ=0.$$

(3) $$\text{左边}=\frac{1}{2}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)+\frac{1}{2}[\sin 190^\circ+\sin(-100^\circ)]+\frac{1}{2}[\sin 300^\circ+\sin(-190^\circ)]$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ+\sin 190^\circ-\sin 100^\circ-\sin 60^\circ-\sin 190^\circ)=0.$$

929. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$,求 $\operatorname{tg}2\alpha$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ 的值,其中 $270^\circ<\alpha<360^\circ$.

解 $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{-\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}}{\dfrac{1}{3}}=-2\sqrt{2}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{-4\sqrt{2}}{1-8}=\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

因为 $135°<\frac{\alpha}{2}<180°$，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限的角，因此由半角公式得

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$=-\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

930. 已知 $\sin 30°=\frac{1}{2}$，计算 $\sin 15°$。

解 在公式

$$\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A},$$

$$\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}$$

中用 $30°$ 代入 A，由于 $\cos\frac{30°}{2}$（即 $\cos 15°$）与 $\sin\frac{30°}{2}$（即 $\sin 15°$）都是正的，且 $\cos 15°>\sin 15°$，因此

$$\cos 15°+\sin 15°=\sqrt{1+\sin 30°},$$

$$\cos 15°-\sin 15°=\sqrt{1-\sin 30°},$$

所以 $$2\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},$$

即 $$\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

931. 已知 A 为第一象限的角，$\sec A=\frac{13}{5}$，求 $\frac{2\sin A-3\cos A}{4\sin A-9\cos A}$ 的值。

解 因为 $\sec A=\frac{13}{5}$，所以 $\cos A=\frac{5}{13}$，从而

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13},$$

故 $$\frac{2\sin A-3\cos A}{4\sin A-9\cos A}$$

$$=\frac{2\times\frac{12}{13}-3\times\frac{5}{13}}{4\times\frac{12}{13}-9\times\frac{5}{13}}=3.$$

932. 证明

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}=0.$$

解 $$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha.$$

同理，$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}=\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\beta,$$

$$\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\gamma.$$

因此

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}=0.$$

933. 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 的值，其中 $0°<\alpha<180°$。

解 因为 $0°<\alpha<180°$，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限的角，$\frac{\alpha}{2}$ 的各个三角函数的值都是正的。

由于 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\pm\frac{3}{5}$，所以

（i）$\cos\alpha=\frac{3}{5}$ 即 α 是第一象限角时，

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{5}\sqrt{5},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{5}\sqrt{5},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}.$$

（ii）$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ 即 α 是第二象限角时，

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{5}\sqrt{5},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{5}\sqrt{5},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2.$$

934. 已知 $9\cos 2x+18\sin x-1=0$，求 $\sin x$，$\cos x$，$\operatorname{tg}x$ 的值。

解 为求 $\sin x$ 的值，由已知式，得

$$9(1-2\sin^2 x)+18\sin x-1=0,$$

$$18\sin^2 x-18\sin x-8=0,$$

$$2(3\sin x-4)(3\sin x+1)=0,$$

$$3\sin x-4\neq 0,\quad \therefore\quad \sin x=-\frac{1}{3}.$$

因此 x 是第三象限或第四象限的角。

(i) 当 x 是第三象限的角时，

$$\cos x=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(ii) 当 x 是第四象限的角时，

$$\cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

935. 已知 $\operatorname{tg} x=\frac{1}{5}$，求 $\operatorname{tg} 4x$，$\operatorname{tg}(4x-45^\circ)$的值。

解 $\operatorname{tg} 2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\dfrac{5}{12}$，

$$\therefore\ \operatorname{tg} 4x=\frac{2\operatorname{tg} 2x}{1-\operatorname{tg}^2 2x}=\frac{2\times\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}.$$

$$\operatorname{tg}(4x-45^\circ)=\frac{\operatorname{tg} 4x-\operatorname{tg} 45^\circ}{1+\operatorname{tg} 4x\operatorname{tg} 45^\circ}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}.$$

936. 证明:

$$\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\operatorname{tg} A,\quad \frac{\sin 2A}{1-\cos 2A}=\operatorname{ctg} A.$$

解 $\sin 2A=2\sin A\cos A$, ①

$1+\cos 2A=2\cos^2 A$, ②

$1-\cos 2A=2\sin^2 A$. ③

①除以②，得

$$\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\operatorname{tg} A.$$

①除以③，得

$$\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A}=\operatorname{ctg} A.$$

937. 证明

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)=\sec\theta+\operatorname{tg}\theta.$$

解 左边 $=\dfrac{\operatorname{tg} 45^\circ+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg} 45^\circ\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\sec\theta+\operatorname{tg}\theta.$$

938. 证明 $\sin(2\alpha+\beta)\csc\alpha-2\cos(\alpha+\beta)=\sin\beta\csc\alpha$.

解 原式左边

$$=\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{\sin 2\alpha\cos\beta+\cos 2\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

$$=2\cos\alpha\cos\beta+\left(\frac{1-2\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)\sin\beta-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{1-2\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin\beta+2\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\csc\alpha\sin\beta-2\sin\alpha\sin\beta+2\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\csc\alpha\sin\beta.$$

939. 已知 $\alpha=\left(n+\frac{1}{4}\pm\frac{1}{6}\right)\pi$，求 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$ 的值。其中 n 为任意整数。

解 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$=\frac{2}{\sin 2\left(n+\frac{1}{4}\pm\frac{1}{6}\right)\pi}=\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{2}{\cos\frac{\pi}{3}}=4.$$

940. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$，$\cos 2\beta=\frac{527}{625}$，$\alpha$、$\beta$ 为锐角。证明

$$\csc\frac{\alpha-\beta}{2}=5\sqrt{13}.$$

解 $\csc\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$

$$=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2}}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{2}{1-\cos(\alpha-\beta)}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}}. \quad ①$$

但是 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{12}{13}$,

$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha=\frac{5}{13}$,

$\cos\beta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\beta}{2}}=\frac{24}{25}$.

从而 $\sin\beta=\frac{7}{25}$, $\therefore\ \alpha>\beta$,

把这些值代入①式右边,得

$$\csc\frac{\alpha-\beta}{2}=\sqrt{\frac{2}{1-\frac{12}{13}\times\frac{24}{25}-\frac{5}{13}\times\frac{7}{25}}}$$
$$=5\sqrt{13}.$$

941. 化简下列各式:

(1) $\cos^2\theta+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+\cos^2\left(\frac{2}{3}\pi+\theta\right)$;

(2) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\theta\right)\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\theta\right)\cos\theta+\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)\cos\theta$.

解 (1) 变换成倍角三角函数,得

$$\text{原式}=\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1)+\frac{1}{2}\left[\cos 2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+1\right]+\frac{1}{2}\left[\cos 2\left(\frac{2}{3}\pi+\theta\right)+1\right]$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2\theta+\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2\theta\right)+\cos\left(\frac{4}{3}\pi+2\theta\right)\right]$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2\theta+2\cos(\pi+2\theta)\times\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos 2\theta-2\cos 2\theta\times\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}.$$

(2) 用积化和的公式,得

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi+\cos 2\theta\right)+\cos\theta\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\theta\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)\right].$$

再用和化积的公式,得

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\theta\right)+\cos\theta\cdot 2\cos\frac{2}{3}\pi\cos\theta$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(2\cos^2\theta-1)+2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos^2\theta$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}.$$

942. 已知 $\cos 4\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$,求 $\cos 2\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值. 为什么 $\cos\alpha$ 的一个正值也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$?

解 $\cos 2\alpha=\pm\sqrt{\frac{\cos 4\alpha+1}{2}}$

$$=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}+1\right)}$$
$$=\pm\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

又因为 $\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{\cos 2\alpha+1}{2}}$,

所以 $\cos 2\alpha$ 取正值时,

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}+1\right)}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}},$$

而 $\cos 2\alpha$ 取负值时,

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)}$$
$$=\pm\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$\cos 4\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ 时 4α 的最小正角为 $72°$，$360°-72°=288°$ 和 $72°$ 的余弦值相同，而 $288°$ 的四分之一恰好是 $72°$，由此可知 $\cos 4\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的一个值有相等的关系。

943. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=2$，求 $\sin 2\alpha$、$\operatorname{tg}2\alpha$、$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ 的值．其中 $0°<\alpha<90°$。

解 先求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的值．

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

从而 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$$=2\times\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5},$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\times 2}{1-4}=-\frac{4}{3},$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}}$$
$$=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

944. 已知 $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$，把下列式子用 t 表示：

(1) $\sin x+\cos x$；　(2) $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$。

解 由问题 158 知道，

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}.$$

(1) $$\sin x+\cos x=\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$=\frac{1+2t-t^2}{1+t^2}.$$

(2) $$\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$
$$=-\frac{1-2t-t^2}{1+2t-t^2}.$$

945. 证明

$$\sqrt{1+\sin\alpha}=1+2\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}},$$

其中 α 是锐角。

解 因为

$$1+\sin\alpha=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$=\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

所以 $\sqrt{1+\sin\alpha}=\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}$
$$=\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)+2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$$
$$=1+2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)$$
$$=1+2\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)^2}$$
$$=1+2\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{1-2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}$$
$$=1+2\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

4. 三倍角和角 $(A+B+C)$

946. 证明下列等式：

(1) $\sin(A+B+C)$
$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$
$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$;

(2) $\cos(A+B+C)$
$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$
$-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C$;

(3) $\operatorname{tg}(A+B+C)$
$$=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}{1-\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}.$$

解 (1) $\sin[(A+B)+C]$
$=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$
$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C$
$+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C$
$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$
$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C.$

(2) $\cos[(A+B)+C]$

$=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C$

$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\cos C-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin C$

$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C$.

(3) 原式$=\dfrac{\sin(A+B+C)}{\cos(A+B+C)}$,

分子$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$,

分母$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C$,

分子、分母同除以$\cos A\cos B\cos C$,得

上式$=\dfrac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}{1-\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$.

947. 证明 $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$.

解 在公式

$\sin(A+B+C)$

$=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C$

中设 $A=B=C$,则

$\sin 3A=3\sin A\cos^2 A-\sin^3 A$

$=3\sin A(1-\sin^2 A)-\sin^3 A$

$=3\sin A-4\sin^3 A$.

948. 在三角形ABC中,证明

$\operatorname{tg}A-\operatorname{ctg}B=\cos C\sec A\csc B$.

解 原式左边

$=\dfrac{\sin A}{\cos A}-\dfrac{\cos B}{\sin B}=-\dfrac{\cos(A+B)}{\cos A\sin B}$

$=\dfrac{\cos C}{\cos A\sin B}=\cos C\sec A\csc B$.

949. 已知 $\cos A=\dfrac{1}{2}$,求 $\cos 3A$ 的值。

解 $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$

$=4\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-3\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$.

950. 已知$\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$,证明

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

解 因为$\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$,所以

$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$,

故 $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$.

951. 证明 $\dfrac{\cos(A+B+C)}{\sin A\sin B\sin C}$

$=\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C-\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C$.

解 原式左边

$=(\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C)\div(\sin A\sin B\sin C)$

$=\dfrac{\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}-\dfrac{\cos A}{\sin A}-\dfrac{\cos B}{\sin B}-\dfrac{\cos C}{\sin C}$

$=\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C-\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C$.

952. 证明

$\cos^2 2A=(\cos A-\sin 3A)^2+2\cos A\sin 3A(\cos A-\sin A)^2$.

解 $(\cos A-\sin 3A)^2+2\cos A\sin 3A(\cos A-\sin A)^2$

$=\cos^2 A+\sin^2 3A-2\cos A\sin 3A+2\cos A\sin 3A(1-2\sin A\cos A)$

$=\cos^2 A+\sin^2 3A-2\cos A\sin 3A\sin 2A$

$=\cos A[\cos A-\sin 3A\sin 2A]+\sin 3A[\sin 3A-\cos A\sin 2A]$

$=\cos A[\cos(3A-2A)-\sin 3A\sin 2A]+\sin 3A[\sin(2A+A)-\cos A\sin 2A]$

$=\cos A\cos 3A\cos 2A+\sin 3A\sin A\cos 2A$

$=\cos 2A[\cos 3A\cos A+\sin 3A\sin A]$

$=\cos 2A\cos(3A-A)$

$=\cos 2A\cos 2A=\cos^2 2A$.

953. 证明 $\operatorname{tg}3A=\dfrac{3\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}^3 A}{1-3\operatorname{tg}^2 A}$.

解 在公式

$\operatorname{tg}(A+B+C)$

$=\dfrac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}{1-\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$

中设 $A=B=C$,则

$$\operatorname{tg}3A=\frac{3\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}^3 A}{1-3\operatorname{tg}^2 A}.$$

954. 证明 $\operatorname{ctg}3A=\dfrac{\operatorname{ctg}^3 A-3\operatorname{ctg}A}{3\operatorname{ctg}^2 A-1}$.

解 由上题,

$$\operatorname{tg}3A=\frac{3\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}^3 A}{1-3\operatorname{tg}^2 A},$$

从而 $\operatorname{ctg}3A=\dfrac{1-3\operatorname{tg}^2 A}{3\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}^3 A}$,

上式右边的分子、分母同乘以$\operatorname{ctg}^3 A$,则

$$\operatorname{ctg}3A=\frac{\operatorname{ctg}^3 A-3\operatorname{ctg}A}{3\operatorname{ctg}^2 A-1}.$$

别解 在公式

$$\operatorname{ctg}(A+B+C)=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C-\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C}{\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1}$$

中设 $A=B=C$，则

$$\operatorname{ctg}3A=\frac{\operatorname{ctg}^3A-3\operatorname{ctg}A}{3\operatorname{ctg}^2A-1}.$$

955. 证明

$$\frac{\cos3\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=1+2\sin2\alpha.$$

解 原式左边

$$=\frac{(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)+(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

$$=\frac{4(\cos^3\alpha-\sin^3\alpha)-3(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

$$=4(\cos^2\alpha+\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha)-3$$

$$=4(1+\cos\alpha\sin\alpha)-3$$

$$=4+4\cos\alpha\sin\alpha-3$$

$$=1+4\sin\alpha\cos\alpha=1+2\sin2\alpha.$$

956. 证明

$$1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha=2\cos\alpha(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1).$$

解 原式左边

$$=1+\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1+4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$=4\cos^3\alpha+2\cos^2\alpha-2\cos\alpha$$

$$=2\cos\alpha(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1).$$

957. 证明下列等式:

(1) $$\frac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin3\beta}{\sin\beta}=4\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha);$$

(2) $$\cos^3\alpha\sin3\alpha+\sin^3\alpha\cos3\alpha=\frac{3}{4}\sin4\alpha.$$

解 (1) 若用三倍角公式进行变形，则

$$左边=\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{3\sin\beta-4\sin^3\beta}{\sin\beta}$$

$$=3-4\sin^2\alpha-(3-4\sin^2\beta)$$

$$=4(\sin^2\beta-\sin^2\alpha), \qquad ①$$

$$右边=4(\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha)\times(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)$$

$$=4(\sin^2\beta\cos^2\alpha-\cos^2\beta\sin^2\alpha)$$

$$=4[\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)-(1-\sin^2\beta)\sin^2\alpha]$$

$$=4(\sin^2\beta-\sin^2\alpha). \qquad ②$$

由①、②知等式成立。

(2) $$左边=\cos^3\alpha(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)+\sin^3\alpha(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)$$

$$=3\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

$$=\frac{3}{2}\sin2\alpha\cos2\alpha=\frac{3}{4}\sin4\alpha.$$

958. 把

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C-2\cos A\cos B\cos C-1$$

化成积的形式。

解 原式

$$=(\cos^2A-2\cos A\cos B\cos C+\cos^2B\cos^2C)+(\cos^2B+\cos^2C-1-\cos^2B\cos^2C)$$

$$=(\cos A-\cos B\cos C)^2-(1-\cos^2B)(1-\cos^2C)$$

$$=(\cos A-\cos B\cos C)^2-\sin^2B\sin^2C$$

$$=(\cos A-\cos B\cos C-\sin B\sin C)\times(\cos A-\cos B\cos C+\sin B\sin C)$$

$$=[\cos A-\cos(B-C)]\times[\cos A-\cos(B+C)]$$

$$=2\sin\frac{1}{2}(A+B-C)\sin\frac{1}{2}(B-C-A)\times2\sin\frac{1}{2}(A+B+C)\sin\frac{1}{2}(B+C-A)$$

$$=-4\sin\frac{1}{2}(A+B+C)\times\sin\frac{1}{2}(-A+B+C)\times\sin\frac{1}{2}(A-B+C)\times\sin\frac{1}{2}(A+B-C).$$

959. 化简下列各式:

(1) $\dfrac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos3\alpha}{\cos\alpha}$;

(2) $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$;

(3) $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$;

(4) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

解 (1) $$原式=\frac{\sin3\alpha\cos\alpha-\cos3\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin(3\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin2\alpha}{\frac{1}{2}\sin2\alpha}=2.$$

(2) 原式

$$=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\alpha}$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$$

$$=\frac{2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{2}{\cos 2\alpha}=2\sec 2\alpha.$$

(3) 同样地,

$$原式=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$$

$$=\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=2\operatorname{tg}2\alpha.$$

(4) 由余弦的加法定理得

$$原式=\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$$

$$=\cos 2\beta.$$

960. 已知 $A+B+C=180^\circ$,证明下列等式:

(1) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$

$$=2+2\cos A\cos B\cos C;$$

(2) $\sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C$

$$=2-2\cos 2A\cos 2B\cos 2C.$$

解 (1) 由半角公式,

$$左边=\frac{1}{2}(1-\cos 2A+1-\cos 2B+1-\cos 2C)$$

$$=\frac{1}{2}[4-(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1)]$$

$$=2-\frac{1}{2}(-4\cos A\cos B\cos C)$$

$$=2+2\cos A\cos B\cos C.$$

(2) $左边=\frac{1}{2}(1-\cos 4A+1-\cos 4B+1-\cos 4C)$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[2\cos 2(A+B)\times\cos 2(A-B)+\cos 4C]$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[2\cos(-2C)\cos 2(A-B)+2\cos^2 2C-1]$$

$$=2-\cos 2C[\cos 2(A-B)+\cos 2C]$$

$$=2-\cos 2C[\cos 2(A-B)+\cos 2(A+B)]$$

$$=2-\cos 2C\times 2\cos 2A\cos(2B)$$

$$=2-2\cos 2A\cos 2B\cos 2C.$$

961. 证明

$$\sin 3A\sin^3A+\cos 3A\cos^3A=\cos^3 2A.$$

解 $\sin 3A\sin^3A+\cos 3A\cos^3A$

$$=(3\sin A-4\sin^3A)\sin^3A+(4\cos^3A-3\cos A)\cos^3A$$

$$=3(\sin^4A-\cos^4A)-4\sin^6A+4\cos^6A$$

$$=3(\sin^4A-\cos^4A)(\sin^2A+\cos^2A)-4\sin^6A+4\cos^6A$$

$$=\cos^6A-3\cos^4A\sin^2A+3\cos^2A\sin^4A-\sin^6A$$

$$=(\cos^2A-\sin^2A)^3=\cos^3 2A.$$

962. 证明

$$\frac{\cos 3A}{\cos A}-\frac{\cos 6A}{\cos 2A}+\frac{\cos 9A}{\cos 3A}-\frac{\cos 18A}{\cos 6A}$$

$$=2(\cos 2A-\cos 4A+\cos 6A-\cos 12A).$$

解 因为

$$\frac{\cos 3p}{\cos p}=\frac{4\cos^3p-3\cos p}{\cos p}$$

$$=4\cos^2p-3=4\cos^2p-2-1$$

$$=2\cos 2p-1,$$

在上式中,依次用 A、$2A$、$3A$、$6A$ 代替 p,则

$$\frac{\cos 3A}{\cos A}=2\cos 2A-1, \quad ①$$

$$\frac{\cos 6A}{\cos 2A}=2\cos 4A-1, \quad ②$$

$$\frac{\cos 9A}{\cos 3A}=2\cos 6A-1, \quad ③$$

$$\frac{\cos 18A}{\cos 6A}=2\cos 12A-1. \quad ④$$

上面这些式子中,①与③乘上+1,②与④乘上−1,然后相加,即知欲证式成立。

963. 证明 $\frac{3\sin A-\sin 3A}{\cos 3A+3\cos A}=\operatorname{tg}^3A.$

解 因为

$$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3A,$$

$$\cos 3A=4\cos^3A-3\cos A,$$

代入原式左边的 $\sin 3A$、$\cos 3A$,得 $\frac{4\sin^3A}{4\cos^3A}$ 即 tg^3A。于是知欲证式成立。

964. 证明

$$\sin 3A\csc A-\cos 3A\sec A=2.$$

解 $\sin 3A\csc A-\cos 3A\sec A$

$$=\frac{\sin 3A}{\sin A}-\frac{\cos 3A}{\cos A}$$

$$=\frac{3\sin A-4\sin^3 A}{\sin A}-\frac{4\cos^3 A-3\cos A}{\cos A}$$
$$=3-4\sin^2 A-(4\cos^2 A-3)$$
$$=6-4(\sin^2 A+\cos^2 A)=6-4=2.$$

965. 证明

$$\frac{\sin 3A+\cos 3A}{\sin 3A-\cos 3A}=\frac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}\operatorname{tg}(A-45°).$$

解 $\frac{\sin 3A+\cos 3A}{\sin 3A-\cos 3A}$

$$=\frac{3\sin A-4\sin^3 A+4\cos^3 A-3\cos A}{3\sin A-4\sin^3 A-4\cos^3 A+3\cos A}$$
$$=\frac{3(\sin A-\cos A)-4(\sin^3 A-\cos^3 A)}{3(\sin A+\cos A)-4(\sin^3 A+\cos^3 A)}$$
$$=\frac{\sin A-\cos A}{\sin A+\cos A}\times\frac{3-4(\sin^2 A+\cos^2 A+\sin A\cos A)}{3-4(\sin^2 A+\cos^2 A-\sin A\cos A)}$$
$$=\frac{\sin A-\cos A}{\sin A+\cos A}\cdot\frac{-1-4\sin A\cos A}{-1+4\sin A\cos A}$$
$$=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}-1}{\frac{\sin A}{\cos A}+1}\cdot\frac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}$$
$$=\frac{\operatorname{tg} A-1}{\operatorname{tg} A+1}\cdot\frac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}$$
$$=\operatorname{tg}(A-45°)\frac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}.$$

966. 证明

$$\cos^3 A+\cos^3(120°+A)+\cos^3(120°-A)=\frac{3}{4}\cos 3A.$$

解 因为 $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$,

所以 $\cos^3 A=\frac{3\cos A+\cos 3A}{4}$,

$$\cos^3(120°+A)=\frac{3\cos(120°+A)+\cos 3(120°+A)}{4},$$
$$\cos^3(120°-A)=\frac{3\cos(120°-A)+\cos 3(120°-A)}{4}.$$

把它们相加,得

$$\cos^3 A+\cos^3(120°+A)+\cos^3(120°-A)$$
$$=\frac{3}{4}[\cos A+\cos(120°+A)+\cos(120°-A)]+\frac{1}{4}[\cos 3A+\cos 3(120°+A)+\cos 3(120°-A)].$$

但上式右边第一个括弧内为 0, 而

$$\cos 3A+\cos 3(120°+A)+\cos 3(120°-A)$$
$$=\cos 3A+\cos(360°+3A)+\cos(360°-3A)$$
$$=\cos 3A+\cos 3A+\cos(-3A)$$
$$=3\cos 3A.$$

$$\therefore\ \cos^3 A+\cos^3(120°+A)+\cos^3(120°-A)=\frac{3}{4}\cos 3A.$$

967. 证明

$$\frac{\sin 3\alpha\sin 2\beta-\sin 3\beta\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha\sin\beta-\sin 2\beta\sin\alpha}=1+4\cos\alpha\cos\beta.$$

解 在原式的左边把 $\sin 3\alpha$、$\sin 3\beta$ 分别用 $\sin\alpha$、$\sin\beta$ 表出,把 $\sin 2\alpha$、$\sin 2\beta$ 分别用 $2\sin\alpha\cos\alpha$、$2\sin\beta\cos\beta$ 代替,然后分子、分母同时除以 $2\sin\alpha\sin\beta$,得

$$左边=\frac{(3-4\sin^2\alpha)\cos\beta-(3-4\sin^2\beta)\cos\alpha}{\cos\alpha-\cos\beta}$$
$$=[-3(\cos\alpha-\cos\beta)-4(\sin^2\alpha\cos\beta-\sin^2\beta\cos\alpha)]\div(\cos\alpha-\cos\beta)$$
$$=[-3(\cos\alpha-\cos\beta)-4(\cos\beta-\cos\beta\cos^2\alpha-\cos\alpha+\cos\alpha\cos^2\beta)]\div(\cos\alpha-\cos\beta)$$
$$=-3-4(-1-\cos\alpha\cos\beta)$$
$$=1+4\cos\alpha\cos\beta.$$

968. 已知 $\operatorname{tg}\theta=\frac{7}{24}$, 求 $\cos 2\theta$、$\operatorname{tg} 3\theta$ 的值。

解 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$$=\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\theta}-1=\frac{2}{1+\left(\frac{7}{24}\right)^2}-1$$
$$=\frac{527}{625}.$$

又 $$\operatorname{tg} 3\theta=\frac{3\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}^3\theta}{1-3\operatorname{tg}^2\theta},$$

把 $\operatorname{tg}\theta=\frac{7}{24}$ 代入,得

$$\operatorname{tg} 3\theta=\frac{11753}{10296}.$$

969. 证明

$$\operatorname{ctg}(A+B+C)=(\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C-\operatorname{ctg} A-\operatorname{ctg} B-\operatorname{ctg} C)\div(\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} C\operatorname{ctg} A-1).$$

解　由公式

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},$$

得　$\operatorname{ctg}(A+B+C)=\dfrac{\operatorname{ctg}(A+B)\operatorname{ctg}C-1}{\operatorname{ctg}(A+B)+\operatorname{ctg}C}$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1}{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B}\operatorname{ctg}C-1}{\dfrac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1}{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B}+\operatorname{ctg}C}$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C-\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C}{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A-1}.$$

注　当 $A+B+C=180°$ 时，

$\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B=1.$

同样地当 $A+B+C=180°$ 时，

$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C.$

970. 证明

$$\begin{aligned}&\cos 2(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(2\alpha+\beta+\gamma)\\&\quad+\cos(2\beta+\gamma+\alpha)+\cos(2\gamma+\alpha+\beta)\\&\quad+\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta)\\&=8\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\\&\quad\times\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-1.\end{aligned}$$

解　因为

$$\cos(2\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\beta+\gamma)=2\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos\alpha,$$

所以　原式左边

$$\begin{aligned}&=2\cos^2(\alpha+\beta+\gamma)-1+2\cos(\alpha+\beta+\gamma)\\&\quad\times(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\\&=2\cos(\alpha+\beta+\gamma)[\cos(\alpha+\beta+\gamma)\\&\quad+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma]-1\\&=8\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\&\quad\times\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}-1.\end{aligned}$$

971. 证明

$$\begin{aligned}&\csc\alpha\csc 2\alpha+\csc 2\alpha\csc 3\alpha\\&=2\operatorname{ctg}\alpha\csc 3\alpha=\csc\alpha(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}3\alpha).\end{aligned}$$

解　原式左边

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{\sin\alpha\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha\sin 3\alpha}\\&=\frac{1}{\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha}(\sin 3\alpha+\sin\alpha)\\&=\frac{1}{\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha}\\&\quad\times\left(2\sin\frac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-\alpha}{2}\right)\\&=\frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha}=2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\sin 3\alpha}\\&=2\operatorname{ctg}\alpha\csc 3\alpha.\end{aligned}$$

又　原式右边

$$\begin{aligned}&=\csc\alpha(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}3\alpha)\\&=\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha}\right)\\&=\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(3\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\sin 3\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha\sin 3\alpha}\\&=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha\sin 3\alpha}=2\operatorname{ctg}\alpha\csc 3\alpha.\end{aligned}$$

972. 证明

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)\\&\quad+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta-\gamma)\\&=4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.\end{aligned}$$

解　原式左边

$$\begin{aligned}&=2\sin(\beta+\gamma)\cos\alpha+2\sin(\gamma-\beta)\cos\alpha\\&=2\cos\alpha[\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma-\beta)]\\&=2\cos\alpha[2\sin\gamma\cos\beta]\\&=4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.\end{aligned}$$

973. 证明

$$\begin{aligned}&\sin 3\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin 3\beta\sin(\gamma-\alpha)\\&\quad+\sin 3\gamma\sin(\alpha-\beta)\\&=4\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\\&\quad\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha+\beta+\gamma).\end{aligned}$$

解　原式左边

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}[\cos(3\alpha-\beta+\gamma)-\cos(3\alpha+\beta-\gamma)]\\&\quad+\frac{1}{2}[\cos(3\beta-\gamma+\alpha)-\cos(3\beta+\gamma-\alpha)]\\&\quad+\frac{1}{2}[\cos(3\gamma-\alpha+\beta)-\cos(3\gamma+\alpha-\beta)]\\&=\frac{1}{2}[\cos(3\alpha-\beta+\gamma)-\cos(3\beta+\gamma-\alpha)]\\&\quad+\frac{1}{2}[\cos(3\beta-\gamma+\alpha)-\cos(3\gamma+\alpha-\beta)]\\&\quad+\frac{1}{2}[\cos(3\gamma-\alpha+\beta)-\cos(3\alpha+\beta-\gamma)]\\&=\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(2\beta-2\alpha)\\&\quad+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(2\gamma-2\beta)\\&\quad+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(2\alpha-2\gamma)\\&=\sin(\alpha+\beta+\gamma)[\sin(2\beta-2\alpha)\\&\quad+\sin(2\gamma-2\beta)+\sin(2\alpha-2\gamma)]\end{aligned}$$

$=\sin(\alpha+\beta+\gamma)[-4\sin(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\beta)$
$\times\sin(\alpha-\gamma)]$
$=4\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\beta)$
$\times\sin(\alpha-\gamma)$.

974. 证明

$$\cos 3\alpha\sin(\beta-\gamma)+\cos 3\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin 3\gamma\sin(\alpha-\beta)$$
$$=4\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\times\sin(\gamma-\alpha)\cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

解　与上题类似．即原式左边

$$=\frac{1}{2}[\sin(3\alpha+\beta-\gamma)-\sin(3\alpha-\beta+\gamma)]$$
$$+\frac{1}{2}[\sin(3\beta+\gamma-\alpha)-\sin(3\beta-\gamma+\alpha)]$$
$$+\frac{1}{2}[\sin(3\gamma+\alpha-\beta)-\sin(3\gamma-\alpha+\beta)]$$
$$=\frac{1}{2}[\sin(3\alpha+\beta-\gamma)-\sin(3\gamma+\beta-\alpha)]$$
$$+\frac{1}{2}[\sin(3\beta+\gamma-\alpha)-\sin(3\alpha-\beta+\gamma)]$$
$$+\frac{1}{2}[\sin(3\gamma+\alpha-\beta)-\sin(3\beta-\gamma+\alpha)]$$
$$=\sin(2\alpha-2\gamma)\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(-2\alpha+2\beta)\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(-2\beta+2\gamma)\cos(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=4\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\times\cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

975. 证明下列等式：

(1) $\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)=4\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{C+A}{2}$;

(2) $\cos(B-C)+\cos(C-A)+\cos(A-B)+1=4\cos\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}\cos\dfrac{C-A}{2}$.

解　(1) 左边

$$=(\sin A+\sin B)+[\sin C-\sin(A+B+C)]$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B+2C}{2}\sin\frac{-(A+B)}{2}$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B+2C}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(-2\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{-B-C}{2}\right)$$
$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}.$$

(2) 左边 $=[\cos(B-C)+\cos(C-A)]+[\cos(A-B)+1]$

$$=2\cos\frac{B-A}{2}\cos\frac{A+B-2C}{2}+2\cos^2\frac{A-B}{2}$$
$$=2\cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{A+B-2C}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)$$
$$=2\cos\frac{A-B}{2}\cdot 2\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$
$$=4\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}.$$

976. 已知

$$x=y\cos R+z\cos Q,$$
$$y=z\cos P+x\cos R,$$
$$P+Q+R=(2n+1)\pi,$$

证明
$$z=x\cos Q+y\cos P,$$
$$\cos P=\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}.$$

其中 n 为正整数．

解　由 $x=y\cos R+z\cos Q$，$y=z\cos P+x\cos R$，得

$$\frac{x}{\cos Q+\cos P\cos R}=\frac{y}{\cos P+\cos Q\cos R}=\frac{z}{1-\cos^2 R}.\quad ①$$

但因为 $P+Q+R=(2n+1)\pi$，所以

$$\cos P=-\cos(Q+R)=-\cos Q\cos R+\sin Q\sin R,$$

因此　$\cos P+\cos Q\cos R=\sin Q\sin R$，

同理　$\cos Q+\cos P\cos R=\sin P\sin R$，

所以①式变为

$$\frac{x}{\sin P\sin R}=\frac{y}{\sin Q\sin R}=\frac{z}{\sin^2 R}.$$

所以
$$\frac{x}{\sin P}=\frac{y}{\sin Q}=\frac{z}{\sin R}.$$

设上式等于 λ，则

$$x\cos Q+y\cos P=\lambda(\sin P\cos Q+\sin Q\cos P)=\lambda\sin(P+Q)=\lambda\sin R=z.$$

另外，　$\sum x(x-y\cos R-z\cos Q)=0$，

即　$x^2+y^2+z^2-2yz\cos P-2zx\cos Q-2xy\cos R=0$，

即　$x^2-y^2-z^2+2y(y-x\cos R-z\cos P)+2z(z-x\cos Q-y\cos P)+2yz\cos P=0$，

故 $x^2-y^2-z^2+2yz\cos P=0$。

5. 和、差、积的变形

977. 推导下列和差化积公式:

(1) $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$;

(2) $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$;

(3) $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$;

(4) $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$。

解 在公式

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$,
$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$,
$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$,
$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$

中设 $x=\alpha+\beta$, $y=\alpha-\beta$ 即设 $\alpha=\frac{x+y}{2}$, $\beta=\frac{x-y}{2}$, 上述公式就变成

(1) $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$。

(2) $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$。

(3) $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$。

(4) $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$。

978. 把下列式子化成积的形式:

(1) $\sin 3\theta+\sin\theta$; (2) $\sin 5\theta-\sin 3\theta$;
(3) $\cos 7\theta+\cos 3\theta$; (4) $\cos 9\theta-\cos 5\theta$。

解 (1) 原式 $=2\sin\frac{4\theta}{2}\cos\frac{2\theta}{2}$

$=2\sin 2\theta\cos\theta$。

(2) 原式 $=2\cos\frac{8\theta}{2}\sin\frac{2\theta}{2}=2\sin\theta\cos 4\theta$。

(3) 原式 $=2\cos\frac{10\theta}{2}\cos\frac{4\theta}{2}$

$=2\cos 5\theta\cos 2\theta$。

(4) 原式 $=-2\sin\frac{14\theta}{2}\sin\frac{4\theta}{2}$

$=-2\sin 7\theta\sin 2\theta$。

979. 已知 $A+B+C=180°$, 把下列式子化成积的形式:

(1) $\sin A+\sin B+\sin C$;

(2) $\cos A+\cos B+\cos C-1$;

(3) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$;

(4) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1$。

解 (1) 原式

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=2\sin\left(90°-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\left(90°-\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\times 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{-B}{2}$$
$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

(2) 原式

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$
$$=2\cos\left(90°-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$
$$=2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\sin\left(90°-\frac{A+B}{2}\right)\right]$$
$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{C}{2}\left(-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{-B}{2}\right)$$
$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

(3) 原式

$$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$$
$$=2\sin(180°-C)\cos(A-B)+2\sin C\cos[180°-(A+B)]$$
$$=2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)$$
$$=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$
$$=2\sin C[-2\sin A\sin(-B)]$$
$$=4\sin A\sin B\sin C.$$

(4) 原式

$$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C$$
$$=2\cos(180°-C)\cos(A-B)+2\cos^2 C$$
$$=2\cos C[-\cos(A-B)+\cos(180°-A-B)]$$
$$=-2\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$

$$=-2\cos C\times 2\cos A\cos(-B)$$
$$=-4\cos A\cos B\cos C.$$

980. 证明

$$\cos(x-y)+\cos(y-z)+\cos(z-x)+1$$
$$=4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{y-z}{2}\cos\frac{z-x}{2}.$$

解 原式左边

$$=2\cos\frac{x-z}{2}\cos\frac{x-2y+z}{2}+2\cos^2\frac{z-x}{2}$$
$$=2\cos\frac{z-x}{2}\left(\cos\frac{x-2y+z}{2}+\cos\frac{z-x}{2}\right)$$
$$=2\cos\frac{z-x}{2}\left(2\cos\frac{y-z}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)$$
$$=4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{y-z}{2}\cos\frac{z-x}{2}.$$

981. 证明

$$\sin(45^\circ+A)-\sin(45^\circ-A)=\sqrt{2}\sin A.$$

解 $\sin(45^\circ+A)-\sin(45^\circ-A)$

$$=2\cos 45^\circ\sin A=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A$$
$$=\sqrt{2}\sin A.$$

982. 把下列式子化成和差的形式。

(1) $\sin 40^\circ\cos 15^\circ$； (2) $\cos 20^\circ\cos 7^\circ$；

(3) $\sin 70^\circ\sin 30^\circ$。

解 (1) $\sin 40^\circ\cos 15^\circ$

$$=\frac{1}{2}[\sin(40^\circ+15^\circ)+\sin(40^\circ-15^\circ)]$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 55^\circ+\sin 25^\circ).$$

(2) $\cos 20^\circ\cos 7^\circ$

$$=\frac{1}{2}[\cos(20^\circ+7^\circ)+\cos(20^\circ-7^\circ)]$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 27^\circ+\cos 13^\circ).$$

(3) $\sin 70^\circ\sin 30^\circ$

$$=-\frac{1}{2}(\cos 100^\circ-\cos 40^\circ)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 40^\circ-\cos 100^\circ).$$

983. 把 $\cos 6\theta-\cos 4\theta$ 化成积的形式。

解 原式$=2\sin\dfrac{6\theta+4\theta}{2}\sin\dfrac{4\theta-6\theta}{2}$

$$=2\sin 5\theta\sin(-\theta)$$
$$=-2\sin 5\theta\sin\theta.$$

984. 把 $\cos 8\theta+\cos 2\theta$ 化成积的形式。

解 原式$=2\cos\dfrac{8\theta+2\theta}{2}\cos\dfrac{8\theta-2\theta}{2}$

$$=2\cos 5\theta\cos 3\theta.$$

985. 把下列各式化成和差的形式：

(1) $2\sin 50^\circ\cos 12^\circ$；

(2) $2\cos 70^\circ\sin 15^\circ$；

(3) $2\cos 77^\circ\cos 4^\circ$； (4) $2\sin 6^\circ\sin 5^\circ$。

解 (1) $2\sin 50^\circ\cos 12^\circ$

$$=\sin(50^\circ+12^\circ)+\sin(50^\circ-12^\circ)$$
$$=\sin 62^\circ+\sin 38^\circ.$$

(2) $2\cos 70^\circ\sin 15^\circ$

$$=\sin(70^\circ+15^\circ)-\sin(70^\circ-15^\circ)$$
$$=\sin 85^\circ-\sin 55^\circ.$$

(3) $2\cos 77^\circ\cos 4^\circ$

$$=\cos(77^\circ-4^\circ)+\cos(77^\circ+4^\circ)$$
$$=\cos 73^\circ+\cos 81^\circ.$$

(4) $2\sin 6^\circ\sin 5^\circ$

$$=\cos(6^\circ-5^\circ)-\cos(6^\circ+5^\circ)$$
$$=\cos 1^\circ-\cos 11^\circ.$$

986. 化简

$$\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta.$$

解 原式$=\dfrac{1}{2}[\cos(2\alpha+2\beta)+1$

$$+\cos(2\alpha-2\beta)+1]$$
$$-\frac{1}{2}[\cos(2\alpha+2\beta)$$
$$+\cos(2\alpha-2\beta)]=1.$$

987. 证明

$$\sin\theta-3\sin(\theta+\alpha)+3\sin(\theta+2\alpha)$$
$$-\sin(\theta+3\alpha)$$
$$=8\sin^3\frac{\alpha}{2}\cos\left(\theta+\frac{3\alpha}{2}\right).$$

解 原式左边

$$=3[\sin(\theta+2\alpha)-\sin(\theta+\alpha)]$$
$$-[\sin(\theta+3\alpha)-\sin\theta]$$
$$=6\cos\frac{2\theta+3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$-2\cos\frac{2\theta+3\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}$$
$$=2\cos\frac{2\theta+3\alpha}{2}\left(3\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}\right)$$
$$=2\cos\frac{2\theta+3\alpha}{2}\cdot 4\sin^3\frac{\alpha}{2}$$
$$=8\sin^3\frac{\alpha}{2}\cos\left(\theta+\frac{3\alpha}{2}\right).$$

988. 证明

$$\sin(2x+\theta)+\sin(2y+\theta)+\sin(2z+\theta)$$
$$-\sin(2x+2y+2z+3\theta)$$
$$=4\sin(x+y+\theta)\sin(y+z+\theta)$$
$$\times\sin(z+x+\theta).$$

解 原式左边

$$=2\sin(x+y+\theta)\cos(x-y)$$
$$-2\sin(x+y+\theta)\cos(x+y+2z+2\theta)$$
$$=2\sin(x+y+\theta)[\cos(x-y)$$
$$-\cos(x+y+2z+2\theta)]$$
$$=2\sin(x+y+\theta)[2\sin(x+z+\theta)$$
$$\times\sin(y+z+\theta)]$$
$$=4\sin(x+y+\theta)\sin(x+z+\theta)$$
$$\times\sin(y+z+\theta).$$

989. 证明

$$\cos A-\cos 2A=2\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{A}{2}.$$

解 $\cos A-\cos 2A$

$$=2\sin\frac{A+2A}{2}\sin\frac{2A-A}{2}$$
$$=2\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{A}{2}.$$

990. 证明

$$\cos(A+B)\cos(A-B)$$
$$-\cos(B+C)\cos(B-C)$$
$$+\cos(A+C)\cos(A-C)$$
$$=\cos 2A.$$

解 因为

$$\cos(A+B)\cos(A-B)=\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B),$$
$$\cos(B+C)\cos(B-C)=\frac{1}{2}(\cos 2B+\cos 2C),$$
$$\cos(A+C)\cos(A-C)=\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2C),$$

所以

$$原式左边=\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)$$
$$-\frac{1}{2}(\cos 2B+\cos 2C)$$
$$+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2C)$$
$$=\cos 2A.$$

991. 证明

$$\frac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A}=\operatorname{tg} 3A.$$

解 $\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A}$

$$=\frac{(\sin A+\sin 5A)+\sin 3A}{(\cos A+\cos 5A)+\cos 3A}$$
$$=\frac{2\sin 3A\cos 2A+\sin 3A}{2\cos 3A\cos 2A+\cos 3A}$$
$$=\frac{\sin 3A(2\cos 2A+1)}{\cos 3A(2\cos 2A+1)}=\frac{\sin 3A}{\cos 3A}$$
$$=\operatorname{tg} 3A.$$

992. 化简下列两式。

(1) $\cos 10^\circ+\sin 40^\circ$;

(2) $\cos 80^\circ-\sin 70^\circ$.

解 (1) $\cos 10^\circ+\sin 40^\circ$

$$=\sin 80^\circ+\sin 40^\circ$$
$$=2\sin\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\cos\frac{80^\circ-40^\circ}{2}$$
$$=2\sin 60^\circ\cos 20^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ$$
$$=\sqrt{3}\cos 20^\circ.$$

(2) $\cos 80^\circ-\sin 70^\circ=\cos 80^\circ-\cos 20^\circ$

$$=-2\sin\frac{80^\circ+20^\circ}{2}\sin\frac{80^\circ-20^\circ}{2}$$
$$=-2\sin 50^\circ\sin 30^\circ$$
$$=-2(\sin 50^\circ)\times\frac{1}{2}=-\sin 50^\circ.$$

993. 证明 $\dfrac{\cos A-\cos 3A}{\sin 3A-\sin A}=\operatorname{tg} 2A.$

解 $\dfrac{\cos A-\cos 3A}{\sin 3A-\sin A}=\dfrac{2\sin 2A\sin A}{2\cos 2A\sin A}$

$$=\frac{\sin 2A}{\cos 2A}=\operatorname{tg} 2A.$$

994. 证明

$$\cos(45^\circ+A)+\cos(45^\circ-A)=\sqrt{2}\cos A.$$

解 原式左边 $=2\cos 45^\circ\cos A$

$$=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A$$
$$=\sqrt{2}\cos A.$$

995. 证明

$$\sin 7A-\sin 5A=2\cos 6A\sin A.$$

解 $\sin 7A-\sin 5A$

$$=2\cos\frac{7A+5A}{2}\sin\frac{7A-5A}{2}$$
$$=2\cos 6A\sin A.$$

996. 把 $\sin 60^\circ+\sin 20^\circ$ 化成积的形式。

解 原式$=2\sin\dfrac{60^\circ+20^\circ}{2}\cos\dfrac{60^\circ-20^\circ}{2}$

$=2\sin 40^\circ\cos 20^\circ$。

997. 把 $\cos(A+B)\cos(A-B)$ 化成和或差的形式。

解 原式$=\dfrac{1}{2}[2\cos(A+B)\cos(A-B)]$

$=\dfrac{1}{2}[\cos(A+B+A-B)$

$+\cos(A+B-A+B)]$

$=\dfrac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)$。

998. 把 $2\sin\dfrac{3A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$ 化成三角函数的和或差。

解 原式$=\sin\left(\dfrac{3A}{2}+\dfrac{A}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{3A}{2}-\dfrac{A}{2}\right)$

$=\sin 2A+\sin A$。

999. 把 $\cos 45^\circ\sin 15^\circ$ 表示成和或差的形式,并化简.

解 原式$=\dfrac{1}{2}(2\cos 45^\circ\sin 15^\circ)$

$=\dfrac{1}{2}[\sin(45^\circ+15^\circ)$

$-\sin(45^\circ-15^\circ)]$

$=\dfrac{1}{2}(\sin 60^\circ-\sin 30^\circ)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.

1000. 把 $2\sin 2\alpha\cos 3\beta$ 表示成和或差的形式.

解 原式$=\sin(2\alpha+3\beta)+\sin(2\alpha-3\beta)$.

1001. 把 $\sin 3A\sin 2B$ 变成和或差的形式.

解 原式$=\dfrac{1}{2}(2\sin 3A\sin 2B)$

$=\dfrac{1}{2}[\cos(3A-2B)$

$-\cos(3A+2B)]$.

1002. 把 $2\cos 2\theta\cos\theta-2\sin 4\theta\sin\theta$ 化成积的形式.

解 原式$=\cos 3\theta+\cos\theta-(\cos 3\theta-\cos 5\theta)$

$=\cos 3\theta+\cos\theta-\cos 3\theta+\cos 5\theta$

$=\cos\theta+\cos 5\theta$

$=2\cos\dfrac{1}{2}(\theta+5\theta)\cos\dfrac{1}{2}(5\theta-\theta)$

$=2\cos 3\theta\cos 2\theta$。

1003. 证明

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+\cos 2(\alpha+\beta+\gamma)$

$=4\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)$。

解 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta$

$=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$,

$\cos 2\gamma+\cos 2(\alpha+\beta+\gamma)$

$=2\cos(2\gamma+\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$,

由此,原式左边

$=2\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+\cos(2\gamma+\alpha+\beta)]$

$=2\cos(\alpha+\beta)\times 2\cos(\alpha+\gamma)\cos(\beta+\gamma)$

$=4\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)$。

1004. 证明

$$\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\cos 2B-\cos 2A}{\sin 2A-\sin 2B}.$$

解 原式右边

$=\dfrac{2\sin(A+B)\sin(A-B)}{2\cos(A+B)\sin(A-B)}$

$=\operatorname{tg}(A+B)$。

1005. 证明

$$\frac{\cos A+\cos B}{\sin A+\sin B}=\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}.$$

解 左边$=\dfrac{2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}$

$=\operatorname{ctg}\dfrac{A+B}{2}$。

1006. 证明

$$\frac{\cos(\theta-3\varphi)-\cos(3\theta+\varphi)}{\sin(3\theta+\varphi)+\sin(\theta-3\varphi)}=\operatorname{tg}(\theta+2\varphi).$$

解 左边$=\dfrac{2\sin(2\theta-\varphi)\sin(\theta+2\varphi)}{2\sin(2\theta-\varphi)\cos(\theta+2\varphi)}$

$=\dfrac{\sin(\theta+2\varphi)}{\cos(\theta+2\varphi)}=\operatorname{tg}(\theta+2\varphi)$.

1007. 证明

$$\frac{\sin 2\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\cos 2\theta}=\operatorname{tg}\frac{3\theta}{2}.$$

解 左边$=\dfrac{2\sin\dfrac{3\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\cos\dfrac{3\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{3}{2}\theta}{\cos\dfrac{3}{2}\theta}$

$=\operatorname{tg}\dfrac{3}{2}\theta$。

1008. 证明

$$\frac{\cos A+\cos B}{\cos B-\cos A}=\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}\operatorname{ctg}\frac{A-B}{2}.$$

解 原式左边$=\dfrac{2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}}$

$=\operatorname{ctg}\dfrac{A+B}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{A-B}{2}$.

1009. 证明

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}.$$

解 原式左边$=\dfrac{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\cos\dfrac{A+B}{A}\sin\dfrac{A-B}{2}}$

$=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}$.

1010. 证明

$$\csc A=\frac{2\sin 2A+2\cos 2A}{\cos A-\sin A-\cos 3A+\sin 3A}.$$

解 $\dfrac{2\sin 2A+2\cos 2A}{\cos A-\sin A-\cos 3A+\sin 3A}$

$=\dfrac{2(\sin 2A+\cos 2A)}{\cos A-\cos 3A+\sin 3A-\sin A}$

$=\dfrac{2(\sin 2A+\cos 2A)}{2\sin 2A\sin A+2\cos 2A\sin A}$

$=\dfrac{2(\sin 2A+\cos 2A)}{2(\sin 2A+\cos 2A)\sin A}$

$=\dfrac{1}{\sin A}=\csc A$.

1011. 证明

$$\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right).$$

解 原式左边

$=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right)+\sin(\alpha-\beta)$

$=2\sin\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right)+(\alpha-\beta)\right]$

$\times\cos\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right)-(\alpha-\beta)\right]$

$=2\sin\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)\cos\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}+2\beta\right)$

$=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)$.

1012. 证明

$$\frac{\cos A+\cos B}{\sin B-\sin A}=\operatorname{ctg}\frac{B-A}{2}.$$

解 左边$=\dfrac{2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{B-A}{2}}{2\cos\dfrac{B+A}{2}\sin\dfrac{B-A}{2}}$

$=\dfrac{\cos\dfrac{B-A}{2}}{\sin\dfrac{B-A}{2}}=\operatorname{ctg}\dfrac{B-A}{2}$.

1013. 证明

$$\frac{\cos 2A-\cos 4A}{\sin 4A-\sin 2A}=\operatorname{tg}3A.$$

解 $\dfrac{\cos 2A-\cos 4A}{\sin 4A-\sin 2A}=\dfrac{2\sin 3A\sin A}{2\cos 3A\sin A}$

$=\dfrac{\sin 3A}{\cos 3A}=\operatorname{tg}3A$.

1014. 证明

$$\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}.$$

解 原式左边

$=\dfrac{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}=\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}$.

1015. 证明

$$\sin 3\theta-\sin\theta-\sin 5\theta=\sin 3\theta(1-2\cos 2\theta).$$

解 $\sin 3\theta-\sin\theta-\sin 5\theta$

$=\sin 3\theta-(\sin\theta+\sin 5\theta)$

$=\sin 3\theta-2\sin\dfrac{\theta+5\theta}{2}\cos\dfrac{5\theta-\theta}{2}$

$=\sin 3\theta-2\sin 3\theta\cos 2\theta$

$=\sin 3\theta(1-2\cos 2\theta)$.

1016. 证明

$$\frac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}=\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}.$$

解 $\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}$

$=\dfrac{2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{B-A}{2}}{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{B-A}{2}}$

$=\dfrac{\sin\dfrac{B-A}{2}}{\cos\dfrac{B-A}{2}}=\operatorname{tg}\dfrac{B-A}{2}$.

1017. 证明

$$\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{2}=2\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}.$$

解　原式左边

$$=2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}.$$

1018. 证明

$$\sin 40°-\sin 10°=2\cos 25°\sin 15°.$$

解　原式左边

$$=2\sin\frac{1}{2}(40°-10°)\cos\frac{1}{2}(40°+10°)$$

$$=2\cos 25°\sin 15°.$$

1019. 证明下列各式：

(1) $\cos A+\cos(120°+A)+\cos(120°-A)=0$;

(2) $\sin A+\sin(120°+A)-\sin(120°-A)=0$.

解　(1) $\cos(120°+A)+\cos(120°-A)$

$$=2\cos 120°\cos A=2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos A$$

$$=-\cos A,$$

因此

$$\cos A+\cos(120°+A)+\cos(120°-A)=0.$$

(2) $\sin(120°+A)-\sin(120°-A)$

$$=2\cos 120°\sin A$$

$$=2\left(-\frac{1}{2}\right)\sin A=-\sin A,$$

因此

$$\sin A+\sin(120°+A)-\sin(120°-A)=0.$$

1020. 证明下列各式：

(1) $\cos(60°+A)+\cos(60°-A)=\cos A$;

(2) $\sin(60°+A)-\sin(60°-A)=\sin A$.

解　(1) $\cos(60°+A)+\cos(60°-A)$

$$=2\cos 60°\cos A=2\times\frac{1}{2}\cos A$$

$$=\cos A.$$

(2) $\sin(60°+A)-\sin(60°-A)$

$$=2\cos 60°\sin A=2\times\frac{1}{2}\sin A=\sin A.$$

1021. 已知 $\sin\theta+\sin\varphi=a$, $\cos\theta+\cos\varphi=b$, 把下列各式用 a、b 表示出来.

(1) $\sin\theta\sin\varphi$;　　(2) $\cos\theta\cos\varphi$;

(3) $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\varphi$;　　(4) $\cos 2\theta+\cos 2\varphi$;

(5) $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$;　　(6) $\cos 3\theta+\cos 3\varphi$.

解　$(\sin\theta+\sin\varphi)^2+(\cos\theta+\cos\varphi)^2$

$$=a^2+b^2,$$

所以　$2+2\cos(\theta-\varphi)=a^2+b^2$,

即　$$\cos(\theta-\varphi)=\frac{a^2+b^2}{2}-1.$$

另外

$$(\cos\theta+\cos\varphi)^2-(\sin\theta+\sin\varphi)^2=b^2-a^2.$$

故　$\cos 2\theta+\cos 2\varphi+2\cos(\theta+\varphi)=b^2-a^2$,

$$2\cos(\theta+\varphi)[\cos(\theta-\varphi)+1]=b^2-a^2,$$

因而　$$\cos(\theta+\varphi)=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}.$$

(1) $$\sin\theta\sin\varphi=\frac{\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi)}{2}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2-4b^2}{4(a^2+b^2)}.$$

(2) $$\cos\theta\cos\varphi=\frac{1}{2}[\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)]$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2-4a^2}{4(a^2+b^2)}.$$

(3) $$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos\theta\cos\varphi}$$

$$=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2(\theta+\varphi)}}{\cos\theta\cos\varphi}$$

$$=\frac{\pm 8ab}{(a^2+b^2)^2-4a^2}.$$

(4) $\cos 2\theta+\cos 2\varphi$

$$=2\cos(\theta+\varphi)\cos(\theta-\varphi)$$

$$=\frac{(b^2-a^2)(a^2+b^2-2)}{a^2+b^2}.$$

(5) $$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)}{\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)}{2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\theta+\varphi)+\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi)}$$

$$=\frac{\pm 2\sqrt{1-\cos(\theta+\varphi)}}{\pm\sqrt{1+\cos(\theta+\varphi)}\pm\sqrt{1+\cos(\theta-\varphi)}}$$

$$=\frac{\pm 4a}{\pm 2b\pm(a^2+b^2)}.$$

(6) $\cos 3\theta+\cos 3\varphi$

$=4(\cos^3\theta+\cos^3\varphi)-3(\cos\theta+\cos\varphi)$

$=(\cos\theta+\cos\varphi)[4(\cos\theta+\cos\varphi)^2$

$-12\cos\theta\cos\varphi-3]$

$=b\left[4b^2-\dfrac{3(a^2+b^2)^2-12a^2}{a^2+b^2}-3\right]$

$=b\left(\dfrac{b^4-3a^4-2a^2b^2+9a^2-3b^2}{a^2+b^2}\right).$

1022. 证明

$\sin\alpha+\cos\beta$

$=2\cos\left[\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]\cos\left[\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]$

$=2\sin\left[\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$

$\times\sin\left[\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right].$

解 原式左边

$=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\beta$

$=2\cos\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)\cos\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)$

$=2\cos\left[\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$

$\times\cos\left[\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right].$

另外，左边$=\sin\alpha+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)$

$=2\sin\dfrac{1}{2}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)\cos\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta-\alpha\right)$

$=2\sin\left[\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]\cos\left[\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]$

$=2\sin\left[\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]\sin\left[\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right].$

1023. 证明

$\csc A+\csc(120^\circ+A)+\csc(240^\circ+A)$

$=3\csc 3A.$

解 左边

$=\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin(120^\circ+A)}+\dfrac{1}{\sin(240^\circ+A)}$

$=\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin(60^\circ-A)}-\dfrac{1}{\sin(60^\circ+A)}$

$=\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{\sin(60^\circ+A)-\sin(60^\circ-A)}{\sin(60^\circ-A)\sin(60^\circ+A)}$

$=\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{2\sin A\cos 60^\circ}{\sin^2 60^\circ-\sin^2 A}$

$=\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{2\sin A\times\dfrac{1}{2}}{\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2-\sin^2 A}$

$=\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{4\sin A}{3-4\sin^2 A}=\dfrac{3-4\sin^2 A+4\sin^2 A}{3\sin A-4\sin^3 A}$

$=\dfrac{3}{3\sin A-4\sin^3 A}=\dfrac{3}{\sin 3A}=3\csc 3A.$

1024. 已知$\sin(\beta+\gamma-\alpha)$、$\sin(\gamma+\alpha-\beta)$、$\sin(\alpha+\beta-\gamma)$成等差数列，证明$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}\beta$、$\operatorname{tg}\gamma$也成等差数列。

解 由假设，

$\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)$

$=2\sin(\gamma+\alpha-\beta).$

$\therefore\quad 2\sin\beta\cos(\gamma-\alpha)$

$=2[\sin(\gamma+\alpha)\cos\beta-\cos(\gamma+\alpha)\sin\beta].$

从而 $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\gamma+\alpha)}{\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha)}$

$=\dfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha).$

故$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}\beta$、$\operatorname{tg}\gamma$成等差数列。

1025. 证明

$\dfrac{\sin A\pm\sin nA+\sin(2n-1)A}{\cos A\pm\cos nA+\cos(2n-1)A}=\operatorname{tg}nA.$

解 $\dfrac{\sin A\pm\sin nA+\sin(2n-1)A}{\cos A\pm\cos nA+\cos(2n-1)A}$

$=\dfrac{\sin A+\sin(2n-1)A\pm\sin nA}{\cos A+\cos(2n-1)A\pm\cos nA}$

$=\dfrac{2\sin nA\cos(n-1)A\pm\sin nA}{2\cos nA\cos(n-1)A\pm\cos nA}$

$=\dfrac{\sin nA[2\cos(n-1)A\pm 1]}{\cos nA[2\cos(n-1)A\pm 1]}$

$=\dfrac{\sin nA}{\cos nA}=\operatorname{tg}nA.$

1026. 证明

$\cos 10A+\cos 8A+3\cos 4A+3\cos 2A$

$=8\cos A\cos^3 3A.$

解 $\cos 10A+\cos 8A+3\cos 4A+3\cos 2A$

$=2\cos 9A\cos A+6\cos 3A\cos A$

$=2\cos A(\cos 9A+3\cos 3A)$

$=2\cos A(4\cos^3 3A-3\cos 3A+3\cos 3A)$

$=8\cos A\cos^3 3A.$

1027. 证明

$\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha+\sin 8\alpha$

$=4\sin 5\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha.$

解 原式左边

$=(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)+(\sin 6\alpha+\sin 8\alpha)$

$=2\sin\frac{2\alpha+4\alpha}{2}\cos\frac{4\alpha-2\alpha}{2}$

$+2\sin\frac{6\alpha+8\alpha}{2}\cos\frac{8\alpha-6\alpha}{2}$

$=2\sin 3\alpha\cos\alpha+2\sin 7\alpha\cos\alpha$

$=2\cos\alpha(\sin 3\alpha+\sin 7\alpha)$

$=2\cos\alpha\times 2\sin\frac{3\alpha+7\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha-3\alpha}{2}$

$=4\cos\alpha\sin 5\alpha\cos 2\alpha$。

1028. 把 $\cos\theta+\sin\theta$ 和 $\sin 3\theta+\sin 2\theta+2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ 化成单项式。

解 给出的第一式

$=\sin(90°-\theta)+\sin\theta$

$=2\sin\frac{1}{2}(90°-\theta+\theta)\cos\frac{1}{2}(90°-\theta-\theta)$

$=2\sin 45°\cos(45°-\theta)$

$=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(45°-\theta)$

$=\sqrt{2}\cos(45°-\theta)$。

而给出的第二式

$=2\sin\frac{1}{2}(3\theta+2\theta)\cos\frac{1}{2}(3\theta-2\theta)$

$+2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$=2\sin\frac{5\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$=2\cos\frac{1}{2}\theta\left(\sin\frac{5}{2}\theta+\sin\frac{3}{2}\theta\right)$

$=2\cos\frac{1}{2}\theta\times 2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\theta+\frac{3}{2}\theta\right)$

$\times\cos\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\theta-\frac{3}{2}\theta\right)$

$=4\cos\frac{1}{2}\theta\sin 2\theta\cos\frac{1}{2}\theta$

$=4\cos^2\frac{1}{2}\theta\sin 2\theta$。

1029. 证明

$$\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}=\frac{\cos A+\cos B}{\sin B-\sin A}.$$

解 只要证明

$(\sin B-\sin A)(\sin A+\sin B)$

$=(\cos A+\cos B)(\cos A-\cos B)$

就行了。

左边 $=\sin^2 B-\sin^2 A$

$=(1-\cos^2 B)-(1-\cos^2 A)$

$=\cos^2 A-\cos^2 B$

$=(\cos A+\cos B)(\cos A-\cos B)$

=右边。

1030. 证明

$$\frac{\cos B-\cos A}{\sin A-\sin B}=\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}.$$

解 $\frac{\cos B-\cos A}{\sin A-\sin B}$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}.$$

1031. 把 $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 化成四个余弦的和的形式。

解 原式 $=2(2\cos\alpha\cos\beta)\cos\gamma$

$=2[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos\gamma$

$=2\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+2\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma$

$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)$

$+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta-\gamma)$。

1032. 证明

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$

$-4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$

$=2\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$

$\times\left[\cos\frac{1}{4}(3\alpha-\beta-\gamma+\pi)\right.$

$+\cos\frac{1}{4}(3\beta-\gamma-\alpha+\pi)$

$+\cos\frac{1}{4}(3\gamma-\alpha-\beta+\pi)$

$\left.+\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-\pi)\right]$.

解 由上题，

$4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$

$=\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}+\cos\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}$

$+\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.

$$\therefore\ \text{左边}=\left(\sin\alpha-\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)+\left(\sin\beta-\cos\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\right)+\left(\sin\gamma-\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

另一方面，

$$\sin\alpha-\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}=\sin\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha-\beta-\gamma}{4}\right)\times\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}-\frac{\pi}{4}\right).$$

同理，

$$\sin\beta-\cos\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\beta-\gamma-\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\sin\gamma-\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\gamma-\alpha-\beta}{4}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}-\frac{\pi}{4}\right).$$

另外，

$$-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}-\frac{\pi}{4}\right).$$

把上面这几个式子两边相加，就得到所要的结果.

1033. 证明

$$\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

解　原式左边

$$=2\sin\gamma\cos(\beta-\alpha)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=2\sin\gamma[\cos(\beta-\alpha)-\cos(\alpha+\beta)]=2\sin\gamma(2\sin\alpha\sin\beta)=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

1034. 证明

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\alpha+\beta-\gamma)\times\cos(\beta+\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta-\gamma)\times\sin(\beta+\gamma-\alpha)\sin(\gamma+\alpha-\beta)=\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma.$$

解　原式左边

$$=\frac{1}{2}[\cos2\gamma+\cos(2\alpha+2\beta)]\times\frac{1}{2}[\cos2\gamma+\cos(2\alpha-2\beta)]-\frac{1}{2}[\cos2\gamma-\cos(2\alpha+2\beta)]\times\frac{1}{2}[\cos2\gamma-\cos(2\alpha-2\beta)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos2\gamma\cos(2\alpha+2\beta)+\cos2\gamma\cos(2\alpha-2\beta)]=\frac{1}{2}\cos2\gamma[\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha-2\beta)]=\frac{1}{2}\cos2\gamma\cdot2\cos2\alpha\cos2\beta=\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma.$$

1035. 证明

$$\cos A+\cos3A+\cos5A+\cos7A=\frac{\sin8A}{2\sin A}=4\cos A\cos2A\cos4A.$$

解　设原式左边为 S，则

$$2S\sin A=2\sin A\cos A+2\sin A\cos3A+2\sin A\cos5A+2\sin A\cos7A=\sin2A+\sin4A-\sin2A+\sin6A-\sin4A+\sin8A-\sin6A=\sin8A.$$

$$\therefore\quad S=\frac{\sin8A}{2\sin A}.$$

另外原式左边

$$=(\cos A+\cos7A)+(\cos3A+\cos5A)=2\cos4A\cos3A+2\cos4A\cos A=2\cos4A(\cos3A+\cos A)=2\cos4A(2\cos2A\cos A)=4\cos A\cos2A\cos4A.$$

1036. 证明

$$2\sin2\alpha\cos\alpha+2\cos4\alpha\sin\alpha=\sin5\alpha+\sin\alpha.$$

解　原式左边

$=\sin(2\alpha+\alpha)+\sin(2\alpha-\alpha)$
$+\sin(4\alpha+\alpha)-\sin(4\alpha-\alpha)$
$=\sin 3\alpha+\sin\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha$
$=\sin\alpha+\sin 5\alpha$.

1037. 证明

$$\sin(A+B)-\frac{\sin(2A+B)-\sin B}{2\cos A}=\frac{\sin B}{\cos A}.$$

解　原式左边

$$=\frac{2\sin(A+B)\cos A-\sin(2A+B)+\sin B}{2\cos A}$$
$$=\frac{\sin(2A+B)+\sin B-\sin(2A+B)+\sin B}{2\cos A}$$
$$=\frac{2\sin B}{2\cos A}=\frac{\sin B}{\cos A}.$$

1038. 证明

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}.$$

解　原式左边

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{2(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)}{\sin(\alpha-\beta+\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta-\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{2(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)}{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}$$
$$=\frac{2(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)}{2\sin\alpha\cos\alpha-2\sin\beta\cos\beta}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta}.$$

同理，在$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$的分子、分母上同乘以$\cos(\alpha-\beta)$并变形后，可得

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}.$$

1039. 把$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$化为四个正弦的和的形式。

解　原式$=2(2\sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma$

$=2[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\sin\gamma$
$=2\cos(\alpha-\beta)\sin\gamma-2\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$
$=\sin(\alpha-\beta+\gamma)-\sin(\alpha-\beta-\gamma)$
$-[\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin(\alpha+\beta-\gamma)]$
$=\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(-\alpha+\beta+\gamma)$
$+\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(-\alpha-\beta-\gamma)$.

1040. 已知$\beta\neq\gamma$,

$$\frac{\cos(\alpha+\beta+\theta)}{\sin(\alpha+\beta)\cos^2\gamma}=\frac{\cos(\gamma+\alpha+\theta)}{\sin(\gamma+\alpha)\cos^2\beta},$$

证明：上述等式还等于$\frac{\cos(\beta+\gamma+\theta)}{\sin(\beta+\gamma)\cos^2\alpha}$

解　设

$$\frac{\cos(\alpha+\beta+\theta)}{\sin(\alpha+\beta)\cos^2\gamma}=\frac{\cos(\gamma+\alpha+\theta)}{\sin(\gamma+\alpha)\cos^2\beta}=\lambda,$$

则

$$\frac{\cos(\alpha+\beta+\theta)}{\cos\gamma}=\lambda\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma$$
$$=\frac{1}{2}\lambda[\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)].$$
$$\frac{\cos(\gamma+\alpha+\theta)}{\cos\beta}$$
$$=\frac{1}{2}\lambda[\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)].$$

由上二式相减得

$$\frac{\cos(\alpha+\beta+\theta)\cos\beta-\cos(\gamma+\alpha+\theta)\cos\gamma}{\cos\gamma\cos\beta}$$
$$=\frac{1}{2}\lambda[\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\gamma+\alpha-\beta)].$$

故
$$\frac{\cos(\alpha+2\beta+\theta)-\cos(\alpha+2\gamma+\theta)}{2\cos\gamma\cos\beta}$$
$$=-\lambda\cos\alpha\sin(\beta-\gamma).$$

即
$$\lambda=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

该式右边关于α、β、γ对称。因此依α、β、γ的次序置换时原式不变。因此λ还应等于

$$\frac{\cos(\beta+\gamma+\theta)}{\sin(\beta+\gamma)\cos^2\alpha}.$$

1041. 证明$\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2\beta+2\sin(\alpha-\beta)\sin\beta\cos\alpha=\sin^2\alpha$。

解　原式左边

$=\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2\beta+\sin(\alpha-\beta)$
$\times[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$
$=\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2\beta$
$+\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)$
$=\sin^2\beta+\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$
$=\sin^2\beta+(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)=\sin^2\alpha$.

1042. 证明

$$\frac{\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\gamma)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin(\theta-\gamma)\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}+\frac{\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=1.$$

解 $\frac{\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\gamma)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}$

$=\frac{\sin(\beta-\gamma)\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\gamma)}{-\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}$

$=\frac{\sin(\beta-\gamma)[\cos(\beta-\gamma)-\cos(2\theta-\beta-\gamma)]}{-2\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}$

$=\frac{\sin(2\beta-2\gamma)-\sin(2\theta-2\gamma)+\sin(2\theta-2\beta)}{-4\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}.$

因而 原式左边

$=\frac{\sin(2\beta-2\gamma)+\sin(2\gamma-2\alpha)+\sin(2\alpha-2\beta)}{-4\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}$

$=1.$

1043. 证明

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{\csc 2\alpha\csc\beta-\csc 2\beta\csc\alpha}{\csc 2\alpha\csc\beta+\csc 2\beta\csc\alpha}.$$

解 原式左边

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\beta+\cos\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\alpha\sin\beta(\cos\beta-\cos\alpha)}{2\sin\alpha\sin\beta(\cos\beta+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin 2\beta-\sin 2\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin 2\beta+\sin 2\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\sin 2\beta-\sin 2\alpha\sin\beta}{\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin\alpha\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\sin 2\beta+\sin 2\alpha\sin\beta}{\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin\alpha\sin\beta}}$$

$$=\frac{\csc 2\alpha\csc\beta-\csc 2\beta\csc\alpha}{\csc 2\alpha\csc\beta+\csc 2\beta\csc\alpha}.$$

1044. 证明下列等式:

(1) $4\sin\theta\sin(60^\circ+\theta)\sin(60^\circ-\theta)=\sin 3\theta$;

(2) $4\cos\theta\cos(60^\circ+\theta)\cos(60^\circ-\theta)=\cos 3\theta$;

(3) $\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}(60^\circ+\theta)\operatorname{tg}(60^\circ-\theta)=\operatorname{tg}3\theta$;

(4) $\cos^3\theta+\cos^3(120^\circ+\theta)+\cos^3(120^\circ-\theta)=\frac{3}{4}\cos 3\theta.$

解 (1) 由积化和公式,

左边$=2\sin\theta(-\cos 120^\circ+\cos 2\theta)$

$=2\sin\theta\left(\frac{1}{2}+\cos 2\theta\right)$

$=\sin\theta+2\sin\theta\cos 2\theta$

$=\sin\theta+\sin 3\theta+\sin(-\theta)$

$=\sin 3\theta.$

(2) 同理,

左边$=2\cos\theta(\cos 120^\circ+\cos 2\theta)$

$=2\cos\theta\left(-\frac{1}{2}+\cos 2\theta\right)$

$=-\cos\theta+2\cos\theta\cos 2\theta$

$=-\cos\theta+\cos 3\theta+\cos\theta$

$=\cos 3\theta.$

(3) 利用(1)、(2)的结果变形,得

左边$=\frac{\sin\theta\sin(60^\circ+\theta)\sin(60^\circ-\theta)}{\cos\theta\cos(60^\circ+\theta)\cos(60^\circ-\theta)}$

$=\frac{\frac{1}{4}\sin 3\theta}{\frac{1}{4}\cos 3\theta}=\operatorname{tg}3\theta.$

(4) 由余弦的三倍角公式,得

左边$=\frac{1}{4}(\cos 3\theta+3\cos\theta)$

$+\frac{1}{4}[\cos 3(120^\circ+\theta)+3\cos(120^\circ+\theta)]$

$+\frac{1}{4}[\cos 3(120^\circ-\theta)+3\cos(120^\circ-\theta)]$

$=\frac{1}{4}[\cos 3\theta+\cos 3\theta+\cos(-3\theta)]$

$+\frac{3}{4}[\cos\theta+\cos(120^\circ+\theta)$

$+\cos(120^\circ-\theta)]$

$=\frac{3}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}(\cos\theta+2\cos 120^\circ\cos\theta)$

$=\frac{3}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}(\cos\theta-\cos\theta)=\frac{3}{4}\cos 3\theta.$

1045. 已知 $x=\frac{\pi}{7}$, 证明

$$\cos 3x-\cos 2x+\cos x=\frac{1}{2}.$$

解 $7x=\pi$, 从而 $-\cos 2x=\cos 5x$, 现设 $\cos 3x-\cos 2x+\cos x=y$, 则 $y=\cos 3x+\cos 5x+\cos x$, 从而

$2y^2=2(\cos 5x+\cos 3x+\cos x)^2$

$=3+\cos 10x+\cos 6x+\cos 2x$

$+2(\cos 8x+\cos 2x+\cos 6x$

$+\cos 4x+\cos 4x+\cos 2x)$

因为 $\cos 10x=-\cos 3x$, $\cos 8x=-\cos x$, $\cos 6x=-\cos x$, $\cos 4x=-\cos 3x$，所以

$$2y^2=3-5(\cos 3x-\cos 2x+\cos x)=3-5y.$$

因此 $$(y+3)(2y-1)=0.$$

$$y=-3 \quad 或 \quad y=\frac{1}{2}.$$

但 $y=-3$ 时必须要有 $\cos x=\cos 3x=\cos 5x=-1$，这不可能，故 $y=\frac{1}{2}$。

1046. 证明

$$\sin(\beta-\alpha)\sin(\delta-\gamma)+\sin(\gamma-\beta)\sin(\delta-\alpha)=-\sin(\gamma-\alpha)\sin(\beta-\delta).$$

解 原式左边

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}[\cos(\beta-\alpha-\delta+\gamma)\\&\quad-\cos(\beta-\alpha+\delta-\gamma)]\\&\quad+\frac{1}{2}[\cos(\gamma-\beta-\delta+\alpha)\\&\quad-\cos(\gamma-\beta+\delta-\alpha)]\\&=\frac{1}{2}[\cos(\beta-\alpha-\delta+\gamma)-\cos(\gamma-\beta+\delta-\alpha)]\\&=-\sin(\gamma-\alpha)\sin(\beta-\delta).\end{aligned}$$

1047. 证明

$$\begin{aligned}&\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma-\alpha)\\&\quad+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\alpha-\beta)\\&\quad+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta-\gamma)\\&=0.\end{aligned}$$

解 原式左边

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta+\gamma)\\&\quad-\cos(\alpha+\beta-\gamma)]\cos(\beta+\gamma-\alpha)\\&\quad+\frac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma+\alpha)\\&\quad-\cos(\beta+\gamma-\alpha)]\cos(\gamma+\alpha-\beta)\\&\quad+\frac{1}{2}[\cos(\gamma-\alpha+\beta)\\&\quad-\cos(\gamma+\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta-\gamma)=0.\end{aligned}$$

1048. 证明

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}+\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=0.$$

解 若通分，则公分母为

$$\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha).$$

分子的和

$$\begin{aligned}&=-\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)-\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\\&\quad-\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\\&=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)]\\&\quad-\frac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma+\alpha)-\cos(\beta+\gamma-\alpha)]\\&\quad-\frac{1}{2}[\cos(\gamma-\alpha+\beta)-\cos(\gamma+\alpha-\beta)]\\&=0.\end{aligned}$$

1049. 证明

$$\cos^2(\alpha-\beta)+\cos^2\beta-2\cos(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta=\sin^2\alpha.$$

解 原式左边

$$\begin{aligned}&=\cos^2(\alpha-\beta)+\cos^2\beta-\cos(\alpha-\beta)\\&\quad\times[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\\&=\cos^2\beta-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\\&=\cos^2\beta-(\cos^2\beta-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

1050. 已知 $\alpha+\beta+\gamma=2\delta$，证明

$$\cos 2\delta+\cos 2(\delta-\alpha)+\cos 2(\delta-\beta)+\cos 2(\delta-\gamma)=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

解

$$\begin{aligned}&[\cos 2\delta+\cos 2(\delta-\alpha)]\\&\quad+[\cos 2(\delta-\beta)+\cos 2(\delta-\gamma)]\\&=2\cos(2\delta-\alpha)\cos\alpha\\&\quad+2\cos(2\delta-\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma)\\&=2\cos(\alpha+\beta+\gamma-\alpha)\cos\alpha\\&\quad+2\cos(\alpha+\beta+\gamma-\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma)\\&=2\cos(\beta+\gamma)\cos\alpha+2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)\\&=2\cos\alpha[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)]\\&=2\cos\alpha\cdot 2\cos\beta\cos\gamma\\&=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.\end{aligned}$$

1051. 已知 $\alpha=\frac{2\pi}{15}$，证明

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha=-\frac{1}{2}.$$

解

$$\begin{aligned}&\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{8\pi}{15}+\cos\frac{16\pi}{15}\\&=\left(\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{15}-\cos\frac{\pi}{15}\right)\\&=2\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}-2\sin\frac{7\pi}{30}\sin\frac{9\pi}{30}\\&=2\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}-2\sin\frac{7\pi}{30}\cos\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{30}\right)\pi\\&=2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{15}-2\sin\frac{7\pi}{30}\cos\frac{\pi}{5}\end{aligned}$$

$$=2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{15}-\sin\frac{7\pi}{30}\right)$$
$$=2\cos\frac{\pi}{5}\left(\sin\frac{13\pi}{30}-\sin\frac{7\pi}{30}\right)$$
$$=2\cos\frac{\pi}{5}\times 2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=4\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

1052． 证明

$$[\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\beta+\gamma)]\times[\sin\gamma+\sin\alpha-\sin(\gamma+\alpha)]\times[\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)]$$
$$=16\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\times[\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)].$$

解 $\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\beta+\gamma)$

$$=2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$
$$=2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$
$$=4\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

另两个中括号里的式子也可同样地变形，因此原式为

$$64\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\times\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

不难证明，上式和原式的右边相等。

1053． 证明

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

解 原式左边 $=2\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}$

$$=\cos\frac{4\pi}{7}\left(2\cos\frac{2\pi}{7}+1\right)$$
$$=\cos\frac{4\pi}{7}\left(2-4\sin^2\frac{\pi}{7}+1\right)$$
$$=\cos\frac{4\pi}{7}\left(3-4\sin^2\frac{\pi}{7}\right)$$
$$=\frac{\cos\frac{4\pi}{7}\left(3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}}$$
$$=\frac{\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$$
$$=\frac{\sin\pi-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}.$$

1054． 证明

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta).$$

解 原式右边

$$=\frac{1}{\sin\alpha}[\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha]$$
$$=\frac{1}{\sin\alpha}[\sin(2\alpha+\beta)-\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta]$$
$$=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

1055． 证明

$$[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+3\beta)]\sec 2\beta=(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)\csc(\alpha-\beta).$$

解 原式左边

$$=2\sin(\alpha+\beta)\cos 2\beta\sec 2\beta$$
$$=2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\csc(\alpha-\beta)$$
$$=(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)\csc(\alpha-\beta).$$

1056． 求下列各式的值:

(1) $8\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$;

(2) $\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ$;

(3) $\cos 55^\circ+\cos 65^\circ+\cos 175^\circ$;

(4) $\cos 108^\circ\cos 132^\circ+\cos 132^\circ\cos 12^\circ+\cos 12^\circ\cos 108^\circ$.

解 (1) $8\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$

$$=4(2\sin 20^\circ\sin 40^\circ)\sin 80^\circ$$
$$=4(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\sin 80^\circ$$
$$=4\cos 20^\circ\sin 80^\circ-4\cos 60^\circ\sin 80^\circ$$
$$=2\times(2\cos 20^\circ\sin 80^\circ)-4\times\frac{1}{2}\sin 80^\circ$$
$$=2(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)-2\sin 80^\circ$$
$$=2\sin 100^\circ+2\sin 60^\circ-2\sin 80^\circ$$
$$=2\sin 100^\circ+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sin 80^\circ$$
$$=2\sin 100^\circ+\sqrt{3}-2\sin 80^\circ$$
$$=2(\sin 100^\circ-\sin 80^\circ)+\sqrt{3}$$
$$=2(\sin 80^\circ-\sin 80^\circ)+\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{3}.$$

(2) $\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ$

$=\dfrac{1}{8\sin 40^\circ}\times 8\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ$

$=\dfrac{1}{8\sin 40^\circ}\times 2\sin 40^\circ\cos 40^\circ\times 4\cos 80^\circ\cos 160^\circ$

$=\dfrac{1}{8\sin 40^\circ}\times\sin 80^\circ\times 4\cos 80^\circ\cos 160^\circ$

$=\dfrac{1}{8\sin 40^\circ}\times 2\sin 80^\circ\cos 80^\circ\times 2\cos 160^\circ$

$=\dfrac{1}{8\sin 40^\circ}\sin 160^\circ\times 2\cos 160^\circ$

$=\dfrac{\sin 320^\circ}{8\sin 40^\circ}=-\dfrac{\sin(360^\circ-320^\circ)}{8\sin 40^\circ}$

$=-\dfrac{1}{8}$.

(3) 因为 $\cos 175^\circ=-\cos 5^\circ$，原式成为

$$\cos 55^\circ+\cos 65^\circ-\cos 5^\circ,$$

即 $$2\cos 60^\circ\cos 5^\circ-\cos 5^\circ.$$

把 $\cos 60^\circ$ 用 $\dfrac{1}{2}$ 代入，上式就等于

$$\cos 5^\circ-\cos 5^\circ,$$

即原式的值为 0.

(4) 设原式用 A 表示，则

$2A=2\cos 108^\circ\cos 132^\circ+2\cos 132^\circ\cos 12^\circ+2\cos 12^\circ\cos 108^\circ$

$=\cos 240^\circ+\cos 24^\circ+\cos 144^\circ+\cos 120^\circ+\cos 120^\circ+\cos 96^\circ$

$=-\cos 60^\circ+\cos 24^\circ-\cos 36^\circ-\cos 60^\circ-\cos 60^\circ-\cos 84^\circ$

$=-3\cos 60^\circ+\cos 24^\circ-(\cos 36^\circ+\cos 84^\circ)$

$=-3\times\dfrac{1}{2}+\cos 24^\circ-2\cos 60^\circ\cos 24^\circ$

$=-\dfrac{3}{2}+\cos 24^\circ-2\times\dfrac{1}{2}\cos 24^\circ$

$=-\dfrac{3}{2}$.

$$\therefore\quad A=-\frac{3}{4}.$$

1057. 证明

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}-\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}.$$

解　原式左边

$=\dfrac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}-\dfrac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}}$

$=\left(\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}-\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}\right)\div\left(\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\right)$

$=\dfrac{2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}-\dfrac{A-B}{2}\right)}{2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}$

$=\dfrac{2\sin B}{\cos\left(\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{A+B}{2}-\dfrac{A-B}{2}\right)}$

$=\dfrac{2\sin B}{\cos A+\cos B}$.

1058. 证明

$$2\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos 2\alpha+\cos 2\beta.$$

解　原式左边

$=2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\times(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$=2\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$=\cos 2\alpha+\cos 2\beta$.

1059. 证明

$$\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha=\frac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{2\sin\alpha}.$$

解　设原式左边为 M,

$2M\sin\alpha=2\sin 2\alpha\sin\alpha+2\sin 4\alpha\sin\alpha+2\sin 6\alpha\sin\alpha$

$=\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 3\alpha-\cos 5\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha$

$=\cos\alpha-\cos 7\alpha$.

$$\therefore\quad M=\frac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{2\sin\alpha}.$$

1060. 已知 A、B、C 成等差数列，证明

$$\sin A-\sin C=2\sin(B-C)\cos B=2\sin(A-B)\cos B.$$

解　$\sin A-\sin C$

$=2\sin\dfrac{1}{2}(A-C)\cos\dfrac{1}{2}(A+C)$.

因为 A、B、C 成等差数列，

$$\therefore\quad A+C=2B.$$

从而　$\sin A-\sin C=2\sin(B-C)\cos B$.

又因为 $A-B=B-C$，故

$$2\sin(B-C)\cos B=2\sin(A-B)\cos B.$$

1061. 证明

$$\sin A+\sin(36^\circ-A)+\sin(72^\circ+A)=\sin(36^\circ+A)+\sin(72^\circ-A).$$

解 原式左边

$$=[\sin A+\sin(36^\circ-A)]+\cos[90^\circ-(72^\circ+A)]$$
$$=2\sin 18^\circ\cos(18^\circ-A)+\cos(18^\circ-A)$$
$$=\cos(18^\circ-A)(2\sin 18^\circ+1)$$
$$=\cos(18^\circ-A)\left[\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}+1\right]$$
$$=2\cos(18^\circ-A)\sin 54^\circ$$
$$=\sin(72^\circ-A)+\sin(36^\circ+A).$$

1062. 证明

$$\cos A=\sin(54^\circ+A)+\sin(54^\circ-A)-\sin(18^\circ+A)-\sin(18^\circ-A).$$

解 原式右边

$$=[\sin(54^\circ+A)+\sin(54^\circ-A)]-[\sin(18^\circ+A)+\sin(18^\circ-A)]$$
$$=2\sin 54^\circ\cos A-2\sin 18^\circ\cos A$$
$$=2\cos A(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)$$
$$=2\cos A\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$
$$=\cos A.$$

1063. 证明

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\times\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha).$$

解 原式左边

$$=(\cos\alpha+\cos\beta)+[\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)]$$
$$=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2\gamma)$$
$$=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\left[\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2\gamma)\right]$$
$$=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\left[2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\times\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right]$$
$$=4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma).$$

1064. 证明

$$\frac{\sin 45^\circ+\cos 75^\circ}{\sin 45^\circ-\cos 75^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg} 15^\circ.$$

解 原式左边

$$=\frac{\sin 45^\circ+\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ-\sin 15^\circ}=\frac{2\sin 30^\circ\cos 15^\circ}{2\cos 30^\circ\sin 15^\circ}$$
$$=\operatorname{tg} 30^\circ\operatorname{ctg} 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg} 15^\circ.$$

1065. 证明

$$\frac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A}=\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}.$$

解 原式左边

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}.$$

1066. 证明

$$\frac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}=\frac{\sin 3A}{\sin 5A}.$$

解 $$\frac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}$$
$$=\frac{\sin A+\sin 5A+2\sin 3A}{\sin 3A+\sin 7A+2\sin 5A}$$
$$=\frac{2\sin 3A\cos 2A+2\sin 3A}{2\sin 5A\cos 2A+2\sin 5A}$$
$$=\frac{2\sin 3A(\cos 2A+1)}{2\sin 5A(\cos 2A+1)}=\frac{\sin 3A}{\sin 5A}.$$

1067. 证明

$$8\sin^4\alpha=\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3.$$

解 $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$,

$\therefore\quad 4\sin^3\alpha=3\sin\alpha-\sin 3\alpha$,

两边乘上 $2\sin\alpha$, 得

$$8\sin^4\alpha=6\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin 3\alpha$$
$$=3(2\sin^2\alpha)-(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)$$
$$=3(1-\cos 2\alpha)-(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)$$
$$=\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3.$$

1068. 证明

$$16\sin^5\alpha=\sin 5\alpha-5\sin 3\alpha+10\sin\alpha.$$

解 在上题式子的两边乘上 $2\sin\alpha$, 则

$$16\sin^5\alpha=2\cos 4\alpha\sin\alpha-8\cos 2\alpha\sin\alpha+6\sin\alpha$$
$$=\sin 5\alpha-\sin 3\alpha-4(\sin 3\alpha-\sin\alpha)+6\sin\alpha$$
$$=\sin 5\alpha-5\sin 3\alpha+10\sin\alpha.$$

1069. 证明

$$-32\sin^6\alpha=\cos 6\alpha-6\cos 4\alpha+15\cos 2\alpha-10.$$

解 在上题的式子两边乘上 $-2\sin\alpha$,

$-32\sin^6\alpha$

$=-2\sin 5\alpha\sin\alpha+10\sin 3\alpha\sin\alpha-20\sin^2\alpha$

$=-(\cos 4\alpha-\cos 6\alpha)+5(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)$

$-10(2\sin^2\alpha)$

$=-\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+5\cos 2\alpha-5\cos 4\alpha$

$-10(1-\cos 2\alpha)$

$=\cos 6\alpha-6\cos 4\alpha+15\cos 2\alpha-10$。

1070．证明

$-64\sin^7\alpha=\sin 7\alpha-7\sin 5\alpha+21\sin 3\alpha$

$-35\sin\alpha$。

解 在上题的式子两边乘上 $2\sin\alpha$，

$-64\sin^7\alpha=2\cos 6\alpha\sin\alpha-12\cos 4\alpha\sin\alpha$

$+30\cos 2\alpha\sin\alpha-20\sin\alpha$

$=\sin 7\alpha-\sin 5\alpha-6(\sin 5\alpha-\sin 3\alpha)$

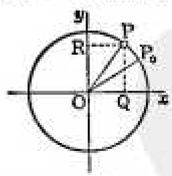
$+15(\sin 3\alpha-\sin\alpha)-20\sin\alpha$

$=\sin 7\alpha-7\sin 5\alpha+21\sin 3\alpha-35\sin\alpha$。

6．简谐振动

1071．什么是简谐振动？

解 1．在半径为 r 的圆 O 上，一点 P 以每秒 α 的角速度沿正向旋转。以 O 为原点作直角坐标系，由 P 向 x、y 轴所作的垂线足分别为 Q、R，当 P 运动时，Q、R 分别在 x、y 轴作往复运动（周期运动）。



这时，以动点 P 经过某一定点 P_0 的时刻为基准，设 t 秒后点 P 的坐标为 x、y，则可得

$$x=r\cos(\alpha t+\beta),$$
$$y=r\sin(\alpha t+\beta).$$

其中 $\beta=\angle P_0Ox$。

因而点 Q 的运动方程式为

$$x=r\cos(\alpha t+\beta).$$

点 R 的运动方程式为

$$y=r\sin(\alpha t+\beta).$$

即当点 P 在圆 O 上以一定的速度作圆周运动时，点 Q 在 x 轴上、点 R 在 y 轴上作往复的周期运动。这时，点 Q、R 的运动叫**简谐振动**，O 叫振动的**中心**，r 叫**振幅**，当 $t=0$ 时的 $\alpha t+\beta$，即 β，叫**初相位**。

2．在前面的图中，P 从 P_0 的位置出发在圆周上旋转一周后回到 P_0，然后再作同样的圆周运动。而 Q、R 分别在 x 轴、y 轴上反复地作同样的往复运动。

这时，点 P 在圆周上旋转一周的时间设为 T，则 $\alpha T=2\pi$，从而 $T=\dfrac{2\pi}{\alpha}$，T 叫这个运动的**周期**。

点 Q、R 在 1 秒钟里往复的次数叫**频率**，若用 N 表示，则 $N=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\alpha}{2\pi}$。

3．两个简谐振动

$$y_1=a\sin\alpha t,\quad y_2=b\cos\alpha t$$

的合成运动设为 y，则

$$y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha t+\theta),$$

其中 θ 由 $\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta,\\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta\end{cases}$ 确定。

1072．说出下列简谐振动表示式中的振幅和周期。并说出是以点 P 在什么位置时作为时间的起算基准的，也即给出初相位。

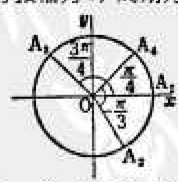
(1) $y=3\sin\dfrac{\pi}{4}t$；

(2) $y=5\sin\left(\dfrac{\pi}{3}t-\dfrac{\pi}{3}\right)$；

(3) $y=2\cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(4) $y=6\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t-\dfrac{\pi}{4}\right)$。

解 (1) $y=3\sin\dfrac{\pi}{4}t$ 的振幅为 3，周期为 $2\pi\div\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=8$(秒)，时间是以 P 通过图中 A_1 点时起算。



(2) $y=5\sin\left(\dfrac{\pi}{3}t-\dfrac{\pi}{3}\right)$的振幅为 5，周期为 $2\pi\div\dfrac{\pi}{3}=6$(秒)，时间以 P 通过 A_2 点时起算。

(3) 一般地，$\cos\alpha^\circ=\sin(90^\circ+\alpha^\circ)$，因此，

$$y=2\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=2\sin\left(\pi t+\frac{3\pi}{4}\right).$$

因此这个简谐振动的振幅为 2，周期为

$$2\pi\div\pi=2(\text{秒}),$$

时间从P通过上图中的A_2点时算起。

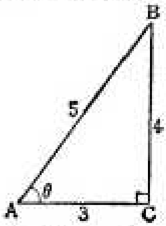
(4) 和上题一样，变形如下，

$$y=6\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=6\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right).$$

故振幅为6，周期为4(秒)。时间从P通过A_4时算起。

1073. 把两个简谐振动$y_1=4\cos\pi t$、$y_2=3\sin\pi t$合成，得到

$$y=\square(\sin\pi t+\triangle).$$



解 作如图的直角三角形，设$\angle A=\theta$，$\operatorname{tg}A=\frac{4}{3}$。则斜边$=\sqrt{3^2+4^2}=5$，因而$\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$。

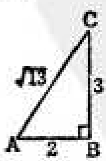
$$\therefore\quad y=y_1+y_2=4\cos\pi t+3\sin\pi t$$
$$=5\left(\frac{4}{5}\cos\pi t+\frac{3}{5}\sin\pi t\right)$$
$$=5(\sin\theta\cos\pi t+\cos\theta\sin\pi t)$$
$$=5\sin(\pi t+\theta).$$

1074. 求下列两个简谐振动合成后的振幅和周期：

(1) $y_1=2\sin\pi t$，　$y_2=3\cos\pi t$；

(2) $y_1=5\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{4}\right)$，

$y_2=4\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}\right)$。



解 (1) 取满足$\operatorname{tg}\theta=\frac{3}{2}$的$\theta$，则

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}},\quad\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

因此，

$$y=y_1+y_2=\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin\pi t+\frac{3}{\sqrt{13}}\cos\pi t\right)$$
$$=\sqrt{13}(\cos\theta\sin\pi t+\sin\theta\cos\pi t)$$
$$=\sqrt{13}\sin(\pi t+\theta).$$

故振幅为$\sqrt{13}$，周期为$\frac{2\pi}{\pi}=2$。

(2) $y=y_1+y_2$

$$=5\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{4}\right)-4\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{4}\right),$$

因为$\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$，设$\operatorname{tg}\theta=\frac{4}{5}$，则$\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{41}}$，$\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{41}}$。再设$\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{4}=A$，则

$$y=5\sin A-4\cos A$$
$$=\sqrt{41}\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\sin A-\frac{4}{\sqrt{41}}\cos A\right)$$
$$=\sqrt{41}(\sin A\cos\theta-\sin\theta\cos A)$$
$$=\sqrt{41}\sin(A-\theta)$$
$$=\sqrt{41}\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{4}-\theta\right).$$

故振幅为$\sqrt{41}$，周期为$2\pi\div\frac{\pi}{3}=6$。

1075. 已知a为任意常数(实数)，求证：$0\leq x\leq\pi$时，

$$(a+1)^2\cos^2x+4a\sin x\cos x$$
$$+(a-1)^2\sin^2x$$

的最大值不小于1。

解 原式$=(a^2+2a+1)\cos^2x+2a\sin2x$

$$+(a^2-2a+1)\sin^2x$$
$$=(a^2+1)(\cos^2x+\sin^2x)$$
$$+2a(\cos^2x-\sin^2x+\sin2x),$$

因为　$\sin^2x+\cos^2x=1$，

$\cos^2x-\sin^2x=\cos2x$，

所以

原式$=(a^2+1)+2a(\cos2x+\sin2x)$，

$$=(a^2+1)+2\sqrt{2}\,a\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).$$

因为$0\leq x\leq\pi$，所以$\frac{\pi}{4}\leq2x+\frac{\pi}{4}\leq2\pi+\frac{\pi}{4}$。这里包含了$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$的可能性，所以$a\geq0$时原式最大值为$a^2+1+2\sqrt{2}a$，$a<0$时原式最大值为$a^2+1-2\sqrt{2}a$。显然这些最大值都不小于1。

1076. 下列各式表示简谐振动，求它们的振幅和周期，其中y以cm为单位，t以秒为单位。

(1) $y=3\sin45^\circ t$；

(2) $y=2\sin(30^\circ t-60^\circ)$；

(3) $y=\cos(60^\circ t+45^\circ)$；

(4) $y=4\cos(45^\circ t-90^\circ)$；

(5) $y=3\cos(60^\circ t+45^\circ)$。

解

	振幅(cm)	周期(秒)
(1)	3	$\frac{360}{45}=8$
(2)	2	$\frac{360}{30}=12$
(3)	1	$\frac{360}{60}=6$
(4)	4	$\frac{360}{45}=8$
(5)	3	$\frac{360}{60}=6$

1077. 把下列简谐振动用式子表示出来，要求用余弦函数表示。

(1) 振幅为 2，初相位 30°，周期为 30 秒；

(2) 振幅为 3，初相位 $-45°$，频率为 2；

(3) 振幅为 1，周期为 30 秒，初相位较(1)中大 30°。

解 (1) 在简谐振动的一般式

$$y=r\cos(\omega t+\alpha)$$

中，$r=2$，$\omega=\frac{360°}{T}=\frac{360°}{30}=12°$，$\alpha=30°$，

$$\therefore\quad y=2\cos(12°t+30°).$$

(2) 同样地，在 $y=r\cos(360°nt+\alpha)$ 中，

$$r=3,\ n=2,\ \alpha=-45°.$$

$$\therefore\quad y=3\cos(720°t-45°).$$

(3) 参照 (1)，

$$r=1,\ \alpha=30°+30°=60°,$$

$$\therefore\quad y=\cos(12°t+60°).$$

1078. 在研究简谐振动时，要用到频率这个概念。频率表示了这个简谐振动在单位时间里有几次是处于相同状态的。设频率为 n，周期为 T，角速度为 ω，则有关系式

$$n=\frac{1}{T},\ \text{因而}\ \omega=360°\times n.$$

$y=r\sin\omega t$ 也成为 $y=r\sin(360°nt)$。

写出振幅为 5，频率为每秒 50 的简谐振动表示式。

解 因为 $r=5$，$n=50$，所以

$$y=r\sin(360°nt)=5\sin 18000°t.$$

1079. 已知 x 为锐角，$\sin x+\cos x=\sqrt{2}$，求 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 的值。

解 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sqrt{2},$$

$$\therefore\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

因为 $0<x<\frac{\pi}{2}$，所以满足上式的 x 的值为 $x=\frac{\pi}{4}$。从而求 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ 的值可由半角公式得，

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$$

$$=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1.$$

1080. x 为正的锐角，试答下列问题：

(1) 比较 $\sin x+\cos x$ 与 1 的大小，并说明理由；

(2) 求适合于

$$\sin x+\cos x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\ \text{的}\ x;$$

(3) 求 $\sin x+\cos x$ 的最大值。

解 (1) 若作变形，

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+45°),$$

由已知条件，$0°<x<90°$，因而

$$45°<x+45°<135°.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin(x+45°)\leq 1.$$

$$\therefore\quad 1<\sqrt{2}\sin(x+45°)\leq\sqrt{2},$$

因此 $\sin x+\cos x>1$。

(2) 把 $\sin(x+45°)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 代入

$$\cos(2x+90°)=1-2\sin^2(x+45°),$$

则

$$\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$2x=60°\ \text{或}\ 120°,\quad \therefore\quad x=30°,\ 60°.$$

(3) 最大值 $=\sqrt{2}$。

1081. 求下列函数的最大值、最小值。

(1) $\sin x-\sqrt{3}\cos x$；

(2) $5\sin^2x+6\sin x\cos x+13\cos^2x$。

解 (1) $\sin x-\sqrt{3}\cos x$

$$=2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$$
$$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right),$$

故最大值为2，最小值为 -2.

(2) $5\sin^2x+6\sin x\cos x+13\cos^2x$

$$=\frac{5-5\cos 2x}{2}+3\sin 2x+\frac{13+13\cos 2x}{2}$$
$$=3\sin 2x+4\cos 2x+9.$$

设 θ 是使 $\cos\theta=\frac{3}{5}$ 成立的锐角，则 $\sin\theta=\frac{4}{5}$.

$$\therefore\quad 5\left(\frac{3}{5}\sin 2x+\frac{4}{5}\cos 2x\right)+9$$
$$=5(\cos\theta\sin 2x+\sin\theta\cos 2x)+9$$
$$=5\sin(2x+\theta)+9.$$

故最大值为14，最小值为4.

1082. 已知同一直线上的动点 P_1、P_2 在时刻 t 的坐标是

$$x_1=\sin 2\pi t+\cos 2\pi t,$$
$$x_2=\sin 2\pi t\cos 2\pi t.$$

(1) 证明 P_1、P_2 都是简谐振动；

(2) 求这些简谐振动的周期和振幅；

(3) 画出 x_1 关于 t、x_2 关于 t 的函数关系的图象；

(4) 当时间从0变到1时，两个动点相会几次.

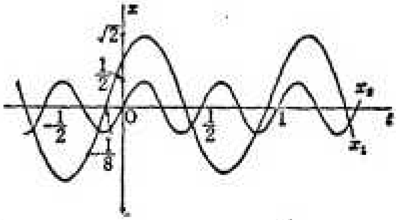
解 (1) $x_1=\sqrt{2}\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$,

$$x_2=\frac{1}{2}\sin 4\pi t.$$

因此 P_1、P_2 作简谐振动.

(2) 由上式知，x_1 的周期为 $\frac{2\pi}{2\pi}=1$，振幅为 $\sqrt{2}$. x_2 的周期为 $\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$，振幅为 $\frac{1}{2}$.

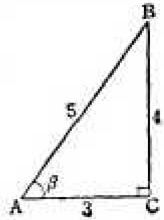
(3) 图象如下图所示.



(4) 两动点相会时即为图象相交的时刻. 因此 t 从0变到1时动点相会两次.

1083. 为了把 $y=3\cos x-4\sin x$ 化成 $r\cos(x+\beta)$ 的形式，只要用下面的方法就行了：两条直角边为3,4的直角三角形斜边为5，长度为4的直角边所对角设为 β，则

$$\cos\beta=\frac{3}{5},\ \sin\beta=\frac{4}{5}.$$



从而

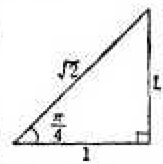
$$y=5\left(\frac{3}{5}\cos x-\frac{4}{5}\sin x\right)$$
$$=5(\cos\beta\cos x-\sin\beta\sin x)$$
$$=5\cos(x+\beta).$$

(1) 用上面的方法把 $y=\cos x-\sin x$ 化成 $r\cos(x+\beta)$ 的形式.

(2) 用(1)的结果画出

$$y=\cos x-\sin x$$

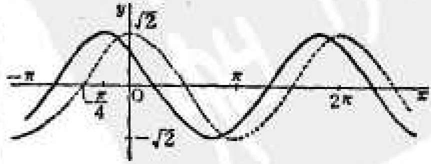
的图象.



解 (1) 取两直角边为1，斜边为 $\sqrt{2}$ 的直角三角形，长为1的边所对角为 $\frac{\pi}{4}$，所以

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$y=\sqrt{1^2+1^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$
$$=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

(2) 图象如下.



1084. 求下列两个简谐振动合成后的振幅、周期，并画出各自的图象.

$$x_1=3\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{4}\right),\ x_2=4\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}\right).$$

解　$x_1=3\left(\sin\frac{\pi t}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi t}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

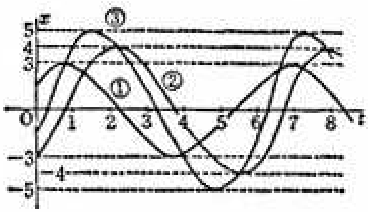
$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{\pi t}{3}+\cos\frac{\pi t}{3}\right). \quad ①$$

同理，

$$x_2=2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi t}{3}-\cos\frac{\pi t}{3}\right). \quad ②$$

$$\therefore\quad x=x_1+x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(7\sin\frac{\pi t}{3}-\cos\frac{\pi t}{3}\right)$$

$$=\sqrt{50}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{7}{\sqrt{50}}\sin\frac{\pi t}{3}-\frac{1}{\sqrt{50}}\cos\frac{\pi t}{3}\right)=5\sin\left(\frac{\pi t}{3}-\alpha\right). \quad ③$$



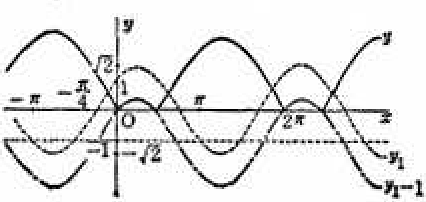
这里$\cos\alpha=\frac{7}{5\sqrt{2}}$，$\sin\alpha=\frac{1}{5\sqrt{2}}$. 由③，振幅为5，周期为$2\pi\div\frac{\pi}{3}=6$. ①、②、③的图象如上图.

1085．画出函数 $y=|\sin x+\cos x-1|$ 的图象.

解　把原式变形，则

$$y=|\sin x+\cos x-1|$$
$$=\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right|.$$

因此，只要先画出$y_1=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，再画$y=|y_1-1|$的图象即可．图象如下图中的实线.



1086．由两个简谐振动

$$y_1=12\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{4}\right),\ y_2=5\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{4}\right)$$

作出$y=y_1-y_2$.

(1) y代表什么运动?

(2) 在能使y取最大值的那些t值中，求绝对值最小的一个.

解　(1) $y=y_1-y_2$

$$=12\left(\sin\frac{\pi}{6}t\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}t\sin\frac{\pi}{4}\right)-5\left(\sin\frac{\pi}{6}t\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}t\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{12}{\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\sin\frac{\pi}{6}t-\left(\frac{12}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\cos\frac{\pi}{6}t$$

$$=\frac{7}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{6}t-\frac{17}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{6}t$$

$$=\sqrt{\frac{49}{2}+\frac{289}{2}}\left(\frac{7}{13\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{6}t-\frac{17}{13\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$=13\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\alpha\right),\ 其中\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{17}{7}.$$

因此，y是一个振幅为13，周期为$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$的简谐振动.

(2) 由于$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以使y取最大值的那些t值中绝对值最小的一个，必须满足

$$\frac{\pi}{6}t-\alpha=\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad t=3+\frac{6}{\pi}\alpha.$$

$$\left(其中\quad \alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{17}{7}\right).$$

1087．求下列两个简谐振动合成后的振幅与周期.

$$y_1=2\sin\pi t,\quad y_2=3\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right).$$

解　因为$\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi t$，所以把

$$y=y_1+y_2=2\sin\pi t+3\cos\pi t$$

化成$r\sin(\pi t+\theta)$，求出r、θ，就得到振幅为

$\sqrt{13}\approx3.6$，周期为 2.

1088. 证明不管 x 取什么值，$2(\sin x+\cos x)+3$ 均为正值.

解 $2(\sin x+\cos x)+3$

$$=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3$$

$$\geqq2\sqrt{2}(-1)+3>0,$$

这是因为 $-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$.

1089. a、b 是不全为 0 的实数，证明可以把

$$a\sin\theta+b\cos\theta$$

化成 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ 的形式.

解 因为

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$$

所以存在一个 α 使

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha.$$

对于这样的 α，

$$a\sin\theta+b\cos\theta$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$

1090. 平面上有两个动点 P、Q. 开始运动 t 秒后的位置为

$$P:\begin{cases}x=2\sin(30^\circ t+90^\circ),\\ y=\sin30^\circ t.\end{cases}$$

$$Q:\begin{cases}x=\cos(30^\circ t+90^\circ),\\ y=2\cos30^\circ t.\end{cases}$$

问两个动点 P、Q 开始运动之后，何时首次处于最接近的位置?

解 因为 $\sin(30^\circ t+90^\circ)=\cos30^\circ t$,

$$\cos(30^\circ t+90^\circ)=-\sin30^\circ t,$$

所以 $PQ^2=(2\cos30^\circ t+\sin30^\circ t)^2+(\sin30^\circ t-2\cos30^\circ t)^2$

$$=2\sin^2 30^\circ t+8\cos^2 30^\circ t,$$

由于 $\sin^2 30^\circ t=1-\cos^2 30^\circ t$，所以

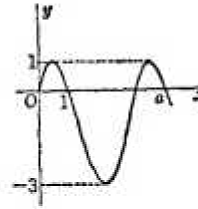
$$PQ^2=2+6\cos^2 30^\circ t,$$

故 PQ^2 当 $\cos^2 30^\circ t=0$ 时取最小. 当 $0\leqq t$ 时使 $\cos30^\circ t=0$ 成立的 t 的最小值为 3.

1091. 下图是

$$y=R\cos\left(\frac{2\pi}{3}x+\theta\right)-1$$

的图象的一部分. 求 R、θ 和 a 的值. 其中 R 为正数，角用弧度制表示.



解 由图知，振幅 R 为

$$R=\frac{1}{2}[1-(-3)]=2,$$

$$\therefore\quad y=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}x+\theta\right)-1,$$

又由图知 $x=0$，$x=1$ 时 $y=0$，故

$$2\cos\theta-1=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)-1=0,$$

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \theta=-\frac{\pi}{3}.$$

y 的周期 T 为

$$T=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3,\quad \therefore\quad a=T+1=4.$$

1092. 求下面两个简谐振动合成后的振幅、周期.

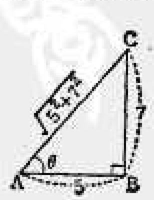
解 $y=5\sin\pi t+7\cos\pi t$

$$=\sqrt{5^2+7^2}\sin(\pi t+\theta)\quad（参见注）$$

$$=\sqrt{74}\sin(\pi t+\theta).$$

其中 $\operatorname{tg}\theta=\frac{7}{5}$. 从而振幅为 $\sqrt{74}$，周期为 $\frac{2\pi}{\pi}=2$(秒).

注 设 $\operatorname{tg}\theta=\frac{7}{5}$,



$$\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{5^2+7^2}}=\frac{5}{\sqrt{74}},$$

$$\therefore\quad 5=\sqrt{74}\cos\theta.$$

同理， $7=\sqrt{74}\sin\theta.$

$\therefore\quad y=5\sin\pi t+7\cos\pi t$

$$=\sqrt{74}\cos\theta\sin\pi t+\sqrt{74}\sin\theta\cos\pi t$$

$$=\sqrt{74}(\sin\pi t\cos\theta+\sin\theta\cos\pi t)$$

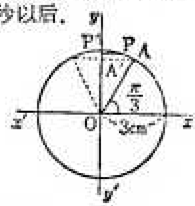
$$=\sqrt{74}\sin(\pi t+\theta).$$

1093. 点 P 从图中 A 处出发，在半径为 3cm 的圆周上以每秒 $\frac{\pi}{4}$ 的角速度朝逆时针方向运动。

(1) 设由 P 向 yy' 所作垂线的足是 P'，P' 第二次通过出发点是几秒以后。

(2) 从开始运动 t 秒后 OP' 的长度是多少？

(3) 从开始运动 10 秒后，P' 在 yy' 上的运动方向是什么？



解 设 t 秒后 P 的坐标是 x、y，则

$$x=3\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right),$$

$$y=3\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right).$$

(1) P' 第二次通过出发点时，有

$$\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad t=\frac{4}{\pi}\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{4}{3}(秒).$$

(2) $OP'=|y|=3\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)\right|.$

(3) $t=10$ 时动半径 OP 的位置在

$$\frac{\pi}{4}\times10+\frac{\pi}{3}=\frac{17\pi}{6}=2\pi+\frac{5\pi}{6},$$

即第二象限内，所以此时 P' 在 yy' 上向下运动。

1094. (1) 求两个简谐振动

$$y_1=-5\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{5}t+\pi\right),$$

$$y_2=4\cos\left(\frac{\pi}{5}t+\frac{\pi}{3}\right)$$

合成后的振幅与周期。

(2) 画出两个原来的简谐振动和合成振动的图象。

解 (1) 设合成振动为 y，则

$$y=y_1+y_2=5\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{5}t$$

$$+4\left(\cos\frac{\pi}{5}t\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{5}t\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\left(5\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)\sin\frac{\pi}{5}t+\frac{4}{2}\cos\frac{\pi}{5}t$$

$$=3\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{5}t+2\cos\frac{\pi}{5}t$$

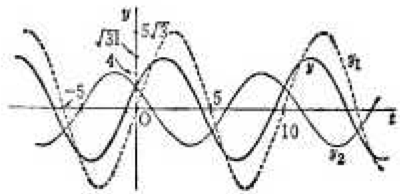
$$=\sqrt{27+4}\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}\sin\frac{\pi}{5}t+\frac{2}{\sqrt{31}}\cos\frac{\pi}{5}t\right)$$

$$=\sqrt{31}\sin\left(\frac{\pi}{5}t+\alpha\right),$$

其中 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

$$\therefore\quad 振幅=\sqrt{31},\ 周期=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}}=10.$$

(2) 图象如下：



1095. 证明下列等式：

(1) $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\cos(\theta-60^\circ)$;

(2) $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin(\theta-30^\circ)$.

解 (1) 左边

$$=\sqrt{1+3}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$$

$$=2(\cos60^\circ\cos\theta+\sin60^\circ\sin\theta)$$

$$=2\cos(\theta-60^\circ).$$

(2) 左边

$$=\sqrt{3+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2(\cos30^\circ\sin\theta-\sin30^\circ\cos\theta)$$

$$=2\sin(\theta-30^\circ).$$

1096. 用加法定理合成下面的简谐振动：

$$y_1=5\sin30^\circ t,$$

$$y_2=4\sin(30^\circ t+90^\circ).$$

解 $y=y_1+y_2=5\sin30^\circ t+4\cos30^\circ t$

$$=\sqrt{25+16}\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\sin30^\circ t+\frac{4}{\sqrt{41}}\cos30^\circ t\right)$$

$$=\sqrt{41}\sin(30^\circ t+\alpha).$$

其中 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{5}$.

1097. 点 P 在圆 O 上以每分钟五圈的速率逆时针旋转. P 的角速度是多少? 周期为多少秒?

一般地, 以每秒 $\alpha°$ 的角速度作圆周运动时, 其周期 T (秒)与 α 之间有什么关系?

解 由于每分钟转五圈, 所以1秒中旋转的角度即角速度为

$$5\times2\pi\times\frac{1}{60}=\frac{\pi}{6}\text{(弧度/秒)},$$

$$\therefore\ \text{周期}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12\text{(秒)}.$$

若角速度为 $\alpha°$/秒, 则化成以弧度/秒为单位时角速度为 $\frac{\pi\alpha}{180}$ (弧度/秒), 所以

$$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi\alpha}{180}},\quad \therefore\ T=\frac{360}{\alpha}\text{(秒)}.$$

1098. 求下列函数的周期、最大值、最小值. 当某一值不存在时则记入"无".

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \cos^2x,\ \sin x+\cos x,$$

$$|\operatorname{tg}x|,\ \frac{1}{\sin^2x},\ \cos3x,\ \sin x\cos x,$$

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x,\ |\sin x|,\ \frac{1}{|\cos x|}.$$

解 如下表所示.

函数	周期	最大值	最小值
$\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	2π	无	无
$\cos^2x=\frac{1}{2}(\cos2x+1)$	π	1	0
$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	2π	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\lvert\operatorname{tg}x\rvert$	π	无	0
$\frac{1}{\sin^2x}=\csc^2x$	π	无	1
$\cos3x$	$\frac{2\pi}{3}$	1	-1
$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin2x$	π	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin(x-\alpha)$	2π	2	-2
$\lvert\sin x\rvert$	π	1	0
$\frac{1}{\lvert\cos x\rvert}=\lvert\sec x\rvert$	π	无	1

1099. 对于 $y=3\sin(90°t+60°)$,

(1) 求 $t=-1$, $t=0$, $t=1$ 时的 y 值.

(2) 求当 t 取实数值时对应的 y 值范围.

(3) 证明 y 是关于 t 的周期函数, 求出它的周期.

解 (1) $t=-1$ 时,

$$y=3\sin(-90°+60°)=-3\sin30°=-\frac{3}{2}.$$

$t=0$ 时, $y=3\sin60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$t=1$ 时,

$$y=3\sin(90°+60°)=3\cos60°=\frac{3}{2}.$$

(2) $-3\leqq y\leqq3$.

(3) 当 $90°t$ 变动 $360°$ 时, 有

$$3\sin(90°t+360°+60°)=3\sin(90°t+60°),$$

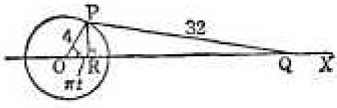
所以 y 是周期函数,

$$\text{周期}=\frac{360°}{90°}=4.$$

1100. 在半径为4的圆周上有动点 P, 在通过圆心的定直线上有动点 Q, 设 $PQ=32$, 现在 P 以每秒 π 的匀角速度在圆周上运动时, 试用式子表示出动点 Q 作什么样的运动.

如果把 Q 看作是在作近似的简谐振动, Q 的运动方程式是怎样的?

解 以定圆的圆心 O 为原点, 以定直线 OX 为 x 轴, 动点 P 从圆周与 OX 的交点开始运动, t 秒后 P 的位置是 $(4\cos\pi t,\ 4\sin\pi t)$. 现在设点 P 向定直线所作垂线的垂足是 R, 则点 Q 的运动方程式是



$$x=OQ=OR+RQ$$
$$=4\cos\pi t+\sqrt{32^2-(4\sin\pi t)^2}$$
$$=4\left(\cos\pi t+\sqrt{64-\sin^2\pi t}\right).$$

如果在上述 Q 的运动式中近似取:

$$64-\sin^2\pi t\approx 64,$$

则 Q 可看成是作如下的简谐振动:

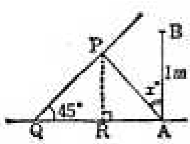
$$x=4(\cos\pi t+8).$$

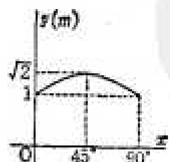
1101. 太阳光线和地平面成 45° 角,长度为 1m 的一根棒从垂直于地面的位置向着影子的方向逐渐倒下,则影长如何变化?若设棒和铅垂方向成角 x°,影长为 y,试画 y 关于 x 的函数图象,并求 y 的最大值。

解 设直立的棒 AB 倒下 x° 后的位置为 AP $(0^\circ\leq x^\circ\leq 90^\circ)$,此时影子为 AQ,因为 $\angle AQP=45^\circ$,所以

$$y=AQ=AR+RQ=AR+PR$$
$$=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+45^\circ),$$

因而棒影的最大值为 $\sqrt{2}$ m,y 的图象如下图所示。





1102. 一条直线上有 P_1、P_2 两点都在原点 O 的左右振动。这两点在某个 t 时刻的坐标分别为

$$x_1=a\cos\alpha t,$$
$$x_2=a\cos\left(\alpha t+\frac{\pi}{3}\right).$$

求两点相距最远时的距离。其中 a、α 都是正的常数。

解 两点的距离 x 可用 $x=|x_1-x_2|$ 表示出来。

$$x_1-x_2=a\left[\cos\alpha t-\left(\cos\alpha t\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha t\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=a\left(\frac{1}{2}\cos\alpha t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha t\right)$$
$$=a\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha t+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha t\right)$$
$$=a\cos\left(\alpha t-\frac{\pi}{3}\right).$$
$$\therefore\quad x=|x_1-x_2|=a\left|\cos\left(\alpha t-\frac{\pi}{3}\right)\right|.$$

因此两点间的最大距离为 a。

1103. 相同周期的两个简谐振动

$$y_1=r_1\sin(\alpha t+\beta_1),$$
$$y_2=r_2\sin(\alpha t+\beta_2)$$

合成后,仍是同一周期的简谐振动,其运动式为 $y=R\sin(\alpha t+\omega)$,其中 R、ω 可由下式表出。

(1) $R=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\quad)}$.

(2) $\sin(\omega-\beta_1)=\dfrac{r_2}{R}(\quad)$,

$\sin(\omega-\beta_2)=\dfrac{r_1}{R}(\quad)$.

试把适当的式子填入上面的( )中,并证明(2)中的式子。

解 $y=y_1+y_2$

$$=r_1(\sin\alpha t\cos\beta_1+\cos\alpha t\sin\beta_1)+r_2(\sin\alpha t\cos\beta_2+\cos\alpha t\sin\beta_2)$$
$$=(r_1\cos\beta_1+r_2\cos\beta_2)\sin\alpha t+(r_1\sin\beta_1+r_2\sin\beta_2)\cos\alpha t,$$

但是因为

$$(r_1\cos\beta_1+r_2\cos\beta_2)^2+(r_1\sin\beta_1+r_2\sin\beta_2)^2$$
$$=r_1^2(\cos^2\beta_1+\sin^2\beta_1)+r_2^2(\cos^2\beta_2+\sin^2\beta_2)+2r_1r_2(\cos\beta_1\cos\beta_2+\sin\beta_1\sin\beta_2)$$
$$=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\beta_1-\beta_2),$$

所以

$$y=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\beta_1-\beta_2)}\times\left[\frac{r_1\cos\beta_1+r_2\cos\beta_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\beta_1-\beta_2)}}\sin\alpha t+\frac{r_1\sin\beta_1+r_2\sin\beta_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\beta_1-\beta_2)}}\cos\alpha t\right]$$

为把上式写成 $y=R\sin(\alpha t+\omega)$ 的形式,只要设

$$\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\beta_1-\beta_2)}=R,$$
$$\frac{r_1\cos\beta_1+r_2\cos\beta_2}{R}=\cos\omega,$$

$$\frac{r_1\sin\beta_1+r_2\sin\beta_2}{R}=\sin\omega$$

即可，从而

$$\sin(\omega-\beta_1)=\sin\omega\cos\beta_1-\cos\omega\sin\beta_1$$
$$=\frac{1}{R}[(r_1\sin\beta_1+r_2\sin\beta_2)\cos\beta_1-(r_1\cos\beta_1+r_2\cos\beta_2)\sin\beta_1]$$
$$=\frac{r_2}{R}(\sin\beta_2\cos\beta_1-\cos\beta_2\sin\beta_1)$$
$$=\frac{r_2}{R}\sin(\beta_2-\beta_1).$$

$$\sin(\omega-\beta_2)=\sin\omega\cos\beta_2-\cos\omega\sin\beta_2$$
$$=\frac{1}{R}[(r_1\sin\beta_1+r_2\sin\beta_2)\cos\beta_2-(r_1\cos\beta_1+r_2\cos\beta_2)\sin\beta_2]$$
$$=\frac{r_1}{R}(\sin\beta_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\sin\beta_2)$$
$$=\frac{r_1}{R}\sin(\beta_1-\beta_2).$$

1104. (1) 证明

$$y=k\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

总可写成 $y=r\sin(x+\alpha)$ 的形式.

(2) 这时 r 可以表示成 k 的什么式子？

(3) k 为何值时 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$？

(4) 画出 (3) 中 y 关于 x 的函数图象.

解　(1) 用加法定理进行变形，则

$$y=k\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)+\sin x$$
$$=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)\sin x+\frac{k}{2}\cos x$$
$$=\sqrt{1-\sqrt{3}k+\frac{3}{4}k^2+\frac{k^2}{4}}\times\left(\frac{2-\sqrt{3}k}{2\sqrt{1-\sqrt{3}k+k^2}}\sin x+\frac{k}{2\sqrt{1-\sqrt{3}k+k^2}}\cos x\right)$$
$$=\sqrt{1-\sqrt{3}k+k^2}\sin(x+\alpha).$$

其中　$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\frac{k}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}k}=\dfrac{k}{2-\sqrt{3}k}$.

(2) 由上式的结果得

$$r=\sqrt{1-\sqrt{3}k+k^2}.$$

(3) 由给出的条件知

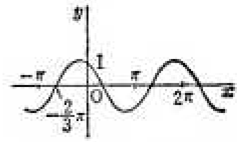
$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}=\frac{k}{2-\sqrt{3}k},$$

从而　$-2\sqrt{3}+3k=k$,

$$\therefore\ k=\sqrt{3}.$$

(4) $y=\sqrt{1-3+3}\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$=\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right).$$



1105. 回答下列关于简谐振动合成的问题.

(1) 把简谐振动 $x_1=a_1\cos(\omega t+\theta_1)$, $x_2=a_2\cos(\omega t+\theta_2)$ 的和表示成　$x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\theta)$ 的形式，求 A 和 $\operatorname{tg}\theta$.

(2) 求由简谐振动式 $x=a\cos(\omega t+p)$, $y=b\cos(\omega t+q)$ 中消去 t 后得到的关系式.

解　(1) x_1+x_2

$$=a_1(\cos\omega t\cos\theta_1-\sin\omega t\sin\theta_1)+a_2(\cos\omega t\cos\theta_2-\sin\theta_2\sin\omega t)$$
$$=(a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2)\cos\omega t-(a_1\sin\theta_1+a_2\sin\theta_2)\sin\omega t,$$

因而若设

$$A=\sqrt{(a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2)^2+(a_1\sin\theta_1+a_2\sin\theta_2)^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos(\theta_1-\theta_2)},$$
$$\operatorname{tg}\theta=\frac{a_1\sin\theta_1+a_2\sin\theta_2}{a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2},$$

就有

$$x_1+x_2=A(\cos\omega t\cos\theta-\sin\omega t\sin\theta)=A\cos(\omega t+\theta).$$

(2) $x=a(\cos\omega t\cos p-\sin\omega t\sin p)$.　①

$y=b(\cos\omega t\cos q-\sin\omega t\sin q)$.　②

由 ① $\times b\sin q-$ ② $\times a\sin p$, 可得

$$b\sin q\cdot x-a\sin p\cdot y=ab\sin(q-p)\cdot\cos\omega t.$$　③

由 ① $\times b\cos q$ － ② $\times a\cos p$，可得

$$b\cos q\cdot x - a\cos p\cdot y$$
$$= ab\sin(q-p)\cdot\sin\omega t. \qquad ④$$

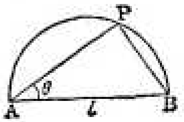
把 ③、④ 式的两边平方后相加，得

$$(bx\sin q - ay\sin p)^2 + (bx\cos q - ay\cos p)^2$$
$$= a^2b^2\sin^2(q-p).$$

把左边展开，整理可得

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy\cos(p-q)$$
$$= a^2b^2\sin^2(p-q).$$

1106. 在以 $AB = l$ 为直径的半圆周上取点 P，求下列各式的最大值。



(1) $AP+BP$；(2) $2AP+BP$；

(3) $3AP+4BP$。

解　设 $\angle BAP=\theta$，则 $0°<\theta<90°$，$AP=l\cos\theta$，$BP=l\sin\theta$。

(1) $AP+BP=l(\cos\theta+\sin\theta)$

$$=\sqrt{2}\,l\sin(\theta+45°).$$

$\therefore$　最大值 $=\sqrt{2}\,l$。

(2) $2AP+BP=l(2\cos\theta+\sin\theta)$

$$=\sqrt{4+1}\,l\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta\right)$$
$$=\sqrt{5}\,l\sin(\theta+\alpha),$$

其中 $\mathrm{tg}\,\alpha=2$，$\therefore$　最大值 $=\sqrt{5}\,l$。

(3) $3AP+4BP=l(3\cos\theta+4\sin\theta)$

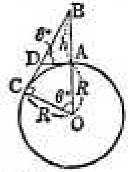
$$=\sqrt{9+16}\,l\left(\frac{4}{5}\sin\theta+\frac{3}{5}\cos\theta\right)$$
$$=5l\sin(\theta+\alpha),$$

其中 $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{3}{4}$，$\therefore$　最大值 $=5l$。

1107. 从正在飞行的飞机上测出看地平线的俯视角，由此求出飞机的高 h。当俯角为 $\theta°$ 时，证明 h 可由

$$h=\frac{R(1-\cos\theta°)}{\cos\theta°}$$

求出，其中 R 是地球的半径。



解　设飞机在地面上 A 点的正上方，离地高度为 h，得到右图。比较 $\triangle ABD$ 和 $\triangle COB$ 的角，易知

$$\angle BOC=\angle BDA=\theta°.$$

因此在直角 $\triangle OBC$ 中，

$$OC=OB\cos\theta°.$$

即　　$R=(R+h)\cos\theta°$。

解出 h，得

$$h=\frac{R(1-\cos\theta°)}{\cos\theta°}.$$

1108. 线段 AB 在直线 $X'OX$ 上振动，AB 中点 M 的运动方程式为

$$y_1=2\sin\pi t. \qquad ①$$

(这里 t 表示时间，振动的中心为 O，$y_1=OM$) 而且点 P 是在线段 AB 上作以 M 为中心的简谐振动，它的运动方程式为

$$y_2=3\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right). \qquad ②$$

(其中 $y_2=MP$)

(1) 分别求出 ①、② 的周期和振幅；

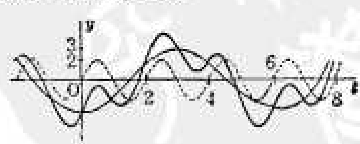
(2) 设 $OP=y$，写出 y 和 t 的关系式，并画出这个关系的图象。

解　(1) 由 ①、② 式知，y_1 的周期 $=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$，振幅 $=2$。y_2 的周期 $=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$，振幅 $=3$。

(2) 在下图中，

$$y=OP=OM+MP=y_1+y_2$$
$$=2\sin\pi t+3\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right).$$

图象为下图中的粗线。



1109. 当 θ 在 $0\leqq\theta\leqq\pi$ 的范围内变化时，由

$$x=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta,$$
$$y=\frac{1}{2}(a-b)\sin 2\theta$$

定义的点 $P(x, y)$ 在怎样的曲线上运动？其中 a、b 为常数，且 $a>b$。

解　　$x=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta,\qquad ①$

$$y=\frac{1}{2}(a-b)\sin 2\theta, \qquad ②$$

$0\leq\theta\leq\pi$。　③

把①式右边都化成 $\sin\theta$，

$$x=a(1-\sin^2\theta)+b\sin^2\theta,$$

$$\therefore\quad x-a=-(a-b)\sin^2\theta. \qquad ①'$$

把①式右边都化成 $\cos\theta$，

$$x-b=(a-b)\cos^2\theta. \qquad ①''$$

①′×①″，得

$$(x-a)(x-b)=-(a-b)^2\sin^2\theta\cos^2\theta. \qquad ④$$

由②，得　$y=(a-b)\sin\theta\cos\theta$。　②′

④+②′²，得

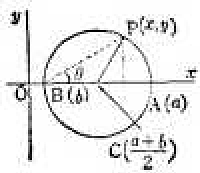
$$(x-a)(x-b)+y^2=0.$$

把上式变形，得到下面的圆方程式：

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2. \qquad ⑤$$

由②、③知，

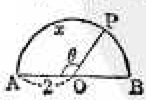
$$|y|\leq\frac{1}{2}(a-b).$$



因此 $P(x, y)$ 在⑤表示的整个圆上运动。

注　在右图中，$\angle ACP=2\theta$。

1110. 以 AB 为直径的半圆周上，有动点 P 自 A 运动至 B。设 $AB=4$，$\overset{\frown}{AP}=x$，$\triangle ABP$ 的面积 $=y$。试把 y 表示成 x 的函数，并给出 y 随 x 而变化的图象。再求当 y 取到最大值的一半时的 x 值。



解　设 $\angle AOP=\theta$，

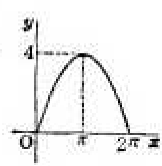
则　　$x=2\theta$。

$$\therefore\quad \theta=\frac{x}{2}.$$

因而　$y=S_{\triangle ABP}=2S_{\triangle AOP}$

$$=2\times\frac{1}{2}\times2^2\sin\theta=4\sin\frac{x}{2}\ (0\leq x\leq 2\pi).$$

因为 y 的最大值的一半是2，这时的 x 值满足 $2=4\sin\dfrac{x}{2}$。即



$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad \frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}\quad 或\quad \frac{x}{2}=\frac{5}{6}\pi.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\pi}{3}\quad 或\quad x=\frac{5}{3}\pi.$$

1111. 证明下面两个等式：

(1) 若 $y_1=a\sin x$，$y_2=b\cos x$，则

$$y=y_1+y_2=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta),$$

其中 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{b}{a}$。

(2) $2\sin\pi t+3\cos\pi t=\sqrt{13}\sin(\pi t+\theta)$，

其中 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{3}{2}$。

解　(1) 设 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{b}{a}$，则

$$\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

从而　$a=\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta$，$b=\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta$。

故　$a\sin x+b\cos x$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta\sin x+\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta\cos x$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta).$$

(2) 设 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{3}{2}$，则

$$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{9+4}}=\frac{3}{\sqrt{13}},\quad \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

因而　$y=2\sin\pi t+3\cos\pi t$

$$=\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin\pi t+\frac{3}{\sqrt{13}}\cos\pi t\right)$$

$$=\sqrt{13}(\cos\theta\sin\pi t+\sin\theta\cos\pi t)$$

$$=\sqrt{13}\sin(\pi t+\theta).$$

1112. 把 $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)-2\cos x$ 写成 $y=r\sin(x+\alpha)$ 的形式。

解　因为

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x.$$

所以

$$y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-2\cos x$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)-2\cos x$$

$$=-(\sqrt{3}\sin x+\cos x). \qquad ①$$

从而 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3+1}=2$，若设 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

即 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，则由①可得

$=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. ②

由于 $r>0$，故用 $\sin(-\theta)=\sin(\pi+\theta)$，可有

② 式 $=2\sin\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)$.

1113. 求两个简谐振动

$$y_1=a\cos(\pi t+\alpha),\ y_2=b\sin(\pi t+\beta)$$

合成后的振幅与周期.

解 $y_1=a\cos(\pi t+\alpha)$

$=a(\cos\pi t\cos\alpha-\sin\pi t\sin\alpha)$,

$y_2=b\sin(\pi t+\beta)$

$=b(\sin\pi t\cos\beta+\cos\pi t\sin\beta)$.

故若把 y_1+y_2 按 $\sin\pi t$、$\cos\pi t$ 整理成 $A\sin\pi t+B\cos\pi t$，则有

$$y_1+y_2=(b\cos\beta-a\sin\alpha)\sin\pi t+(a\cos\alpha+b\sin\beta)\cos\pi t.$$

即 $A=b\cos\beta-a\sin\alpha$,

$B=a\cos\alpha+b\sin\beta$.

$$\therefore\ A^2+B^2=(b\cos\beta-a\sin\alpha)^2+(a\cos\alpha+b\sin\beta)^2=a^2+b^2-2ab\sin(\alpha-\beta).$$

$$\therefore\ \sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin(\alpha-\beta)}.$$

故 $y=y_1+y_2$

$$=\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin(\alpha-\beta)}\sin(\pi t+\theta),$$

其中 $\operatorname{tg}\theta=\frac{a\cos\alpha+b\sin\beta}{b\cos\beta-a\sin\beta}$，因而

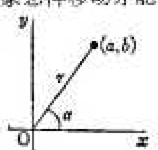
振幅: $\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin(\alpha-\beta)}$.

周期: $\frac{2\pi}{\pi}=2$.

1114. a, b 为非零实数，证明下列两个函数的图象可以经平移后重合.

$$y=a\sin x+b\cos x, \qquad ①$$
$$y=a\sin x-b\cos x. \qquad ②$$

特别地，当 $a=b$ 时 ① 的图象怎样移动才能与 ② 的图象重合？



解 如图那样设 r、α，则满足

$a=r\cos\alpha$,

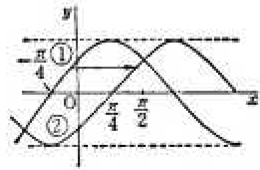
$b=r\sin\alpha$.

$y=r\cos\alpha\sin x+r\sin\alpha\cos x$,

$\therefore\ y=r\sin(x+\alpha)$, ①

同理 $y=r\sin(x-\alpha)$. ②

故 ① 的图象沿 x 轴正向平移 2α 后可得 ②



的图象. $a=b$ 时，$\alpha=\frac{\pi}{4}$，因而 ① 只要向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 即得 ②.

1115. 在半径为 r 的圆周上，有一动点 P 作逆时针方向的匀速运动，而圆心 O 又在直线 $y=R\,(R>0)$ 上运动．求过 P、O 的直线与 x 轴的交点 Q 的速度．其中 t 时刻的 O 的坐标为 $(at,\ R)$，$t=0$ 时 P 的坐标为 $(0,\ R+r)$，P 在圆周上运动一周需时 $\frac{2\pi}{\omega}$.

解 因为点 P 的角速度为 ω，故 t 时刻 OP 和 y 轴所成角为 ωt，即与 x 轴所成角为 $\omega t+\frac{\pi}{2}$，所以 OP 是过 $O(at,\ R)$，斜率为 $\operatorname{tg}\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$ 的一条直线，其方程式为

$$y-R=-(x-at)\operatorname{ctg}\omega t.$$

故 Q 的 x 坐标为 $at+R\operatorname{tg}\omega t=f(t)$，$Q$ 在 t 时刻的速度为

$$f'(t)=a+\frac{R\omega}{\cos^2\omega t}.$$

1116. (1) 把 $\cos\theta-\sin\theta$ 化成 $a\cos(\theta+\alpha)$ 的形式.

(2) 求 $45°\leq\theta\leq90°$ 时 $\sin\theta-\cos\theta$ 的变化范围.

(3) 求 $45°\leq\theta\leq90°$ 时满足关系式 $\sin\theta-\cos\theta=x-\frac{1}{x}$ 的 x 的取值范围.

解 (1) $\cos\theta-\sin\theta$

$=\sqrt{2}(\cos\theta\cos45°-\sin\theta\sin45°)$

$=\sqrt{2}\cos(\theta+45°)$.

(2) 当 $45°\leq\theta\leq90°$ 时有 $90°\leq\theta+45°\leq135°$. 所以

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq\cos(\theta+45°)\leq0.$$

从而 $\sin\theta-\cos\theta$ 的变化范围为

$$0\leq\sin\theta-\cos\theta\leq1.$$

(3) 由 (2) 知，要求出 $45°\leq\theta\leq90°$ 时满

足 $\sin\theta-\cos\theta=x-\dfrac{1}{x}$ 的 x 取值范围，只要求 $0\leqq a\leqq 1$ 时满足 $x-\dfrac{1}{x}=a$ 的 x 的取值范围就行了。x 的函数

$$y=x-\frac{1}{x}$$

在 $x<0$ 和 $x>0$ 时都是增函数。为使 $y=0$ 应有 $x=\pm1$，为使 $y=1$ 有 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，从而所求的 x 范围为

$$-1\leqq x\leqq-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ 和 } 1\leqq x\leqq\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

1117. (1) 求 t 为任意值时 $x=\sin t+\cos t$ 的取值范围；

(2) 把 $y=\sin^3 t+\cos^3 t$ 表示成 x 的函数；

(3) 求 y 的最大、最小值。

解 (1) $x=\sin t+\cos t$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin t\cos\frac{\pi}{4}+\cos t\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right),$$

由于 $-1\leqq\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$，所以

$$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}.$$

(2) $y=\sin^3 t+\cos^3 t=(\sin t+\cos t)^3$

$$-3\sin t\cos t(\sin t+\cos t)$$

$$=x^3-3x\sin t\cos t,$$

又因为 $x^2=\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t$

$$=1+2\sin t\cos t,$$

$$\therefore\quad 2\sin t\cos t=x^2-1.$$

代入后得

$$y=x^3-\frac{3}{2}x(x^2-1)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x.$$

(3) $y'=-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$

$$=-\frac{3}{2}(x-1)(x+1).$$

x	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	1	↘	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

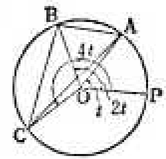
即当 $x=1$ 时 y 取到最大值 1，$x=-1$ 时 y 取到最小值 -1。

1118. 在半径为 a 的圆周上，有 A、B、C 三个动点分别以一定的角速度从同一点同时出发，朝同一方向作圆周运动，试考察以 A、B、C 为顶点的三角形的面积变化情况。A、B、C 的角速度分别为每秒 1，2，4。回答下列问题：

(1) 求出表示 t 秒后三角形 ABC 面积的式子 $F(t)$。

(2) 设 $F(t)$ 取到极大时 t 的取值为 T，求 $\cos T$。

(3) 算出三角形 ABC 面积的极大值。



解 (1) A、B、C 从点 P 同时出发，向同一方向作圆周运动，设 t 秒后的位置如图所示。由于

$$\angle AOP=t,\ \angle BOP=2t,\ \angle COP=4t.$$

(这些角以 OP 为始边)所以

$$\angle AOB=t,\ \angle BOC=2t,\ \angle AOC=3t,$$

从而 $\triangle ABC$ 的面积 $F(t)$ 为

$$F(t)=\frac{a^2}{2}|\sin t+\sin 2t-\sin 3t|.$$

(2) 因为

$$\sin t+\sin 2t-\sin 3t$$

$$=\sin t+2\sin t\cos t-(3\sin t-4\sin^3 t)$$

$$=\sin t(1+2\cos t-3+4\sin^2 t)$$

$$=\sin t(1+2\cos t-3+4-4\cos^2 t)$$

$$=\sin t(2+2\cos t-4\cos^2 t)$$

$$=2\sin t(1-\cos t)(1+2\cos t),$$

因此若考察 $0\leqq t\leqq 2\pi$，则当 $0<t<\dfrac{2\pi}{3}$ 时

$$\sin t+\sin 2t-\sin 3t>0.$$

当 $\dfrac{2\pi}{3}<t<\pi$ 时

$$\sin t+\sin 2t-\sin 3t<0.$$

当 $\pi<t<\dfrac{4}{3}\pi$ 时

$$\sin t+\sin 2t-\sin 3t>0.$$

当 $\dfrac{4}{3}\pi<t<2\pi$ 时

$$\sin t+\sin 2t-\sin 3t<0.$$

$$F'(t)=\pm\frac{a^2}{2}(\cos t+2\cos 2t-3\cos 3t).$$

其中符号当 $\sin t+\sin 2t-\sin 3t$ 为正时取＋，为负时取－．现求当 $F'(t)=0$ 时的 $\cos t$ 值，

$$\begin{aligned}&\cos t+2\cos 2t-3\cos 3t\\&=\cos t+2(2\cos^2 t-1)-3(4\cos^3 t-3\cos t)\\&=-12\cos^3 t+4\cos^2 t+10\cos t-2\\&=-2(\cos t-1)(6\cos^2 t+4\cos t-1)=0,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \cos t=1\ \text{或}\ \cos t=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{6}.$$

当 $\cos t=1$ 时 $F(t)=0$，$F(t)$ 此时不是取极大值．$\cos t=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{6}$ 时 $F(t)$ 取极大值，所以

$$\cos T=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{6}.$$

(3) 当 $\cos T=\frac{-2+\sqrt{10}}{6}$ 时，

$$\sin T=\pm\sqrt{1-\frac{14-4\sqrt{10}}{36}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{22+2\sqrt{40}}}{6}=\pm\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{6}.$$

这时 $F(t)$ 的极大值为

$$\begin{aligned}F(t)&=\frac{a^2}{2}\left|2\cdot\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{6}\left(1-\frac{-2+\sqrt{10}}{6}\right)\right.\\&\qquad\left.\times\left(1+\frac{-4+2\sqrt{10}}{6}\right)\right|\\&=\frac{a^2}{2}\left|\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{8-\sqrt{10}}{6}\cdot\frac{2+2\sqrt{10}}{6}\right|\\&=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{68\sqrt{2}+10\sqrt{5}}{54}\\&=\frac{34\sqrt{2}+5\sqrt{5}}{54}a^2.\end{aligned}$$

又当 $\cos T=\frac{-2-\sqrt{10}}{6}$ 时，

$$\sin T=\pm\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{6}.$$

这时 $F(t)$ 的极大值为

$$\begin{aligned}F(t)&=\frac{a^2}{2}\left|2\cdot\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{6}\left(1-\frac{-2-\sqrt{10}}{6}\right)\right.\\&\qquad\left.\times\left(1+\frac{-4-2\sqrt{10}}{6}\right)\right|\\&=\frac{34\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{54}a^2.\end{aligned}$$

1119． 根据下面的计算过程填充 $\boxed{}$，并订正其中的计算错误．

当 $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时，

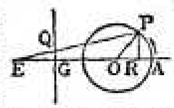
$$\begin{aligned}&a\cos\theta+b\sin\theta\\&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+(1)\boxed{}\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta(2)\boxed{}+(3)\boxed{}\cos\alpha)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\alpha).\end{aligned}$$

解　(1) $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta$，(2) $\sin\alpha$，(3) $\sin\theta$．

$\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\alpha)$ 应订正为

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$

1120． 右图中，在圆心为 O 半径为 1m 的圆周上，点 P 以每秒 30° 的角速度作圆周运动．GQ 垂直于 EO．试把 GQ 的长度表示成时间 t (秒) 的函数．其中 $EG=1\text{m}$，$GO=2\text{m}$，E、Q、P 在同一直线上，并设 P 是从 A 出发的．再求 $t=1,2,3,\cdots$ 时的 QG 的长度，并由此画出大概的图象．



解　$\angle AOP=\frac{\pi t}{6}$．由 P 向 EO 作垂线 PR，则

$$\triangle EGQ\backsim\triangle ERP,\quad\therefore\quad\frac{GQ}{EG}=\frac{RP}{ER}.$$

但是 $EG=1$，$ER=3+\cos\frac{\pi t}{6}$，$RP=\sin\frac{\pi t}{6}$，故若设 $GQ=y(\text{m})$，则

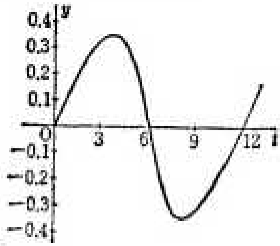
$$y=\frac{\sin\frac{\pi t}{6}}{3+\cos\frac{\pi t}{6}}.$$

其中 GQ 的长度当 Q 在 G 上方时为正，在下方时为负．

y 是周期为 12 的周期函数．对应于一些 t 值的 y 值如下表所示．

t	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y	0.13	0.25	0.33	0.35	0.23	0	−0.23	−0.35	…

由此可得大概的图象如下。



1121. 已知由 $x=\cos t+2\cos 3t$,

$$y=\sin t+2\sin 3t$$

给出的点 (x, y) 用 $P(t)$ 表示.

(1) 设原点与点 $P(t)$ 的距离为 r, 试把 r^2 表示成 t 的函数, 并画出这个函数的图象, 其中 $0\leq t\leq 2\pi$.

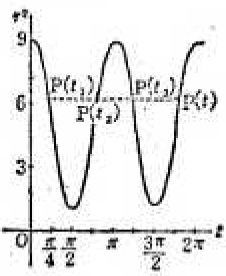
(2) 证明: 对于任意的 t 值, 点 $P(t)$ 总不越出以原点为中心, 半径为 1 和 3 的两个同心圆所围成的环形区域;

(3) 同上, 把点 (x, y) 记成 $P(t)$. 那么 $(x, -y)$、$(-x, y)$、$(-x, -y)$ 分别可以表示成 $P(t_1)$, $P(t_2)$, $P(t_3)$. 试利用 (1) 中的图象, 并通过 t_1、t_2、t_3 可用 t 表示来证明上述结论. 其中 $0\leq t\leq 2\pi$, t_1、t_2、t_3 都是 0 至 2π 的数.

解 (1) $r^2=x^2+y^2$

$$=5+4(\cos 2t\cos t+\sin 2t\sin t)$$
$$=5+4\cos 2t.$$

故图象如下图所示.



(2) 因为 $r^2=5+4\cos 2t$, $-1\leq\cos 2t\leq 1$, 所以 $1\leq r^2\leq 9$. 因此 $P(t)$ 必在以原点为圆心, 半径为 1 和 3 的两个圆周围成的区域内(包括两个圆周).

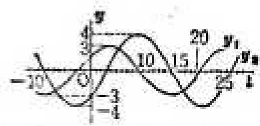
(3) $t_1=2\pi-t$.

$$\cos t_1+2\cos 3t_1$$
$$=\cos(2\pi-t)+2\cos(6\pi-3t)$$
$$=\cos t+2\cos 3t=x,$$
$$\sin t_1+2\sin 3t_1$$
$$=\sin(2\pi-t)+2\sin(6\pi-3t)$$
$$=-\sin t-2\sin 3t=-y,$$

即若 $P(t)$ 是曲线上的点, 则 $(x, -y)$ 也是同一条曲线上的点.

同理利用 $t_2=\pi-t$, $t_3=\pi+t$ 可以证明关于 $P(t_2)$、$P(t_3)$ 的结论.

1122. 下图是两个正弦曲线 y_1、y_2 的图象. 设 $y=y_1+y_2$, 试在下表空白的项目中填入适当的数或式. 图中 t 轴上的单位是 $\frac{\pi}{4}$ 弧度.



	振幅	周期	式
y_1			
y_2			
y			

解 因为 y_1 是简谐振动, 可设

$$y_1=r_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1).$$

显然振幅 $r_1=3$, 周期 $T_1=24\times\frac{\pi}{4}=6\pi$,

$$\therefore\quad \omega_1=\frac{2\pi}{T_1}=\frac{2\pi}{6\pi}=\frac{1}{3}.$$

从而有 $y_1=3\sin\left(\frac{t}{3}+\alpha_1\right)$. 因为 $t=-3\times\frac{\pi}{4}$ 时 $y_1=0$, 所以

$$0=3\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\alpha_1\right), \therefore\ \alpha_1=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\quad y_1=3\sin\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{4}\right).$$

同理, 可设 $y_2=r_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$,

振幅 $r_2=4$, 周期 $T_2=24\times\frac{\pi}{4}=6\pi$.

$$\therefore\quad \omega_2=\frac{2\pi}{T_2}=\frac{1}{3}.$$

从而有 $y_2=4\sin\left(\frac{t}{3}+\alpha_2\right)$. 因为 $t=3\times\frac{\pi}{4}$ 时 $y_2=0$, 所以

$$0=4\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_2\right),\quad \therefore\quad \alpha_2=-\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore\quad y_2=4\sin\left(\frac{t}{3}-\frac{\pi}{4}\right).$$

再把 y_1、y_2 合成,则

$$\begin{aligned}
y&=y_1+y_2\\
&=3\left(\sin\frac{t}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{t}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&\quad+4\left(\sin\frac{t}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{t}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{2}}\right)\sin\frac{t}{3}\\
&\quad+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{2}}\right)\cos\frac{t}{3}\\
&=\frac{7}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{3}\\
&=\sqrt{\frac{49}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{7}{5\sqrt{2}}\sin\frac{t}{3}-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right.\\
&\quad\left.\times\cos\frac{t}{3}\right)=5\sin\left(\frac{t}{3}-\alpha\right),
\end{aligned}$$

其中　$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$,

$\therefore$　振幅$=5$, 周期$=2\pi\times3=6\pi$.

由以上的求解过程,可得下表.

	振幅	周期	式
y_1	3	6π	$3\sin\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$
y_2	4	6π	$4\sin\left(\frac{t}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$
y	5	6π	$5\sin\left(\frac{t}{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)$

1123. 已知半径为 r 的圆中内接矩形的对角线交角为 θ,

(1) 求各边的长.

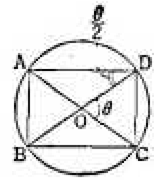
(2) 证明矩形的周长为

$$4\sqrt{2}\,r\sin\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right).$$

解　(1) 设内接矩形为 $ABCD$, 则

$$AB=CD=2r\sin\frac{\theta}{2}.$$

$$BC=DA=2r\cos\frac{\theta}{2}.$$



(2) $AB+BC+CD+DA$

$$\begin{aligned}
&=4r\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)\\
&=4r\sqrt{1+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}\right)\\
&=4\sqrt{2}\,r\left(\cos45^\circ\sin\frac{\theta}{2}+\sin45^\circ\cos\frac{\theta}{2}\right)\\
&=4\sqrt{2}\,r\sin\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

1124. (1) 当 k 为实数(常数)时,证明

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+k\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

总可表成 $y=r\sin(x+\alpha)$ 的形式.

(2) 这时怎样用 k 表示 r?

(3) k 为什么值时有 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$? 并画出这时的图象.

解　(1)

$$\begin{aligned}
y&=\cos x+k\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}k\sin x+\left(1+\frac{k}{2}\right)\cos x.\\
&=\sqrt{\frac{3}{4}k^2+1+k+\frac{k^2}{4}}\left(\frac{\sqrt{3}\,k}{2\sqrt{k^2+k+1}}\right.\\
&\quad\left.\times\sin x+\frac{k+2}{2\sqrt{k^2+k+1}}\cos x\right)\\
&=\sqrt{k^2+k+1}\sin(x+\alpha),
\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{k+2}{\sqrt{3}k}$.

(2) $r=\sqrt{k^2+k+1}$.

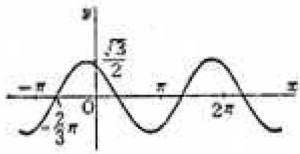
(3) $\operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi=-\sqrt{3}=\frac{k+2}{\sqrt{3}k}$.

$$-3k=k+2,\quad \therefore\quad k=-\frac{1}{2}.$$

从而　$y=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right).$$

共图象如下图所示。



1125. 在求函数 $y=\sin 2x°+\cos 3x°$ 的周期时，下面哪一种说法是正确的？

(1) 因为 $y=\sin 2x°$ 的周期是 $180°$ $\cos 3x°$ 的周期是 $120°$，所以取大的一个即得所求周期为 $180°$。

(2) 取 $y=\sin 2x°$ 和 $y=\cos 3x°$ 的周期中小的一个，即所求周期为 $120°$。

(3) $y=\sin 2x°$ 和 $y=\cos 3x°$ 的周期的最小公倍数即为所求。

(4) $y=\sin 2x°$ 和 $y=\cos 3x°$ 的周期的最大公约数即为所求。

解　当 $y=\sin 2x°$ 中的 $x°$ 变动 $180°$ 的整倍数，而 $y=\cos 3x°$ 中的 $x°$ 变动 $120°$ 的整倍数时，其 y 值分别不变。因此，当

$$y=\sin 2x°+\cos 3x°$$

中的 x 变动上述两个周期的公倍数时，y 值不变。因此所求的周期是两个周期的最小公倍数，即 (3) 的说法是正确的。

1126. t 秒时动点 P 的位置为$(\cos t, \sin t)$，Q的位置为$\left(2-2\sin t,\ \frac{1}{2}+2\cos t\right)$。求这两点的最远距离。并且证明这两点不会重合。

解　设两点 P、Q 的距离为 d，则

$$\begin{aligned}d^2&=(2-2\sin t-\cos t)^2\\&\quad+\left(\frac{1}{2}+2\cos t-\sin t\right)^2\\&=9\frac{1}{4}-9\sin t-2\cos t\\&=9\frac{1}{4}-(9\sin t+2\cos t).\end{aligned}$$

设括号中的式子为 $f(t)$，

$$\begin{aligned}f(t)&=9\sin t+2\cos t\\&=\sqrt{85}\left(\frac{9}{\sqrt{85}}\sin t+\frac{2}{\sqrt{85}}\cos t\right)\\&=\sqrt{85}(\sin t\cos\theta+\cos t\sin\theta)\\&=\sqrt{85}\sin(\theta+t).\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{tg}\theta=\frac{2}{9}$。因而 $f(t)$ 的最小值当 $\sin(\theta+t)=-1$ 时取得，其值为 $-\sqrt{85}$。这时

$$d^2=9\frac{1}{4}+\sqrt{85}=\frac{37+4\sqrt{85}}{4}.$$

因为 $d>0$，故

$$d=\sqrt{\frac{37+4\sqrt{85}}{4}}=\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$$

为 d 的最大值。

如果
$$\begin{cases}\cos t=2-2\sin t, & ①\\ \sin t=\frac{1}{2}+2\cos t & ②\end{cases}$$

同时成立，则把 ① 代入 ②，得

$$\sin t=\frac{1}{2}+2(2-2\sin t),$$

$$5\sin t=4\frac{1}{2},\quad\therefore\quad \sin t=\frac{9}{10}.$$

故 $\cos t=2-2\times\frac{9}{10}=\frac{2}{10}$。但把 $\sin t$，$\cos t$ 代入 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$，则有

$$\begin{aligned}1=\sin^2 t+\cos^2 t&=\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{2}{10}\right)^2\\&=\frac{85}{100}\neq 1,\end{aligned}$$

矛盾，故这两点不会重合。

1127. R 和 r 为常数，a 为定角速度，ω 为定角，t 表示时间。下式所表示的运动是什么运动合成的？点 (x, y) 在什么曲线上运动？

$$x=R\cos at+r\cos(at+\omega),$$
$$y=R\sin at+r\sin(at+\omega).$$

解　$x=(R+r\cos\omega)\cos at-r\sin\omega\sin at$，
$y=(R+r\cos\omega)\sin at+r\sin\omega\cos at$。

故 x，y 分别由两个简谐振动

$x_1=(R+r\cos\omega)\cos at$，$x_2=r\sin\omega\sin at$，
$y_1=(R+r\cos\omega)\sin at$，$y_2=r\sin\omega\cos at$

合成。

又因为

$$\begin{aligned}x^2&=R^2\cos^2 at+r^2\cos^2(at+\omega)\\&\quad+2Rr\cos at\cos(at+\omega),\\y^2&=R^2\sin^2 at+r^2\sin^2(at+\omega)\\&\quad+2Rr\sin at\sin(at+\omega).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &x^2+y^2\\&=R^2+r^2+2Rr[\cos at\cos(at+\omega)\\&\quad+\sin at\sin(at+\omega)]\end{aligned}$$

$=R^2+r^2+2Rr\cos(\alpha t+\omega-\alpha t)$

$=R^2+r^2+2Rr\cos\omega=$常数。

故$(x,\ y)$在一个圆周上运动.

1128. 求下面式子的最大值和最小值:

(1) $\cos\theta+\cos(60^\circ+\theta)$;

(2) $\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)$;

(3) $\cos\theta\cos(60^\circ+\theta)$。

解　(1)

原式$=\cos\theta+\cos 60^\circ\cos\theta-\sin 60^\circ\sin\theta$

$$=\frac{3}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

$$=\sqrt{3}(\cos 30^\circ\cos\theta-\sin 30^\circ\sin\theta)$$

$$=\sqrt{3}\cos(\theta+30^\circ).$$

$\therefore$　最大值$=\sqrt{3}$，最小值$=-\sqrt{3}$。

(2) 原式

$$=-\frac{1}{2}[\cos 60^\circ-\cos(2\theta-60^\circ)]$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(2\theta-60^\circ).$$

$\therefore$　最大值$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

最小值$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$.

(3) 原式

$$=\frac{1}{2}[\cos(2\theta+60^\circ)+\cos(-60^\circ)]$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(2\theta+60^\circ).$$

$\therefore$　最大值$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$,

最小值$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$.

1129. 当平面上的动点P，其x、y坐标都是时间t的函数$x=a\cos\omega t$, $y=a\sin\omega t$ ($a>0$)时，P的运动轨迹的方程是$x^2+y^2=a^2$，即是一个以原点为圆心，以a为半径的圆周. 现设动点P的坐标如下给出，P的运动轨迹的方程及大概图形是什么？另外，如果答案为P是作简谐振动的，要求这个简谐振动的振幅. 下式中ω是常数.

(1) $x=3\cos\omega t$, $y=2\sin\omega t$;

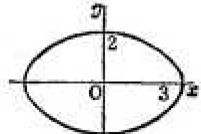
(2) $x=3\sin\omega t$, $y=2\sin\omega t$.

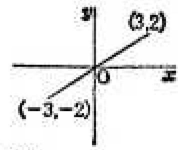
解　(1) 为求轨迹的方程，只要消去t就行了. 即

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\cos^2\omega t+\sin^2\omega t=1.$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1.$$

这是一个以原点为中心的椭圆，即如下图(左)所示.





(2) 从两式中解出$\sin\omega t$，则

$$\sin\omega t=\frac{x}{3}=\frac{y}{2}.$$

$$\therefore\quad y=\frac{2}{3}x$$

$$(-3\leqq x\leqq 3,\ -2\leqq y\leqq 2).$$

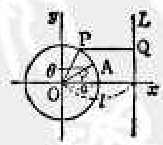
这时P在直线上作简谐振动，其振幅是

$$\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}.$$

1130. 一平面内有半径为a的圆及圆外一直线L. 圆绕其圆心以每T秒一周的速度旋转，下面各项如何变化？把这些项目用式子表示，并画出这些式子的图象.

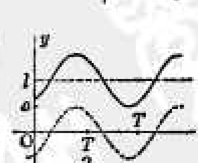
(1) 圆周上一定点到L的距离.

(2) 圆内两个定点(这两个点离圆心距离都是$\frac{a}{2}$，且在两条互相垂直的直线上)到L的距离的差.



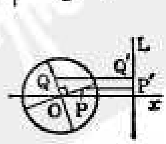
解　(1) 以过圆心O垂直于L的直线为x轴，设O到L的距离为l. 圆周上的定点从点A($\angle xOA=\theta$)开始旋转，设t秒后的位置为P，则

$$\angle xOP=\frac{2\pi}{T}t+\theta.$$



因此，若记P至L的距离为y，则

$$y=PQ=l-a\times\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta\right).$$



(2) 设两条互相垂直直线上的点P、Q至L的距离分别记为y_1, y_2, 和(1)同样地可得

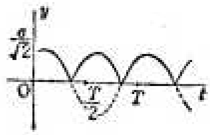
$$y_1=l-\frac{a}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta\right),$$

$$y_2=l-\frac{a}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta+\frac{\pi}{2}\right).$$

因此若记距离差为 y，则

$$\begin{aligned}y&=|y_1-y_2|\\&=\frac{a}{2}\left|\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta\right)\right|\\&=\frac{a}{2}\left|\sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}a\left|\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|\end{aligned}$$

y 的图象如右图中的实线所示。



1131. 把下列各式变换成 $r\sin(x+\alpha)$ 的形式。

(1) $3\sin x+4\cos x$;

(2) $2\sin x+2\sin(x+90°)$;

(3) $5\sin x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

(4) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-2\cos x$.

解 (1) 原式

$$\begin{aligned}&=\sqrt{9+16}\left(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right)\\&=5(\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x)\\&=5\sin(x+\alpha),\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$.

(2) 原式 $=2\sin x+2\cos x$

$$\begin{aligned}&=\sqrt{4+4}\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{8}}\cos x\right)\\&=\sqrt{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\\&=\sqrt{8}(\cos45°\sin x+\sin45°\cos x)\\&=2\sqrt{2}\sin(x+45°).\end{aligned}$$

(3) 原式

$$\begin{aligned}&=5\sin x+2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=(5+\sqrt{2})\sin x+\sqrt{2}\cos x\\&=\sqrt{27+10\sqrt{2}+2}\left(\frac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{29+10\sqrt{2}}}\sin x\right.\\&\qquad\left.+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{29+10\sqrt{2}}}\cos x\right)\\&=\sqrt{29+10\sqrt{2}}(\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x)\\&=\sqrt{29+10\sqrt{2}}\sin(x+\alpha),\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}-2}{23}$.

(4) 原式

$$\begin{aligned}&=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)-2\cos x\\&=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\left(2\times\frac{1}{2}-2\right)\cos x\\&=-(\sqrt{3}\sin x+\cos x)\\&=-\sqrt{3+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)\\&=-2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)\\&=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

1132. 正确地填充(　　).

把　　$y=\sin x+\cos x$　　①

改写成　　$y=r\sin(x+\alpha)$,

其中　　$r>0,\ -\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$

的形式，则成为

$y=($　　$)$.　　②

而把①式改写成

$y=r\cos(x+\alpha)$，其中 $r<0,\ 0\leq\alpha\leq\pi$

的形式，则成为

$y=($　　$)$.　　③

若通过②式来考察①的图象，则①的图象为 $y=\sin x$ 的图象沿(　)轴的(　)方向平移(　)，再在(　)轴的方向乘上(　).

又若通过③式来考察，则①的图象为 $y=\cos x$ 的图象沿(　　)平移(　　)，在(　　)乘以(　　).

解　$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,　　②

$$\begin{aligned}y&=-\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)\\&=-\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\cos x-\sin\frac{3\pi}{4}\sin x\right)\\&=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{3}{4}\pi\right).\end{aligned}$$　　③

以下的(　)答案依次为: x, 负, $\frac{\pi}{4}$, y, $\sqrt{2}$; x的负向, $\frac{3}{4}\pi$, y, $-\sqrt{2}$.

1133. 已知 p, α, β, A 为常数, $p\neq 0$. 试答下列问题:

(1) 把 $y=\sin(px+\alpha)-\sin px$ 表示成 $A\sin(px+\beta)$的形式. 若要使 y 恒等于零, α 应取怎样的值? y 不恒为 0 时, y 的最小正周期是什么?

(2) 如果 $p\neq\pm1$, 且对所有的 x, 式子

$$\sin(px+\alpha)-\sin px=\sin x-\sin(x+\beta)$$

恒成立, 证明该式的两边恒等于 0 (用反证法, 比较两边式子的最小正周期).

(3) 当 p 是无理数时, $\sin x+\sin px$ 是周期函数吗? 若是周期函数, 求出它的周期. 若不是周期函数, 则说出理由.

解 (1) 因为

$$\sin\theta_1-\sin\theta_2=2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2},$$

若设 $\theta_1=px+\alpha$, $\theta_2=px$, 则

$$\begin{aligned}&\sin(px+\alpha)-\sin px\\&=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(px+\frac{\alpha}{2}\right)\\&=2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(px+\frac{\pi+\alpha}{2}\right).\end{aligned}\qquad ①$$

为使该式恒为 0, 就必有(因为 $p\neq0$)

$$\sin\frac{\alpha}{2}=0,\ \therefore\ \alpha=2n\pi.\qquad ②$$

其中 n 为任意整数.

又 y 若不恒为 0, 则 y 的最小正周期为

$$\frac{2\pi}{|p|}.\qquad ③$$

(2) 设 $f(x)=\sin(px+\alpha)-\sin px$,
$g(x)=\sin x-\sin(x+\beta)$.

由①, $f(x)=2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(px+\frac{\alpha}{2}\right)$.

当$f(x)\neq0$ 时最小正周期为 $\frac{2\pi}{|p|}$. 在①中设 $p=-1$, $\alpha=-\beta$, 就得到

$$g(x)=-2\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(x+\frac{\beta}{2}\right).\qquad ④$$

当 $g(x)\neq0$ 时 $g(x)$ 的最小正周期为 2π. 由于 $p\neq\pm1$, 所以 $\frac{2\pi}{|p|}\neq2\pi$. 因此, 当 $f(x)$, $g(x)$ 中有一个不恒为 0 时, 就不可能对所有的 x 值都有

$$f(x)=g(x).$$

而当 $f(x)\neq0$, $g(x)\neq0$ 时两者的最小正周期又不同, 故只可能是 $f(x)=0$, $g(x)=0$ 即两边都恒为 0.

(3) 显然 $F(x)=\sin x+\sin px$ 不恒为 0 (因为 $F(0)=0$, 而因为 p 是无理数故 $F(2\pi)=\sin2p\pi\neq0$).

现假设 $F(x)$ 是最小正周期为 r 的周期函数, 因此对任何 x 有 $F(x+r)=F(x)$, 即为

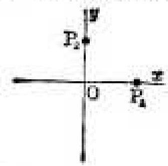
$$\sin(px+pr)-\sin px=\sin x-\sin(x+r).$$

由(2)知有左边 $=0$, 右边 $=0$. 再用 ②、④的结果有

$$pr=2m\pi,\ r=2n\pi,\ \therefore\ m=pn.$$

但是 p 为无理数, m、n 为整数, $n\neq0$ (否则 $r=0$), 所以这是一个矛盾. 因而 $F(x)$不是周期函数.

1134. 以原点作为旋转中心, 动半径 OP_1、OP_2 从图中的位置同时出发, 以每秒 $\frac{\pi}{6}$ 的角速度正向旋转. 设 P_1、P_2 向 x 轴所引垂线的足为 Q_1、Q_2. 设 $OP_1=a$, $OP_2=b$. 问 Q_1Q_2 的长度



(1) 1秒钟后是多少?

(2) 4秒钟后是多少?

(3) t秒钟后是多少?

(4) 最早要几秒后才能达到最大?

解 因为 $OP_1=a$, $OP_2=b$, 设 t 秒后 Q_1、Q_2 的横坐标分别为 x_1, x_2, 则

$$x_1=OQ_1=a\cos\frac{\pi}{6}t,$$

$$x_2=OQ_2=b\cos\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{2}\right)=-b\sin\frac{\pi}{6}t.$$

$$\begin{aligned}\therefore\ Q_1Q_2&=|x_1-x_2|\\&=\left|a\cos\frac{\pi}{6}t+b\sin\frac{\pi}{6}t\right|.\end{aligned}$$

(1) $t=1$时,

$$\begin{aligned}Q_1Q_2&=\left|a\cos\frac{\pi}{6}+b\sin\frac{\pi}{6}\right|\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}(\sqrt{3}a+b).\end{aligned}$$

(2) $t=4$时,

$Q_1Q_2=\left|a\cos\frac{4}{6}\pi+b\sin\frac{4}{6}\pi\right|$

$=\left|-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b\right|=\frac{1}{2}\left|a-\sqrt{3}\,b\right|.$

(3) $Q_1Q_2=\sqrt{a^2+b^2}\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\cos\frac{\pi}{6}t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{\pi}{6}t\right|$

$=\sqrt{a^2+b^2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{6}t-\alpha\right)\right|,$

其中 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$.

(4) 由于 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, 所以 Q_1Q_2 最早达到最大是当

$$\frac{\pi}{6}t-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}=0$$

时,即

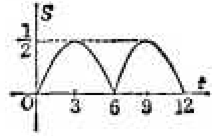
$$t=\frac{6}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}(秒).$$

1135. 在以 O 为圆心, 半径为 1cm 的圆周上, 点 P 从一定点 A 出发, 以每分钟 5 圈的速率逆时针旋转.

(1) 三角形 OAP 的面积是怎样随时间而变化的? 把出发后 12 秒内的变化状态用图象显示出来.

(2) 由 P 向过 A 的直径作垂线, 垂足为 B. 问 $\overline{OB}^2+\overline{OA}\cdot\overline{BP}$ 在最初半圈中何时达到最大.

解 (1) 因为 1 分钟转 5 圈, 所以 1 秒间转 $\frac{\pi}{6}$. 设 t 秒后的 $\triangle OAP$ 的面积为 S, 则 $S=\frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{6}t\right|$, 图象如下.



(2) $OB=\left|\cos\frac{\pi}{6}t\right|$.

$$\overline{OA}=1, \overline{BP}=\sin\frac{\pi}{6}t.$$

$\therefore\ \overline{OB}^2+\overline{OA}\cdot\overline{BP}=\cos^2\frac{\pi}{6}t+\sin\frac{\pi}{6}t$

$=1-\sin^2\frac{\pi}{6}t+\sin\frac{\pi}{6}t$

$=\frac{5}{4}-\left(\sin\frac{\pi}{6}t-\frac{1}{2}\right)^2.$

当 $\sin\frac{\pi}{6}t=\frac{1}{2}$ 时上式左边取最大. 因为 $0\leqq t\leqq 6$, 所以 $t=1$, 5 时最大.

1136. 求下列函数的最大值和最小值:

(1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$;

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

解 设给出的函数为 y.

(1) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x.$

因此当 $\cos 2x=-1$ 时 y 取到最大. 最大值为

$$y=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

又当 $\cos 2x=+1$ 时 y 取到最小. 最小值为

$$y=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}.$$

(2) $y=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x,$

与前同理, y 的最大值为

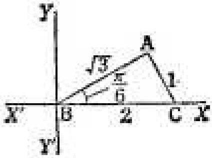
$$y=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4},$$

y 的最小值为

$$y=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}.$$

1137. 一平面上有 $\angle A$ 为直角、BC 的长度为 2cm、AC 的长度为 1cm 的直角三角形 ABC. 现以 B 为旋转中心, AB 以每分钟 5 圈的速度旋转. 求 3 秒、10 秒时 A 至 XX' (旋转开始时 BC 所在直线)的距离. 并求 3 秒至 10 秒间何时 A 至 XX' 的距离最大.

解 设如图置放 $\triangle ABC$, 且旋转方向为逆时针方向. 则在直角三角形 ABC 中, $BA=\sqrt{3}$, $\angle CBA=\frac{\pi}{6}$, 角速度为



$$5\times 2\pi\text{弧度/分}=\frac{\pi}{6}\text{弧度/秒}.$$

故 t 时刻 A 至 XX' 的距离 y 为

$$y=\sqrt{3}\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{6}\right)\right|.$$

因而当 $t=3$ 时，

$$y=\sqrt{3}\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|$$

$$=\sqrt{3}\left|\sin\frac{2\pi}{3}\right|=\frac{3}{2}(\text{cm}).$$

$t=10$ 时，

$$y=\sqrt{3}\left|\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right|$$

$$=\sqrt{3}\left|\sin\frac{11\pi}{6}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}(\text{cm}).$$

又当 $3<t<10$ 时，有

$$\frac{\pi}{6}\times 3+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}\times 10+\frac{\pi}{6},$$

即　$$\frac{2}{3}\pi<\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi.$$

在此范围内，使 y 达到最大需有

$$\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad t=\frac{6}{\pi}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=8(\text{秒}).$$

1138. (1) 把 $\sin\theta+\cos\theta$ 化成单项式；
(2) 求满足 $\sin\theta+\cos\theta=1$ 的 θ.

解　(1) 因为 $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta+\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).$$

(2) 据 (1) 的结果，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

$$\therefore\quad \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore\quad \theta+\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}.$$

故 $n=2m$ 时，$\theta=2m\pi$；$n=2m+1$ 时，

$$\theta=(2m+1)\pi-\frac{\pi}{2}=2m\pi+\frac{\pi}{2}.$$

1139. 当 t 表示时间时，下面的式子所表示的四个运动分别是怎样的运动？

$$x_1=\cos\frac{\pi t}{3}. \qquad ①$$

$$x_2=5\cos\frac{\pi t}{4}+12\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}\right). \qquad ②$$

$$y_1=2\sin\frac{\pi t}{6}. \qquad ③$$

$$y_2=5\sin\frac{\pi t}{4}+12\sin\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}\right). \qquad ④$$

又分别以①和③，②和④表示直角坐标系中的点的坐标时，这个点在怎样的曲线上运动？

解　把 x_2, y_2 变形，则

$$x_2=5\cos\frac{\pi t}{4}+12\left(\cos\frac{\pi t}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi t}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\left(5+\frac{12}{2}\right)\cos\frac{\pi t}{4}-\frac{12\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi t}{4}$$

$$=11\cos\frac{\pi t}{4}-6\sqrt{3}\sin\frac{\pi t}{4}$$

$$=\sqrt{121+108}\left(\frac{11}{\sqrt{229}}\cos\frac{\pi t}{4}-\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{229}}\sin\frac{\pi t}{4}\right)=\sqrt{229}\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\alpha\right),$$

其中 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{6\sqrt{3}}{11}$.

$$y_2=5\sin\frac{\pi t}{4}+12\left(\sin\frac{\pi t}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi t}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\left(5+\frac{12}{2}\right)\sin\frac{\pi t}{4}+\frac{12\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi t}{4}$$

$$=11\sin\frac{\pi t}{4}+6\sqrt{3}\cos\frac{\pi t}{4}$$

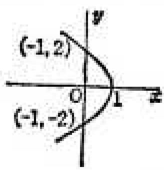
$$=\sqrt{121+108}\left(\frac{11}{\sqrt{229}}\sin\frac{\pi t}{4}+\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{229}}\cos\frac{\pi t}{4}\right)=\sqrt{229}\sin\left(\frac{\pi t}{4}+\alpha\right),$$

其中 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{6\sqrt{3}}{11}$.

因此，x_1、x_2、y_1、y_2 是简谐振动，分别以下表中所示的数据为振幅、周期.

	振幅	周　期
x_1	1	$2\pi\times\frac{3}{\pi}=6$
x_2	$\sqrt{229}$	$2\pi\times\frac{4}{\pi}=8$
y_1	2	$2\pi\times\frac{6}{\pi}=12$
y_2	$\sqrt{229}$	$2\pi\times\frac{4}{\pi}=8$

现在求①与③为坐标的点的运动. 把①和③代入



$$\cos\frac{\pi t}{3}=1-2\sin^2\frac{\pi t}{6},$$

得　$x=1-2\left(\frac{y}{2}\right)^2$.

$$\therefore\quad x=1-\frac{1}{2}y^2\ (-1\leq x\leq 1,\ -2\leq y\leq 2).$$

因此该点在上图所示的抛物线上运动.

同理，以②、④为坐标的点满足

$$\cos^2\left(\frac{\pi t}{4}+\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}+\alpha\right)=1,$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{229}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{229}}\right)^2=1,$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=229.$$

因此，该点在上述方程表示的圆上运动.

1140. 考察函数 $\cos x+\sin(\sqrt{2}x)$ 是不是周期函数.

解　设 $f(x)=\cos x+\sin(\sqrt{2}x)$，若设 $f(x)$ 有周期 $\alpha(\alpha\neq0)$，则

$$f(x+\alpha)=f(x),$$

即
$$\cos(x+\alpha)+\sin\sqrt{2}(x+\alpha)=\cos x+\sin\sqrt{2}x$$

必须对于任何的 x 都成立.

设 $x=0$，则有

$$\cos\alpha+\sin\sqrt{2}\alpha=1. \qquad ①$$

设 $x=\pi$，则有

$$\cos(\pi+\alpha)+\sin\sqrt{2}(\pi+\alpha)=-1+\sin\sqrt{2}\pi,$$

$$\therefore\quad -\cos\alpha+\sin\sqrt{2}(\pi+\alpha)=-1+\sin\sqrt{2}\pi. \qquad ②$$

设 $x=-\pi$，则有

$$\cos(-\pi+\alpha)+\sin\sqrt{2}(-\pi+\alpha)=-1-\sin\sqrt{2}\pi.$$

$$\therefore\quad -\cos\alpha-\sin\sqrt{2}(\pi-\alpha)=-1-\sin\sqrt{2}\pi. \qquad ③$$

②−③，得

$$\sin\sqrt{2}(\pi+\alpha)+\sin\sqrt{2}(\pi-\alpha)=2\sin\sqrt{2}\pi.$$

$$2\sin\sqrt{2}\pi\cos\sqrt{2}\alpha=2\sin\sqrt{2}\pi.$$

$$2\sin\sqrt{2}\pi(\cos\sqrt{2}\alpha-1)=0.$$

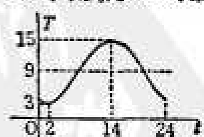
因为 $\sin\sqrt{2}\pi\neq0$，故 $\cos\sqrt{2}\alpha=1$.

$$\therefore\quad \alpha=\sqrt{2}n\pi\qquad(n\neq0).$$

这时
$$\cos\alpha+\sin\sqrt{2}\alpha=\cos\sqrt{2}n\pi+\sin2n\pi=\cos\sqrt{2}n\pi\neq1.$$

这与①式矛盾，因此 $f(x)$ 不具有周期 $\alpha(\alpha\neq0)$. 即 $f(x)$ 不是周期函数.

1141. 设温度 T°C 是以一天为周期的时间 t(时)的函数，设其图象可由简谐振动的图象表示. 最高温度当 $t=14$ 时取到为 15°C，最低温度为 3°C. 试把 T 表成 t 的函数.



解　因为 T 的值当 $t=14$ 时取到最高 $T=15$，故 $t=2$ 时取到最低 $T=3$. 因此图象如上图所示.

现设 $T=r\sin(\omega t+\alpha)+a$，由上图知

振幅 $r=\frac{1}{2}(15-3)=6$，$a=3+6=9$.

周期$=24$.　$\omega=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$.

代入前式，得

$$T=6\sin\left(\frac{\pi t}{12}+\alpha\right)+9.$$

因该式当 $t=14$ 时有 $T=15$，所以

$$15=6\sin\left(\frac{14}{12}\pi+\alpha\right)+9,$$

$$\sin\left(\frac{7}{6}\pi+\alpha\right)=1.$$

$$\therefore\quad \frac{7}{6}\pi+\alpha=\frac{\pi}{2},\quad \alpha=-\frac{2}{3}\pi.$$

故所求函数为

$$T=6\sin\left(\frac{\pi t}{12}-\frac{2}{3}\pi\right)+9.$$

7. 证明题

1142. 已知 $\operatorname{tg}\beta=\frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}$，证明：

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=(1-n)\operatorname{tg}\alpha.$$

解 $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}}{1+\operatorname{tg}\alpha\,\frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha-n\operatorname{tg}\alpha(1-\cos^2\alpha)-n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha+n\sin^2\alpha}$$

$$=\operatorname{tg}\alpha-n\operatorname{tg}\alpha+n\sin\alpha\cos\alpha-n\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=(1-n)\operatorname{tg}\alpha.$$

1143. 证明：

$$\cos55^\circ\cos65^\circ+\cos65^\circ\cos175^\circ+\cos55^\circ\cos175^\circ=-\frac{3}{4}.$$

解 原式左边

$$=\cos65^\circ(\cos55^\circ+\cos175^\circ)+\cos55^\circ\cos175^\circ$$

$$=\cos65^\circ\times2\cos115^\circ\cos60^\circ+\cos55^\circ\cos175^\circ$$

$$=\cos65^\circ\cos115^\circ+\cos55^\circ\cos175^\circ$$

$$=\frac{1}{2}(\cos180^\circ+\cos50^\circ+\cos230^\circ+\cos120^\circ)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-1+\cos50^\circ-\cos50^\circ-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}.$$

1144. 证明

$$\cos20^\circ+\cos100^\circ+\cos140^\circ=0.$$

解 左边 $=\cos20^\circ+(\cos100^\circ+\cos140^\circ)$

$$=\cos20^\circ+2\cos\frac{1}{2}(100^\circ+140^\circ)\times\cos\frac{1}{2}(140^\circ-100^\circ)$$

$$=\cos20^\circ+2\cos120^\circ\cos20^\circ$$

$$=\cos20^\circ(1+2\cos120^\circ)$$

$$=\cos20^\circ\left[1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\cos20^\circ(1-1)=0.$$

1145. 证明：

$$\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cos7\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha.$$

解 原式左边

$$=\frac{(\sin\alpha+\sin3\alpha)+(\sin5\alpha+\sin7\alpha)}{(\cos\alpha+\cos3\alpha)+(\cos5\alpha+\cos7\alpha)}$$

$$=\frac{2\sin2\alpha\cos\alpha+2\sin6\alpha\cos\alpha}{2\cos2\alpha\cos\alpha+2\cos6\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{2\cos\alpha(\sin2\alpha+\sin6\alpha)}{2\cos\alpha(\cos2\alpha+\cos6\alpha)}$$

$$=\frac{\sin2\alpha+\sin6\alpha}{\cos2\alpha+\cos6\alpha}=\frac{2\sin4\alpha\cos2\alpha}{2\cos4\alpha\cos2\alpha}$$

$$=\frac{\sin4\alpha}{\cos4\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha.$$

1146. 证明：

$$\frac{\cos7\theta+\cos3\theta-\cos5\theta-\cos\theta}{\sin7\theta-\sin3\theta-\sin5\theta+\sin\theta}=\operatorname{ctg}2\theta.$$

解 原式左边

$$=\frac{(\cos7\theta+\cos3\theta)-(\cos5\theta+\cos\theta)}{(\sin7\theta-\sin3\theta)-(\sin5\theta-\sin\theta)}$$

$$=\frac{2\cos5\theta\cos2\theta-2\cos3\theta\cos2\theta}{2\sin2\theta\cos5\theta-2\sin2\theta\cos3\theta}$$

$$=\frac{2\cos2\theta(\cos5\theta-\cos3\theta)}{2\sin2\theta(\cos5\theta-\cos3\theta)}$$

$$=\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}=\operatorname{ctg}2\theta.$$

1147. 证明：

$$\frac{\sin(A+30^\circ)+\sin(B-30^\circ)}{\cos A-\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\frac{B-A}{2}+\frac{1}{2}.$$

解 原式的左边

$$=\frac{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}+30^\circ\right)}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}+30^\circ\right)}{\sin\frac{B-A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos30^\circ-\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin30^\circ}{\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)}$$

$=\text{ctg}\left(\frac{B-A}{2}\right)\cos 30^\circ+\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ctg}\left(\frac{B-A}{2}\right)+\frac{1}{2}$.

1148. 证明:

$$\frac{\cos 3A+2\cos 5A+\cos 7A}{\cos A+2\cos 3A+\cos 5A}=\cos 2A-\sin 2A\,\text{tg}\,3A.$$

解 原式的左边

$$=\frac{2\cos 5A+(\cos 3A+\cos 7A)}{2\cos 3A+(\cos A+\cos 5A)}$$

$$=\frac{2\cos 5A+2\cos 5A\cos 2A}{2\cos 3A+2\cos 3A\cos 2A}$$

$$=\frac{\cos 5A}{\cos 3A}=\frac{\cos(2A+3A)}{\cos 3A}$$

$$=\frac{\cos 2A\cos 3A-\sin 2A\sin 3A}{\cos 3A}$$

$$=\cos 2A-\sin 2A\left(\frac{\sin 3A}{\cos 3A}\right)$$

$$=\cos 2A-\sin 2A\,\text{tg}\,3A.$$

1149. 证明:

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\text{tg}\,\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

解 原式的左边

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\text{tg}\,\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

1150. 已知 $\gamma=\alpha+\beta$, 证明:

$\sin^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

解 因为 $\gamma=\alpha+\beta$, 所以

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

因而 $\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma$,

$\therefore$ $\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\gamma$.

但是上式左边 $=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$

$=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$,

因而 $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\gamma$.

所以 $\sin^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

1151. 证明

$$\cos^3 A-\sin^3 A=\sqrt{2}\cos(45^\circ+A)\times(1+\sin A\cos A).$$

解 原式左边

$=(\cos A-\sin A)(\cos^2 A+\cos A\sin A+\sin^2 A)$

$=(\cos A-\sin A)(1+\cos A\sin A)$

$=[\sin(90^\circ-A)-\sin A](1+\sin A\cos A)$

$=2\sin(45^\circ-A)\cos 45^\circ(1+\sin A\cos A)$

$=2\cos(90^\circ-45^\circ+A)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1+\sin A\cos A)$

$=\sqrt{2}\cos(45^\circ+A)(1+\sin A\cos A)$.

1152. 证明:

$$\frac{\sin 19\alpha+\sin 17\alpha}{\sin 10\alpha+\sin 8\alpha}=2\cos 9\alpha.$$

解 原式的左边

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(19\alpha+17\alpha)\cos\frac{1}{2}(19\alpha-17\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}(10\alpha+8\alpha)\cos\frac{1}{2}(10\alpha-8\alpha)}$$

$$=\frac{2\sin 18\alpha\cos\alpha}{2\sin 9\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin 18\alpha}{\sin 9\alpha}$$

$$=\frac{2\sin 9\alpha\cos 9\alpha}{\sin 9\alpha}=2\cos 9\alpha.$$

1153. 证明:

$$\frac{\sin A+\sin 4A+\sin 7A}{\cos A+\cos 4A+\cos 7A}=\text{tg}\,4A.$$

解 原式左边

$$=\frac{(\sin A+\sin 7A)+\sin 4A}{(\cos A+\cos 7A)+\cos 4A}$$

$$=\frac{2\sin 4A\cos 3A+\sin 4A}{2\cos 4A\cos 3A+\cos 4A}=\frac{\sin 4A}{\cos 4A}$$

$$=\text{tg}\,4A.$$

1154. 已知 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$, 证明:

$$\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\text{tg}\,\alpha.$$

解 由已知的关系式得

$$\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{m}{1}.$$

$$\therefore\quad\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}=\frac{1+m}{1-m}.$$

$$\therefore\quad\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}=\frac{1+m}{1-m}.$$

$$\therefore\quad\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{1+m}{1-m}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\therefore\quad\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\text{tg}\alpha.$$

1155. 证明：

$\cos 9\alpha+\cos 7\alpha-4(\cos 5\alpha+\cos 3\alpha)+6\cos\alpha$
$=256\sin^4\alpha\cos^5\alpha$。

解　原式左边

$=2\cos 8\alpha\cos\alpha-8\cos 4\alpha\cos\alpha+6\cos\alpha$
$=2\cos\alpha(\cos 8\alpha-4\cos 4\alpha+3)$
$=2\cos\alpha(2\cos^2 4\alpha-1-4\cos 4\alpha+3)$
$=4\cos\alpha(\cos 4\alpha-1)^2=4\cos\alpha(-2\sin^2 2\alpha)^2$
$=16\cos\alpha\sin^4 2\alpha=16\cos\alpha\cdot16\sin^4\alpha\cos^4\alpha$
$=256\sin^4\alpha\cos^5\alpha$。

1156. 证明：

$\sin nA\csc^2 A\sec A-\cos nA\sec^2 A\csc A$
$=4\sin(n-1)A\csc^2 2A$。

解　$\sin nA\csc^2 A\sec A-\cos nA\sec^2 A\csc A$

$$=\frac{\sin nA}{\cos A\sin^2 A}-\frac{\cos nA}{\cos^2 A\sin A}$$
$$=\frac{\sin nA\cos A-\cos nA\sin A}{\sin^2 A\cos^2 A}$$
$$=\frac{4\sin(nA-A)}{4\sin^2 A\cos^2 A}=\frac{4\sin(nA-A)}{\sin^2 2A}$$
$$=4\sin(n-1)A\csc^2 2A。$$

1157. 证明：

$$\frac{\operatorname{tg}(n+1)A+\operatorname{tg}(1-n)A}{1-\operatorname{tg}(n+1)A\operatorname{tg}(1-n)A}=\operatorname{tg}2A。$$

解　在公式 $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

中，设 $\alpha=(n+1)A$，$\beta=(1-n)A$。

原式$=\operatorname{tg}[(n+1)A+(1-n)A]=\operatorname{tg}2A$。

1158. 证明：

$$(\sin 2A-\sin 2B)\operatorname{tg}(A+B)$$
$$=2(\sin^2 A-\sin^2 B)。$$

解　原式左边

$$=2\sin(A-B)\cos(A+B)\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$
$$=2\sin(A-B)\sin(A+B)$$
$$=2(\sin^2 A-\sin^2 B)。$$

1159. 证明下列两个等式：

(1) $\sin A\sin B=\sin^2\dfrac{A+B}{2}-\sin^2\dfrac{A-B}{2}$；

(2) $\cos A\cos B$

$$=\cos^2\frac{A+B}{2}+\cos^2\frac{A-B}{2}-1。$$

解　因为 $A=\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{A-B}{2}$，

$$B=\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2},$$

所以

(1) $\sin A\sin B$

$$=\sin\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\times\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)$$
$$=\sin^2\left(\frac{A+B}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{A-B}{2}\right)。$$

(2) $\cos A\cos B=\cos\left(\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{A-B}{2}\right)$

$$\times\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)$$
$$=\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$=\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)-1。$$

1160. 已知 A、B 是小于 $90°$ 的正角，

$$3\sin^2 A+2\sin^2 B=1,$$
$$3\sin 2A-2\sin 2B=0。$$

证明 $A+2B=90°$。

解

$\cos(A+2B)=\cos A\cos 2B-\sin A\sin 2B$，

由已知的关系式知

$$\cos 2B=1-2\sin^2 B=3\sin^2 A,$$
$$\sin 2B=\frac{3}{2}\sin 2A=3\sin A\cos A。$$

把 $\cos 2B$，$\sin 2B$ 代入前式，得

$\cos(A+2B)$
$=\cos A\cdot3\sin^2 A-\sin A\cdot3\sin A\cos A$
$=3\sin^2 A\cos A-3\sin^2 A\cos A=0。$

因为 $0°<A<90°$，$0°<B<90°$，所以

$$A+2B=90°。$$

1161. 证明在三角形 ABC 中，下列等式成立：

(1) $\sin(A+2B-3C)$
$+\sin(2A+3B-2C)=0$；

(2) $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)$
$+\sin(A+B-C)=4\sin A\sin B\sin C$。

解　因为 $A+B+C=180°$，所以

(1) 左边$=2\sin\dfrac{1}{2}(3A+5B-5C)$

$$\times\cos\frac{1}{2}(-A-B-C)$$

$=2\sin\frac{1}{2}(3A+5B-5C)\cos\frac{180°}{2}=0$。

(2) 左边$=\sin(180°-2A)$
$+\sin(180°-2B)+\sin(180°-2C)$
$=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$
$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$
$=2\sin(180°-C)\cos(A-B)$
$+2\sin C\cos[180°-(A+B)]$
$=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$
$=2\sin C[-2\sin A\sin(-B)]$
$=4\sin A\sin B\sin C$。

1162．在三角形 ABC 中，证明下列等式成立：

(1) $\dfrac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$;

(2) $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$;

(3) $\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$。

解 (1) 因为 $A+B+C=180°$，所以

$$左边=\frac{1-\cos(A-B)\cos(A+B)}{1-\cos(A-C)\cos(A+C)},$$

但是 $\cos(A-B)\cos(A+B)$
$=1-\sin^2A-\sin^2B$,
$\cos(A-C)\cos(A+C)$
$=1-\sin^2A-\sin^2C$。

因此，由正弦定理，

$$左边=\frac{\sin^2A+\sin^2B}{\sin^2A+\sin^2C}=\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}.$$

(2) 因为 $\sin(A+B)\sin(A-B)$
$=\sin^2A-\sin^2B$,

所以 $左边=\dfrac{\sin(A-B)\sin(A+B)}{\sin C\sin(A+B)}$

$$=\frac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin^2C}=\frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

(3) $左边=\dfrac{1-2\sin^2A}{a^2}-\dfrac{1-2\sin^2B}{b^2}$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-2\left(\frac{\sin^2A}{a^2}-\frac{\sin^2B}{b^2}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}.$$

1163．在三角形 ABC 中，a^2、b^2、c^2 成等差数列，证明

$$a\sec A,\ b\sec B,\ c\sec C$$

成调和数列。

解 用已知条件 $a^2+c^2=2b^2$,

$$\frac{1}{a\sec A}+\frac{1}{c\sec C}-\frac{2}{b\sec B}$$

$$=\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos C}{c}-\frac{2\cos B}{b}$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$$

$$-\frac{2(a^2+c^2-b^2)}{2abc}$$

$$=\frac{2[2b^2-(a^2+c^2)]}{2abc}=0.$$

故 $\dfrac{1}{a\sec A}$，$\dfrac{1}{b\sec B}$，$\dfrac{1}{c\sec C}$

成等差数列，即 $a\sec A$，$b\sec B$，$c\sec C$ 成调和数列。

1164．已知在三角形 ABC 中，b、a、c 成等比数列，证明

$$\cos(B-C)+\cos A+\cos 2A=1.$$

解 由题意知 $bc=a^2$，因而有

$$\sin B\sin C=\sin^2A.$$

应用这一关系式，有

$\cos(B-C)+\cos A+\cos 2A$
$=\cos(B-C)+\cos[180°-(B+C)]$
$+1-2\sin^2A$
$=\cos(B-C)-\cos(B+C)-2\sin^2A+1$
$=-2\sin B\sin(-C)-2\sin^2A+1$
$=2(\sin B\sin C-\sin^2A)+1=1$。

1165．证明：

$$1\pm\sin A=\left(\cos\frac{A}{2}\pm\sin\frac{A}{2}\right)^2.$$

解 $1\pm\sin A$

$$=\left(\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\right)\pm2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=\cos^2\frac{A}{2}\pm2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=\left(\cos\frac{A}{2}\pm\sin\frac{A}{2}\right)^2.$$

1166．证明：

$$\sin^6A+\cos^6A=1-\frac{3}{4}\sin^2 2A.$$

解 $\sin^6A+\cos^6A$
$=(\sin^2A+\cos^2A)(\sin^4A$
$-\sin^2A\cos^2A+\cos^4A)$
$=\sin^4A-\sin^2A\cos^2A+\cos^4A$
$=\sin^4A+2\sin^2A\cos^2A+\cos^4A$

$-3\sin^2 A\cos^2 A$

$=(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-\dfrac{3}{4}(2\sin A\cos A)^2$

$=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2A.$

1167. 证明:

$\sin 4A=4\sin A\cos^3 A-4\cos A\sin^3 A.$

解　$4\sin A\cos^3 A-4\cos A\sin^3 A$

$=4\sin A\cos A(\cos^2 A-\sin^2 A)$

$=2\sin 2A\cos 2A=\sin 4A.$

1168. 已知 $a\cos\alpha=b\cos\beta$, 证明

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{a+b}{a-b}.$$

解　因为 $a\cos\alpha=b\cos\beta$, 所以

$$\frac{\cos\alpha}{b}=\frac{\cos\beta}{a},$$

设上式等于 k, 则

$$\cos\alpha=bk,\ \cos\beta=ak.$$

代入欲证式左边,

$$\text{左边}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)}{\frac{1}{2}(\cos\beta-\cos\alpha)}=\frac{ak+bk}{ak-bk}=\frac{a+b}{a-b}.$$

1169. 已知 $\sin(-A+B+C)$、$\sin(A-B+C)$、$\sin(A+B-C)$成等差数列,证明 $\operatorname{tg}A$, $\operatorname{tg}B$, $\operatorname{tg}C$ 也成等差数列.

解　由题设,

$\sin(-A+B+C)+\sin(A+B-C)$

$=2\sin(A-B+C)$,

$2\sin B\cos(-A+C)-2\sin(A-B+C)$

$=0$,

$\sin B\cos(-A+C)-[\sin(A+C)\cos B$

$\quad-\cos(A+C)\sin B]=0$,

$\sin B[\cos(-A+C)+\cos(A+C)]$

$\quad-\sin(A+C)\cos B=0$,

$\sin B\cdot 2\cos C\cos(-A)$

$\quad-\sin(A+C)\cos B=0.$

$\therefore$　$2\cos A\sin B\cos C-\sin(A+C)\cos B$

$=0.$

用这个关系式,则

$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}C-2\operatorname{tg}B$

$=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin C}{\cos C}-\dfrac{2\sin B}{\cos B}$

$=\dfrac{\cos B(\sin A\cos C+\cos A\sin C)}{\cos A\cos B\cos C}$

$\quad-\dfrac{2\sin B\cos A\cos C}{\cos A\cos B\cos C}$

$=\dfrac{2\cos A\sin B\cos C-\sin(A+C)\cos B}{-\cos A\cos B\cos C}$

$=0.$

$\therefore$　$\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}B.$

故 $\operatorname{tg}A$, $\operatorname{tg}B$, $\operatorname{tg}C$ 成等差数列.

1170. 证明下列等式:

(1) $\cos^4 x-\sin^4 x=1-2\sin^2 x$;

(2) $\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x=\operatorname{tg}^2 x\sin^2 x$;

(3) $(1+\sin A+\cos A)^2$

$=2(1+\sin A)(1+\cos A)$;

(4) $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}$.

解　(1) $\cos^4 x-\sin^4 x$

$=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=\cos^2 x-\sin^2 x=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x$

$=1-2\sin^2 x.$

(2) $\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x$

$=\sin^2 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)$

$=\sin^2 x\,\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\sin^2 x\cdot\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\sin^2 x\operatorname{tg}^2 x.$

(3) $(1+\sin A+\cos A)^2$

$=1+2(\sin A+\cos A)+(\sin A+\cos A)^2$

$=1+2(\sin A+\cos A)+\sin^2 A$

$\quad+2\sin A\cos A+\cos^2 A$

$=2(1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A)$

$=2(1+\sin A)(1+\cos A).$

(4) $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$

$=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}.$

分子、分母同除以 $\cos\theta$ 后,

$$\text{上式}=\frac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}.$$

1171. 已知$A+B+C=180°$，证明下列等式：

(1) $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$；

(2) $\operatorname{tg}2A+\operatorname{tg}2B+\operatorname{tg}2C$
$=\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}2B\operatorname{tg}2C$；

(3) $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$
$=1$.

解 (1) 由正切的加法定理，

$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}(A+B)(1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B)$，

又因为 $A+B=180°-C$，故

原式左边

$=\operatorname{tg}(180°-C)-\operatorname{tg}(180°-C)\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C$

$=-\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C$

$=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$.

(2) 左边

$=\operatorname{tg}(2A+2B)(1-2\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}2B)+\operatorname{tg}2C$

$=\operatorname{tg}[2(180°-C)](1-\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}2B)+\operatorname{tg}2C$

$=-\operatorname{tg}2C(1-\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}2B)+\operatorname{tg}2C$

$=\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}2B\operatorname{tg}2C$.

(3) $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$

$=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)$

$=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)$

$=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\left(90°-\frac{C}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)$

$=1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$.

$\therefore$ $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$
$=1$.

注 由此知，当A、B、C是某一三角形的三个角时，成立上述关系式.

1172. 证明：

$\cos A+\sin A=\sqrt{2}\cos(45°-A)$
$=\sqrt{2}\sin(45°+A)$.

解 $\cos A+\sin A$

$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A\right)$

$=\sqrt{2}(\cos45°\cos A+\sin45°\sin A)$

$=\sqrt{2}\cos(45°-A)$.

又 $\cos A+\sin A$

$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A\right)$

$=\sqrt{2}(\sin45°\cos A+\cos45°\sin A)$

$=\sqrt{2}\sin(45°+A)$.

1173. 已知$\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$，证明

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

解 由半角公式，有

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta},$$

上式中的$\cos\theta$用已知条件代入，

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}}{1+\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\cos\beta}$$

$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}$$

$$=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

1174. 证明下列等式：

(1) $(\cos A-\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2$
$=4\sin^2\frac{A-B}{2}$；

(2) $\sin A\sin(A+2B)-\sin B\sin(B+2A)$
$=\sin(A-B)\sin(A+B)$；

(3) $\operatorname{tg}\left(45°+\frac{A}{2}\right)=\operatorname{tg}A+\sec A$；

(4) $1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}A\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-1=\sec A$.

解 (1) 左边$=\cos^2A+\sin^2A+\cos^2B$
$+\sin^2B-2(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$

$=2-2\cos(A-B)$

$=2\left[1-\left(1-2\sin^2\frac{A-B}{2}\right)\right]$

$=4\sin^2\frac{A-B}{2}$.

(2) $\sin A\sin(A+2B)$

$=\frac{1}{2}[\cos2B-\cos(2A+2B)]$，

$\sin B\sin(B+2A)$

$=\frac{1}{2}[\cos2A-\cos(2A+2B)]$.

$\therefore\quad \sin A\sin(A+2B)-\sin B\sin(B+2A)$

$=\frac{1}{2}(\cos 2B-\cos 2A)$

$=\sin(A-B)\sin(A+B)$。

(3) $\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)$

$=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}$

$=\frac{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{1+\sin A}{\cos A}$

$=\sec A+\operatorname{tg}A$。

(4) $1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}A=1+\frac{2\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}$

$=\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}$

$=\frac{1}{\cos A}=\sec A$。

$\operatorname{tg}A\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-1=\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}-1$

$=\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}=\sec A$。

1175. 证明:

$\cos A-\sin A=\sqrt{2}\cos(45^\circ+A)$

$=\sqrt{2}\sin(45^\circ-A)$。

解 $\cos A-\sin A$

$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A\right)$

$=\sqrt{2}(\cos 45^\circ\cos A-\sin 45^\circ\sin A)$

$=\sqrt{2}\cos(45^\circ+A)$。

又

$\cos A-\sin A=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A\right)$

$=\sqrt{2}(\sin 45^\circ\cos A-\cos 45^\circ\sin A)$

$=\sqrt{2}\sin(45^\circ-A)$。

1176. 证明下列各式:

(1) $2+\operatorname{ctg}^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}-\operatorname{tg}^2\theta$;

(2) $(\sin\theta+\sec\theta)^2+(\cos\theta+\csc\theta)^2$
$=(1+\sec\theta\csc\theta)^2$;

(3) $\frac{1+\cos\theta}{\sec\theta-\operatorname{tg}\theta}-\frac{1-\cos\theta}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}$
$=2(1+\operatorname{tg}\theta)$;

(4) $\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}+\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$
$=2\csc\theta$。

解 (1) $\operatorname{tg}^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$,

$\operatorname{ctg}^2\theta+1=\frac{1}{\sin^2\theta}$,

$\therefore\quad \operatorname{tg}^2\theta+\operatorname{ctg}^2\theta+2=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}$.

因此 $2+\operatorname{ctg}^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}-\operatorname{tg}^2\theta$.

(2) $(\sin\theta+\sec\theta)^2+(\cos\theta+\csc\theta)^2$

$=\left(\frac{\sin\theta\cos\theta+1}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{\cos\theta\sin\theta+1}{\sin\theta}\right)^2$

$=\frac{(\cos\theta\sin\theta+1)^2}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$

$=(1+\sec\theta\csc\theta)^2$.

(3) $\frac{1+\cos\theta}{\sec\theta-\operatorname{tg}\theta}-\frac{1-\cos\theta}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}$

$=\frac{(1+\cos\theta)(\sec\theta+\operatorname{tg}\theta)}{\sec^2\theta-\operatorname{tg}^2\theta}$

$-\frac{(1-\cos\theta)(\sec\theta-\operatorname{tg}\theta)}{\sec^2\theta-\operatorname{tg}^2\theta}$.

因为 $\operatorname{tg}^2\theta+1=\sec^2\theta$, 所以

上式$=2(\cos\theta\sec\theta+\operatorname{tg}\theta)=2(1+\operatorname{tg}\theta)$.

(4) 设 $1+\sin\theta=A$, 则

$\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}+\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

$=\frac{A+\cos\theta}{A-\cos\theta}+\frac{A-\cos\theta}{A+\cos\theta}$

$=\frac{(A+\cos\theta)^2+(A-\cos\theta)^2}{(A-\cos\theta)(A+\cos\theta)}$

$=\frac{2(A^2+\cos^2\theta)}{A^2-\cos^2\theta}=\frac{2\cdot 2(1+\sin\theta)}{2\sin\theta(1+\sin\theta)}$

$=2\csc\theta$.

1177. 证明三角形 ABC 中有

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\frac{\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C}{2\sin A\sin B\sin C}.$$

解　$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B$

$$=\frac{\cos A\sin B+\cos B\sin A}{\sin A\sin B}=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B},$$

因为 $A+B=\pi-C$，所以

$$\sin(A+B)=\sin C.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}.$$

同理，$\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}$，

$$\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A=\frac{\sin B}{\sin C\sin A}.$$

把上面三个式子两边相加后用 2 除，则得

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\frac{\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C}{2\sin A\sin B\sin C}.$$

1178. 已知 $A+B+C=\pi$，证明下列等式：

(1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$；

(2) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$；

(3) $\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=-2\cos A\sin B\sin C$；

(4) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1=-4\cos A\cos B\cos C$.

解　(1) $\sin A+\sin B+\sin C$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2},$$

因为 $\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$，所以

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2},\ \sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2},$$

因此　$\sin A+\sin B+\sin C$

$$=2\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

(2) $\sin A+\sin B-\sin C$

$$=2\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\frac{C}{2}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

(3) $\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C$

$$=\frac{1-\cos 2A}{2}-\frac{1-\cos 2B}{2}-\sin^2C$$
$$=-\frac{1}{2}(\cos 2A-\cos 2B)-\sin^2C$$
$$=\sin(A+B)\sin(A-B)-\sin^2(A+B)$$
$$=[\sin(A-B)-\sin(A+B)]\sin(A+B)$$
$$=-2\cos A\sin B\sin C.$$

(4) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1$

$$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2C$$
$$=-2\cos C\cos(A-B)-2\cos(A+B)\cos C$$
$$=-2\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$
$$=-4\cos A\cos B\cos C.$$

1179. 已知 $\alpha+\beta=\omega$，

$$\sin\frac{1}{2}\alpha=m\sin\frac{1}{2}\beta,$$

证明　$\operatorname{tg}\dfrac{1}{4}(\alpha-\beta)=\dfrac{(m-1)\operatorname{tg}\frac{1}{4}\omega}{(m+1)}$.

解　因为 $\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta}=\dfrac{m}{1}$，

所以 $\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha-\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\alpha+\sin\frac{1}{2}\beta}=\dfrac{m-1}{m+1}$.

即 $\dfrac{2\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{4}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{4}(\alpha-\beta)}$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}\omega}=\frac{m-1}{m+1}.$$

故　$\operatorname{tg}\dfrac{1}{4}(\alpha-\beta)=\dfrac{(m-1)\operatorname{tg}\frac{1}{4}\omega}{m+1}$.

1180. 证明下列等式：

(1) $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)+\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta-\alpha)+\cos\theta+\cos(\theta+\alpha)}=\operatorname{tg}\theta$；

(2) $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$.

解　(1) 左边

$$=\frac{[\sin(\theta+\alpha)+\sin(\theta-\alpha)]+\sin\theta}{[\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta-\alpha)]+\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\alpha+\sin\theta}{2\cos\theta\cos\alpha+\cos\theta}=\frac{\sin\theta(2\cos\alpha+1)}{\cos\theta(2\cos\alpha+1)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\operatorname{tg}\theta.$$

(2) $1+\sin\theta-\cos\theta$

$$=1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

$1+\sin\theta+\cos\theta$

$$=1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right),$$

从而

$$\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

1181. n 是正整数，证明

$$\sin\theta=2^n\sin\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}.$$

解　因为

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},$$

所以原式对于 $n=1$ 时成立。设当 $n=k$ 时欲证式成立，即有

$$\sin\theta=2^k\sin\frac{\theta}{2^k}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^k},$$

又因为　$\sin\dfrac{\theta}{2^k}=\sin\left(2\times\dfrac{\theta}{2^{k+1}}\right)$

$$=2\sin\frac{\theta}{2^{k+1}}\cos\frac{\theta}{2^{k+1}},$$

则　$\sin\theta=2^{k+1}\sin\dfrac{\theta}{2^{k+1}}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2^2}$

$$\cdots\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}.$$

因此对 $n=k+1$ 也是成立的。由数学归纳法知，对于任何正整数 n 欲证式成立。

1182. 证明下列等式：

(1) $\sin3\alpha+\sin2\alpha-\sin\alpha$

$$=4\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2};$$

(2) $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha$

$$=\frac{\sin\dfrac{3\alpha}{2}\sin2\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

解　(1) $\sin3\alpha+\sin2\alpha-\sin\alpha$

$$=2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}+2\cos\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$=2\left(\sin\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{3\alpha}{2}$$

$$=4\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}.$$

(2) $\sin\dfrac{\alpha}{2}(\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha)$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\alpha}{2}-\cos\frac{7\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{7\alpha}{2}\right)=\sin\frac{3\alpha}{2}\sin2\alpha.$$

$\therefore$　$\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha$

$$=\frac{\sin\dfrac{3\alpha}{2}\sin2\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

1183. 证明：

$\sin^3A+\sin^3(120°+A)+\sin^3(240°+A)$

$$=-\frac{3}{4}\sin3A.$$

解　$\sin^3A=\dfrac{1}{4}(3\sin A-\sin3A)$,

$\sin^3(120°+A)=\dfrac{1}{4}[3\sin(120°+A)$

$-\sin3(120°+A)]$

$$=\frac{1}{4}[3\sin(120°+A)-\sin3A],$$

$\sin^3(240°+A)=\dfrac{1}{4}[3\sin(240°+A)$

$-\sin3(240°+A)]$

$$=\frac{1}{4}[3\sin(240°+A)-\sin3A].$$

各式相加后，

$$\text{左边}=\frac{3}{4}[\sin A+\sin(120^\circ+A)$$
$$+\sin(240^\circ+A)]-\frac{3}{4}\sin 3A.$$

又 $\sin A+\sin(120^\circ+A)+\sin(240^\circ+A)$
$=\sin A+\sin(60^\circ-A)-\sin(60^\circ+A)$
$=\sin A+\sin 60^\circ\cos A-\cos 60^\circ\sin A$
$\quad-\sin 60^\circ\cos A-\cos 60^\circ\sin A$
$=\sin A-2\cos 60^\circ\sin A$
$=\sin A-\sin A=0.$

$$\therefore\ \text{左边}=-\frac{3}{4}\sin 3A.$$

1184. 证明: $\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}(60^\circ+A)+\operatorname{ctg}(120^\circ+A)=3\operatorname{ctg}3A.$

解 $\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}(60^\circ+A)+\operatorname{ctg}(120^\circ+A)$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}A}+\frac{1}{\operatorname{tg}(60^\circ+A)}+\frac{1}{\operatorname{tg}(120^\circ+A)}$$
$$=\frac{1}{\operatorname{tg}A}+\frac{1-\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}A}+\frac{1+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}A}$$
$$=\frac{1}{\operatorname{tg}A}+\frac{(1-\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}A)(\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}A)}{\operatorname{tg}^2 60^\circ-\operatorname{tg}^2 A}-\frac{(1+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}A)(\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}A)}{\operatorname{tg}^2 60^\circ-\operatorname{tg}^2 A}$$
$$=\frac{1}{\operatorname{tg}A}-\frac{2\operatorname{tg}^2 60^\circ\operatorname{tg}A+2\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}^2 60^\circ-\operatorname{tg}^2 A}$$
$$=\frac{1}{\operatorname{tg}A}-\frac{8\operatorname{tg}A}{3-\operatorname{tg}^2 A}=\frac{3-9\operatorname{tg}^2 A}{3\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}^3 A}$$
$$=\frac{3}{\operatorname{tg}3A}=3\operatorname{ctg}3A.$$

1185. 证明:
$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}(60^\circ+A)+\operatorname{tg}(120^\circ+A)=3\operatorname{tg}3A.$

解 $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}(60^\circ+A)+\operatorname{tg}(120^\circ+A)$
$=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}(60^\circ+A)-\operatorname{tg}(60^\circ-A)$

$$=\operatorname{tg}A+\frac{\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}A}-\frac{\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}A}{1+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}A}$$
$=\operatorname{tg}A+[(\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}A)(1+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}A)-(\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}A)(1-\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}A)]\div(1-\operatorname{tg}^2 60^\circ\operatorname{tg}^2 A)$
$$=\operatorname{tg}A+\frac{2\operatorname{tg}^2 60^\circ\operatorname{tg}A+2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2 60^\circ\operatorname{tg}^2 A}$$
$$=\operatorname{tg}A+\frac{8\operatorname{tg}A}{1-3\operatorname{tg}^2 A}=\frac{9\operatorname{tg}A-3\operatorname{tg}^3 A}{1-3\operatorname{tg}^2 A}$$
$=3\operatorname{tg}3A.$

1186. 证明: $\sec A+\sec(120^\circ+A)+\sec(240^\circ+A)=-3\sec 3A.$

解 原式左边
$$=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos(120^\circ+A)}+\frac{1}{\cos(240^\circ+A)}$$
$$=\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\cos(60^\circ-A)}-\frac{1}{\cos(60^\circ+A)}$$
$$=\frac{1}{\cos A}-\frac{\cos(60^\circ+A)+\cos(60^\circ-A)}{\cos(60^\circ-A)\cos(60^\circ+A)}$$
$$=\frac{1}{\cos A}-\frac{2\cos 60^\circ\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 60^\circ}$$
$$=\frac{1}{\cos A}-\frac{2\times\frac{1}{2}\cos A}{\cos^2 A-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\cos A}$$
$$-\frac{4\cos A}{4\cos^2 A-3}=\frac{4\cos^2 A-3-4\cos^2 A}{\cos A(4\cos^2 A-3)}$$
$$=\frac{-3}{4\cos^3 A-3\cos A}=\frac{-3}{\cos 3A}$$
$=-3\sec 3A.$

1187. 证明:
(1) $\sin 7\alpha=7\sin\alpha-56\sin^3\alpha+112\sin^5\alpha-64\sin^7\alpha;$
(2) $\cos 7\alpha=-7\cos\alpha+56\cos^3\alpha-112\cos^5\alpha+64\cos^7\alpha.$

解 (1) $\sin 7\alpha=\sin(4\alpha+3\alpha)$
$=\sin 4\alpha\cos 3\alpha+\cos 4\alpha\sin 3\alpha$
$=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha+(1-2\sin^2 2\alpha)\times(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)$
$=4\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)\times(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)+(1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha)\times(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)$
$=4(\sin\alpha-2\sin^3\alpha)\cos^2\alpha(4\cos^2\alpha-3)+[1-8\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)]\times(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)$
$=4(\sin\alpha-2\sin^3\alpha)(1-\sin^2\alpha)\times(1-4\sin^2\alpha)+[1-8\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)]\times(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)$
$=7\sin\alpha-56\sin^3\alpha+112\sin^5\alpha-64\sin^7\alpha.$

(2) 可与上面同样地证明。

1188. 若 $a\sin\theta\sin\psi+b\cos\theta\cos\psi=c$，证明

$$(c^2-a^2)\operatorname{tg}^2\theta\operatorname{tg}^2\psi+c^2(\operatorname{tg}^2\theta+\operatorname{tg}^2\psi)$$
$$-2ab\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\psi+(c^2-b^2)=0.$$

解 在已知式两边除以 $\cos\theta\cos\psi$，则

$$a\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\psi+b=c\sec\theta\sec\psi,$$

或者为

$$a\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\psi+b=\pm c\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\theta)(1+\operatorname{tg}^2\psi)},$$

两边平方，

$$a^2\operatorname{tg}^2\theta\operatorname{tg}^2\psi+2ab\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\psi+b^2$$
$$=c^2(1+\operatorname{tg}^2\theta)(1+\operatorname{tg}^2\psi),$$

$$\therefore\quad (c^2-a^2)\operatorname{tg}^2\theta\operatorname{tg}^2\psi+c^2(\operatorname{tg}^2\theta+\operatorname{tg}^2\psi)$$
$$-2ab\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\psi+(c^2-b^2)=0.$$

1189. 已知 $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$，证明

$$(a-b\cos2\alpha)(a-b\cos2\beta)$$

的值与 α、β 无关。

解 $(a-b\cos2\alpha)(a-b\cos2\beta)$

$$=a^2-ab(\cos2\alpha+\cos2\beta)+b^2\cos2\alpha\cos2\beta$$
$$=a^2-ab(2\cos^2\alpha-1+2\cos^2\beta-1)$$
$$+b^2(2\cos^2\alpha-1)(2\cos^2\beta-1)$$
$$=a^2+2ab+b^2-2ab(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)$$
$$-2b^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+4b^2\cos^2\alpha\cos^2\beta$$
$$=(a+b)^2-2b(a+b)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)$$
$$+4b^2\cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

但由已知条件知，

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\frac{a-b}{a+b},$$

$$(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$$
$$=\frac{a-b}{a+b}\cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

$$1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+\cos^2\alpha\cos^2\beta$$
$$=\frac{a-b}{a+b}\cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

$$\therefore\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta$$
$$=1+\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\cos^2\alpha\cos^2\beta$$
$$=1+\frac{2b}{a+b}\cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

把这个式子代入前面得到的结果，有

$$(a-b\cos2\alpha)(a-b\cos2\beta)$$
$$=(a+b)^2+4b^2\cos^2\alpha\cos^2\beta$$
$$-2b(a+b)\left(1+\frac{2b}{a+b}\cos^2\alpha\cos^2\beta\right)$$
$$=(a+b)^2-2b(a+b)=a^2-b^2.$$

故 $(a-b\cos2\alpha)(a-b\cos2\beta)$ 是与 α、β 无关的常数。

1190. 已知 $\cos\left(\beta+\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\right)$，$\cos\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$，$\cos\left(\beta-\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\right)$成等比数列，证明 $\sin\left(\dfrac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right)$，$\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}$，$\sin\left(\dfrac{\gamma+\alpha}{2}+\beta\right)$成等比数列。

解 由已知条件，

$$\cos^2\frac{\gamma+\alpha}{2}=\cos\left(\beta+\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta-\frac{\gamma-\alpha}{2}\right),$$

$$\therefore\quad 1-\sin^2\frac{\gamma+\alpha}{2}=\cos^2\frac{\gamma-\alpha}{2}-\sin^2\beta.$$

$$\therefore\quad 1-\cos^2\frac{\gamma-\alpha}{2}=\sin^2\frac{\gamma+\alpha}{2}-\sin^2\beta.$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{\gamma-\alpha}{2}=\sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}+\beta\right)$$
$$\times\sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right).$$

因此，

$$\sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right),\ \sin\frac{\gamma-\alpha}{2},\ \sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}+\beta\right)$$

也成等比数列。

1191. 证明：

$$\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}(60^\circ+A)+\operatorname{ctg}(60^\circ+A)$$
$$\times\operatorname{ctg}(120^\circ+A)+\operatorname{ctg}(120^\circ+A)\operatorname{ctg}A$$
$$=-3.$$

解 $\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}(60^\circ+A)+\operatorname{ctg}(60^\circ+A)$

$$\times\operatorname{ctg}(120^\circ+A)+\operatorname{ctg}(120^\circ+A)\operatorname{ctg}A$$
$$=\frac{1}{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}(60^\circ+A)}$$
$$+\frac{1}{\operatorname{tg}(60^\circ+A)\operatorname{tg}(120^\circ+A)}$$
$$+\frac{1}{\operatorname{tg}(120^\circ+A)\operatorname{tg}A}$$
$$=\frac{\operatorname{tg}(120^\circ+A)+\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}(60^\circ+A)}{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}(60^\circ+A)\operatorname{tg}(120^\circ+A)}$$
$$=\frac{3\operatorname{tg}3A}{-\operatorname{tg}3A}=-3.$$

1192. 证明：

(1) $\sin6\alpha$

$$=\cos\alpha(6\sin\alpha-32\sin^3\alpha+32\sin^5\alpha).$$

(2) $\sin 6\alpha$
$=2\sin\alpha(16\cos^5\alpha-16\cos^3\alpha+3\cos\alpha)$.

(3) $\cos 6\alpha$
$=-(1-18\cos^2\alpha+48\cos^4\alpha-32\cos^6\alpha)$.

解 (1) $\sin 6\alpha=3\sin 2\alpha-4\sin^3 2\alpha$
$=\sin 2\alpha(3-4\sin^2 2\alpha)$
$=2\sin\alpha\cos\alpha[3-4(2\sin\alpha\cos\alpha)^2]$
$=2\sin\alpha\cos\alpha(3-16\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$
$=2\sin\alpha\cos\alpha[3-16\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)]$
$=2\sin\alpha\cos\alpha(3-16\sin^2\alpha+16\sin^4\alpha)$
$=\cos\alpha(6\sin\alpha-32\sin^3\alpha+32\sin^5\alpha)$.

(2) $\sin 6\alpha=2\sin 3\alpha\cos 3\alpha$
$=2(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)$
$=2\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)$
$=2\sin\alpha[3-4(1-\cos^2\alpha)](4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)$
$=2\sin\alpha(4\cos^2\alpha-1)(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)$
$=2\sin\alpha(16\cos^5\alpha-16\cos^3\alpha+3\cos\alpha)$.

(3) $\cos 6\alpha=4\cos^3 2\alpha-3\cos 2\alpha$
$=4(2\cos^2\alpha-1)^3-3(2\cos^2\alpha-1)$
$=4(8\cos^6\alpha-12\cos^4\alpha+6\cos^2\alpha-1)-6\cos^2\alpha+3$
$=32\cos^6\alpha-48\cos^4\alpha+24\cos^2\alpha-4-6\cos^2\alpha+3$
$=-(1-18\cos^2\alpha+48\cos^4\alpha-32\cos^6\alpha)$.

1193. 证明:

$64(\cos^8\alpha+\sin^8\alpha)=\cos 8\alpha+28\cos 4\alpha+35$.

解 $64(\cos^8\alpha+\sin^8\alpha)$
$=64[(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)^2-2\sin^4\alpha\cos^4\alpha]$
$=64[(1-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha)^2-2\sin^4\alpha\cos^4\alpha]$
$=64\left[\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2\alpha\right]$
$=8(8-8\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha)$
$=8[8-4(1-\cos 4\alpha)+\sin^4 2\alpha]$
$=8(8-4+4\cos 4\alpha+\sin^4 2\alpha)$
$=8(4+4\cos 4\alpha+\sin^4 2\alpha)$
$=32+32\cos 4\alpha+2(1-\cos 4\alpha)^2$
$=34+28\cos 4\alpha+2\cos^2 4\alpha$
$=35+28\cos 4\alpha+(2\cos^2 4\alpha-1)$
$=35+28\cos 4\alpha+\cos 8\alpha$.

1194. 证明:

$$\cos 2\alpha=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

解 原式左边$=1-2\sin^2\alpha$
$=2\left(\frac{1}{2}-\sin^2\alpha\right)=2\left(\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\alpha\right)$
$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

1195. 已知三角形的三条边成等差数列，设最大角为 α，最小角为 β，证明

$4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$.

解 由题意知 $a+b=2c\,(a>b)$，又由余弦定理知

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos\beta=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

因此

左边$=4\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)$
$=\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}\times\frac{b^2-(a-c)^2}{ca}$
$=\frac{1}{abc^2}(a+b-c)(a-b+c)(b+a-c)\times(b-a+c)$
$=\frac{1}{abc^2}(2c-c)(a-b+c)(2c-c)\times(b-a+c)=\frac{c^2-(a-b)^2}{ab}$,

右边$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$
$=\frac{ab^2+a^2b+ac^2+bc^2-a^3-b^3}{2abc}$
$=\frac{(a+b)[ab+c^2-(a^2-ab+b^2)]}{2abc}$
$=\frac{2c[c^2-(a-b)^2]}{2abc}$
$=\frac{c^2-(a-b)^2}{ab}$.

$\therefore\ 4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$.

1196. 证明:

$\sin 4\alpha\,\mathrm{tg}^4\alpha+4\,\mathrm{tg}^3\alpha+2\sin 4\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha-4\,\mathrm{tg}\alpha+\sin 4\alpha=0$.

解 原式左边$=\sin 4\alpha(\mathrm{tg}^4\alpha+2\mathrm{tg}^2\alpha+1)+4\,\mathrm{tg}\alpha(\mathrm{tg}^2\alpha-1)$
$=\sin 4\alpha(\mathrm{tg}^2\alpha+1)^2+4\,\mathrm{tg}\alpha\left(\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)$
$=\sin 4\alpha\sec^4\alpha-4\mathrm{tg}\alpha\cos 2\alpha\sec^2\alpha$
$=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\sec^4\alpha-4\mathrm{tg}\alpha\cos 2\alpha\sec^2\alpha$
$=2\cos 2\alpha\sec^2\alpha(\sin 2\alpha\sec^2\alpha-2\mathrm{tg}\alpha)$
$=2\cos 2\alpha\sec^2\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha\sec^2\alpha-2\,\mathrm{tg}\alpha)$
$=4\cos 2\alpha\sec^2\alpha(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha)=0$.

1197. 在三角形 ABC 中，证明下面的等式：

(1) $\sin C(a\sin A+b\sin B)$
$=c(\sin^2 A+\sin^2 B)$；

(2) $a\sec A+b\sec B+c\sec C$
$=a\sec A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C$.

解 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，则

$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C$.

(1) 左边 $=\sin C(k\sin^2 A+k\sin^2 B)$
$=k\sin C(\sin^2 A+\sin^2 B)$
$=c(\sin^2 A+\sin^2 B)$.

(2) 同样地，

$$\text{左边}=\frac{k\sin A}{\cos A}+\frac{k\sin B}{\cos B}+\frac{k\sin C}{\cos C}$$
$=k(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C)$，

但是 $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C$，

∴ 左边 $=k\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C$
$=a\sec A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C$.

1198. 已知 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，求

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)$$

的值。

解 由题意知 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$，再由正切的加法定理知

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta,$$

∴ $1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=2$.

∴ $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2$.

1199. 证明：

$$\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\cos 2\alpha\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right)$$
$$=\frac{1}{8}(\cos 6\alpha+7\cos 2\alpha).$$

解 $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha$
$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$
$\times(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)$
$=\cos 2\alpha(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)$
$=\cos 2\alpha[(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha]$
$=\cos 2\alpha\left[1-\dfrac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2\right]$
$=\cos 2\alpha\left(1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right)$.

从而 $8(\cos^8\alpha-\sin^8\alpha)$
$=8\cos 2\alpha-4\cos 2\alpha\sin^2 2\alpha$
$=8\cos 2\alpha-4\cos 2\alpha(1-\cos^2 2\alpha)$
$=4\cos 2\alpha+4\cos^3 2\alpha$
$=7\cos 2\alpha+(4\cos^3 2\alpha-3\cos 2\alpha)$
$=7\cos 2\alpha+\cos 6\alpha$.

1200. 证明：

$$\cos^6 A-\sin^6 A=\cos 2A\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2A\right)$$
$$=\frac{1}{8}\cos 2A(7+\cos 4A).$$

解 $\cos^6 A-\sin^6 A$
$=(\cos^2 A-\sin^2 A)(\cos^4 A$
$+\sin^4 A+\sin^2 A\cos^2 A)$
$=\cos 2A[(\cos^2 A+\sin^2 A)^2-\sin^2 A\cos^2 A]$
$=\cos 2A(1-\sin^2 A\cos^2 A)$
$=\cos 2A\left(1-\dfrac{1}{4}\sin^2 2A\right)$
$=\dfrac{1}{8}\cos 2A(8-2\sin^2 2A)$
$=\dfrac{1}{8}(7+\cos 4A)\cos 2A$.

1201. 为把二次式 $ax^2+2hxy+by^2$ 变形成 AX^2+BY^2 的形式，需用

$$x=X\cos\theta-Y\sin\theta,$$
$$y=X\sin\theta+Y\cos\theta$$

代入二次式中的 x，y. 证明

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{2h}{a-b}.$$

并由此证明

$$(A-B)^2=(a-b)^2+4h^2.$$

解 $ax^2+2hxy+by^2$
$=a(X\cos\theta-Y\sin\theta)^2$
$+2h(X\cos\theta-Y\sin\theta)(X\sin\theta+Y\cos\theta)$
$+b(X\sin\theta+Y\cos\theta)^2$
$=(a\cos^2\theta+2h\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta)X^2$
$-2[(a-b)\sin\theta\cos\theta$
$-h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)]XY$
$+(a\sin^2\theta-2h\cos\theta\sin\theta+b\cos^2\theta)Y^2$
$=AX^2+BY^2$，

比较两边的系数，可得下面三个式子．

$$\begin{cases} a\cos^2\theta+2h\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta=A, & ① \\ a\sin^2\theta-2h\cos\theta\sin\theta+b\cos^2\theta=B, & ② \\ (a-b)\sin\theta\cos\theta-h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0. & ③ \end{cases}$$

由③得 $\frac{1}{2}(a-b)\sin 2\theta-h\cos 2\theta=0$。

$$\therefore\quad \operatorname{tg}2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{2h}{a-b}. \quad ④$$

再在 $(A-B)^2$ 中用 ①、② 代入，变形，则

$$\begin{aligned}&(A-B)^2\\&=[(a\cos^2\theta+2h\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta)\\&\quad-(a\sin^2\theta-2h\cos\theta\sin\theta+b\cos^2\theta)]^2\\&=[a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-b(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\&\quad+4h\sin\theta\cos\theta]^2\\&=[(a-b)\cos 2\theta+2h\sin 2\theta]^2\\&=\cos^2 2\theta(a-b+2h\operatorname{tg}2\theta)^2\\&=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 2\theta}(a-b+2h\operatorname{tg}2\theta)^2.\end{aligned}$$

用 ④ 代入上式，

$$\begin{aligned}(A-B)^2&=\frac{1}{1+\left(\frac{2h}{a-b}\right)^2}\left(a-b+\frac{2h\cdot 2h}{a-b}\right)^2\\&=\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2+4h^2}\cdot\frac{[(a-b)^2+4h^2]^2}{(a-b)^2}\\&=(a-b)^2+4h^2.\end{aligned}$$

1202．已知 $\operatorname{ctg}A$，$\operatorname{ctg}B$，$\operatorname{ctg}C$ 成等差数列，证明 $\operatorname{ctg}(B-A)$，$\operatorname{ctg}B$，$\operatorname{ctg}(B-C)$ 也成等差数列。

解 由题意知，

$$\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B=\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\operatorname{ctg}(B-A)+\operatorname{ctg}(B-C)\\&=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+1}{\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B}+\frac{\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}B+1}{\operatorname{ctg}C-\operatorname{ctg}B}\\&=\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+1-(\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}B+1)}{\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B}\\&=\frac{\operatorname{ctg}B(\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}C)}{\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B}\\&=\frac{\operatorname{ctg}B[\operatorname{ctg}A-(2\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}A)]}{\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B}\\&=\frac{2\operatorname{ctg}B(\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B)}{\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B}\\&=2\operatorname{ctg}B,\end{aligned}$$

故 $\operatorname{ctg}(B-A)$，$\operatorname{ctg}B$，$\operatorname{ctg}(B-C)$ 也成等差数列。

1203．证明：

$$\frac{1\pm\sin A}{1\mp\sin A}=\operatorname{tg}^2\left(45^\circ\pm\frac{A}{2}\right).$$

解 原式左边

$$=\frac{1\pm\sin A}{1\mp\sin A}=\frac{\left(\cos\frac{A}{2}\pm\sin\frac{A}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{A}{2}\mp\sin\frac{A}{2}\right)^2},$$

把上式分子、分母都除以 $\cos^2\frac{A}{2}$，

$$\begin{aligned}\text{上式}&=\left(\frac{1\pm\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1\mp\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right)^2\\&=\left(\frac{\operatorname{tg}45^\circ\pm\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1\mp\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right)^2\\&=\operatorname{tg}^2\left(45^\circ\pm\frac{A}{2}\right).\end{aligned}$$

1204．证明：

$$\frac{4\operatorname{tg}A(1-\operatorname{tg}^2A)}{(1+\operatorname{tg}^2A)^2}=\sin 4A.$$

解

$$\begin{aligned}&\frac{4\operatorname{tg}A(1-\operatorname{tg}^2A)}{(1+\operatorname{tg}^2A)^2}\\&=\frac{\frac{4\sin A}{\cos A}\left(1-\frac{\sin^2A}{\cos^2A}\right)}{\left(1+\frac{\sin^2A}{\cos^2A}\right)^2}\\&=\frac{4\sin A\cos A(\cos^2A-\sin^2A)}{(\cos^2A+\sin^2A)^2}\\&=2\sin 2A\cos 2A=\sin 4A.\end{aligned}$$

1205．已知 $\operatorname{tg}A=\frac{x\sin\theta}{y-x\cos\theta}$，

$$\operatorname{tg}B=\frac{y\sin\theta}{x-y\cos\theta}.$$

证明 $\operatorname{tg}(A+B)=-\operatorname{tg}\theta$。

解

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B\\&=\frac{x\sin\theta}{y-x\cos\theta}+\frac{y\sin\theta}{x-y\cos\theta}\\&=\frac{\sin\theta[(x^2+y^2)-2xy\cos\theta]}{(y-x\cos\theta)(x-y\cos\theta)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\\&=1-\frac{xy\sin^2\theta}{(y-x\cos\theta)(x-y\cos\theta)}\\&=\frac{xy(1-\sin^2\theta)+xy\cos^2\theta-(x^2+y^2)\cos\theta}{(y-x\cos\theta)(x-y\cos\theta)}\\&=\frac{\cos\theta[2xy\cos\theta-(x^2+y^2)]}{(y-x\cos\theta)(x-y\cos\theta)}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$$

$$=\frac{\sin\theta[(x^2+y^2)-2xy\cos\theta]}{\cos\theta[2xy\cos\theta-(x^2+y^2)]}$$

$$=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\operatorname{tg}\theta.$$

1206. 证明:

$\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)-2\cos\alpha\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$ 的值与 θ 无关.

解　$\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)$

$$=\frac{1+\cos2\theta}{2}+\frac{1+\cos2(\alpha+\theta)}{2}$$

$$=1+\frac{1}{2}[\cos(\alpha+2\theta-\alpha)+\cos(\alpha+2\theta+\alpha)]$$

$$=1+\cos(\alpha+2\theta)\cos\alpha.$$

$2\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$

$$=\cos(\alpha+\theta+\theta)+\cos(\alpha+\theta-\theta)$$

$$=\cos(\alpha+2\theta)+\cos\alpha.$$

$\therefore$　$\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)-2\cos\alpha\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$

$$=1+\cos(\alpha+2\theta)\cos\alpha-\cos(\alpha+2\theta)\cos\alpha-\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha,$$

这个值与 θ 是无关的.

1207. 已知 n 为自然数,用数学归纳法证明 $\cos nx$, $\sin nx\sin x$ 都可表成 $\cos x$ 的整式.

解　$n=1$ 时,

$$\cos nx=\cos x,$$

$$\sin nx\sin x=\sin^2x=1-\cos^2x,$$

因此当 $n=1$ 时命题成立.

再假定 $n=k$ 时命题成立,考察 $n=k+1$ 的情况,

$$\cos(k+1)x=\cos kx\cos x-\sin kx\sin x,$$

$\sin(k+1)x\sin x$

$$=(\sin kx\cos x+\cos kx\sin x)\sin x$$

$$=\sin kx\sin x\cos x+\cos kx(1-\cos^2x),$$

因为 $\cos kx$, $\sin kx\sin x$ 都可表成 $\cos x$ 的整式,因此 $n=k+1$ 时命题亦成立.

由数学归纳法知,对任意自然数 n 原命题成立.

1208. 证明:

(1) $\sin5\alpha=16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha$;

(2) $\cos5\alpha=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha$.

解　(1) $\sin5\alpha=\sin(3\alpha+2\alpha)$

$$=\sin3\alpha\cos2\alpha+\cos3\alpha\sin2\alpha$$

$$=(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)(1-2\sin^2\alpha)+(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)\cdot2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)(1-2\sin^2\alpha)+(4\cos^2\alpha-3)\cdot2\sin\alpha\cos^2\alpha$$

$$=(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)(1-2\sin^2\alpha)+(1-4\sin^2\alpha)\cdot2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)$$

$$=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha.$$

(2) 可与(1)完全类似地证明.

1209. 已知 $0<A<\frac{\pi}{4}$,证明

$$\frac{\cos A}{\sqrt{1-\sin2A}}+\frac{\sin A}{\sqrt{1+\sin2A}}=1+\operatorname{tg}2A.$$

解　因为

$0<A<\frac{\pi}{4}$,所以 $0<\sin A<\cos A$.

因此　$\sqrt{1-\sin2A}$

$$=\sqrt{\sin^2A+\cos^2A-2\sin A\cos A}$$

$$=\sqrt{(\cos A-\sin A)^2}$$

$$=\cos A-\sin A.$$

同理, $\sqrt{1+\sin2A}=\cos A+\sin A$.

$$\text{左边}=\frac{\cos A}{\cos A-\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A+\sin A}$$

$$=\frac{\cos A(\cos A+\sin A)+\sin A(\cos A-\sin A)}{\cos^2A-\sin^2A}$$

$$=\frac{\cos^2A-\sin^2A+2\sin A\cos A}{\cos^2A-\sin^2A}$$

$$=\frac{\cos2A+\sin2A}{\cos2A}=1+\operatorname{tg}2A.$$

1210. 证明下面的等式:

$$\sin\alpha\sin\beta+\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma).$$

解

$\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)-\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=(\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma)(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma)-\sin\gamma[\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma]$$

$$=\sin\alpha\sin\beta\cos^2\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin^2\gamma+\sin\gamma\cos\gamma(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)-\sin\gamma\cos\gamma\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)\sin^2\gamma$$

$$=\sin^2\gamma[\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)]+\sin\alpha\sin\beta\cos^2\gamma$$

$$=\sin^2\gamma\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos^2\gamma$$

$$=\sin\alpha\sin\beta(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)$$

$$=\sin\alpha\sin\beta.$$

$\therefore$　$\sin\alpha\sin\beta+\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma).$$

1211. 证明:

$\cos[(n+1)\alpha]\cdot\cos[(n-1)\alpha]+\sin^2\alpha=\cos^2 n\alpha$.

解　由公式

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$,

得　$\cos[(n+1)\alpha]\cos[(n-1)\alpha]$

$=\cos(n\alpha+\alpha)\cos(n\alpha-\alpha)$

$=\cos^2 n\alpha-\sin^2\alpha$.

由此原式左边$=\cos^2 n\alpha-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha$

$=\cos^2 n\alpha$.

1212. 已知$x+y+z=\frac{\pi}{2}$, 证明

$\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=1-2\sin x\sin y\sin z$.

解　$\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z-1$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}(1-\cos 2y)$

$+\sin^2 z-1$

$=-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 2y)+\sin^2 z$

$=-\cos(x+y)\cos(x-y)+\sin^2 z$.

因为 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$, 所以

$\cos(x+y)=\sin z$.

因此　$\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z-1$

$=-\sin z\cos(x-y)+\sin z\cos(x+y)$

$=-\sin z[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$

$=-\sin z\cdot 2\sin x\sin y$

$=-2\sin x\sin y\sin z$.

$\therefore$　$\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z$

$=1-2\sin x\sin y\sin z$.

1213. 证明:

$\sin 8A=8\sin A\cos A\cos 2A\cos 4A$.

解　因为$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, 故

$\sin 8A=2(\sin 4A)\cos 4A$

$=2(2\sin 2A\cos 2A)\cos 4A$

$=4(\sin 2A)\cos 2A\cos 4A$

$=4(2\sin A\cos A)\cos 2A\cos 4A$

$=8\sin A\cos A\cos 2A\cos 4A$.

1214. 已知　$\sin A+\sin B+\sin C=0$,

$\cos A+\cos B+\cos C=0$.

证明下列等式成立.

(1) $\cos(A-B)=\cos(B-C)$

$=\cos(C-A)=-\frac{1}{2}$.

(2) $\cos 2A=\cos(B+C)$,

$\cos 2B=\cos(C+A)$,

$\cos 2C=\cos(A+B)$.

解　(1) 把

$\sin A+\sin B=-\sin C$,　①

$\cos A+\cos B=-\cos C$　②

两边平方后相加, 得

$2+2(\cos A\cos B+\sin A\sin B)=1$,

$\therefore$　$\cos(A-B)=-\frac{1}{2}$.

同理　$\cos(B-C)=-\frac{1}{2}$,

$\cos(C-A)=-\frac{1}{2}$.

(2) 把①、②两式两边平方后相减, 得

$\cos 2A+\cos 2B+2\cos(A+B)=\cos 2C$,

$2\cos(A+B)\cos(A-B)$

$+2\cos(A+B)=\cos 2C$.

由 (1) 的结果, $2\cos(A-B)=-1$.

$\therefore$　$-\cos(A+B)+2\cos(A+B)=\cos 2C$.

因此　$\cos 2C=\cos(A+B)$.

同理,　$\cos 2A=\cos(B+C)$.

$\cos 2B=\cos(C+A)$.

1215. 证明:

$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}+\theta\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5}+\theta\right)$

$+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{5}+\theta\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{5}+\theta\right)=5\operatorname{tg}5\theta$.

解　原式的左边

$=\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}+\theta\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5}+\theta\right)$

$-\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5}-\theta\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}-\theta\right)$

$=\operatorname{tg}\theta+\dfrac{\sin 2\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{5}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}-\theta\right)}$

$+\dfrac{\sin 2\theta}{\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\theta\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}-\theta\right)}$

$=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\sin 2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\frac{\pi}{5}}$

$+\dfrac{\sin 2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\frac{2\pi}{5}}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$+\frac{\sin 2\theta}{\cos^2\theta-\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$+\frac{\sin 2\theta}{\cos^2\theta-\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$$

$$=\frac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta}+\frac{8\sin 2\theta}{8\cos^2\theta-5+\sqrt{5}}$$

$$+\frac{8\sin 2\theta}{8\cos^2\theta-5-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta}+\frac{16\sin 2\theta(8\cos^2\theta-5)}{(8\cos^2\theta-5)^2-5}$$

$$=\frac{\sin 2\theta(80\cos^4\theta-60\cos^2\theta+5)}{2\cos^2\theta(16\cos^4\theta-20\cos^2\theta+5)}$$

$$=\{5\sin\theta[16(1-\sin^2\theta)^2-12(1-\sin^2\theta)+1]\}\div(16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta)$$

$$=\frac{5(16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta)}{16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta}$$

$$=\frac{5\sin 5\theta}{\cos 5\theta}=5\operatorname{tg}5\theta.$$

1216. 证明:

$$\frac{\sin 5\theta-\cos 5\theta}{\sin 5\theta+\cos 5\theta}$$

$$=\operatorname{tg}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\frac{1-2\sin 2\theta-4\sin^2 2\theta}{1+2\sin 2\theta-4\sin^2 2\theta}.$$

解 原式左边

$$=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(2\cos 4\theta-2\sin 2\theta-1)}{(\sin\theta+\cos\theta)(2\cos 4\theta+2\sin 2\theta-1)}$$

$$=\operatorname{tg}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\frac{1-2\sin 2\theta-4\sin^2 2\theta}{1+2\sin 2\theta-4\sin^2 2\theta}.$$

1217. 证明:

$3\sin A-\sin 3A=2\sin A(1-\cos 2A)$.

解 $3\sin A-\sin 3A$

$=3\sin A-(3\sin A-4\sin^3 A)$

$=4\sin^3 A=(2\sin A)(2\sin^2 A)$

$=2\sin A(1-\cos 2A)$.

1218. 已知 $\cos x+\cos y=a$,

$\sin x+\sin y=b$,

$a^2+b^2>0$, 证明

(1) $\cos(x+y)=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$,

$\sin(x+y)=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

(2) 当 $0°<x<90°$, $0°<y<90°$ 时,

$a^2+b^2>2a$, $a^2+b^2>2b$.

解 (1) 由已知式的左边变形得

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a, \qquad ①$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b. \qquad ②$$

把①、②两边平方后相加,得

$$4\left(\cos^2\frac{x+y}{2}+\sin^2\frac{x+y}{2}\right)\cos^2\frac{x-y}{2}=a^2+b^2,$$

$$\therefore\quad 4\cos^2\frac{x-y}{2}=a^2+b^2. \qquad ③$$

把①、②两边平方后相减,得

$$4\left(\cos^2\frac{x+y}{2}-\sin^2\frac{x+y}{2}\right)\cos^2\frac{x-y}{2}=a^2-b^2,$$

$$\therefore\quad 4\cos(x+y)\cos^2\frac{x-y}{2}=a^2-b^2. \qquad ④$$

把①、②两边相乘再乘以2,得

$$8\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}=2ab.$$

$$\therefore\quad 4\sin(x+y)\cos^2\frac{x-y}{2}=2ab. \qquad ⑤$$

因为 $a^2+b^2>0$, 把④、⑤用③除,得

$$\cos(x+y)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

$$\sin(x+y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

(2) 由①、③得

$$a^2+b^2-2a$$

$$=4\cos\frac{x-y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)$$

$$=8\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}.$$

因为 $0°<x<90°$, $0°<y<90°$, 所以

$$-90°<\frac{x-y}{2}<90°.$$

$$\therefore\quad \cos\frac{x-y}{2}>0,\ \sin\frac{x}{2}>0,\ \sin\frac{y}{2}>0.$$

因此 $a^2+b^2>2a$. 由②、③,

$$a^2+b^2-2b$$

$$=4\cos\frac{x-y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\sin\frac{x+y}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{x-y}{2}\left[\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{y}{2}-\sin\frac{y}{2}\right)\right.$$

$$-\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{y}{2}-\sin\frac{y}{2}\right)]$$

$$=4\cos\frac{x-y}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$\times\left(\cos\frac{y}{2}-\sin\frac{y}{2}\right)$$

因为 $0°<\frac{x}{2}<45°$，$0°<\frac{y}{2}<45°$，故

$$\cos\frac{x}{2}>\sin\frac{x}{2},\quad \cos\frac{y}{2}>\sin\frac{y}{2},$$

所以 $a^2+b^2>2b$。

1219． 用数学归纳法证明，当 $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$ 时，

$$\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)+\sin(\theta+2\alpha)+\cdots+\sin[\theta+(n-1)\alpha]$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\theta+\frac{n-1}{2}\alpha\right)\sin\frac{n\alpha}{2}.$$

解　当 $n=1$ 时显然欲证式成立。

设 $n=k$ 时欲证式成立，则

$$\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)+\cdots+\sin[\theta+(k-1)\alpha]+\sin(\theta+k\alpha)$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\theta+\frac{k-1}{2}\alpha\right)\sin\frac{k\alpha}{2}+\sin(\theta+k\alpha)$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\sin\left(\theta+\frac{k-1}{2}\alpha\right)\sin\frac{k\alpha}{2}+\sin(\theta+k\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(\theta+\frac{2k-1}{2}\alpha\right)+\cos\left(\theta+\frac{2k-1}{2}\alpha\right)-\cos\left(\theta+\frac{2k+1}{2}\alpha\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot 2\sin\left(\theta+\frac{k}{2}\alpha\right)\sin\frac{k+1}{2}\alpha$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\theta+\frac{k}{2}\alpha\right)\sin\frac{k+1}{2}\alpha.$$

即 $n=k+1$ 时欲证式亦成立．由数学归纳法知，对于任意自然数 n，等式成立。

8．其他

1220． 已知 $\alpha=\frac{\pi}{17}$，求下式的值：

$$\frac{\cos\alpha\cos 13\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}.$$

解　把分母变成积的形式，

$$\text{原式}=\frac{\cos\alpha\cos 13\alpha}{2\cos 4\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos(17\alpha-4\alpha)}{2\cos 4\alpha},$$

因为 $\alpha=\frac{\pi}{17}$，$17\alpha=\pi$，故

$$\text{原式}=\frac{\cos(\pi-4\alpha)}{2\cos 4\alpha}=-\frac{\cos 4\alpha}{2\cos 4\alpha}=-\frac{1}{2}.$$

1221． 利用 $\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，依次求

$$\cos\frac{45°}{2},\ \cos\frac{45°}{4},\ \cos\frac{45°}{8},\ \cos\frac{45°}{16}$$

的值。

解　$\cos\frac{45°}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=0.9239.$$

$$\cos\frac{45°}{4}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{45°}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1+0.9239}{2}}=0.9808.$$

$$\cos\frac{45°}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{45°}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+0.9808}{2}}=0.9952.$$

$$\cos\frac{45°}{16}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{45°}{8}}{2}}=\sqrt{\frac{1+0.9952}{2}}=0.9988.$$

1222． 已知 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\cos\alpha\csc\beta\csc\gamma+\cos\beta\csc\gamma\csc\alpha+\cos\gamma\csc\alpha\csc\beta=2.$$

解　原式左边

$$=\frac{\cos\alpha\sin\alpha+\cos\beta\sin\beta+\cos\gamma\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$=\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

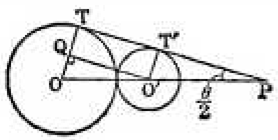
$$=\frac{4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=2.$$

1223. 设有两个互相外切的圆，半径分别是 R、$r(R>r)$，这两个圆的两条外公切线交角为 θ，试用 R、r 表出 $\sin\theta$ 的值。

解　设两个外切的圆 O、O' 的一条外公切线为 TT'，TT' 和连心线 OO' 交于点 P，过 O' 作 TT' 的平行线交 OT 于 Q，则

$$\angle OPT=\angle OO'Q=\frac{\theta}{2}.$$

在三角形 $OO'Q$ 中，$OO'=R+r$，$OQ=R-r$.



因此　$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{R-r}{R+r}.$$

$$\therefore\ \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\,\frac{R-r}{R+r}\sqrt{1-\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^2}$$

$$=2\,\frac{R-r}{R+r}\cdot\frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}=\frac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(R+r)^2}.$$

1224. 画出 $\sin 2x$ 和 $\sin^2x$ 的图象，说出这两个图象间的关系。

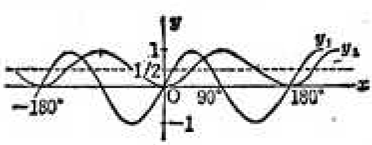
解　由半角公式，

$$\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin(90^\circ-2x)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2(x-45^\circ).$$

因此，$y_2=\sin^2x$ 的图象是由 $y_1=\sin 2x$ 的图象在 y 轴方向缩小一半，然后沿 y 轴平移 $\frac{1}{2}$，沿 x 轴正方向平移 45° 而得到的。



1225. 设在 $\triangle ABC$ 中 $\angle A=\alpha$，$\angle C=90^\circ$，$AB=1$，

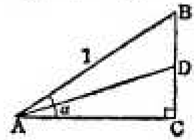
(1) 若 $\angle A$ 的平分线交 BC 于 D，则

$$BD=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\ CD=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

(2) 求 AD 的长，并推导下面的式子：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$



解　(1) 因为 AD 是 $\angle A$ 的平分线，所以

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=\frac{AB+AC}{BD+CD}=\frac{AB+AC}{BC},$$

$$\therefore\ BD=\frac{AB\cdot BC}{AB+AC}=\frac{1\cdot\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

$$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB+AC}=\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

(2) 在三角形 ACD 中，

$$AD^2=AC^2+CD^2=\cos^2\alpha+\left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^2$$

$$=\frac{\cos^2\alpha(1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha(2+2\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}=\frac{2\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha},$$

$$\therefore\ AD=\sqrt{\frac{2\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

因此，

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{CD}{AD}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{AC}{AD}=\cos\alpha\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

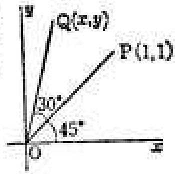
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{CD}{AC}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

1226. 在直角坐标系中，点(1, 1)绕原点

正向旋转 30°，所得到的点的坐标是什么？

解　设坐标为(1，1)的点为 P，设绕原点正向旋转 30° 后所得点的坐标为 $Q(x, y)$，则



$$OP=OQ=\sqrt{2},$$

$$x=\sqrt{2}\cos(45°+30°)$$

$$=\sqrt{2}(\cos45°\cos30°-\sin45°\sin30°)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

$$y=\sqrt{2}\sin(45°+30°)$$

$$=\sqrt{2}(\sin45°\cos30°+\cos45°\sin30°)$$

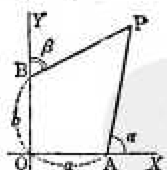
$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

因此，所求点 Q 的坐标为

$$Q\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right).$$

1227．设图中 $OX\perp OY$，$OA=a$，$OB=b$，$\angle XAP=\alpha$，$\angle YBP=\beta$。试求 BP 的长度。



解　设 $BP=x$，$AP=y$，以 OX，OY 为坐标轴，点 P 的坐标为 (X, Y)，可得

$$X=x\sin\beta=a+y\cos\alpha,$$

$$Y=y\sin\alpha=b+x\cos\beta.$$

把它们变形，

$$x\sin\beta=a+y\cos\alpha, \qquad ①$$

$$x\cos\beta=-b+y\sin\alpha. \qquad ②$$

① $\times\sin\alpha-$ ② $\times\cos\alpha$，可得

$$x=\frac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta}$$

$$=-\frac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

1228．若 $\alpha=18°$，则 $5\alpha=90°$，$2\alpha=90°-3\alpha$，从而

$$\sin2\alpha=\sin(90°-3\alpha)=\cos3\alpha,$$

利用这个式子求 $\sin18°$，$\sin36°$，$\sin54°$，$\sin72°$ 的值。

解　用二倍角和三倍角的公式变形，

$$\sin2\alpha=\sin(90°-3\alpha)=\cos3\alpha,$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha-(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)=0,$$

$$\cos\alpha(4\cos^2\alpha-2\sin\alpha-3)=0,$$

$$\cos\alpha[4(1-\sin^2\alpha)-2\sin\alpha-3]=0,$$

$$\cos\alpha(4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1)=0.$$

因为 $\cos\alpha\neq0$，所以

$$\sin\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

又因为 $\sin18°>0$，

$$\therefore\quad \sin18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$\cos18°=\sin72°=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

$$\sin36°=2\sin18°\cos18°$$

$$=2\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\frac{1}{8}\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}$$

$$=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

$$\sin54°=\cos36°=\sqrt{1-\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

1229．x 和 $3x$ 的算术平均等于 $2x$，但对 x 的正弦和 $3x$ 的正弦取算术平均，结果并不等于 $2x$ 的正弦，试比较两者的大小。其中 x 是 0° 至 360° 间的任意角。

解　x 的正弦与 $3x$ 的正弦，其算术平均为

$$\frac{1}{2}(\sin x+\sin3x),$$

故

$$\frac{1}{2}(\sin x+\sin3x)-\sin2x$$

$$=\sin2x\cos(-x)-\sin2x$$

$$=\sin2x(\cos x-1).$$

因此两者的大小关系如下：

当 $x=0°$，90°，180°，270°，360° 时，

$$\frac{1}{2}(\sin x+\sin3x)=\sin2x.$$

当 $0°<x<90°$，$180°<x<270°$ 时，

$$\frac{1}{2}(\sin x+\sin3x)<\sin2x,$$

当 $90°<x<180°$, $270°<x<360°$ 时,

$$\frac{1}{2}(\sin x+\sin 3x)>\sin 2x.$$

1230. (1) 已知 $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2+\sqrt{3}$ 时, 求 $\sin x$、$\cos x$ 的值.

(2) 已知 $\operatorname{tg} 2x=\sqrt{3}$ 时, 求 $\sin x$, $\cos x$ 的值.

解 (1) 由正切的加法定理,

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x},$$

因此 $\quad \dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=2+\sqrt{3}$,

$$1+\operatorname{tg}x=(2+\sqrt{3})(1-\operatorname{tg}x),$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}+1}{3+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad ①$$

因此当 x 是第一象限内的角时,

$$\cos x=\frac{1}{\sec x}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin x=\operatorname{tg}x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}.$$

同理, 当 x 是第三象限内的角时,

$$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin x=-\frac{1}{2}.$$

(2) 因为 $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=\sqrt{3}$, 所以

$$2\operatorname{tg}x=\sqrt{3}(1-\operatorname{tg}^2x),$$

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2x+2\operatorname{tg}x-\sqrt{3}=0,$$

$$(\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})=0,$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{或}\ \operatorname{tg}x=-\sqrt{3}. \qquad ②$$

因此当 $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 由(1)

$$\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin x=\pm\frac{1}{2}.$$

而当 $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$ 时,

$$\cos x=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+3}}=\pm\frac{1}{2},$$

$$\sin x=\operatorname{tg}x\cos x=-\sqrt{3}\left(\pm\frac{1}{2}\right)=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

注 根据三角方程的一般解和 (1) 中的①式, 得

$$x=n\pi+\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore\quad \sin x=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\pm\frac{1}{2}.$$

$$\cos x=\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又由 (2) 中的②式, 有

$$x=n\pi+\frac{\pi}{6}\quad \text{或}\quad x=n\pi-\frac{\pi}{3}.$$

而当 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{6}$ 时,

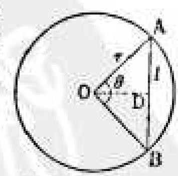
$$\sin x=\pm\frac{1}{2},\ \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

当 $x=n\pi-\dfrac{\pi}{3}$ 时,

$$\sin x=\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos x=\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\mp\frac{1}{2}.$$

1231. 设图中圆 O 的半径为 r, 弦 AB 为 l, 圆心角 AOB 为 θ, 证明 $l=2r\sin\dfrac{\theta}{2}$. 又当 $r=5\,\text{cm}$, $\theta=75°$ 时求 l 的值.



解 由 O 向 AB 作垂线, 设垂足为 D,

$$l=AB=2AD=2r\sin\frac{\theta}{2}.$$

又 $r=5\,\text{cm}$, $\theta=75°$ 时,

$$l=2\times5\sin\frac{75°}{2}=10\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos75°)}.$$

但 $\cos75°=\cos45°\cos30°-\sin45°\sin30°$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\therefore\quad l=10\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}$$

$$=5\sqrt{\frac{1}{2}(4+\sqrt{2}-\sqrt{6})}\ (\text{cm}).$$

1232. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg}\gamma=\frac{4}{3}$，求 $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ 的值，其中 α、β、γ 都是正锐角。

解　由加法定理，

$$\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta+\gamma)\\&=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma\\&=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\cos\gamma\\&\quad-(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\sin\gamma,\end{aligned}$$

由 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由 $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\cos\beta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$，

由 $\operatorname{tg}\gamma=\frac{4}{3}$，得

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}=\frac{3}{5},$$

$$\sin\gamma=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad&\cos(\alpha+\beta+\gamma)\\&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{3}{5}\\&\quad-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}\\&=\frac{3(1-\sqrt{3})\sqrt{2}}{20}-\frac{4(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{20}\\&=\frac{(-1-7\sqrt{3})\sqrt{2}}{20}=-\frac{\sqrt{2}+7\sqrt{6}}{20}.\end{aligned}$$

1233. 求 $\operatorname{tg}11°15'$ 至第三位小数，其中取 $\sqrt{2}=1.41421356$。

解　若 $\alpha=11°15'$，则 $4\alpha=45°$。

$$\operatorname{tg}4\alpha=\operatorname{tg}45°=1=\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}^2 2\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha-1=0.$$

$$\therefore\quad\operatorname{tg}2\alpha=-1\pm\sqrt{1+1}=-1\pm\sqrt{2},$$

因为 2α 是第一象限的角，所以 $\operatorname{tg}2\alpha=\sqrt{2}-1$，又

$$\operatorname{tg}2\alpha=\sqrt{2}-1=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$(\sqrt{2}-1)\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-(\sqrt{2}-1)=0,$$

$$\therefore\quad\operatorname{tg}\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{-1\pm\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1},$$

取正号，则有

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}11°15'=\operatorname{tg}\alpha\\&=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{4-2\sqrt{2}}-1)\\&=(1.41421356+1)\\&\times(\sqrt{4-2\times1.41421356}-1)\approx0.199.\end{aligned}$$

1234. 求下列各式的值.

(1) $\operatorname{tg}9°-\operatorname{tg}27°+\operatorname{tg}81°-\operatorname{tg}63°$;

(2) $\operatorname{tg}6°\operatorname{tg}42°\operatorname{tg}66°\operatorname{tg}78°$.

解　(1) 因为 $81°=90°-9°$，

$63°=90°-27°$，

$$\begin{aligned}&\text{原式}=\operatorname{tg}9°+\operatorname{ctg}9°-(\operatorname{tg}27°+\operatorname{ctg}27°)\\&=\frac{\sin9°}{\cos9°}+\frac{\cos9°}{\sin9°}-\left(\frac{\sin27°}{\cos27°}+\frac{\cos27°}{\sin27°}\right)\\&=\frac{\sin^2 9°+\cos^2 9°}{\sin9°\cos9°}-\frac{\sin^2 27°+\cos^2 27°}{\sin27°\cos27°}\\&=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin18°}-\frac{1}{\frac{1}{2}\sin54°}=\frac{2}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}\\&\quad-\frac{2}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}=\frac{8}{\sqrt{5}-1}-\frac{8}{\sqrt{5}+1}=4.\end{aligned}$$

由 $A=18°$，$\cos3A=\sin2A$,

$$4\cos^3 A-3\cos A=2\sin A\cos A,$$

$$4\cos^2 A-3=2\sin A\ (\cos A\neq0),$$

$$4(1-\sin^2 A)-3=2\sin A,$$

$$4\sin^2 A+2\sin A-1=0,$$

$$\sin A=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

因为 $\sin A>0$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$。同样得到

$$\sin54°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

(2) 原式

$$\begin{aligned}&=\frac{\sin6°}{\cos6°}\cdot\frac{\sin66°}{\cos66°}\cdot\frac{\sin42°}{\cos42°}\cdot\frac{\sin78°}{\cos78°}\\&=\frac{\frac{1}{2}(\cos60°-\cos72°)}{\frac{1}{2}(\cos72°+\cos60°)}\end{aligned}$$

$$\times\frac{\frac{1}{2}(\cos 36°-\cos 120°)}{\frac{1}{2}(\cos 120°+\cos 36°)}$$

$$=\frac{\cos 60°-\sin 18°}{\cos 60°+\sin 18°}\cdot\frac{\sin 54°+\sin 30°}{\sin 54°-\sin 30°}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{-\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-1}=\frac{4}{4}=1.$$

1235. 若 $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{tg}\beta=2$, 求 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$. 设 α、β 是正的锐角.

解 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$$=\frac{3+2}{1-3\times 2}=-1.$$

接下去，由 $\operatorname{tg}\alpha=3$ 得

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

由 $\operatorname{tg}\beta=2$ 得

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$\therefore$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

1236. 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{4}$, 求

$\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

这里 $90°<\alpha<180°$, $0°<\beta<90°$.

解 因为 $90°<\alpha<180°$, $0°<\beta<90°$, 所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

由加法定理，得

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$=\frac{1}{12}(1-2\sqrt{30}),$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$=-\frac{1}{12}(2\sqrt{2}+\sqrt{15}).$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{1-2\sqrt{30}}{12}\cdot\frac{-12}{2\sqrt{2}+\sqrt{15}}$$

$$=\frac{4\sqrt{60}-2\sqrt{2}-2\sqrt{450}+\sqrt{15}}{8-15}$$

$$=\frac{1}{7}(32\sqrt{2}-9\sqrt{15}).$$

1237. 设 $\sin u=x$, $\sin v=2x$, $\sin w=3x$, 求使 $u+v=w$ 的 x 的值. 这里 u、v、w 都在 $-90°$ 和 $90°$ 之间.

解 从条件 $u+v=w$ 得

$$\sin(u+v)=\sin w.$$

$\therefore$ $\sin u\cos v+\cos u\sin v=\sin w.$ ①

又 $\sin u=x$, $\sin v=2x$, $\sin w=3x$, ②

其中 u、v 是 $-90°$ 到 $90°$ 之间的角，所以

$\cos u=\sqrt{1-\sin^2 u}=\sqrt{1-x^2},$ ③

$\cos v=\sqrt{1-\sin^2 v}=\sqrt{1-4x^2}.$ ④

将②、③、④代入①，得

$$x\sqrt{1-4x^2}+\sqrt{1-x^2}\cdot 2x=3x,$$

$$x(\sqrt{1-4x^2}+2\sqrt{1-x^2}-3)=0.$$

因此 $x=0$ 或 $\sqrt{1-4x^2}+2\sqrt{1-x^2}-3=0$.

从第二个式子得

$$\sqrt{1-4x^2}=3-2\sqrt{1-x^2}.$$

两边平方，得

$$1-4x^2=9-12\sqrt{1-x^2}+4(1-x^2).$$

$$\therefore\ \sqrt{1-x^2}=1,\quad\therefore\ x=0.$$

因此，所要求的 x 的值是 0.

1238. 若 $\theta=36°$, 证明 $\sin 2\theta=\sin 3\theta$, 并以此求出 $\cos 36°$ 的值.

解 当 $\theta=36°$ 时，$5\theta=180°$. 因此

$$2\theta=180°-3\theta.$$

$$\therefore\ \sin 2\theta=\sin(180°-3\theta)=\sin 3\theta.$$

再用2倍角和3倍角的公式将上式变形，得

$$2\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta.$$

因为 $\sin\theta\neq0$，所以用 $\sin\theta$ 除两边得

$$4\sin^2\theta+2\cos\theta-3=0,$$

$$4(1-\cos^2\theta)+2\cos\theta-3=0,$$

$$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0.$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

$$\therefore\quad \cos36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

1239. 若 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$，求 $\frac{\sin\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos2\alpha}$ 的值。

解　从2倍角的公式，得

$$\sin\alpha+\sin2\alpha=\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\sin\alpha(1+2\cos\alpha),$$

$$1+\cos\alpha+\cos2\alpha=1+\cos\alpha+(2\cos^2\alpha-1)=\cos\alpha(1+2\cos\alpha).$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{\sqrt{1-\frac{9}{10}}}=3.$$

1240. 若 $\alpha=\frac{\pi}{12}$，求下式的值。

$$\frac{\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-4}+2}{\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2+4}}.$$

解　将根号内的式子变形，得

$$原式=\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-2}+2}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2}+2}{\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2}}.$$

当 $\alpha=\frac{\pi}{12}$ 时

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha>0,\ \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha>0,$$

所以　$$原式=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha+2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$=\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+2}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$

$$=\cos2\alpha+\sin2\alpha$$

$$=\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

1241. 证明 $\frac{\operatorname{ctg}^2A+1}{\sec2A}=\operatorname{ctg}^2A-1$。

解　$$\frac{\operatorname{ctg}^2A+1}{\operatorname{ctg}^2A-1}=\frac{\csc^2A}{\frac{\cos^2A}{\sin^2A}-1}$$

$$=\frac{\csc^2A}{\frac{\cos^2A-\sin^2A}{\sin^2A}}=\frac{\sin^2A\csc^2A}{\cos^2A-\sin^2A}$$

$$=\frac{1}{\cos^2A-\sin^2A}=\frac{1}{\cos2A}=\sec2A.$$

$$\therefore\quad \frac{\operatorname{ctg}^2A+1}{\sec2A}=\operatorname{ctg}^2A-1.$$

1242. 设方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个根是 $\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{tg}\beta$，试用 a，b 表示 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$。

解　$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-a$，$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=b$。

$$\therefore\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$=\frac{-a}{1-b}=\frac{a}{b-1}.$$

1243. 若方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 $\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}\beta$，求下式的值。

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta).$$

解　由根和系数的关系，得

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-p,\quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=q.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$=\frac{-p}{1-q}=\frac{p}{q-1},$$

$$\cos^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{1+\left(\frac{p}{q-1}\right)^2}$$

$$=\frac{(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}.$$

$$\therefore\quad 原式=\cos^2(\alpha+\beta)\times\left[\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}+p\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}+q\right]$$

$$=\frac{(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}\left[\frac{p^2}{(q-1)^2}+\frac{p^2}{q-1}+q\right]$$

$$=\frac{p^2+p^2(q-1)+q(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}$$

$$=\frac{q[p^2+(q-1)^2]}{p^2+(q-1)^2}=q.$$

1244. 设

$s_1=\operatorname{tg}\theta_1+\operatorname{tg}\theta_2+\operatorname{tg}\theta_3$,

$s_2=\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_2+\operatorname{tg}\theta_2\operatorname{tg}\theta_3+\operatorname{tg}\theta_3\operatorname{tg}\theta_1$,

$s_3=\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_2\operatorname{tg}\theta_3$,

用 s_1、s_2、s_3 填下面的空白,并给出证明。

$$\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\ \boxed{}.$$

$$\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\ \boxed{}.$$

解 $\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3+\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3+\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3-\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3$

$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3(\operatorname{tg}\theta_1+\operatorname{tg}\theta_2+\operatorname{tg}\theta_3-\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_2\operatorname{tg}\theta_3)$

$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3(s_1-s_3)$.

同样 $\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3-\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3-\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$

$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3(1-\operatorname{tg}\theta_2\operatorname{tg}\theta_3-\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_3-\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_2)$

$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3(1-s_2)$.

1245. 若 $\sin\alpha+\sin\beta=1$, $\cos\alpha+\cos\beta=0$, 求下列两式的值。

(1) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta$;

(2) $\sin^4\alpha+\cos^4\beta$.

解 从所给的关系式得

$$\sin\beta=1-\sin\alpha, \qquad ①$$
$$\cos\beta=-\cos\alpha.$$

将上面两式的两边平方,然后相加,得

$$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1-2\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha,$$
$$1=1-2\sin\alpha+1.$$
$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{1}{2}. \qquad ②$$

从①得 $\sin\beta=\frac{1}{2}$. ③

(1) 将原式变形,由②、③得

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta$

$=(1-2\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\beta)$

$=1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=1$.

(2) 同样 $\sin^4\alpha+\cos^4\beta$

$=\sin^4\alpha+(1-\sin^2\beta)^2$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5}{8}$.

1246. 求满足

$$2\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1+\sin\theta}+\sqrt{1-\sin\theta}$$

的 θ 的范围。

解 $\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{1+\sin\theta}$,

$\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{1-\sin\theta}$.

将两边分别相加,要使

$$2\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1+\sin\theta}+\sqrt{1-\sin\theta}$$

成立的条件是

$$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\geqq 0,\ \sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\geqq 0$$

同时成立。

从 $\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\geqq 0$, 得

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\geqq 0.$$

$$\therefore\quad 2n\pi\leqq\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\leqq(2n+1)\pi.$$

$$\therefore\quad 4n\pi-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 4n\pi+\frac{3\pi}{2}. \qquad ①$$

同样,从 $\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\geqq 0$, 得

$$4n\pi+\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 4n\pi+\frac{5\pi}{2}. \qquad ②$$

因此,从①、②得

$$4n\pi+\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 4n\pi+\frac{3\pi}{2}.$$

1247. 若 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\operatorname{tg}\theta+c-1}{\operatorname{tg}\theta+c+1}\ (c\geqq 1)$, 求 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ 的值。

解 设 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=x$, 从原式得

$$x=\frac{\frac{2x}{1-x^2}+c-1}{\frac{2x}{1-x^2}+c+1}.$$

解上面关于 x 的方程:

$$x=\frac{2x+(c-1)(1-x^2)}{2x+(c+1)(1-x^2)},$$

$$2x^2+x(c+1)(1-x^2)=2x+(c-1)(1-x^2),$$

$$(c+1)x^3-(c+1)x^2-(c-1)x+c-1=0,$$

$$(c+1)x^2(x-1)-(c-1)(x-1)=0,$$
$$(x-1)[(c+1)x^2-(c-1)]=0,$$
$$\therefore\quad x=1 \text{ 或 } x=\pm\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}.$$

$x=1$不适合原式，所以
$$x=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}.$$

1248. 若α、β是不相同的锐角，
$$\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin(x+\beta)}=\sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}},$$
求$\sqrt[3]{\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x}$的值。

解　将根号内的式子变形，得
$$\begin{aligned}&\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x\\
&=(3\sin x-4\sin^3 x)\sin^3 x\\
&\quad+(4\cos^3 x-3\cos x)\cos^3 x\\
&=3(\sin^4 x-\cos^4 x)-4(\sin^6 x-\cos^6 x)\\
&=3(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)\\
&\quad-4(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^4 x\\
&\quad+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)\\
&=(\sin^2 x-\cos^2 x)\{3-4[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2\\
&\quad+\sin^2 x\cos^2 x]\}\\
&=(\cos^2 x-\sin^2 x)(1-4\sin^2 x\cos^2 x)\\
&=\cos 2x(1-\sin^2 2x)=\cos^3 2x.\end{aligned}$$

另一方面，从条件得
$$\frac{\sin^2(x+\alpha)}{\sin^2(x+\beta)}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta},$$
$$\frac{\frac{1}{2}[1-\cos 2(x+\alpha)]}{\frac{1}{2}[1-\cos 2(x+\beta)]}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta},$$
$$\sin 2\beta-(\cos 2x\cos 2\alpha-\sin 2x\sin 2\alpha)\sin 2\beta$$
$$=\sin 2\alpha-(\cos 2x\cos 2\beta-\sin 2x\sin 2\beta)\sin 2\alpha.$$
$$\therefore\quad \sin 2\alpha-\sin 2\beta-\cos 2x\times(\sin 2\alpha\cos 2\beta-\cos 2\alpha\sin 2\beta)=0.$$
$$\therefore\quad \cos 2x\sin(2\alpha-2\beta)=\sin 2\alpha-\sin 2\beta.$$
$$\therefore\quad \cos 2x=\frac{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}{\sin 2(\alpha-\beta)}=\frac{2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

从而　$\sqrt[3]{\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x}$
$$=\sqrt[3]{\cos^3 2x}=\cos 2x=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

1249. 若$\operatorname{tg}\theta=(2+\sqrt{3})\operatorname{tg}\frac{\theta}{3}$，求$\operatorname{tg}\theta$的值。

解　设$\operatorname{tg}\frac{\theta}{3}=x$，利用3倍角的公式将条件变形，得
$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=(2+\sqrt{3})x.$$
解上面这个方程，得
$$x(3-x^2)-x(2+\sqrt{3})(1-3x^2)=0,$$
$$x[3-x^2-(2+\sqrt{3})+(6+3\sqrt{3})x^2]=0,$$
$$x[(5+3\sqrt{3})x^2-(\sqrt{3}-1)]=0.$$
因此，从第一因式得
$$x=0,\quad \therefore\quad \operatorname{tg}\theta=0.$$
从第二因式得
$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{5+3\sqrt{3}}}=\pm\sqrt{\frac{8\sqrt{3}-14}{-2}}$$
$$=\pm\sqrt{7-2\sqrt{12}}=\pm(2-\sqrt{3}).$$
因此，从所给的条件得
$$\operatorname{tg}\theta=(2+\sqrt{3})x=\pm(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=\pm 1.$$

1250. 将$\sqrt{3}\cos A-\sin A$变形成单项式。

解　原式$=\operatorname{tg}60^\circ\cos A-\sin A$
$$=\frac{1}{\cos 60^\circ}(\sin 60^\circ\cos A-\cos 60^\circ\sin A)$$
$$=\frac{1}{\cos 60^\circ}\sin(60^\circ-A)$$
$$=2\sin(60^\circ-A).$$

1251. 用α、β、γ的三角函数表示$\alpha+\beta+\gamma$的正弦和余弦。

解　设$\alpha+\beta=x$，则
$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(x+\gamma)\\
&=\sin x\cos\gamma+\cos x\sin\gamma\\
&=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma\\
&=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\cos\gamma\\
&\quad+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma\\
&=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\\
&\quad+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.\end{aligned}$$
用同样的方法，得
$$\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta+\gamma)\\
&=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\\
&\quad-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.\end{aligned}$$

1252. 若 $A+B+C=90°$，证明 $\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=1$。

解 左边

$$=\frac{\sin B}{\cos B}\cdot\frac{\sin C}{\cos C}+\frac{\sin C}{\cos C}\cdot\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}$$

$$=(\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin C\sin A+\cos C\sin A\sin B)\div\cos A\cos B\cos C$$

$$=\frac{\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)}{\cos A\cos B\cos C}.$$

由于 $A+B+C=90°$，从而 $\cos(A+B+C)=0$，所以

$$\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=1.$$

1253. 在三角形 ABC 中，证明

$$(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)(\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A)\times(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B)=\csc A\csc B\csc C.$$

解 $\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos C}{\sin C}$

$$=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}.$$

同样 $\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A=\dfrac{\sin B}{\sin C\sin A}$，

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}.$$

因此，原式的左边 $=\dfrac{1}{\sin A\sin B\sin C}$

$$=\csc A\csc B\csc C.$$

1254. 若 $\cos(\varphi-\alpha)$、$\cos\varphi$、$\cos(\varphi+\alpha)$ 成调和数列，证明 $\cos\varphi=\pm\sqrt{2}\cos\dfrac{1}{2}\alpha$。

解 从条件得

$$\frac{2}{\cos\varphi}=\frac{1}{\cos(\varphi-\alpha)}+\frac{1}{\cos(\varphi+\alpha)}$$

$$=\frac{\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi-\alpha)}{\cos(\varphi-\alpha)\cos(\varphi+\alpha)}.$$

因此 $\dfrac{2}{\cos\varphi}=\dfrac{2\cos\varphi\cos\alpha}{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha}$，

$$\cos^2\varphi=\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=1+\cos\alpha$$

$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

从而 $\cos\varphi=\pm\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$。

1255. 若 $\alpha+\beta=\omega$，证明

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega=\sin^2\omega.$$

解 左边 $=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta)$

$$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

$$=[\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)][\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)]+\cos^2\beta-\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)$$

$$=4\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}+\frac{1+\cos2\beta}{2}-\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)$$

$$=\sin(2\alpha+\beta)\sin\beta+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\alpha$$

$$=\frac{1}{2}[\cos2\alpha-\cos(2\alpha+2\beta)]+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\alpha=\frac{1}{2}[1-\cos(2\alpha+2\beta)]$$

$$=\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\omega.$$

1256. 证明 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$

$$=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

解 $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

用 $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 除上式的两边，得

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

1257. 证明

$$\cos20°\cos40°\cos60°\cos80°=\frac{1}{16}.$$

解 $\cos20°\cos40°\cos80°=\dfrac{1}{4}\cos60°$。

因此 $\cos20°\cos40°\cos60°\cos80°$

$$=\frac{1}{4}\cos^2 60°=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

1258. 证明 $4(\cos^3 10°+\sin^3 20°)=3(\cos10°+\sin20°)$。

解 将原式移项，变成

$$4\cos^3 10°-3\cos10°=3\sin20°-4\sin^3 20°.$$

因为 $4\cos^3 10°-3\cos10°=\cos30°$，

(3 倍角的公式)

$$3\sin20°-4\sin^3 20°=\sin60°,$$

(3 倍角的公式)

而　　$\cos 30° = \sin 60°$，

所以上面的等式是成立的。

1259. 不查表，求 15° 和 105° 的三角函数的值。

解　$15° = 45° - 30°$，$105° = 60° + 45°$。

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$$
$$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°)$$
$$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°)$$
$$= \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1 + \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\sin 105° = \sin(60° + 45°)$$
$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos 105° = \cos(60° + 45°)$$
$$= \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45°$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\operatorname{tg} 105° = \frac{\sin 105°}{\cos 105°} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$
$$= -(2+\sqrt{3}).$$

注　因为 $105° = 90° + 15°$，所以 105° 的三角函数值也可以用 15° 的三角函数值求出来。

1260. 在三角形 ABC 中，证明 $a\sin^2 C = c(\cos C \cos A + \cos B)$。

解　由正弦定理得

$$a \sin C = c \sin A.$$

在它的两边同乘以 $\sin C$，得

$$a \sin^2 C = c \sin A \sin C$$
$$= c(\sin A \sin C + \cos A \cos C - \cos A \cos C)$$
$$= c[\cos C \cos A - \cos(A + C)]$$
$$= c(\cos C \cos A + \cos B).$$

1261. 若 $\sec 2\theta = 2\sec\theta\csc\theta$，证明
$$\csc 2\theta = \csc^2\theta - \sec^2\theta.$$

解　从假定得

$$\frac{1}{\cos 2\theta} = \frac{2}{\cos\theta\sin\theta},$$

所以
$$1 = \frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta\sin\theta}.$$

上式两边同除以 $\sin 2\theta$，得

$$\frac{1}{\sin 2\theta} = \frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta \cos\theta \sin\theta}$$
$$= \frac{\cos 2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

因此
$$\csc 2\theta = \csc^2\theta - \sec^2\theta.$$

1262. 将下面各式化成和或差的形式。

(1) $2\sin 3\theta\cos 2\theta$；　(2) $2\cos 4\theta\cos\theta$；

(3) $\sin\theta\cos 4\theta$；　(4) $\sin 5\theta\sin 3\theta$。

解　(1) 原式 $= \sin(3\theta + 2\theta) + \sin(3\theta - 2\theta) = \sin 5\theta + \sin\theta$。

(2) 原式 $= \cos(4\theta + \theta) + \cos(4\theta - \theta) = \cos 5\theta + \cos 3\theta$。

(3) 原式 $= \frac{1}{2}[\sin(\theta + 4\theta) - \sin(4\theta - \theta)]$
$= \frac{1}{2}(\sin 5\theta - \sin 3\theta)$。

(4) 原式 $= -\frac{1}{2}[\cos(5\theta + 3\theta) - \cos(5\theta - 3\theta)] = \frac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 8\theta)$。

1263. 将下面各式化成积的形式。

(1) $\sin 3\theta + \sin\theta$；　(2) $\sin 5\theta - \sin 3\theta$；

(3) $\cos 7\theta + \cos 3\theta$；(4) $\cos 9\theta - \cos 5\theta$。

解　(1) 原式 $= 2\sin\frac{3\theta+\theta}{2}\cos\frac{3\theta-\theta}{2}$
$= 2\sin 2\theta\cos\theta$。

(2) 原式 $= 2\cos\frac{8\theta}{2}\sin\frac{2\theta}{2} = 2\sin\theta\cos 4\theta$。

(3) 原式 $= 2\cos\frac{10\theta}{2}\cos\frac{4\theta}{2}$
$= 2\cos 5\theta\cos 2\theta$。

(4) 原式$=-2\sin\dfrac{14\theta}{2}\sin\dfrac{4\theta}{2}$

$=-2\sin 7\theta\sin 2\theta$。

1264. 证明：$2\cos\theta$

$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2\cos 2^n\theta}}}}$。

这里根号的个数是 n。

解　$2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$。

因此　$2\cos\theta=\sqrt{2+2\cos 2\theta}$

$=\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 2^2\theta}}$

$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 2^3\theta}}}=\cdots\cdots$

$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2\cos 2^n\theta}}}}$。

1265. 证明

$\operatorname{ctg}(A+15^\circ)-\operatorname{tg}(A-15^\circ)=\dfrac{4\cos 2A}{1+2\sin 2A}$。

解　原式的左边

$=\dfrac{\cos(A+15^\circ)}{\sin(A+15^\circ)}-\dfrac{\sin(A-15^\circ)}{\cos(A-15^\circ)}$

$=[\cos(A+15^\circ)\cos(A-15^\circ)$

$-\sin(A+15^\circ)\sin(A-15^\circ)]$

$\div[\sin(A+15^\circ)\cos(A-15^\circ)]$

$=\dfrac{\cos 2A}{\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 30^\circ)}=\dfrac{4\cos 2A}{1+2\sin 2A}$。

1266. 证明

$\dfrac{\sin A+\sin 5A}{\sin 4A+\sin 2A}=2\cos A-\sec A$。

解　原式的左边

$=\dfrac{2\sin 3A\cos 2A}{2\sin 3A\cos A}=\dfrac{\cos 2A}{\cos A}$

$=\dfrac{2\cos^2 A-1}{\cos A}=2\cos A-\dfrac{1}{\cos A}$

$=2\cos A-\sec A$。

1267. 若 x 的函数 y 由

$$2y=\sin x-\sqrt{2+\sin x-\sin^2 x}$$

给出，求 y 的最小值和相应的 $\sin x$ 的值。

解　在 $2y=\sin x-\sqrt{2+\sin x-\sin^2 x}$ 中，将 $\sin x$ 移到左边，然后两边平方，得

$4y^2-4y\sin x+\sin^2 x=2+\sin x-\sin^2 x$，

$2\sin^2 x-(4y+1)\sin x+4y^2-2=0$。　①

因为 $\sin x$ 是实数，所以

$(4y+1)^2-4\times 2\times(4y^2-2)\geqq 0$。

$\therefore$　$16y^2-8y-17\leqq 0$。

$\therefore$　$\dfrac{1-3\sqrt{2}}{4}\leqq y\leqq\dfrac{1+3\sqrt{2}}{4}$。　②

当 $y=\dfrac{1-3\sqrt{2}}{4}$ 时，关于 $\sin x$ 的二次方程①的判别式等于 0，所以

$\sin x=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4y+1}{2}=\dfrac{2-3\sqrt{2}}{4}$

$=\dfrac{2-3\times 1.414\cdots}{4}=\dfrac{-2.24\cdots}{4}$

$=-0.56\cdots$。

满足 $\sin x=-0.56\cdots$ 的 x 是存在的，因此从②式可知，当 $\sin x=\dfrac{2-3\sqrt{2}}{4}$ 时，y 有最小值 $\dfrac{1-3\sqrt{2}}{4}$。

$$\begin{cases} y\text{ 的最小值是 }\dfrac{1-3\sqrt{2}}{4}, \\ \sin x\text{ 的值是 }\dfrac{2-3\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

1268. 求使函数 $y=2\cos x-3\sin x$ 的值达到最大的 x 的正切值。

解　将所给的函数变形，得

$y=2\cos x-3\sin x$

$=\sqrt{13}\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\cos x-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\sin x\right)$。

设 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，则

$y=\sqrt{13}(\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha)$

$=\sqrt{13}\cos(x+\alpha)$。

因此，当 y 的值为最大时

$x+\alpha=2n\pi$，　$\therefore$　$x=2n\pi-\alpha$。

$\therefore$　$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}(2n\pi-\alpha)$

$=-\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{3}{2}$。

1269. 若 $0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$，求使 $\cos^2\theta+\sqrt{3}\times\sin\theta$ 达到最大和最小的 θ 值。

解　$\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta$

$=1-\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta$

$=-\left(\sin\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$。

因而，这个式子当 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时达到最大。此时 $\theta=60^\circ$。

又，因为 $0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$，所以 $0\leqq\sin\theta\leqq 1$。

因而上式达到最小的时候也就是 $\sin\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的差达到最大的时候。因此 $\sin\theta=0,\theta=0°$。

$$\begin{cases}\text{当 } \theta=60° \text{ 时有最大值,}\\ \text{当 } \theta=0° \text{ 时有最小值.}\end{cases}$$

1270. 把下列各式化成 $r\sin(x+\alpha)$ $(r>0)$ 的形式。

(1) $3\sin x+4\cos x$;　(2) $\sin x-\cos x$;

(3) $\cos x+\sqrt{3}\sin x$;

(4) $\sqrt{3}\sin x-\cos x$.

解　(1) 原式 $=5\left(\dfrac{3}{5}\sin x+\dfrac{4}{5}\cos x\right)$

$=5\sin(x+\alpha)$。

这里　$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$。

(2) 原式 $=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(3) 原式 $=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x\right)$

$=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

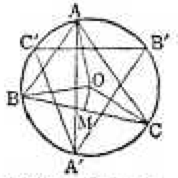
(4) 原式 $=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x\right)$

$=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

1271. 在半径是 1 的圆中有一个内接三角形 ABC。设弧 $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ 的中点分别是 A', B', C', 作 $\triangle A'B'C'$, 假定 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的周长分别是 l, l'。

(1) 用 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的三角函数表示 l 和 l'。

(2) 若 $\angle C=60°$, 比较 l 和 l' 的大小。



解　(1) 设圆心是 O, BC 的中点是 M。

于是

$BC=2BM=2OB\sin\angle BOM=2\sin A$.

同样　$CA=2\sin B$, $AB=2\sin C$.

所以　$l=2(\sin A+\sin B+\sin C)$.

又　$\angle A'=\angle AA'B'+\angle AA'C'$

$=\dfrac{1}{2}\angle B+\dfrac{1}{2}\angle C$,

同样　$\angle B'=\dfrac{1}{2}(\angle C+\angle A)$,

$\angle C'=\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle B)$.

所以　$l'=2\left(\sin\dfrac{A+B}{2}+\sin\dfrac{B+C}{2}+\sin\dfrac{C+A}{2}\right)$.

(2) $l=2\left(\sin A+\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{A-B}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$l'=2\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(90°-\dfrac{A}{2}\right)+\sin\left(90°-\dfrac{B}{2}\right)\right]$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}\right)$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\cos\dfrac{A+B}{4}\cos\dfrac{A-B}{4}\right)$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\cos\dfrac{A-B}{4}\right)$.

因为　$\cos\dfrac{A-B}{2}\leq\cos\dfrac{A-B}{4}$,

所以　$l\leq l'$.

1272. 将 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ 化成 $r\sin(\theta+\alpha)$ 的形式. 这里 $r>0$。

解　设 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$, 则

$r\cos\alpha=1$,　$r\sin\alpha=\sqrt{3}$.

因此　$r^2=1+(\sqrt{3})^2=4$,　$\therefore$　$r=2$.

从 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 得 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$. 因此

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right).$$

1273. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, 证明 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

解　因为　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$, 所以

原式的左边

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma)$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1)$

$=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

1274. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $\sin\alpha=\cos\beta\cos\gamma$, 证明 $\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=1$.

解　因为 $\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma)$, 所以

$$\sin(\beta+\gamma)=\cos\beta\cos\gamma$$

或　$\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma=\cos\beta\cos\gamma.$

两边同时除以 $\cos\beta\cos\gamma$, 得

$$\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=1.$$

1275. 若 $A+B+C=180°$, 证明 $\cos(B+C-A)+\cos(C+A-B)-\cos(A+B-C)+1=4\sin A\sin B\cos C$.

解　原式的左边

$=2\cos C\cos(A-B)+\cos 2C+1$

$=2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C$

$=2\cos C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$=2\cos C\times 2\sin A\sin B$

$=4\sin A\sin B\cos C.$

1276. 设点 O、A、B 的坐标分别是 $(0, 0)$, $(2, a)$, $(2, b)$, $\angle AOB=\theta$ (这里 $a>b$).

(1) 用 a, b 表示 $\operatorname{tg}\theta$.

(2) 求使 $\theta=45°$ 的 a、b 的整数值.

解　(1) 设 OA、OB 和 x 轴所成的角分别是 α、β, 则

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

因为 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{2}$, 所以

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{2(a-b)}{4+ab}.$$

(2) $\theta=45°$ 时, $\operatorname{tg}\theta=1$, 因此

$$2a-2b=4+ab.$$

$$\therefore\quad (a+2)(2-b)=8.$$

当 a、b 为整数时, 从上式只能得到下列四种情况:

$$\begin{cases}a+2=1,\\2-b=8;\end{cases}\quad\begin{cases}a+2=2,\\2-b=4;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+2=4,\\2-b=2;\end{cases}\quad\begin{cases}a+2=8,\\2-b=1,\end{cases}$$

是符合条件 $a>b$ 的, 因此得到

$$\begin{cases}a=-1,\\b=-6;\end{cases}\begin{cases}a=0,\\b=-2;\end{cases}\begin{cases}a=2,\\b=0;\end{cases}\begin{cases}a=6,\\b=1.\end{cases}$$

1277. 设 $f(\alpha)=A\sin\alpha+B\cos\alpha$, 对任意的 α, 求使 $\frac{1}{f(\alpha)}=f(-\alpha)$ 的 A、B 的值。

解　$\frac{1}{f(\alpha)}=f(-\alpha)$, 也就是

$$f(\alpha)f(-\alpha)=1,$$

即　$(A\sin\alpha+B\cos\alpha)(-A\sin\alpha+B\cos\alpha)$

$=B^2\cos^2\alpha-A^2\sin^2\alpha=(B^2+A^2)\cos^2\alpha-A^2=1.$

对于任意的 α 要使这个式子成立, 必须有

$$B^2+A^2=0,\quad -A^2=1.$$

$$\therefore\quad A=\pm\sqrt{-1},\quad B=\pm 1.$$

A、B 不限于取同样的符号.

1278. 在 θ 上加上某个角 x, 求使 $\sin 2\theta=\sin(2\theta+2x)$ 成立的 x 的最小正角. 设 $0<\theta<45°$.

解　一般地, 因为

$$\sin 2\theta=\sin(180°-2\theta),$$

所以在 2θ 上加上某个角后, 要使它变成 $180°-2\theta$。于是由

$$2\theta+2x=180°-2\theta,$$

得　$2x=180°-4\theta.$

即当 $0<\theta<45°$ 时, 在 2θ 上加上正角 $180°-4\theta$ 后, 它的正弦值不变. 因此符合题意的 x 的最小正角是 $\frac{180°-4\theta}{2}$, 即 $90°-2\theta$.

1279. 当 $\cos 2\theta=\frac{3}{5}$ 时, $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 的值等于多少?

解　$\sin^4\theta+\cos^4\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta.$

另一方面, 因为 $\cos 2\theta=\frac{3}{5}$, 所以

$$\sin^2 2\theta=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}.$$

因此　$\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-\frac{1}{2}\times\frac{16}{25}$

$=1-\frac{8}{25}=\frac{17}{25}.$

1280. 证明 $\sec A\pm\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}\left(45°\pm\frac{A}{2}\right)$.

解　$\sec A\pm\operatorname{tg}A$

$=\frac{1}{\cos A}\pm\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1\pm\sin A}{\cos A}$

$$=\frac{\left(\cos\frac{A}{2}\pm\sin\frac{A}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}\pm\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\mp\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\operatorname{tg}\left(45^\circ\pm\frac{A}{2}\right).$$

1281. 若 $\operatorname{tg}A=\frac{b}{a}$,证明

$$a\cos 2A+b\sin 2A=a.$$

解　$\operatorname{tg}A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{b}{a}.$

因此　$b\cos A=a\sin A.$

即　$2b\sin A\cos A=2a\sin^2 A,$

$b\sin 2A=a(1-\cos 2A).$

因此　$a\cos 2A+b\sin 2A=a.$

1282. 已知 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的值，求 $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$

解　$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}.$

因此　$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\alpha\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}.$

1283. 证明 $\operatorname{tg}112.5^\circ=\frac{1}{1-\sqrt{2}}.$

解　$\operatorname{tg}225^\circ=\dfrac{2\operatorname{tg}112.5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 112.5^\circ}.$

又　$\operatorname{tg}225^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ+45^\circ)=\operatorname{tg}45^\circ=1,$
所以若设 $\operatorname{tg}112.5^\circ=a$, 则

$$1=\frac{2a}{1-a^2}.$$

因此　$1-a^2=2a,\ a^2+2a-1=0.$

从而求得　$a=-1\pm\sqrt{2}.$

但是，a 是第二象限的正切，它不会是正的，所以取负的根，即

$$\operatorname{tg}112.5^\circ=a=-1-\sqrt{2}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}.$$

1284. 证明

$$\sin 63^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{4\sqrt{2}}.$$

解　$\sin 63^\circ=\cos 27^\circ$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{4\sqrt{2}}.$$

1285. 证明 $\cos 60^\circ+2\cos 70^\circ+\cos 80^\circ=4\cos^2 5^\circ\cos 70^\circ.$

解　原式的左边

$$=(\cos 60^\circ+\cos 80^\circ)+2\cos 70^\circ$$
$$=2\cos 70^\circ\cos 10^\circ+2\cos 70^\circ$$
$$=2\cos 70^\circ(\cos 10^\circ+1)$$
$$=2\cos 70^\circ\times 2\cos^2 5^\circ$$
$$=4\cos^2 5^\circ\cos 70^\circ.$$

1286. 证明 $\cos^2 36^\circ+\sin^2 18^\circ=\frac{3}{4}.$

解　$\cos 36^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1),$

$\sin 18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$

因此　$\cos^2 36^\circ+\sin^2 18^\circ$

$$=\frac{1}{16}(\sqrt{5}+1)^2+\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)^2$$

$$=\frac{3}{4}.$$

1287. 证明下列各式:

(1) $\sin^2 24^\circ-\sin^2 6^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{8};$

(2) $\sin^2 72^\circ-\sin^2 60^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{8};$

(3) $\cos^2 48^\circ-\sin^2 12^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{8}.$

解　(1) $\sin^2 24^\circ-\sin^2 6^\circ$

$$=\sin(24^\circ+6^\circ)\times\sin(24^\circ-6^\circ)$$
$$=\sin 30^\circ\sin 18^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{8}.$$

(2)、(3) 也可用同样的方法进行证明。

1288. 证明

$$\cos 24^\circ\cos 48^\circ\cos 72^\circ\cos 96^\circ\cos 120^\circ\times\cos 144^\circ\cos 168^\circ=\left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

解　原式的左边

$$=(\cos 24^\circ\cos 96^\circ)(\cos 48^\circ\cos 168^\circ)\times(\cos 72^\circ\cos 144^\circ)\times\cos 120^\circ$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 72^\circ)$$

$$\times\frac{1}{2}(\cos 216^\circ+\cos 120^\circ)$$

$$\times\frac{1}{2}(\cos 216^\circ+\cos 72^\circ)\cos 120^\circ$$

$$=\frac{1}{8}(-\sin 30^\circ+\sin 18^\circ)$$
$$\times(-\cos 36^\circ-\sin 30^\circ)$$
$$\times(-\cos 36^\circ+\sin 18^\circ)(-\cos 60^\circ).$$

在上式的右边，将各三角函数用已经求得的值代入，化简后即得$\left(\frac{1}{2}\right)^7$。

1289. 证明
$$\cos^2 18^\circ \sin^2 36^\circ-\cos 36^\circ \sin 18^\circ=\frac{1}{16}.$$

解 原式的左边
$$=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\times\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$
$$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{5}{16}-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{16}.$$

1290. 证明 $4\sin 18^\circ\cos 36^\circ=1$.

解 $\sin 18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$,

$\cos 36^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$.

因此 $4\sin 18^\circ\cos 36^\circ$
$$=4\times\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\times\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)=1.$$

别解 设 $4\sin 18^\circ\cos 36^\circ$ 为 x，将 x 乘上 $\cos 18^\circ$，则
$$x\cos 18^\circ=4\sin 18^\circ\cos 18^\circ\cos 36^\circ$$
$$=2\sin 36^\circ\cos 36^\circ=\sin 72^\circ=\cos 18^\circ.$$
$\therefore\ x=1$.

1291. 证明 $\sin 18^\circ+\sin 30^\circ=\sin 54^\circ$.

解 $\sin 18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

因此 $\sin 18^\circ+\sin 30^\circ$
$$=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

又因为 $\sin 54^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$,

所以 $\sin 18^\circ+\sin 30^\circ=\sin 54^\circ$.

1292. 证明
$$\sin 3^\circ=[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)$$
$$-\sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{3}-1)]$$
$$\div 8\sqrt{2}.$$

解 $\sin 3^\circ=\sin(18^\circ-15^\circ)$
$$=\sin 18^\circ\cos 15^\circ-\cos 18^\circ\sin 15^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$
$$\times\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$
$$=[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)$$
$$-\sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{3}-1)]$$
$$\div 8\sqrt{2}$$

1293. 证明 $\sin(72^\circ+\alpha)-\sin(72^\circ-\alpha)$
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sin\alpha.$$

解 原式的左边
$$=2\sin\alpha\cos 72^\circ=2\sin\alpha\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sin\alpha.$$

1294. 证明 $\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}$
$$=8\sin\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\pi-\theta}{4}\sin^2\frac{\pi+\theta}{4}.$$

解 $\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=8\sin\frac{\theta}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)$$
$$=8\sin\frac{\theta}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4}\right).$$

1295. 证明 $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8}$.

解 设 $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=p$，将它乘上 $2^3\times\sin 20^\circ$，则
$$2^3\sin 20^\circ p=2^3\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$$
$$=2^2\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$$
$$=2\sin 80^\circ\cos 80^\circ=\sin 160^\circ$$
$$=\sin(180^\circ-160^\circ)=\sin 20^\circ.$$

因此 $2^3p=1$, $p=\frac{1}{8}$.

1296. (1) 设三角形的三个角是 α、β、γ，如果 $x^2\sin\alpha+2x\sin\beta+\sin\gamma=0$ 具有重根，那么这个三角形的三边之间有怎样的关系？

(2) 在锐角三角形 ABC 中，设 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$，试将
$$\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}$$
化成不含三角函数的形式。

解　(1) 设三个角 α、β、γ 所对的边的长度分别是 a、b、c. 因为所给的方程具有重根，所以

$$判别式=\sin^2\beta-\sin\alpha\sin\gamma=0.$$

因此由正弦定理得

$$b^2-ac=0,\quad \therefore\quad b^2=ac.$$

(2) 由余弦定理得

$$\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{a-c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b-c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\cdot\frac{2b}{a^2+b^2-c^2}=\frac{b}{a}.$$

注　(2) 中所得的等式在三角形 ABC 是钝角三角形的情况下也成立.

1297. 在三角形 ABC 中，若

$$\begin{cases}\dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 B}=\dfrac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B},\\ \cos A+\cos C=\cos B\end{cases}$$

同时成立，那么这个三角形是怎样的三角形?

解　从第一个等式得

$$\sin^2 A\operatorname{tg} B=\sin^2 B\operatorname{tg} A.$$

因为 $\sin A\sin B\neq 0$, 所以用它除上式两边，得

$$\frac{\sin A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\cos A}.$$

$$\therefore\quad \sin A\cos A=\sin B\cos B,$$

$$\sin 2A=\sin 2B.$$

因此 $2A=2B$ 或 $2A+2B=180°$.

$$\therefore\quad A=B\text{ 或 }A+B=90°. \qquad ①$$

当 $A=B$ 时从第二个等式得

$$\cos C=0,\quad \therefore\quad C=90°.$$

当 $A+B=90°$ 时, $C=90°$, 从而由第二个等式得

$$\cos A=\cos B,\quad \therefore\quad A=B.$$

因此，这个三角形是 $\angle C=90°$ 的等腰直角三角形.

1298. 若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{17}{13}$, 求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值.

解　将所给等式的两边平方，得

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{289}{169}.$$

因此　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{289}{169}-1\right)=\dfrac{60}{169}.$

由此可知, $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 是下面的两次方程的根.

$$t^2-\frac{17}{13}t+\frac{60}{169}=0.$$

解这个方程，得

$$t_1=\frac{5}{13},\quad t_2=\frac{12}{13}.$$

因此　$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{5}{13},\\ \cos\theta=\dfrac{12}{13},\end{cases}\quad \begin{cases}\sin\theta=\dfrac{12}{13},\\ \cos\theta=\dfrac{5}{13}.\end{cases}$

1299. 若 $\alpha+\beta=\omega$, $\operatorname{tg}\alpha=m\operatorname{tg}\beta$, 证明

$$\sin\omega=\frac{(m+1)\sin(\alpha-\beta)}{m-1}.$$

解　$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{m}{1}.$

因此　$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{m+1}{m-1}.$

又　$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$

$$=\frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)},$$

因此　$\dfrac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{m+1}{m-1}.$

$$\therefore\quad \sin\omega=\frac{(m+1)\sin(\alpha-\beta)}{m-1}.$$

1300. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, 证明 $\sin\alpha\sin(\alpha+2\gamma)+\sin\beta\sin(\beta+2\alpha)+\sin\gamma\sin(\gamma+2\beta)=0$.

解　$\sin\alpha\sin(\alpha+2\gamma)$

$$=\sin(\pi-\alpha)\sin[\pi-(\alpha+2\gamma)]$$

$$=\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)$$

$$=\sin^2\beta-\sin^2\gamma.$$

同样　$\sin\beta\sin(\beta+2\alpha)=\sin^2\gamma-\sin^2\alpha,$

$\sin\gamma\sin(\gamma+2\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$

因此它们的和等于 0.

1301. 将 $a\cos A+b\sin A$ 化成单项式.

解　设 $\dfrac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$, 则

$$原式=a\cos A+a\operatorname{tg}\varphi\sin A$$

$$=a(\cos A+\operatorname{tg}\varphi\sin A)$$

$$=a\left(\cos A+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin A\right)$$

$$=\frac{a}{\cos\varphi}(\cos A\cos\varphi+\sin\varphi\sin A)$$

$$=\frac{a}{\cos\varphi}\cos(A-\varphi).$$

1302. 证明 $\dfrac{\cos x-\cos y}{1-\cos y}=\left(1-\dfrac{x^2}{y^2}\right)$
$$\times\left[1-\frac{x^2}{(2\pi-y)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(2\pi+y)^2}\right]$$
$$\times\left[1-\frac{x^2}{(4\pi-y)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(4\pi+y)^2}\right]\cdots.$$

解
$$\frac{\cos x-\cos y}{1-\cos y}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(y-x)\sin\frac{1}{2}(y+x)}{2\sin^2\frac{y}{2}},$$
$$\sin\frac{1}{2}(y-x)=\frac{1}{2}(y-x)\left[1-\frac{(y-x)^2}{4\pi^2}\right]\times\left[1-\frac{(y-x)^2}{4\times2^2\pi^2}\right]\cdots,$$
$$\sin\frac{1}{2}(y+x)=\frac{1}{2}(y+x)\left[1-\frac{(y+x)^2}{4\pi^2}\right]\times\left[1-\frac{(y+x)^2}{4\times2^2\pi^2}\right]\cdots,$$
$$\sin\frac{y}{2}=\frac{y}{2}\left(1-\frac{y^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{4\times2^2\pi^2}\right)\cdots.$$
用第三式除第一及第二式，将除得的两个结果相乘。
$$\frac{\frac{1}{2}(y-x)}{\frac{1}{2}y}=1-\frac{x}{y},$$
$$\frac{\frac{1}{2}(y+x)}{\frac{1}{2}y}=1+\frac{x}{y},$$
$$\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{x}{y}\right)=1-\frac{x^2}{y^2},$$
$$\frac{1-\frac{(y-x)^2}{4\pi^2}}{1-\frac{y^2}{4\pi^2}}=\left(1+\frac{x}{2\pi-y}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi+y}\right),$$
$$\frac{1-\frac{(y+x)^2}{4\pi^2}}{1-\frac{y^2}{4\pi^2}}=\left(1-\frac{x}{2\pi-y}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi+y}\right),$$
$$\left(1+\frac{x}{2\pi-y}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi+y}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi-y}\right)\times\left(1+\frac{x}{2\pi+y}\right)=\left[1-\frac{x^2}{(2\pi-y)^2}\right]\times\left[1-\frac{x^2}{(2\pi+y)^2}\right].$$
同样
$$\frac{1-\frac{(y-x)^2}{4\times2^2\pi^2}}{1-\frac{y^2}{4\times2^2\pi^2}}\times\frac{1-\frac{(y+x)^2}{4\times2^2\pi^2}}{1-\frac{y^2}{4\times2^2\pi^2}}=\left[1-\frac{x^2}{(4\pi-y)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(4\pi+y)^2}\right],$$
…………

所以原式成立。

1303. 证明
$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin y}=\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{x}{\pi-y}\right)\times\left(1-\frac{x}{\pi+y}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi+y}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi-y}\right)\cdots.$$

解
$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin y}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)}{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}.$$
由上题知道
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(x+y)}{\sin\frac{y}{2}}=\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi-y}\right)\times\left(1+\frac{x}{2\pi+y}\right)\left(1-\frac{x}{4\pi-y}\right)\times\left(1+\frac{x}{4\pi+y}\right)\cdots.$$
在上式中把 y 换成 $\pi-y$，得
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(x-y)}{\cos\frac{y}{2}}=\left(1+\frac{x}{\pi-y}\right)\left(1-\frac{x}{\pi+y}\right)\times\left(1+\frac{x}{3\pi-y}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi+y}\right)\cdots.$$
将这两个式子相乘，就得到所要证明的结果。

1304. 证明
$$\operatorname{ctg}\frac{y}{2}=\frac{2}{y}-\frac{2}{2\pi-y}+\frac{2}{2\pi+y}-\frac{2}{4\pi-y}+\cdots.$$

解 $$\frac{\sin\frac{1}{2}(x+y)}{\sin\frac{y}{2}}=\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi-y}\right)$$

$$\times\left(1+\frac{x}{2\pi+y}\right)\left(1-\frac{x}{4\pi-y}\right)$$
$$\times\left(1+\frac{x}{4\pi+y}\right)\cdots,$$

即 $\sin\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{y}{2}+\cos\frac{x}{2}=\left(1+\frac{x}{y}\right)$
$$\times\left(1-\frac{x}{2\pi-y}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi+y}\right)$$
$$\times\left(1-\frac{x}{4\pi-y}\right)\cdots.$$

将左边的$\sin\frac{x}{2}$和$\cos\frac{x}{2}$写成无穷乘积的形式,可见将它们展开后x的系数是$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{y}{2}$,右边$x$的系数是
$$\frac{1}{y}-\frac{1}{2\pi-y}+\frac{1}{2\pi+y}-\frac{1}{4\pi-y}+\frac{1}{4\pi+y}-\cdots$$
由于这两个系数相等，所以所要证明的式子成立。

1305. 证明
$$\frac{1}{\sin y}=\frac{1}{y}+\frac{1}{\pi-y}-\frac{1}{2\pi-y}-\frac{1}{\pi+y}+\frac{1}{2\pi+y}+\frac{1}{3\pi-y}-\frac{1}{4\pi-y}-\frac{1}{3\pi+y}+\cdots.$$

解 $\operatorname{tg}\frac{y}{2}+\operatorname{ctg}\frac{y}{2}=\frac{\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}}+\frac{\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}$
$$=\frac{1}{\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}=\frac{2}{\sin y}.$$

所以 $\frac{2}{\sin y}=\frac{2}{y}+\frac{2}{\pi-y}-\frac{2}{2\pi-y}-\frac{2}{\pi+y}$
$$+\frac{2}{2\pi+y}+\frac{2}{3\pi-y}-\frac{2}{4\pi-y}-\frac{2}{3\pi+y}+\cdots.$$

将上式的两边同时除以2，即得所要证明的结果。

1306. 证明
$$(1+\sec 2\theta)(1+\sec 4\theta)(1+\sec 8\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta)=\operatorname{tg}2^n\theta\operatorname{ctg}\theta.$$

解 $1+\sec 2^n\theta=\frac{\cos 2^n\theta+1}{\cos 2^n\theta}$
$$=\frac{2\cos^2(2^{n-1}\theta)}{\cos 2^n\theta}=\frac{\sin 2^n\theta}{\cos 2^n\theta}\cdot\frac{2\cos^2(2^{n-1}\theta)}{\sin 2^n\theta}$$
$$=\frac{\sin 2^n\theta}{\cos 2^n\theta}\cdot\frac{2\cos^2(2^{n-1}\theta)}{2\sin(2^{n-1}\theta)\cos(2^{n-1}\theta)}$$
$$=\frac{\operatorname{tg}2^n\theta}{\operatorname{tg}2^{n-1}\theta}.$$

因此 原式的左边
$$=\frac{\operatorname{tg}2\theta}{\operatorname{tg}\theta}\cdot\frac{\operatorname{tg}2^2\theta}{\operatorname{tg}2\theta}\cdot\frac{\operatorname{tg}2^3\theta}{\operatorname{tg}2^2\theta}\cdot\cdots\cdot\frac{\operatorname{tg}2^n\theta}{\operatorname{tg}2^{n-1}\theta}$$
$$=\frac{\operatorname{tg}2^n\theta}{\operatorname{tg}\theta}=\operatorname{tg}2^n\theta\operatorname{ctg}\theta.$$

1307. 证明
$$(2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)(2\cos 2^2-1)\cdots\times(2\cos 2^{n-1}\theta-1)=\frac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}.$$

解 $2\cos 2^{n-1}\theta-1=\frac{4\cos^2(2^{n-1}\theta)-1}{2\cos 2^{n-1}\theta+1}$
$$=\frac{2(\cos 2^n\theta+1)-1}{2\cos 2^{n-1}\theta+1}=\frac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos 2^{n-1}\theta+1}.$$

因此 原式的左边
$$=\frac{2\cos 2\theta+1}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{2\cos 2^2\theta+1}{2\cos 2\theta+1}\times\frac{2\cos 2^3\theta+1}{2\cos 2^2\theta+1}\cdot\cdots\cdot\frac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos 2^{n-1}\theta+1}$$
$$=\frac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}.$$

1308. 若 $\operatorname{tg}^2\theta-\sec^2\alpha=1$，证明 $\sec\theta+\operatorname{tg}^3\theta\csc\theta=(3+\operatorname{tg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}$.

解 因为 $\operatorname{tg}^2\theta-\sec^2\alpha=1$,

所以 $\sec^2\theta-1-(1+\operatorname{tg}^2\alpha)=1$

或 $\sec^2\theta=3+\operatorname{tg}^2\alpha$.

因此 $\sec\theta=(3+\operatorname{tg}^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$.

这时 $\sec\theta+\operatorname{tg}^3\theta\csc\theta$
$$=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta\sin\theta}$$
$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^3\theta}=\sec^3\theta.$$

因此,这个式子等于$(3+\operatorname{tg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}$.

1309. 若 $\frac{\sin(x+A)}{\sin(x+B)}=\sqrt{\frac{\sin 2A}{\sin 2B}}$，证明
$$\operatorname{tg}^2x=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B.$$

解 从假定的关系得
$$\left(\frac{\sin x\cos A+\cos x\sin A}{\sin x\cos B+\cos x\sin B}\right)^2=\frac{2\sin A\cos A}{2\sin B\cos B}.$$

将左边的分子、分母同除以$\cos^2 x$，再将两边的分子同时除以$\cos^2 A$，分母同时除以$\cos^2 B$，得

$$\left(\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}B}\right)^2=\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}.$$

将左边展开，然后去分母、化简，得

$$\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B.$$

1310. 一个四边形的四个角成等差数列，最大角和最小角的差是 90°，这四个角各是多少度?

解 设四个角的度数分别是 a，$a+d$，$a+2d$，$a+3d$。这时因为最大角的度数 $a+3d$ 和最小角的度数 a 之差是 90°，所以 $3d=90°$，从而 $d=30°$。又因为四个角的和是 360°，所以

$$a+a+d+a+2d+a+3d=360°,$$

即 $$4a+6d=360°.$$

将 $d=30°$ 代入上式，得

$$4a+180°=360°,$$

即 $$a=45°.$$

因此，所要求的四个角的度数分别是 45°、75°、105°、135°。

1311. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}+\frac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}C}+\frac{\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A}+\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}C}+\frac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A}+\frac{\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B}=\sec A\sec B\sec C-2.$$

解 $$\frac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A}+\frac{\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A}=\frac{1}{\operatorname{tg}A}\left(\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}\right)=\frac{\sin(B+C)}{\operatorname{tg}A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{\sin A}{\operatorname{tg}A\cos B\cos C}=\frac{\cos A}{\cos B\cos C}.$$

同理 $$\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}+\frac{\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B}=\frac{\cos B}{\cos A\cos C},$$

$$\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}C}+\frac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}C}=\frac{\cos C}{\cos A\cos B}.$$

因此 原式的左边

$$=\frac{\cos A}{\cos B\cos C}+\frac{\cos B}{\cos A\cos C}+\frac{\cos C}{\cos A\cos B}$$

$$=\frac{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{1-2\cos A\cos B\cos C}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\sec A\sec B\sec C-2.$$

1312. 若 $A+B+C=180°$，$2\sin B\sin C=2\cos^2\frac{A}{2}$，证明 $B=C$。

解 $$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A=1-\cos(B+C).$$

因此 $2\sin B\sin C=1-\cos(B+C)$，

$$2\sin B\sin C=1-\cos B\cos C+\sin B\sin C.$$

即 $$\cos(B-C)=1.$$

从而得 $B-C=0$，即 $B=C$。

1313. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)\times\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)=1+\csc\frac{\alpha}{2}\csc\frac{\beta}{2}\csc\frac{\gamma}{2}.$$

解 原式的左边

$$=\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\sec\frac{\alpha}{2}\sec\frac{\beta}{2}\sec\frac{\gamma}{2}\right)\times\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

因为 $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=1,$$

且 $$\sec\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\csc\frac{\alpha}{2},$$

所以 $$\text{左边}=1+\csc\frac{\alpha}{2}\csc\frac{\beta}{2}\csc\frac{\gamma}{2}.$$

1314. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\sin A-\sin B+\cos C-1=-4\sin\frac{C}{2}\times\sin\left(45°-\frac{A}{2}\right)\cos\left(45°-\frac{B}{2}\right).$$

解 原式的左边

$$=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}+\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)-1$$

$$=2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left(2\sin\frac{A-B-C}{4}\cos\frac{A-B+C}{4}\right)$$

$$=-4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B+C-A}{4}\cos\frac{A-B+C}{4}$$

$$=-4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A+B+C-2A}{4}$$
$$\times\cos\frac{A+B+C-2B}{4}$$
$$=-4\sin\frac{C}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{2}\right).$$

1315. 若 $A+B+C=180^\circ$，证明

$$\sin A+\sin B+\cos C+1$$
$$=4\cos\frac{C}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{2}\right).$$

解　原式的左边

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos^2\frac{C}{2}$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos^2\frac{C}{2}$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{A-B+C}{4}\cos\frac{C-A+B}{4}\right)$$
$$=4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A+B+C-2B}{4}$$
$$\times\cos\frac{A+B+C-2A}{4}$$
$$=4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{180^\circ-2B}{4}\cos\frac{180^\circ-2A}{4}$$
$$=4\cos\frac{C}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{B}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right).$$

1316. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$$
$$=\frac{(\sin\alpha+\sin\gamma-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma)}{(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha)}.$$

解　原式的右边

$$=\frac{\left(4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)}{\left(4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)\left(4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)}$$
$$=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

1317. 将

$$\sin\frac{360^\circ}{7}+\sin\frac{720^\circ}{7}-\sin\frac{1080^\circ}{7}$$

化成三个正弦的积。

解　原式

$$=\left(\sin\frac{360^\circ}{7}+\sin\frac{720^\circ}{7}\right)-\sin\frac{1080^\circ}{7}$$
$$=2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{360^\circ}{7}+\frac{720^\circ}{7}\right)$$
$$\times\cos\frac{1}{2}\left(\frac{720^\circ}{7}-\frac{360^\circ}{7}\right)-\sin\frac{1080^\circ}{7}$$
$$=2\sin\frac{540^\circ}{7}\cos\frac{180^\circ}{7}-2\sin\frac{540^\circ}{7}$$
$$\times\cos\frac{540^\circ}{7}$$
$$=2\sin\frac{540^\circ}{7}\left(\cos\frac{180^\circ}{7}-\cos\frac{540^\circ}{7}\right)$$
$$=2\sin\frac{540^\circ}{7}\times2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{180^\circ}{7}+\frac{540^\circ}{7}\right)$$
$$\times\sin\frac{1}{2}\left(\frac{540^\circ}{7}-\frac{180^\circ}{7}\right)$$
$$=4\sin\frac{540^\circ}{7}\sin\frac{360^\circ}{7}\sin\frac{180^\circ}{7}.$$

1318. 证明:

$$\sin7\frac{1}{2}^\circ=\frac{1}{4}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$
$$\cos7\frac{1}{2}^\circ=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$
$$\operatorname{tg}7\frac{1}{2}^\circ=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1).$$

解　$\sin^2 7\frac{1}{2}^\circ=\frac{1}{2}(1-\cos15^\circ)$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}$$
$$=\frac{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{16}.$$

可是 $8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$

$$=(2-\sqrt{2})(6+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6})$$
$$=(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2,$$

因此

$$\sin7\frac{1}{2}^\circ=\frac{1}{4}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

同样　$\cos^2 7\frac{1}{2}^\circ=\frac{1}{2}(1+\cos15^\circ)$

$$=\frac{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{16}$$
$$=\frac{(2+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{16},$$

因此

$$\cos 7\frac{1}{2}^\circ=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

又 $$\operatorname{tg} 7\frac{1}{2}^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 15^\circ}{1+\cos 15^\circ}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{1+\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}}$$

$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1).$$

1319. 若 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\operatorname{tg}^5\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$，证明

$$\sin\theta=5\sin\varphi\times\frac{\left(1+\sin^2\varphi\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{5}\right)\left(1+\sin^2\varphi\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{5}\right)}{\left(1+\sin^2\varphi\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5}\right)\left(1+\sin^2\varphi\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5}\right)}.$$

解 $$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\left[\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right]^5,$$

即 $$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)^5.$$

因此 $$\sin\theta=\frac{(1+\sin\varphi)^5-(1-\sin\varphi)^5}{(1+\sin\varphi)^5+(1-\sin\varphi)^5}$$

$$=\frac{\sin\varphi(5+10\sin^2\varphi+\sin^4\varphi)}{1+10\sin^2\varphi+5\sin^4\varphi}$$

$$=\sin\varphi\cdot\left[5\left(1+\sin^2\varphi\times\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)\cdot\left(1+\sin^2\varphi\times\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)\right]$$

$$\div\left[\left(1+\sin^2\varphi\times\frac{5}{5-2\sqrt{5}}\right)\cdot\left(1+\sin^2\varphi\times\frac{5}{5+2\sqrt{5}}\right)\right]$$

$$=\left[5\sin\varphi\left(1+\sin^2\varphi\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{5}\right)\cdot\left(1+\sin^2\varphi\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{5}\right)\right]$$

$$\div\left[\left(1+\sin^2\varphi\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5}\right)\cdot\left(1+\sin^2\varphi\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5}\right)\right].$$

1320. 若 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

及

$$\cos A\cos\alpha+\cos B\cos\beta+\cos C\cos\gamma=0,$$

证明 $$\frac{\sin\alpha\sin 2\alpha}{\cos A}+\frac{\sin\beta\sin 2\beta}{\cos B}+\frac{\sin\gamma\sin 2\gamma}{\cos C}+\frac{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos A\cos B\cos C}=0.$$

解 将所要证明的式子的左边通分，则分子的和是

$$\begin{aligned}
&2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)\cos B\cos C\\
&\quad+2\cos\beta(1-\cos^2\beta)\cos C\cos A\\
&\quad+2\cos\gamma(1-\cos^2\gamma)\cos A\cos B\\
&\quad+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\
&=2\cos\alpha(\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\cos B\cos C\\
&\quad+2\cos\beta(\cos^2\gamma+\cos^2\alpha)\cos C\cos A\\
&\quad+2\cos\gamma(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)\cos A\cos B\\
&\quad+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\
&=2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos A+\cos\beta\cos B)\\
&\quad\times\cos C+2\cos\beta\cos\gamma(\cos\beta\cos B\\
&\quad+\cos\gamma\cos C)\cos A+2\cos\gamma\cos\alpha\\
&\quad\times(\cos\gamma\cos C+\cos\alpha\cos A)\cos B\\
&\quad+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\
&=-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^2 C\\
&\quad-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^2 A\\
&\quad-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^2 B\\
&\quad+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\
&=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(1-\cos^2 C\\
&\quad-\cos^2 A-\cos^2 B)=0.
\end{aligned}$$

因此，所要证明的式子成立。

1321. 若 $\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta}$，证明

$$\sin(3\theta+\alpha)=7\sin(\theta-\alpha).$$

解 这里

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1+\sin^2\theta)=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(1+\cos^2\theta).$$

因此 $$\cos\alpha(\sin\theta+\sin^3\theta)=\sin\alpha(\cos\theta+\cos^3\theta),$$

$$\cos\alpha\sin\theta+\cos\alpha\frac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{4}=\sin\alpha\cos\theta+\sin\alpha\frac{3\cos\theta+\cos 3\theta}{4},$$

$$7(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)=\sin 3\theta\cos\alpha+\cos 3\theta\sin\alpha,$$

即 $$7\sin(\theta-\alpha)=\sin(3\theta+\alpha).$$

1322. 若 $(a-b)\sec\theta=\sqrt{a^4+\frac{a^2b^2}{a^2-1}}$，

$$(a+b)\sec\varphi=\sqrt{a^4+\frac{a^2b^2}{a^2-1}},$$

证明　$$\operatorname{tg}\frac{\theta-\varphi}{2}=\frac{b}{a\sqrt{a^2-1}}.$$

解　设 $a^4+\frac{a^2b^2}{a^2-1}=c^2\quad(c>0)$，则

$$\cos\theta=\frac{a-b}{c},\quad\cos\varphi=\frac{a+b}{c}.$$

因此　$$\sin\theta=\frac{a(a^2-1)+b}{c\sqrt{a^2-1}},$$

$$\sin\varphi=\frac{a(a^2-1)-b}{c\sqrt{a^2-1}},$$

$$\cos(\theta-\varphi)=\frac{a^4-a^2-b^2}{a^4-a^2+b^2},$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta-\varphi}{2}=\frac{1-\cos(\theta-\varphi)}{1+\cos(\theta-\varphi)}=\frac{b^2}{a^4-a^2}.$$

从而原式得证。

1323. 若 $x+y+z=xyz$，用三角证明

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}$$
$$=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$

解　设在 $\triangle ABC$ 中，$x=\operatorname{tg}A$，$y=\operatorname{tg}B$，则当 $x+y+z=xyz$ 时，$z=\operatorname{tg}C$。因此

$$2A+2B+2C=360°,$$
$$\operatorname{tg}(2A+2B+2C)=0,$$
$$\operatorname{tg}2A+\operatorname{tg}2B+\operatorname{tg}2C$$
$$=\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}2B\operatorname{tg}2C.$$

因此　$$\frac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2A}+\frac{2\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}^2B}+\frac{2\operatorname{tg}C}{1-\operatorname{tg}^2C}$$
$$=\frac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2A}\cdot\frac{2\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}^2B}\cdot\frac{2\operatorname{tg}C}{1-\operatorname{tg}^2C},$$

即　$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}$$
$$=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$

1324. 证明 $\cos\frac{x}{3}=-\sin\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)$。由此说明怎样把求三分之一角的余弦导至求三分之一角的正弦。

解　$$\cos\frac{x}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{3}\right)$$
$$=\sin\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\pi\right).$$

因此，如果一个角 x 是已知的，那么要求它的三分之一角的余弦，只要求出相当于 $\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)$ 的 $\frac{1}{3}$ 的角的正弦就可以了。

1325. 三角形的一个角是 30°，这角的一条边是 1，对边是 250，另一个锐角是几分？

解　设长度是 1 的边所对的角是 θ，则 $\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{250}$，因而 $\sin\theta=\frac{1}{500}$。因为 θ 很小，所以可以用 θ 来代替 $\sin\theta$，得 $\theta=\frac{1}{500}$。因此这个角的度数是 $\frac{1}{500}\times\frac{180}{\pi}$（度），即是

$$\frac{60}{500}\times\frac{180}{\pi}=\frac{3}{25}\times\frac{180}{\pi}=\frac{3}{25}\times57.3$$
$$\approx7(\text{分}).$$

1326. 将 $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-2\cos x$ 化成 $r\sin(x+\alpha)$ 的形式。这里设 $r>0$。

解　原式

$$=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)-2\cos x$$
$$=2\times\frac{1}{2}\cos x-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-2\cos x$$
$$=-(\sqrt{3}\sin x+\cos x).$$

设　$-(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=r\sin(x+\alpha)$，

则　$r\cos\alpha=-\sqrt{3}$，$r\sin\alpha=-1$。

因此　$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$，

并且　$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，

从而得　$\alpha=\frac{7\pi}{6}$。

因此　原式 $=2\sin\left(x+\frac{7\pi}{6}\right)$。

注　如果不加 $r>0$ 的条件，那么化成

$$-(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

也是可以的。

1327. 在公式

$$\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}$$

中，"±"号可以用 $(-1)^m$ 来代替，为什么？这里 m 是小于 $\frac{270°+A}{360°}$ 的最大的整数，角 A 的大小是以度为单位来表示的，且 $A\neq$

$90°(2n+1)$.

解　因为只要考虑正角就可以了，所以设整数 $n\geq 0$，用角的动径的位置进行判断。

使 $\cos\frac{A}{2}>\sin\frac{A}{2}$ 的角的范围是

$$360°n+225°<\frac{A}{2}<360°n+405°.$$

$$\therefore\quad 360°\times 2n+450° < A < 360°\times 2n+810°,$$

$$360°(2n+2)<270°+A<360°(2n+3).$$

$$\therefore\quad 2(n+1)<\frac{270°+A}{360°}<2(n+1)+1.$$

$$\therefore\quad \frac{270°+A}{360°}=2(n+1)+\text{纯小数}.$$

从而得到 $m=2(n+1)=$偶数。这时 $(-1)^m=+1$，所以与原式左边的正负性一致。

同样，当 $\cos\frac{A}{2}<\sin\frac{A}{2}$ 时，右边应取负号，而这时得到的 m 恰好是奇数，使得

$$(-1)^m=-1.$$

1328. 如果 $p=2\cos A-5\cos^3 A+4\cos^5 A$，$q=2\sin A-5\sin^3 A+4\sin^5 A$，证明

$$p\cos 3A+q\sin 3A=\cos 2A$$

和　$$p\sin 3A-q\cos 3A=\frac{1}{2}\sin 2A.$$

解　$p=2\cos A+\cos^3 A(-5+4\cos^2 A)$

$$=2\cos A+\frac{1}{4}(\cos 3A+3\cos A)\times(-5+4\cos^2 A)$$

$$=2\cos A+\frac{1}{4}(\cos 3A+3\cos A)\times(-3+2\cos 2A)$$

$$=2\cos A-\frac{3}{4}\cos 3A-\frac{9}{4}\cos A+\frac{1}{2}\cos 3A\cos 2A+\frac{3}{2}\cos A\cos 2A$$

$$=-\frac{3}{4}\cos 3A-\frac{1}{4}\cos A+\frac{1}{4}(\cos 5A+\cos A)+\frac{3}{4}(\cos 3A+\cos A)$$

$$=\frac{1}{4}(\cos 5A+3\cos A).$$

用同样的方法，得

$$q=\frac{1}{4}(\sin 5A+3\sin A).$$

因此　$p\cos 3A+q\sin 3A$

$$=\frac{1}{4}(\cos 5A+3\cos A)\cos 3A+\frac{1}{4}(\sin 5A+3\sin A)\sin 3A$$

$$=\frac{1}{4}(\cos 5A\cos 3A+\sin 5A\sin 3A)+\frac{3}{4}(\cos 3A\cos A+\sin 3A\sin A)$$

$$=\frac{1}{4}\cos(5A-3A)+\frac{3}{4}\cos(3A-A)$$

$$=\cos 2A.$$

$p\sin 3A-q\cos 3A$

$$=\frac{1}{4}(\cos 5A+3\cos A)\sin 3A-\frac{1}{4}(\sin 5A+3\sin A)\cos 3A$$

$$=\frac{1}{4}(\cos 5A\sin 3A-\sin 5A\cos 3A)+\frac{3}{4}(\sin 3A\cos A-\cos 3A\sin A)$$

$$=-\frac{1}{4}\sin(5A-3A)+\frac{3}{4}\sin(3A-A)$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2A.$$

1329. 证明：

$$\sec^2\frac{A}{2}\sec A\,\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{3}{2}A}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{3}{2}A}=8.$$

解　原式的左边$=\dfrac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos A}$

$$\times\left(\cos^2\frac{1}{2}A\sin^2\frac{3}{2}A-\cos^2\frac{3}{2}A\cdot\sin^2\frac{1}{2}A\right)$$

$$\div\left[\sin^2\frac{1}{2}A\left(\cos^2\frac{3}{2}A+\sin^2\frac{3}{2}A\right)\right]$$

$$=\left(\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{3}{2}A-\cos\frac{3}{2}A\sin\frac{1}{2}A\right)$$

$$\times\left(\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{3}{2}A\right.$$

$$+\cos\frac{3}{2}A\sin\frac{1}{2}A\Big)$$

$$\div\left(\sin^2\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}A\cos A\right)$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{3}{2}A-\frac{1}{2}A\right)\sin\left(\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}A\right)}{\sin^2\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}A\cos A}$$

$$=\frac{\sin A\sin 2A}{\sin^2\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}A\cos A}$$

$$=\frac{2\sin^2 A}{\sin^2\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}A}$$

$$=\frac{2\left(2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\right)^2}{\sin^2\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}A}=8.$$

1330. 若 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},$$

证明 $\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{a(1-e)}\cos\frac{\alpha}{2}$,

$$\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{a(1+e)}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

解　从条件得

$$(1-e)\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=(1+e)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

从而

$$(1-e)\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}-1\right)=(1+e)\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-1\right).$$

因此

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{(1-e)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1-e\cos\alpha},$$

从而

$$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}.$$

将上式代入第二个条件

$$r(1+e\cos\theta)=a(1-e^2),$$

得 $r\left[1+\frac{e(\cos\alpha-e)}{1-e\cos\alpha}\right]=a(1-e^2)$.

因此

$$r=a(1-e\cos\alpha)=\frac{a(1-e)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

从而得到所要证明的第一个式子。

用同样的方法可以证明第二个式子。

1331. 不管 θ 的值如何，对于 $x\sin(\theta-\beta)\times\sin(\theta-\gamma)+y\sin(\theta-\gamma)\sin(\theta-\alpha)+z\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)$ 一个给定的数值，总可以确定 x、y、z 的值．试证明这一点．

解　将第一项变形，其他两项只要在第一项变形的基础上代换一下字母即可。

$$x\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\gamma)$$

$$=\frac{x}{2}\cos(\gamma+\beta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)-\frac{x}{2}\sin(\gamma+\beta)\sin 2\theta+\frac{x}{2}\cos(\gamma-\beta)$$

$$=\frac{-x}{2}[\sin(\gamma+\beta)\sin 2\theta+\cos(\gamma+\beta)\times\cos 2\theta-\cos(\gamma-\beta)].$$

同样　$y\sin(\theta-\gamma)\sin(\theta-\alpha)$

$$=\frac{-y}{2}[\sin(\alpha+\gamma)\sin 2\theta+\cos(\alpha+\gamma)\times\cos 2\theta-\cos(\alpha-\gamma)],$$

$$z\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)$$

$$=\frac{-z}{2}[\sin(\beta+\alpha)\sin 2\theta+\cos(\beta+\alpha)\cos 2\theta-\cos(\beta-\alpha)].$$

设　$L=-\frac{1}{2}[x\sin(\gamma+\beta)+y\sin(\alpha+\gamma)+z\sin(\beta+\alpha)]$,

$$M=-\frac{1}{2}[x\cos(\gamma+\beta)+y\cos(\alpha+\gamma)+z\cos(\beta+\alpha)],$$

$$N=\frac{1}{2}[x\cos(\gamma-\beta)+y\cos(\alpha-\gamma)+z\cos(\beta-\alpha)],$$

设给定的数是 A，则

$$L\sin 2\theta+M\cos 2\theta+N=A.$$

因此，从 $L=M=0$, $N=A$ 得

$x\cos(\gamma+\beta)+y\cos(\alpha+\gamma)+z\cos(\beta+\alpha)=0$, ①

$x\sin(\gamma+\beta)+y\sin(\alpha+\gamma)+z\sin(\beta+\alpha)=0$, ②

$x\cos(\gamma-\beta)+y\cos(\alpha-\gamma)+z\cos(\beta-\alpha)=2A$. ③

设

$$\frac{x}{z}=X,\quad \frac{y}{z}=Y,$$

则从①、②可求得 X、Y，将它们代入③，就可确定 x、y、z。（公式[11]）

1332. 若对于 $\sin A$ 的一切值，有

$$2\sin\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A},$$

求 $\frac{A}{2}$ 的范围。

解 因为所给式子的右边大于零，所以

$$\sin\frac{A}{2}>0.$$

将所给式子的两边平方，然后除以2，得

$$-\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}\geqq 0.$$

因此 A 是第二或第三象限的角，即

$$(2n+1)\pi-\frac{\pi}{2}\leqq A\leqq(2n+1)\pi+\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad n\pi+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{A}{2}\leqq n\pi+\frac{3\pi}{4}.$$

因为 $\frac{A}{2}$ 是第一或第二象限的角，所以这里 n 必须是偶数。为明确起见，上式可写成

$$2m\pi+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{A}{2}\leqq 2m\pi+\frac{3\pi}{4}.\ (m\text{是整数})$$

1333. 若对于 $\sin A$ 的一切值，有

$$2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A},$$

求 $\frac{A}{2}$ 的范围。

解 由条件可知，如果 A 是第一、第二象限的角，那么 $\sin\frac{A}{2}\leqq 0$，如果 A 是第三、第四象限的角，那么 $\sin\frac{A}{2}>0$。

将所给的式子两边平方，得

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}\geqq 0.$$

因此，A 是第一、第四象限的角，包括坐标轴的位置，即是

$$2n\pi-\frac{\pi}{2}\leqq A\leqq 2n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad n\pi-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{A}{2}\leqq n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

如 $n=2m$，则

$$2m\pi-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{A}{2}\leqq 2m\pi+\frac{\pi}{4};$$

如 $n=2m+1$，则

$$2m\pi+\frac{3\pi}{4}\leqq\frac{A}{2}\leqq 2m\pi+\frac{5\pi}{4}.\qquad ①$$

为了使 A 是第一象限的角时，$\sin\frac{A}{2}\leqq 0$，A 是第四象限的角时 $\sin\frac{A}{2}>0$，所以只能取①式，即①式是 $\frac{A}{2}$ 的范围。

1334. 若对于 $\sin A$ 的一切值，有

$$2\sin\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A},$$

求 $\frac{A}{2}$ 的范围。

解 象上题一样解答，得

$$2n\pi-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{A}{2}\leqq 2n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

1335. 若对于 $\sin A$ 的一切值，有

$$2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A},$$

求 $\frac{A}{2}$ 的范围。

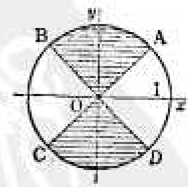
解 象前面几题一样解答，得

$$2n\pi+\frac{5\pi}{4}\leqq\frac{A}{2}\leqq 2n\pi+\frac{7\pi}{4}.$$

注 设 a、b 为 ±1。在

$$2\sin\frac{A}{2}=a\sqrt{1+\sin A}+b\sqrt{1-\sin A}$$

中，$\sin A$ 应作为已知的。因为 $\sin A=\sin(\pi-A)$，所以有关于 $\frac{A}{2}$ 的范围问题。



作以原点为圆心的单位圆 O，用直径

$$AC\cdots y=x,\ BD\cdots y=-x,$$

将圆周四等分。$\sin A$ 的值是任意给出的，动径可以随意地在 x 轴的上方或下方，但 $\cos A$ 的正负性是确定的，所以动径的存在范围是 y 轴左侧或右侧的半个圆。

现根据 $\sin\frac{A}{2}$ 的正负性，又可知 $\frac{A}{2}$ 是在 x 轴的上、下哪一方，结果应是四分之一圆弧。

A 在 y 轴的右侧时，$\frac{A}{2}$ 不一定也在 y 轴的右侧。同样，A 在 y 轴的左侧时，$\frac{A}{2}$ 也不一定在 y 轴的左侧。

1336. 若 $\sin A=\frac{12}{13}$，$\operatorname{ctg} B=\frac{15}{8}$，$A$、$B$

都是正的锐角，求 $\cos(A-B)$。

解 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$

$$=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\frac{5}{13},$$

$$\sin B=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 B}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{225}{64}}}=\frac{8}{17},$$

$$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\frac{64}{289}}=\frac{15}{17}.$$

因此 $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$$=\frac{5}{13}\cdot\frac{15}{17}+\frac{12}{13}\cdot\frac{8}{17}=\frac{171}{221}.$$

1337. 证明

$$\left(\operatorname{tg}7\frac{1}{2}^\circ+\operatorname{tg}37\frac{1}{2}^\circ+\operatorname{tg}67\frac{1}{2}^\circ\right)\times\left(\operatorname{tg}22\frac{1}{2}^\circ+\operatorname{tg}52\frac{1}{2}^\circ+\operatorname{tg}82\frac{1}{2}^\circ\right)=17+8\sqrt{3}.$$

解 左边

$$=\left[\left(\operatorname{tg}7\frac{1}{2}^\circ+\operatorname{tg}67\frac{1}{2}^\circ\right)+\operatorname{tg}37\frac{1}{2}^\circ\right]\times\left[\left(\operatorname{tg}22\frac{1}{2}^\circ+\operatorname{tg}82\frac{1}{2}^\circ\right)+\operatorname{tg}52\frac{1}{2}^\circ\right]$$

$$=\left[\frac{\sin\left(7\frac{1}{2}^\circ+67\frac{1}{2}^\circ\right)}{\cos7\frac{1}{2}^\circ\cos67\frac{1}{2}^\circ}+\frac{\sin37\frac{1}{2}^\circ}{\cos37\frac{1}{2}^\circ}\right]\times\left[\frac{\sin\left(22\frac{1}{2}^\circ+82\frac{1}{2}^\circ\right)}{\cos22\frac{1}{2}^\circ\cos82\frac{1}{2}^\circ}+\frac{\sin52\frac{1}{2}^\circ}{\cos52\frac{1}{2}^\circ}\right]$$

$$=\left[\frac{2\sin75^\circ}{2\cos7\frac{1}{2}^\circ\cos67\frac{1}{2}^\circ}+\frac{2\sin37\frac{1}{2}^\circ\cos37\frac{1}{2}^\circ}{2\cos^2 37\frac{1}{2}^\circ}\right]\times\left[\frac{2\sin105^\circ}{2\cos22\frac{1}{2}^\circ\cos82\frac{1}{2}^\circ}+\frac{2\sin52\frac{1}{2}^\circ\cos52\frac{1}{2}^\circ}{2\cos^2 52\frac{1}{2}^\circ}\right]$$

$$=\left[\frac{2\sin75^\circ}{\cos60^\circ+\cos75^\circ}+\frac{\sin75^\circ}{\cos75^\circ+1}\right]\times\left[\frac{2\sin105^\circ}{\cos60^\circ+\cos105^\circ}+\frac{\sin105^\circ}{\cos105^\circ+1}\right]$$

$$=\left[\frac{2\cos15^\circ}{\frac{1}{2}+\sin15^\circ}+\frac{\cos15^\circ}{\sin15^\circ+1}\right]\times\left[\frac{2\cos15^\circ}{\frac{1}{2}-\sin15^\circ}+\frac{\cos15^\circ}{1-\sin15^\circ}\right]$$

$$=\left[\frac{4\cos15^\circ}{1+2\sin15^\circ}+\frac{\cos15^\circ}{\sin15^\circ+1}\right]\times\left[\frac{4\cos15^\circ}{1-2\sin15^\circ}+\frac{\cos15^\circ}{1-\sin15^\circ}\right]$$

$$=\cos^2 15^\circ\times\frac{4+4\sin15^\circ+1+2\sin15^\circ}{(1+2\sin15^\circ)(1+\sin15^\circ)}\times\frac{4-4\sin15^\circ+1-2\sin15^\circ}{(1-2\sin15^\circ)(1-\sin15^\circ)}$$

$$=\frac{(5+6\sin15^\circ)(5-6\sin15^\circ)}{1-4\sin^2 15^\circ}$$

$$=\frac{25-36\sin^2 15^\circ}{1-4\sin^2 15^\circ}.$$

上式中将 $\sin15^\circ$ 用 $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ 代入，化简后即得所要证明的结果。

1338. 证明

$$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}=\frac{1+\sqrt{13}}{4}$$

和

$$\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}=\frac{1-\sqrt{13}}{4}.$$

解 设 $x=\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}$,

$$y=\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13},$$

则 $x+y=\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}$

$$=2\cos\frac{6\pi}{13}\left(\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}\right)$$

$$=2\cos\frac{6\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}\left(2\cos\frac{4\pi}{13}+1\right)$$

$$=\frac{2\cos\frac{6\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}\left(3\sin\frac{2\pi}{13}-4\sin^3\frac{2\pi}{13}\right)}{\sin\frac{2\pi}{13}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{6\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}\sin\frac{6\pi}{13}}{\sin\frac{2\pi}{13}}$$

$$=\frac{\sin\frac{12\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}}{\sin\frac{2\pi}{13}}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{13}\right)\cos\frac{\pi}{13}}{\sin\frac{2\pi}{13}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}}{\sin\frac{2\pi}{13}}=\frac{1}{2}. \qquad ①$$

又　$xy=\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{13}+\cdots$（将乘积展开）

$$=\frac{1}{2}\left(3\cos\frac{2\pi}{13}+3\cos\frac{4\pi}{13}+2\cos\frac{6\pi}{13}+3\cos\frac{8\pi}{13}+2\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13}+2\cos\frac{14\pi}{13}+\cos\frac{16\pi}{13}+\cos\frac{20\pi}{13}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13}\right)$$

$$=\frac{3\cos\left(\frac{\pi}{13}+\frac{5\pi}{13}\right)\sin\frac{6\pi}{13}}{2\sin\frac{\pi}{13}}$$

$$=-\frac{3\cos\frac{6\pi}{13}\sin\frac{6\pi}{13}}{2\sin\frac{\pi}{13}}=-\frac{3\sin\frac{12\pi}{13}}{4\sin\frac{\pi}{13}}$$

$$=-\frac{3}{4}. \qquad ②$$

从①、②得

$$x+y=\frac{1}{2},\quad xy=-\frac{3}{4}.$$

因为 $y<x$，所以从上面两式解得

$$x=\frac{1+\sqrt{13}}{4},\quad y=\frac{1-\sqrt{13}}{4}.$$

1339. 证明

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

解　左边

$$=\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi+\cos\frac{10}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{8}{7}\pi\right)=\frac{1}{2}$$

$$\times\left(\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{8}{7}\pi+\cos\frac{10}{7}\pi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{16}{7}\pi+\cos\frac{8}{7}\pi+\cos\frac{24}{7}\pi\right)$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{16}{7}\pi\left(1+2\cos\frac{8}{7}\pi\right)$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{\sin 4\pi-\sin\frac{4}{7}\pi}{4\sin\frac{4}{7}\pi}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}.$$

1340. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\cos 3\alpha\sin(\beta-\gamma)+\cos 3\beta\sin(\gamma-\alpha)+\cos 3\gamma\sin(\alpha-\beta)=-4\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta).$$

解　左边

$$=\frac{1}{2}[\sin(3\alpha+\beta-\gamma)-\sin(3\alpha-\beta+\gamma)]+\frac{1}{2}[\sin(3\beta+\gamma-\alpha)-\sin(3\beta-\gamma+\alpha)]+\frac{1}{2}[\sin(3\gamma+\alpha-\beta)-\sin(3\gamma-\alpha+\beta)]$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(\pi+2\alpha-2\gamma)-\sin(\pi+2\alpha-2\beta)]+\frac{1}{2}[\sin(\pi+2\beta-2\alpha)-\sin(\pi+2\beta-2\gamma)]+\frac{1}{2}[\sin(\pi+2\gamma-2\beta)-\sin(\pi+2\gamma-2\alpha)]$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(2\gamma-2\alpha)+\sin(2\alpha-2\beta)]+\frac{1}{2}[\sin(2\alpha-2\beta)+\sin(2\beta-2\gamma)]+\frac{1}{2}[\sin(2\beta-2\gamma)+\sin(2\gamma-2\alpha)]$$

$$=\sin 2(\gamma-\alpha)+\sin 2(\alpha-\beta)+\sin 2(\beta-\gamma)$$

$=2\sin(\gamma-\beta)\cos(\beta+\gamma-2\alpha)$
$+2\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma)$
$=2\sin(\beta-\gamma)[\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma-2\alpha)]$
$=-4\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)$.

1341. 若 $A+B+C=\pi$，证明
$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C$
$=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$.

解　$(\sin 3A+\sin 3B)+\sin 3C$
$=2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2}$
$+2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3C}{2}$
$=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{3C}{2}\right)\cos\frac{3A-3B}{2}$
$+2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3C}{2}$
$=-2\cos\frac{3C}{2}\cos\frac{3A-3B}{2}+2\sin\frac{3C}{2}$
$\times\cos\frac{3C}{2}$
$=2\cos\frac{3C}{2}\left(-\cos\frac{3A-3B}{2}+\sin\frac{3C}{2}\right)$
$=2\cos\frac{3C}{2}\left[-\cos\frac{3A-3B}{2}\right.$
$\left.+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{3A+3B}{2}\right)\right]$
$=2\cos\frac{3C}{2}\left(-\cos\frac{3A-3B}{2}\right.$
$\left.-\cos\frac{3A+3B}{2}\right)$
$=-4\cos\frac{3C}{2}\cdot\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}$.

1342. 若 $A+B+C=\pi$，证明
$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C$
$=-4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}+1$.

解　因为$\cos\frac{3A+3B}{2}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{3C}{2}\right)$
$=-\sin\frac{3C}{2}$

所以　左边
$=2\cos\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2}$
$-2\sin^2\frac{3C}{2}+1$
$=-2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3A-3B}{2}-2\sin^2\frac{3C}{2}+1$
$=-2\sin\frac{3C}{2}\left(\cos\frac{3A-3B}{2}+\sin\frac{3C}{2}\right)+1$
$=-2\sin\frac{3C}{2}\left(\cos\frac{3A-3B}{2}\right.$
$\left.-\cos\frac{3A+3B}{2}\right)+1$
$=-4\sin\frac{3C}{2}\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}+1$.

1343. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明
$\sin 6\alpha+\sin 6\beta+\sin 6\gamma$
$=4\sin 3\alpha\sin 3\beta\sin 3\gamma$.

解　左边$=2\sin(3\alpha+3\beta)\cos(3\alpha-3\beta)$
$+2\sin 3\gamma\cos 3\gamma$
$=2\sin(3\pi-3\alpha-3\beta)\cos(3\alpha-3\beta)$
$+2\sin 3\gamma\cos 3\gamma$
$=2\sin 3\gamma\cos(3\alpha-3\beta)+2\sin 3\gamma\cos 3\gamma$
$=2\sin 3\gamma[\cos(3\alpha-3\beta)+\cos 3\gamma]$
$=2\sin 3\gamma[\cos(3\alpha-3\beta)-\cos(3\pi-3\gamma)]$
$=2\sin 3\gamma[\cos(3\alpha-3\beta)-\cos(3\alpha+3\beta)]$
$=2\sin 3\gamma(2\sin 3\alpha\sin 3\beta)$
$=4\sin 3\alpha\sin 3\beta\sin 3\gamma$.

1344. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明
$\sin^2\alpha\sin 2\gamma+\sin^2\gamma\sin 2\alpha$
$=\sin^2\alpha\sin 2\beta+\sin^2\beta\sin 2\alpha$.

解　左边
$=\sin^2\alpha\times 2\sin\gamma\cos\gamma+\sin^2\gamma\times 2\sin\alpha\cos\alpha$
$=2\sin\alpha\sin\gamma(\sin\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha)$
$=2\sin\alpha\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma)$
$=2\sin\alpha\sin\gamma\sin\beta$
$=2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$
$=2\sin\alpha\sin\beta(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$
$=2\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta+2\sin^2\beta\sin\alpha\cos\alpha$
$=\sin^2\alpha\sin 2\beta+\sin^2\beta\sin 2\alpha$.

1345. 若 $A+B+C=180°$，证明
$\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C+1$
$=4\cos 2A\cos 2B\cos 2C$.

解　$\cos 4A+\cos 4B$
$=2\cos 2(A+B)\cos 2(A-B)$
$=2\cos 2C\cos 2(A-B)$,
$\cos 4C=2\cos^2 2C-1$
$=2\cos 2C\cos 2(A+B)-1$.

$\therefore$　$\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C$

$=2\cos 2C[\cos 2(A-B)+\cos 2(A+B)]-1$

$=2\cos 2C\times 2\cos 2A\cos 2B-1$

$=4\cos 2A\cos 2B\cos 2C-1$.

$\therefore\quad \cos 4A+\cos 4B+\cos 4C+1$

$=4\cos 2A\cos 2B\cos 2C$.

1346. 若 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, 证明

$\cos^4\alpha+\cos^4\beta+\cos^4\gamma$

$=\frac{1}{2}(1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$+\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma)$.

解　$\cos^4\alpha=\cos^3\alpha\cos\alpha$

$=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)\cos\alpha$

$=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha)$

$=\frac{1}{8}(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+6\cos^2\alpha)$

$=\frac{1}{8}(2\cos^2\alpha-1+\cos 4\alpha+6\cos^2\alpha)$

$=\cos^2\alpha+\frac{1}{8}\cos 4\alpha-\frac{1}{8}$.

因此　左边

$=\sum\cos^2\alpha+\frac{1}{8}\times\sum\cos 4\alpha-\frac{3}{8}$

$=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$+\frac{1}{8}(4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma-1)-\frac{3}{8}$

$=$右边.

1347. 证明连分数

$$2\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{2\operatorname{ctg}\theta}+\frac{1}{2\operatorname{ctg}\theta}+\cdots$$

等于 $\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$. 其中 θ 是锐角.

解　设这个连分数等于 x, 则

$$x=2\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{x}.$$

因此 $x^2-2x\operatorname{ctg}\theta=1$, $(x-\operatorname{ctg}\theta)^2=1+\operatorname{ctg}^2\theta$ $=\csc^2\theta$, 从而求得 $x=\operatorname{ctg}\theta+\csc\theta=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$.

1348. 若 $A+B+C=180^\circ$, 证明

$\cos 2A-\cos 2B+\sin 2C$

$=-4\sin C\sin(45^\circ+A)\cos(45^\circ+B)$.

解　左边

$=2\sin(A+B)\sin(B-A)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\sin(B-A)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C[\sin(B-A)+\cos C]$

$=2\sin C[\sin(B-A)-\cos(A+B)]$

$=2\sin C[\sin(B-A)-\sin(90^\circ-A-B)]$

$=2\sin C[2\sin(B-45^\circ)\cos(45^\circ-A)]$

$=-4\sin C\sin(45^\circ+A)\cos(45^\circ+B)$.

1349. 若 $A+B+C=180^\circ$, 证明

$\cos 2A+\cos 2B+\sin 2C$

$=4\cos C\cos(45^\circ+A)\sin(B-45^\circ)$.

解　左边

$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=-2\cos C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\cos C[\sin C-\cos(A-B)]$

$=2\cos C[\sin(A+B)-\cos(A-B)]$

$=2\cos C[\cos(90^\circ-A-B)-\cos(A-B)]$

$=2\cos C[2\sin(45^\circ-B)\sin(A-45^\circ)]$

$=4\cos C\cos(45^\circ+A)\sin(B-45^\circ)$.

1350. 已知 $\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta$,

$\cos\theta'=\cos\alpha'\cos\beta$,　$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$,

证明 $\sin^2\beta=(\sec\alpha-1)(\sec\alpha'-1)$.

解　　$\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta$.

因此　$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$,

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}.$$

同样　$\operatorname{tg}^2\frac{\theta'}{2}=\frac{1-\cos\alpha'\cos\beta}{1+\cos\alpha'\cos\beta}$.

因此　$\frac{(1-\cos\alpha\cos\beta)(1-\cos\alpha'\cos\beta)}{(1+\cos\alpha\cos\beta)(1+\cos\alpha'\cos\beta)}$

$=\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}$,

$\frac{1-(\cos\alpha+\cos\alpha')\cos\beta+\cos\alpha\cos\alpha'\cos^2\beta}{1+(\cos\alpha+\cos\alpha')\cos\beta+\cos\alpha\cos\alpha'\cos^2\beta}$

$=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}$,

$\frac{(\cos\alpha+\cos\alpha')\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\alpha'\cos^2\beta}=\cos\beta$,

$\cos\alpha+\cos\alpha'=1+\cos\alpha\cos\alpha'(1-\sin^2\beta)$,

$\sin^2\beta\cos\alpha\cos\alpha'$

$=1-\cos\alpha-\cos\alpha'+\cos\alpha\cos\alpha'$

$=(1-\cos\alpha)(1-\cos\alpha')$.

因此　$\sin^2\beta=\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha'}-1\right)$

$=(\sec\alpha-1)(\sec\alpha'-1)$.

1351. 证明 $\dfrac{\sin\beta\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{1-\cos(\alpha+\beta)}$

$$+\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=1.$$

解 $\dfrac{\sin\beta\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{1-\cos(\alpha+\beta)}$

$$=\frac{\sin\beta\cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)}{2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\beta\cos\alpha\ \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}{2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\beta\times2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\beta}$$

$$=\frac{\sin\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\beta}.$$

所以　左边

$$=\frac{\sin\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\beta}$$

$$+\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\beta}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)+\sin\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\beta}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\beta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\beta}=1.$$

1352. 若 $\sin x\cos y=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma$,

$\sin y\cos x=\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$,

$\cos^2y-\cos^2x=\cos^2\gamma$,

证明　$\sec^2\alpha-\sec^2\beta=\sin^2\gamma$.

解　将前两个已知式相加和相减，得

$\sin(x+y)=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}\gamma$

和　$\sin(x-y)=(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}\gamma$.

将这两个式子相乘，得

$$\sin(x+y)\sin(x-y)$$
$$=(\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta)\operatorname{ctg}^2\gamma.$$

又　$\sin(x+y)\sin(x-y)=\cos^2y-\cos^2x$,

根据第三个已知式，它应等于 $\cos^2\gamma$，所以

$$\cos^2\gamma=(\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta)\operatorname{ctg}^2\gamma,$$
$$(\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta)=\sin^2\gamma,$$
$$(\sec^2\alpha-1)-(\sec^2\beta-1)=\sin^2\gamma,$$

即　$$\sec^2\alpha-\sec^2\beta=\sin^2\gamma.$$

1353. 证明

$$(x\cos2\alpha+y\sin2\alpha-1)(x\cos2\beta+y\sin2\beta-1)$$
$$-[x\cos(\alpha+\beta)+y\sin(\alpha+\beta)$$
$$-\cos(\alpha-\beta)]^2$$
$$=-(x^2+y^2-1)\sin^2(\alpha-\beta).$$

解　将左边进行整理．设被减式为

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+1,$$

则　$A=\cos2\alpha\cos2\beta$,　$B=\sin2(\alpha+\beta)$,

$C=\sin2\alpha\sin2\beta$,　$D=-(\cos2\alpha+\cos2\beta)$,

$E=-(\sin2\alpha+\sin2\beta)$.

设减式为

$$A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F,$$

则　$$A'=\cos^2(\alpha+\beta),$$
$$B'=2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta),$$
$$C'=\sin^2(\alpha+\beta),$$
$$D'=-2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta),$$
$$E'=-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta),$$
$$F=\cos^2(\alpha-\beta).$$

于是在所给式子的左边

$$A-A'=\cos^2(\alpha+\beta)\cos^2(\alpha-\beta)$$
$$-\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)$$
$$=\cos^2(\alpha+\beta)[\cos^2(\alpha-\beta)-1]$$
$$-\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$=-\sin^2(\alpha-\beta)[\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)]$$
$$=-\sin^2(\alpha-\beta),$$
$$B-B'=0,$$
$$C-C'=\sin2\alpha\sin2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)$$
$$=\sin^2(\alpha+\beta)\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)$$
$$\times\sin^2(\alpha-\beta)-\sin^2(\alpha+\beta)$$
$$=-\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$-\cos^2(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$=-\sin^2(\alpha-\beta),$$
$$D-D'=E-E'=0,$$
$$1-F=\sin^2(\alpha-\beta).$$

因此等式成立。

1354. 从公式 $\cos x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$ 导出已知 $\sin 2x$ 求 $\sin x$ 的公式。

解 从所给的公式得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{2}}.$$

$$\therefore\quad \sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\pm\sqrt{\frac{1+\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2}}.$$

记 $\frac{\pi}{4}-x=X$，则

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+X\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin 2X}{2}}.$$

将这个 X 写成小写字母，并将左边展开，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin 2x}{2}}.\quad ①$$

在上式中将 x 用 $-x$ 代入，则得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin x+\cos x)=\pm\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{2}}.\quad ②$$

现在只要确定①、②中右边的符号，并将两式相减，就可以得到所要求的公式了。

具体来说，①中右边所取的符号应和 $\sin x+\cos x$ 同号，不妨设它为 a，②中右边所取的符号应和 $-\sin x+\cos x$ 同号，不妨设它为 b，于是

$$\sqrt{2}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{1+\sin 2x}-b\sqrt{1-\sin 2x}).$$

$$\therefore\quad \sin x=\frac{1}{2}(a\sqrt{1+\sin 2x}-b\sqrt{1-\sin 2x}).$$

1355. 证明

$$\sum\cos^3(\alpha+\theta)\sin^3(\beta-\gamma)=3\prod\cos(\alpha+\theta)\sin(\beta-\gamma).$$

解 若 $x+y+z=0$，则有

$$x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

这就是说，不管 x、y、z 是怎样的量，只要它们的和是零，就有象上面这样形式的关系。

设
$$x=\cos(\alpha+\theta)\sin(\beta-\gamma),$$
$$y=\cos(\beta+\theta)\sin(\gamma-\alpha),$$
$$z=\cos(\gamma+\theta)\sin(\alpha-\beta).$$

因为 $x+y+z=\sum\cos(\alpha+\theta)\sin(\beta-\gamma)=0$，所以立即可得所要证明的式子。

1356. 证明

$$\sum[\cos 3\alpha(\cos\beta-\cos\gamma)]=-4(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\times\prod(\cos\beta-\cos\gamma).$$

解 在恒等式

$$\sum a^3(b-c)=-\sum a\prod(b-c)$$

中，设 $a=\cos\alpha$，$b=\cos\beta$，$c=\cos\gamma$，则有

$$\sum\cos^3\alpha(\cos\beta-\cos\gamma)=-(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\times\prod(\cos\beta-\cos\gamma).$$

因为

$$\sum\cos\alpha(\cos\beta-\cos\gamma)=0,$$

所以
$$\sum(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)(\cos\beta-\cos\gamma)=-4(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\times\prod(\cos\beta-\cos\gamma),$$

即
$$\sum\cos 3\alpha(\cos\beta-\cos\gamma)=-4\sum\cos\alpha\prod(\cos\beta-\cos\gamma).$$

1357. 证明

$$\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B=1+\frac{\sin(A+B+C)}{\sin A\sin B\sin C}.$$

解
$$\frac{\sin(A+B+C)}{\sin A\sin B\sin C}=\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1.$$

将右边的 -1 移至等式左边，即得所要证明的式子。

1358. 证明

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma\geqq\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

解 将不等式两边的式子各乘以2，然后求它们的差。若记 $\operatorname{tg}\alpha=A$，$\operatorname{tg}\beta=B$，$\operatorname{tg}\gamma=C$，则

$$2(A^2+B^2+C^2)-2(AB+BC+CA)=(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\geqq 0.$$

$$\therefore\quad A^2+B^2+C^2\geqq AB+BC+CA.$$

1359. 若 $A+B+C=\pi$，证明下列各式：

(1) $\sum\sin 2A=4\prod\sin A$;

(2) $\sum\sin A=4\prod\cos\frac{A}{2}$;

(3) $\sum\operatorname{tg}A=\prod\operatorname{tg}A$;

(4) $\sum\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1.$

解　(1) $\sum\sin 2A$

$=2\sin A\cos A+(\sin 2B+\sin 2C)$

$=2\sin A\cos A+2\sin(B+C)\cos(B-C)$

$=2\sin A[-\cos(B+C)]$

$\quad+2\sin A\cos(B-C)$

$=2\sin A[\cos(B-C)-\cos(B+C)]$

$=4\sin A\sin B\sin C=4\prod\sin A.$

(2) $\sum\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$\quad+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$=2\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right]$

$=2\cos\frac{A}{2}\left[2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right]$

$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

(3) $\sum\operatorname{tg}A=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}$

$=\sin A\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}\cdot\frac{1}{\cos C}\right)$

$=\frac{\sin A(\cos B\cos C+\cos A)}{\cos A\cos B\cos C}$

$=\frac{\sin A[\cos B\cos C-\cos(B+C)]}{\cos A\cos B\cos C}$

$=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C.$

(4) $\sum\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$

$p=\sum\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}$

$=\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}$

$=\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{B+C}{2}\right)$

$=\prod\cos\frac{A}{2}.$

$$\therefore\quad\sum\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1.$$

1360. 证明：在三角形 ABC 中，

$\sum a^3\cos A=abc\cdot(1+4\cos A\cos B\cos C)$.

解　设　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k,$

则　$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C.$

将这些代入所要证明的式子，并在两边除以 k^3，于是题目就转化成证明

$$\sum\sin^3A\cos A=\sin A\sin B\sin C\times(1+4\cos A\cos B\cos C).$$

因为　$8\sin^3A\cos A=2(1-\cos 2A)\sin 2A$

$=2\sin 2A-\sin 4A,$

所以　$8\sum\sin^3A\cos A$

$=2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

$\quad-(\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C)$

$=8\sin A\sin B\sin C+32\sin A\sin B\sin C$

$\quad\times\cos A\cos B\cos C$

$=8\sin A\sin B\sin C(1+4\cos A\cos B\cos C).$

$\therefore\quad\sum\sin^3A\cos A$

$=\sin A\sin B\sin C(1+4\cos A\cos B\cos C).$

1361. 证明

$\sum\sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)=0.$

解　在恒等式

$$(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)=0$$

中，设 $x=\cos 2\theta,\ a=\cos 2\alpha,\ b=\cos 2\beta,$

$c=\cos 2\gamma,$

则　$x-a=\cos 2\theta-\cos 2\alpha$

$=2\sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta),$

$b-c=\cos 2\beta-\cos 2\gamma$

$=-2\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma),$

$\therefore\quad\sum\sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)\sin(\beta+\gamma)$

$\quad\times\sin(\beta-\gamma)=0.$

1362. 若 $\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}\beta$、$\operatorname{tg}\gamma$ 两两不等，且

$(y+z)\operatorname{tg}\alpha+(z+x)\operatorname{tg}\beta+(x+y)\operatorname{tg}\gamma=0,$

$x\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+y\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+z\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=x+y+z,$

证明　$x\sin 2\alpha+y\sin 2\beta+z\sin 2\gamma=0.$

解　从已知等式得

$x(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)+y(\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha)$

$\quad+z(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=0,$

$x(1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)+y(1-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha)$

$\quad+z(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=0.$

从上面两式求 $x:y:z$ 的值，若设 $x:y:z=a:b:c$，则得

$a=(1-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)$

$\quad-(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha)$

$=(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma)+\operatorname{tg}^2\alpha(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma)$

$=(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma)$

$=\sec^2\alpha(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma)$

$$=\frac{\sec\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

同样可求得

$$b=\frac{\sec\beta\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},\quad c=\frac{\sec\gamma\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

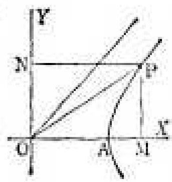
因此，若设

$$\frac{x}{\sec\alpha\sin(\beta-\gamma)}=\frac{y}{\sec\beta\sin(\gamma-\alpha)}=\frac{z}{\sec\gamma\sin(\alpha-\beta)}=k,$$

就得到 $x\sin 2\alpha+y\sin 2\beta+z\sin 2\gamma$

$$=k\sum\sin 2\alpha\sec\alpha\sin(\beta-\gamma)$$
$$=2k\sum\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)=0.$$

1363. 给出双曲函数间的基本关系式。



解 在双曲线

$$x^2-y^2=1$$

的右面一支$(x>0)$上，设 $\angle POA=\theta$,

定义

$$\operatorname{ch}\theta=\frac{OM}{OA}=OM,\ \operatorname{sh}\theta=\frac{PM}{OA}=PM,$$

并且 $$\operatorname{th}\theta=\frac{\operatorname{sh}\theta}{\operatorname{ch}\theta}.$$

它们的倒数分别定义为

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sech}\theta&=\frac{1}{\operatorname{ch}\theta},\\ \operatorname{csch}\theta&=\frac{1}{\operatorname{sh}\theta},\\ \operatorname{cth}\theta&=\frac{1}{\operatorname{th}\theta}.\end{aligned}\right\}\quad ①$$

从 $x^2-y^2=1$，可得下面的平方关系：

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{ch}^2\theta-\operatorname{sh}^2\theta=1,\\ &1-\operatorname{th}^2\theta=\operatorname{sech}^2\theta,\\ &\operatorname{cth}^2\theta-1=\operatorname{csch}^2\theta.\end{aligned}\right\}\quad ②$$

1364. 证明

$$\left(\csc^2\frac{\theta}{6}-\sec^2\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\theta}{3}=\left(\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\csc^2\frac{\theta}{6}-\sec^2\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{2\theta}{3}.$$

解 $\left(\csc^2\frac{\theta}{6}-\sec^2\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\theta}{3}$

$$=\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{6}}-\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)\operatorname{tg}\frac{\theta}{3}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{6}}{\sin^2\frac{\theta}{6}\cos^2\frac{\theta}{2}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{3}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{6}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{6}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{6}\cos^2\frac{\theta}{2}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{3}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{3}\cos\frac{2\theta}{3}\operatorname{tg}\frac{\theta}{3}}{\sin^2\frac{\theta}{6}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\theta}{3}\cos\frac{2\theta}{3}}{\sin^2\frac{\theta}{6}\cos^2\frac{\theta}{2}}.\quad ①$$

又 $\left(\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\csc^2\frac{\theta}{6}-\sec^2\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{2\theta}{3}$

$$=\left(\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{6}}-\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)\operatorname{ctg}\frac{2\theta}{3}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{6}}{\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{6}}\operatorname{ctg}\frac{2\theta}{3}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{6}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{6}\right)}{\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{6}}\operatorname{ctg}\frac{2\theta}{3}$$

$$=\frac{\sin\frac{\theta}{3}\sin\frac{2\theta}{3}\operatorname{ctg}\frac{2\theta}{3}}{\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{6}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\theta}{3}\cos\frac{2\theta}{3}}{\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{6}}.\quad ②$$

因为①和②相等，所以所要证明的等式成立。

1365. 若 $\sin A-\cos A=0$，求 $\csc A$，A 是锐角。

解 由 $\sin A-\cos A=0$

得 $\sin A=\cos A$,

从而 $\operatorname{tg}A=1$.

因此 $$\csc A=\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2A}}{\operatorname{tg}A}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

1366. 若 $\sin A=a$, $\operatorname{tg} A=b$, 证明

$$b^2=a^2(1+b^2).$$

解 $b^2=\operatorname{tg}^2 A=\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\sin^2 A\times\dfrac{1}{\cos^2 A}$

$=\sin^2 A\sec^2 A=\sin^2 A(1+\operatorname{tg}^2 A)$

$=a^2(1+b^2)$.

1367. 证明

$$\operatorname{tg} A+\frac{1}{2}\cos 2A\sec A\csc A=\csc 2A.$$

解 $\quad$ 左边$=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos 2A}{2\cos A\sin A}$

$=\dfrac{2\sin^2 A}{2\sin A\cos A}+\dfrac{1-2\sin^2 A}{2\sin A\cos A}$

$=\dfrac{1}{\sin 2A}=\csc 2A$.

1368. 证明

$2+\operatorname{tg}^2(A+90°)+\operatorname{ctg}^2(A-90°)$

$=4\csc^2 2A$.

解 左边$=2+\operatorname{ctg}^2 A+\operatorname{tg}^2 A$

$=\sec^2 A+\csc^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 A}$

$=\dfrac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}=\dfrac{4}{\sin^2 2A}=4\csc^2 2A$.

1369. 求 $\sin 75°+\sin 15°$ 的值.

解 $\sin 75°+\sin 15°$

$=2\sin\dfrac{75°+15°}{2}\cos\dfrac{75°-15°}{2}$

$=2\sin 45°\cos 30°$

$=2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

1370. 将 $\cos A+\sqrt{3}\sin A$ 化成单项式.

解 $\cos A+\sqrt{3}\sin A$

$=2\left(\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)$

$=2(\cos 60°\cos A+\sin 60°\sin A)$

$=2\cos(60°-A)$.

又 $\cos A+\sqrt{3}\sin A$

$=2\left(\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)$

$=2(\sin 30°\cos A+\cos 30°\sin A)$

$=2\sin(30°+A)$.

1371. 求 $(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$的三个值.

解 $\quad 1+\sqrt{-1}=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$.

这里 θ 是 $\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$(n 是任意整数). 因此

$$(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{3}\right).$$

在上式中,分别将 $\dfrac{\pi}{4}$, $2\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 和 $4\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 代入 θ, 就可得到所要求的三个值.

1372. 将 $\sin\theta+\sin\varphi-\cos\theta\sin(\theta+\varphi)$ 化成单项式.

解 $\sin\theta+\sin\varphi-\cos\theta\sin(\theta+\varphi)$

$=2\sin\dfrac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos\dfrac{1}{2}(\theta-\varphi)$

$\quad-2\cos\theta\sin\dfrac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos\dfrac{1}{2}(\theta+\varphi)$

$=2\sin\dfrac{1}{2}(\theta+\varphi)\Big[\cos\dfrac{1}{2}(\theta-\varphi)$

$\quad-\cos\theta\cos\dfrac{1}{2}(\theta+\varphi)\Big]$

$=2\sin\dfrac{1}{2}(\theta+\varphi)\Big[\cos\left(\theta-\dfrac{\theta+\varphi}{2}\right)$

$\quad-\cos\theta\cos\dfrac{1}{2}(\theta+\varphi)\Big]$

$=2\sin\dfrac{1}{2}(\theta+\varphi)\sin\theta\sin\dfrac{1}{2}(\theta+\varphi)$

$=2\sin\theta\sin^2\dfrac{1}{2}(\theta+\varphi)$.

1373. 若

$$1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0,$$

那么 α、β、γ 之间有怎样的关系?

解 $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma$

$+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$=4\sin\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$

$\quad\times\sin\dfrac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$.

因此,使这个式子为零的充要条件是

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2},\quad \sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2},$$
$$\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2},\quad \sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$$

中的某一个为零. 从而 $\alpha+\beta+\gamma$, $\beta+\gamma-\alpha$, $\gamma+\alpha-\beta$, $\alpha+\beta-\gamma$ 中的某一个是 $2n\pi$, n 是负整数、正整数或零.

1374. 若 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\sin\alpha\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma}$,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\alpha\sin\gamma-\sin\beta\cos\gamma}{\cos\alpha\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma},$$

求 $\operatorname{tg}(\theta+\varphi)$。

解 $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\varphi$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)\sin 2\gamma-1]}{(\cos\alpha\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)(\cos\alpha\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma)},$$

$1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi$

$$=\frac{\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)\sin 2\gamma-1]}{(\cos\alpha\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)(\cos\alpha\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma)}.$$

因此 $\operatorname{tg}(\theta+\varphi)=\dfrac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi}$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

1375. 证明

$$\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)+\operatorname{ctg}\beta(\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha)+\operatorname{ctg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)+2=\csc\alpha\csc\beta\csc\gamma.$$

设 $$\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2}\pi.$$

解 左边

$$\begin{aligned}
&=\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)\\
&\quad+\operatorname{ctg}\beta(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)\\
&\quad+\operatorname{ctg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)-1\\
&=(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)\\
&\quad-1=\left(\frac{\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\right)\\
&\quad\times\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\right)-1\\
&=\left[\frac{\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\sin\alpha(\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\right]\\
&\quad\times\left[\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\cos\alpha(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\right]-1\\
&=\frac{\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\\
&\quad\times\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}-1\\
&=\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\\
&\quad\times\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}-1\\
&=\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\alpha-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\\
&=\frac{\sin\alpha(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\\
&=\frac{\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\\
&=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=\csc\alpha\csc\beta\csc\gamma.
\end{aligned}$$

1376. 若 $A+B+C=360^\circ$,证明

$$2(\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin C\sin A+\cos C\sin A\sin B)+\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=0.$$

解 左边

$$\begin{aligned}
&=(\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin C\sin A)\\
&\quad+(\cos B\sin C\sin A+\cos C\sin A\sin B)\\
&\quad+(\cos C\sin A\sin B+\cos A\sin B\sin C)\\
&\quad+\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\\
&=\sin C(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\\
&\quad+\sin A(\sin B\cos C+\cos B\sin C)\\
&\quad+\sin B(\sin C\cos A+\cos C\sin A)\\
&\quad+\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\\
&=\sin C\sin(A+B)\\
&\quad+\sin A\sin(B+C)+\sin B\sin(C+A)\\
&\quad+\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\\
&=-\sin^2 C-\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 A\\
&\quad+\sin^2 B+\sin^2 C=0.
\end{aligned}$$

1377. 证明

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

设 $$\alpha+\beta+\gamma=2\pi.$$

解 左边

$$\begin{aligned}
&=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}+\frac{1+\cos 2\gamma}{2}\\
&=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma)\\
&=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\\
&\quad+2\cos^2 r-1]\\
&=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[2\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)\\
&\quad+2\cos\gamma\cos(\alpha+\beta)-1]
\end{aligned}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\{2\cos\gamma[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]-1\}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(4\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta-1)$$

$$=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

1378. 证明

$$\sin\alpha(1+2\cos\beta)+\sin\beta(1+2\cos\gamma)+\sin\gamma(1+2\cos\alpha)=-4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

设 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$.

解 左边

$$=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+2(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha)$$

$$=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\gamma-\alpha)$$

$$=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin\gamma+\sin(\alpha-\beta)-\sin\alpha+\sin(\beta-\gamma)-\sin\beta+\sin(\gamma-\alpha)$$

$$=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$$

$$=2\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha-2\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

$$=2\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}-\cos\frac{\gamma+\alpha-2\beta}{2}\right)$$

$$=-4\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$=-4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

1379. 若

$$\cos\alpha=\frac{(d-a)(b-c)}{(d+a)(b+c)},$$

$$\cos\beta=\frac{(d-b)(c-a)}{(d+b)(c+a)},$$

$$\cos\gamma=\frac{(d-c)(a-b)}{(d+c)(a+b)},$$

证明 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\pm1$.

这里 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$.

解 因为 $\cos\alpha=\dfrac{(d-a)(b-c)}{(d+a)(b+c)}$,

所以

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(d-a)(b-c)}{(d+a)(b+c)}+1=\frac{2(db+ac)}{(d+a)(b+c)}.$$

因此

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\sec^2\frac{\alpha}{2}-1=\frac{(d+a)(b+c)}{db+ac}-1=\frac{ab+cd}{db+ac}.$$

从其他两个已知条件也可得到同样的式子。另一方面，由于

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\pi,$$

所以

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

将前面得到的结果代入上式的右边，得

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\left(\pm\sqrt{\frac{ab+cd}{db+ac}}\right)\times\left(\pm\sqrt{\frac{bc+ad}{dc+ab}}\right)\times\left(\pm\sqrt{\frac{ac+bd}{da+bc}}\right)=\pm1.$$

1380. 若 $A+B+C=(2n+1)\pi$，证明

$$\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}+\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B}{2}+\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

解

$$\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{A}{2}-\left(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

其他两项也可同样地展开，因而左边变成

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A+B}{2}-\sin\frac{B+C}{2}-\sin\frac{C+A}{2}+\sin\frac{B}{2}\times\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

又因为 $\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}$,

$\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{C+A}{2}$,

$\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A+B}{2}$,

所以 左边

$=\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

$+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}$

$+\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$

$=\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}$

$=\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$

$=\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$

$=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

1381. 证明

$\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha=2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$,

设 $\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi$.

解 左边

$=\sin^2\beta+(\sin\gamma+\sin\alpha)(\sin\gamma-\sin\alpha)$

$=\sin^2\beta+4\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$

$\times\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$

$=\sin^2\beta+\left(2\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)$

$\times\left(2\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)$

$=\sin^2\beta+\sin(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha)$

$=\sin\beta\sin(\gamma+\alpha)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)$

$=\sin\beta[\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\gamma-\alpha)]$

$=2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha=2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

1382. 证明

$\cos^4\frac{\alpha}{2}+\cos^4\frac{\beta}{2}+\cos^4\frac{\gamma}{2}$

$-2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\right.$

$\left.+\cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$

$+4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}=0$.

这里 $\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi$.

解 左边

$=-\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\right)$

$\times\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\gamma}{2}\right)$

$\times\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\right)$

$\times\left(-\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\right)$

$+4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}$

$=-256\sin^2\frac{\alpha+\beta}{4}\sin^2\frac{\beta+\gamma}{4}\sin^2\frac{\gamma+\alpha}{4}$

$\times\cos^2\frac{\alpha+\beta}{4}\cos^2\frac{\beta+\gamma}{4}\cos^2\frac{\gamma+\alpha}{4}$

$+4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}$

$=-4\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}\sin^2\frac{\gamma+\alpha}{2}$

$+4\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}\sin^2\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=0$.

1383. 若 $\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi$, 证明

$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma$

$-2(\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\beta+\operatorname{ctg}2\gamma)$

$=\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)$

$\times(\sec\alpha-1)(\sec\beta-1)(\sec\gamma-1)$.

解 因为 $\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha$

$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{2\cos2\alpha}{\sin2\alpha}$

$=\frac{\cos^2\alpha-\cos2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

等,所以左边变成

$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma$,

这个式子又等于 $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

所要证明的式子的右边变成

$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$

$\times\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\times\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\times 2\sin^2\frac{\beta}{2}\times 2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

因此左边等于右边，等式成立。

1384. 若 $A+B+C=(2n+1)\pi$，证明

$$\sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C+2\cos 2A\cos 2B\cos 2C=2.$$

解　$\sin^2 2A+\cos 2A\cos 2B\cos 2C$

$=1-\cos^2 2A+\cos 2A\cos 2B\cos 2C$

$=1+\cos 2A(\cos 2B\cos 2C-\cos 2A)$

$=1+\cos 2A[\cos 2B\cos 2C-\cos(2B+2C)]$

$=1+\cos 2A\sin 2B\sin 2C.$

同样　$\sin^2 2B+\cos 2A\cos 2B\cos 2C$

$=1+\cos 2B\sin 2A\sin 2C.$

因此　所要证明的式子的左边

$=2+\sin 2C(\sin 2C+\sin 2B\cos 2A+\sin 2A\cos 2B)$

$=2+\sin 2C[-\sin(2A+2B)+\sin(2A+2B)]=2.$

1385. 当 $\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi$ 和 $\alpha+\beta+\gamma=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 时，证明

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)(\sin\gamma+\cos\gamma)=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+1.$$

解　将左边去括弧，整理后得

$$2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

当 $\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi$ 时，$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=0$，$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=-1$，所以上式等于所要证明的式子的右边。

同样，当 $\alpha+\beta+\gamma=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 时，$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=1$，$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=0$，所以上式也等于所要证明的式子的右边。

1386. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$，证明

$$\cos(6\beta+4\gamma-8\alpha)+\cos(6\gamma+4\alpha-8\beta)+\cos(6\alpha+4\beta-8\gamma)=4\cos(5\alpha-2\beta-\gamma)\cos(5\beta-2\gamma-\alpha)\times\cos(5\gamma-2\alpha-\beta).$$

解　$(6\beta+4\gamma-8\alpha)+(6\gamma+4\alpha-8\beta)+(6\alpha+4\beta-8\gamma)$

$=2\alpha+2\beta+2\gamma=\frac{\pi}{2}.$

设　$6\beta+4\gamma-8\alpha=A$，　$6\gamma+4\alpha-8\beta=B$，$6\alpha+4\beta-8\gamma=C$，

则　$A+B+C=\frac{\pi}{2}$，

并且　所要证明的式子的左边

$=\cos A+\cos B+\cos C$

$=\cos A+\cos B+\sin(A+B)$

$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\sin\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)$

$=2\cos\frac{A+B}{2}\left[\cos\left(A+B+C-\frac{A+B}{2}\right)+\cos\frac{A-B}{2}\right]$

$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A+B+2C}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)$

$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{B+C}{2}$

$=4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

$=4\cos(5\alpha-2\beta-\gamma)\cos(5\beta-2\gamma-\alpha)\times\cos(5\gamma-2\alpha-\beta).$

1387. 证明

$$\frac{\sin\theta\sin 2\theta+\sin 3\theta\sin 6\theta}{\sin\theta\cos 2\theta+\sin 3\theta\cos 6\theta}=\operatorname{tg}5\theta.$$

解　$\sin\theta\sin 2\theta+\sin 3\theta\sin 6\theta$

$=\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos 3\theta)+\frac{1}{2}(\cos 3\theta-\cos 9\theta)$

$=\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos 9\theta)=\sin 4\theta\sin 5\theta.$

又　$\sin\theta\cos 2\theta+\sin 3\theta\cos 6\theta$

$=\frac{1}{2}(\sin 3\theta-\sin\theta)+\frac{1}{2}(\sin 9\theta-\sin 3\theta)$

$=\frac{1}{2}(\sin 9\theta-\sin\theta)=\sin 4\theta\cos 5\theta.$

从而　$\frac{\sin\theta\sin 2\theta+\sin 3\theta\sin 6\theta}{\sin\theta\cos 2\theta+\sin 3\theta\cos 6\theta}$

$=\frac{\sin 4\theta\sin 5\theta}{\sin 4\theta\cos 5\theta}=\operatorname{tg}5\theta$。

1388. 若四个角的和等于 180°，证明各个角的正切的和等于其中每三个正切的乘积的和。

解　设 $A+B+C+D=180°$，则

$$\operatorname{tg}(A+B)=-\operatorname{tg}(C+D).$$

因此　$\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}=-\frac{\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}D}{1-\operatorname{tg}C\operatorname{tg}D}$，

$$-(\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}D)(1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B)=(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)(1-\operatorname{tg}C\operatorname{tg}D)。$$

因此　$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}D$

$$=(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)\operatorname{tg}C\operatorname{tg}D+(\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}D)\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B$$
$$=\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\operatorname{tg}D+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}C\operatorname{tg}D+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}D+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C。$$

1389. 若 $A+B+C=2S$，证明

$$1+2\cos A\cos B\cos C-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C=4\sin S\sin(S-A)\sin(S-B)\times\sin(S-C)。$$

解　左边

$$=\cos A(\cos B\cos C+\sin B\sin C)+\cos A(\cos B\cos C-\sin B\sin C)-\cos^2 A+1-\cos^2 B-\cos^2 C+\cos^2 B\cos^2 C-\cos^2 B\cos^2 C$$
$$=\cos A\cos(B-C)+\cos A\cos(B+C)-\cos^2 A+(1-\cos^2 B)(1-\cos^2 C)-\cos^2 B\cos^2 C$$
$$=\cos A\cos(B-C)+\cos A\cos(B+C)-\cos^2 A+\sin^2 B\sin^2 C-\cos^2 B\cos^2 C$$
$$=\cos A\cos(B-C)-\cos A\times[\cos A-\cos(B+C)]-\cos(B-C)\cos(B+C)$$
$$=\cos(B-C)[\cos A-\cos(B+C)]-\cos A[\cos A-\cos(B+C)]$$
$$=[\cos A-\cos(B+C)]\times[\cos(B-C)-\cos A]$$
$$=4\sin\frac{A+B+C}{2}\sin\frac{B+C-A}{2}\times\sin\frac{C+A-B}{2}\sin\frac{A+B-C}{2}$$
$$=4\sin S\sin(S-A)\sin(S-B)\times\sin(S-C).$$

1390. 若 $\alpha+\beta+\gamma=2S$，证明

$$-1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=4\cos S\cos(S-\alpha)\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)。$$

解　右边

$$=4\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\times\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$$
$$=[\cos(\beta+\gamma)+\cos\alpha][\cos\alpha+\cos(\beta-\gamma)]$$
$$=\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)+\cos^2\alpha+\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)$$
$$=\cos\alpha(\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)+(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)(\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)+\cos^2\alpha+\cos\alpha(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos^2\beta\cos^2\gamma-\sin^2\beta\sin^2\gamma+\cos^2\alpha+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\beta\cos^2\gamma-(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)+\cos^2\alpha$$
$$=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\text{左边}。$$

1391. 若 $A+B+C+D=360°$，证明

$$\cos(B+C+D)+\cos(C+D+A)+\cos(D+A+B)+\cos(A+B+C)=-4\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+C)\times\cos\frac{1}{2}(A+D)。$$

解　左边

$$=\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C-D}{2}\right)$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B+2D}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+D}{2}\cos\frac{B+D}{2}$$
$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+D}{2}\left(-\cos\frac{A+C}{2}\right)$$
$$=-4\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+C)$$
$$\times\cos\frac{1}{2}(A+D).$$

1392. 若 $\alpha+\beta+\gamma=2S$，证明
$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin 2(S-\alpha)$$
$$+\sin 2(S-\beta)+\sin 2(S-\gamma)-\sin 2S.$$

解　$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
$$=2\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$=2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$$
$$=\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)$$
$$+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=\sin 2(S-\alpha)+\sin 2(S-\beta)$$
$$+\sin 2(S-\gamma)-\sin 2S.$$

1393. 若 $\alpha+\beta+\gamma=2S$，证明
$$\operatorname{tg}(S-\alpha)+\operatorname{tg}(S-\beta)+\operatorname{tg}(S-\gamma)-\operatorname{tg}S$$
$$=\frac{4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

解　左边
$$=\frac{\sin(2S-\alpha-\beta)}{\cos(S-\alpha)\cos(S-\beta)}-\frac{\sin\gamma}{\cos(S-\gamma)\cos S}$$
$$=\{\sin\gamma[\cos(S-\gamma)\cos S-\cos(S-\alpha)$$
$$\times\cos(S-\beta)]\}$$
$$\div[\cos(S-\alpha)\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)\cos S]$$
$$=\{\sin\gamma[\cos(2S-\gamma)+\cos\gamma-\cos(2S-\alpha-\beta)$$
$$-\cos(\alpha-\beta)]\}$$
$$\div[2\cos(S-\alpha)\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)\cos S]$$
$$=\frac{\sin\gamma[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]}{2\cos(S-\alpha)\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)\cos S}$$
$$=\frac{4\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta}{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

1394. 若 $S=\alpha+\beta+\gamma+\delta$，
$$\cos(S-2\alpha)+\cos(S-2\beta)$$
$$=\cos(S-2\gamma)+\cos(S-2\delta),$$
证明　$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta.$

解　因为　$\cos(S-2\alpha)+\cos(S-2\beta)$
$$=\cos(S-2\gamma)+\cos(S-2\delta),$$
所以　$2\cos(S-\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)$
$$=2\cos(S-\gamma-\delta)\cos(\gamma-\delta).$$
因此　$\cos(\gamma+\delta)\cos(\alpha-\beta)$
$$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\gamma-\delta).$$
将上式两边去括弧，然后同除以 $\cos\alpha\cos\beta\times\cos\gamma\cos\delta$，变形即能得到
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta.$$

1395. 若 $A+B+C+D=360°$，证明
$$\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$$
$$=4\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(B+C)$$
$$\times\cos\frac{1}{2}(C+A).$$

解
$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$
$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$
$$=-2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$$
将上面两式相加，得
$$\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C-D}{2}\right)$$
$$=4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C-B-D}{4}$$
$$\times\sin\frac{C+B-A-D}{4}.$$
又因为　$\sin\frac{A+C-B-D}{4}$
$$=\sin\frac{2A+2C-360°}{4}$$
$$=\sin\left(\frac{A+C}{2}-90°\right)$$
$$=-\cos\frac{A+C}{2},$$
$$\sin\frac{C+B-A-D}{4}=-\cos\frac{B+C}{2},$$
所以　$\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$
$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}.$$

1396. 若 $A+B+C+D=360°$，证明
$$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D$$
$$=4\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(B+C)$$
$$\times\sin\frac{1}{2}(C+A).$$

解　$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$
$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$$

将上面两式相加，得

$$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C-D}{2}\right)$$
$$=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+C-B-D}{4}$$
$$\times\cos\frac{A+D-B-C}{4}.$$

又因为 $\cos\dfrac{A+C-B-D}{4}=\sin\dfrac{A+C}{2}$,

$$\cos\frac{A+D-B-C}{4}=\sin\frac{B+C}{2},$$

所以，就得到所要证明的等式。

1397. 若 $A+B+C+D=360^\circ$，证明

$$\sin A-\sin B+\sin C-\sin D$$
$$=4\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(B+C)$$
$$\times\sin\frac{1}{2}(C+A).$$

解

$$\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2},$$
$$\sin C-\sin D=2\sin\frac{C-D}{2}\cos\frac{C+D}{2}$$
$$=-2\sin\frac{C-D}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$$

将上面两式相加，得

$$\sin A-\sin B+\sin C-\sin D$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\sin\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C-D}{2}\right)$$
$$=4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+D-B-C}{4}$$
$$\times\cos\frac{A+C-B-D}{4}.$$

又因为 $\sin\dfrac{A+D-B-C}{4}=\cos\dfrac{B+C}{2}$,

$$\cos\frac{A+C-B-D}{4}=\sin\frac{A+C}{2},$$

所以，所要证明的等式成立。

1398. 证明

$$\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma-\cos\delta$$
$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

这里 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$.

解 $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

$$\cos\gamma-\cos\delta=-2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2},$$

并且 $\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2}=\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$,

因此 $\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma-\cos\delta$

$$=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$$
$$=-4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta-\gamma+\delta}{4}$$
$$\times\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{4}$$
$$=-4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$
$$\times\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}-\frac{\beta+\delta}{2}\right)$$
$$=-4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\delta}{2}$$
$$=-4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\left(-\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)$$
$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

1399. 若 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$，证明

$$\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)$$
$$=\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta+\delta).$$

解 $\sin(\alpha+\gamma)=-\sin[2\pi-(\alpha+\gamma)]$

$$=-\sin(\beta+\delta).$$

同样 $\sin(\alpha+\delta)=-\sin(\beta+\gamma)$.

因此 $\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)$

$$=\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta+\delta).$$

1400. 若 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$，证明

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\delta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$
$$\times\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}$$
$$=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}.$$

解 左边

$$=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\times\left(\sin\frac{\gamma+\delta}{2}+\sin\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\times\left(\sin\frac{\gamma+\delta}{2}-\sin\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\sin\frac{\gamma-\delta}{2}-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{4}\times\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha-\delta}{4}$$

$$=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}.$$

1401. 证明

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}.$$

设　$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$.

解　左边 $=\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}+\cos\dfrac{\gamma+\delta}{2}+\sin\dfrac{\gamma}{2}\sin\dfrac{\delta}{2}$.

又因为　$\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-\cos\dfrac{\gamma+\delta}{2}$,

所以上式变成

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}.$$

1402. 若 $\sin(A+B+C+D)=0$, 证明

$$\sin(A+C)\sin(A+D)=\sin(B+C)\sin(B+D).$$

解　$\sin(A+C)\sin(A+D)-\sin(B+C)\sin(B+D)$

$$=\frac{1}{2}[\cos(C-D)-\cos(2A+C+D)]-\frac{1}{2}[\cos(C-D)-\cos(2B+C+D)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(2B+C+D)-\cos(2A+C+D)]$$

$$=\sin(A-B)\sin(A+B+C+D)=0.$$

因此　$\sin(A+C)\sin(A+D)=\sin(B+C)\sin(B+D)$.

1403. 三角形的三个角 A、B、C 成等差数列, $\csc 2A$、$\csc 2B$、$\csc 2C$ 也成等差数列, 证明这些角的公差的余弦等于 $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

解　$A+B+C=180°$, 且由于这三个角成等差数列, 所以 $A+C=2B$, 因此 $3B=180°$, $B=60°$. 又

$$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2C}=\frac{2}{\sin 2B}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

若设角的公差是 x, 则由于 $A=60°-x$, $C=60°+x$,

$$\frac{\sin 2A+\sin 2C}{\sin 2A\sin 2C}=\frac{4}{\sqrt{3}},\text{所以}$$

$$\frac{2\sin(A+C)\cos(A-C)}{\sin(120°-2x)\sin(120°+2x)}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

因此　$\dfrac{\sqrt{3}\cos 2x}{\sin^2 120°-\sin^2 2x}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$,

$$\cos 2x=\frac{4}{3}(\sin^2 120°-\sin^2 2x)$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}-1+\cos^2 2x\right)=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\cos^2 2x.$$

解这个二次方程, 得

$$\cos 2x=1\quad\text{或}\quad\cos 2x=-\frac{1}{4}.$$

因为 $\cos 2x=1$ 不适合题意, 所以

$$\cos 2x=-\frac{1}{4}.$$

因此　$\cos^2 x=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{8}$,

$$\cos x=\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

1404. 证明

$$\frac{\left(\operatorname{tg}67\frac{1}{2}°-\operatorname{tg}7\frac{1}{2}°\right)\left(\operatorname{tg}127\frac{1}{2}°+\operatorname{tg}22\frac{1}{2}°\right)}{\left(\operatorname{tg}22\frac{1}{2}°+\operatorname{tg}7\frac{1}{2}°\right)\left(\operatorname{tg}127\frac{1}{2}°-\operatorname{tg}67\frac{1}{2}°\right)}=1.$$

解　左边

$$=\left[\frac{\sin\left(67\frac{1}{2}°-7\frac{1}{2}°\right)}{\cos 67\frac{1}{2}°\cos 7\frac{1}{2}°}\times\frac{\sin\left(127\frac{1}{2}°+22\frac{1}{2}°\right)}{\cos 127\frac{1}{2}°\cos 22\frac{1}{2}°}\right]$$

$$\div\left[\frac{\sin\left(22\frac{1}{2}^{\circ}+7\frac{1}{2}^{\circ}\right)}{\cos 22\frac{1}{2}^{\circ}\cos 7\frac{1}{2}^{\circ}}\times\frac{\sin\left(127\frac{1}{2}^{\circ}-67\frac{1}{2}^{\circ}\right)}{\cos 127\frac{1}{2}^{\circ}\cos 67\frac{1}{2}^{\circ}}\right]$$

$$=\frac{\sin 150^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}=1.$$

1405. 证明

$$\sec^2\frac{1}{2}\alpha\sec\alpha\left(\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\alpha-\operatorname{ctg}^2\frac{3\alpha}{2}\right)=8\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{3}{2}\alpha\right).$$

解 左边

$$=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{2}\right)\times\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\cos\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\right)\times\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}\times\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}\times\frac{\sin 2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

$$=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}\times\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}\times\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

$$=\frac{8}{\sin^2\frac{3\alpha}{2}}=8\csc^2\frac{3\alpha}{2}=8\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{3\alpha}{2}\right).$$

1406. 若 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，证明

$$\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

解 因为当 $x+y+z=0$ 时，

$$x^3+y^3+z^3=3xyz,$$

所以 $\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma=3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

又因为 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,$

从而 $$\cos^3\theta=\frac{\cos 3\theta+3\cos\theta}{4}.$$

所以 $\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma$

$$=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma+3\cos\alpha+3\cos\beta+3\cos\gamma).$$

由题意知 $\sum\cos\alpha=0$，因此

$$3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma),$$

即 $$\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

1407. 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta\cos\gamma}{\cos\beta}=\frac{\sin\beta-\sin\alpha\cos\gamma}{\cos\alpha}.$$

解 左边

$$=\frac{\sin(\beta+\gamma)-\sin\beta\cos\gamma}{\cos\beta}=\frac{\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma-\sin\beta\cos\gamma}{\cos\beta}$$

$$=\sin\gamma=\frac{\cos\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha}=\frac{\sin(\gamma+\alpha)-\sin\alpha\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{\sin\beta-\sin\alpha\cos\gamma}{\cos\alpha}.$$

1408. 若 $17A=180^{\circ}$，证明

$$\frac{\cos A\cos 13A}{\cos 3A+\cos 5A}=-\frac{1}{2}.$$

解 设所要证明的式子的左边为 X，则

$$2X=\frac{2\cos A\cos 13A}{\cos 3A+\cos 5A}=\frac{\cos 14A+\cos 12A}{\cos 3A+\cos 5A}.$$

又因为 $17A=180^{\circ}$，所以 $\cos 3A$ 和 $\cos 5A$ 分别等于 $-\cos 14A$ 和 $-\cos 12A$。因此

$$2X=\frac{\cos 14A+\cos 12A}{-(\cos 14A+\cos 12A)}=-1.$$

从而 $$X=-\frac{1}{2}.$$

1409. 设 $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$，证明

$$\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}=\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}^2\frac{\beta}{2}.$$

解 $2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\cos\theta=1-\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$

$$=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha+\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$$

$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{1-\cos\alpha\cos\beta},$$

$$2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta=1+\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$$

$$=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$$

$$=\frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{1-\cos\alpha\cos\beta}.$$

因此 $\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}$

$$=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\times 2\cos^2\frac{\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\times 2\sin^2\frac{\beta}{2}}=\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}^2\frac{\beta}{2}.$$

1410. 若 $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{n}{m}$，证明

$$\sqrt{\frac{m-n}{m+n}}+\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}=\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$$

设 $-\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4}.$

解 $\frac{n}{m}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，因此

$$\frac{m-n}{m+n}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$$

$$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\cos 2\alpha},$$

从而 $\sqrt{\frac{m-n}{m+n}}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$

同样 $\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$

因此 $\sqrt{\frac{m-n}{m+n}}+\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}=\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$

1411 若 $\sqrt{2}\cos\alpha=\cos\beta+\cos^3\beta$，
$\sqrt{2}\sin\alpha=\sin\beta-\sin^3\beta$，

证明 $\pm\sin(\beta-\alpha)=\cos 2\beta=\frac{1}{3}.$

解 从条件得

$$(\cos\beta+\cos^3\beta)^2+(\sin\beta-\sin^3\beta)^2$$
$$=2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha=2.$$

因此 $\cos^2\beta+\sin^2\beta+2\cos^4\beta-2\sin^4\beta$
$+\cos^6\beta+\sin^6\beta=2,$

$$1+2(\cos^2\beta-\sin^2\beta)(\cos^2\beta+\sin^2\beta)$$
$$+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)(\cos^4\beta-\cos^2\beta\sin^2\beta+\sin^4\beta)=2,$$

$$1+2\cos 2\beta+\cos^4\beta-\cos^2\beta\sin^2\beta+\sin^4\beta=2.$$

因此 $1+2\cos 2\beta+(\cos^2\beta-\sin^2\beta)^2+\cos^2\beta\sin^2\beta=2,$

$$1+2\cos 2\beta+\cos^2 2\beta+\frac{1}{4}\sin^2 2\beta=2,$$

$$4+8\cos 2\beta+4\cos^2 2\beta+1-\cos^2 2\beta=8,$$

即 $3\cos^2 2\beta+8\cos 2\beta-3=0.$

从上式解得

$$\cos 2\beta=\frac{1}{3}.$$

从条件又得

$$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{\cos\beta}-\frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sin\beta}$$
$$=(1+\cos^2\beta)-(1-\sin^2\beta)=1.$$

因此

$$\sqrt{2}(\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta)=\sin\beta\cos\beta,$$

$$\sqrt{2}\sin(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}\sin 2\beta$$
$$=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{3},$$

从而得 $\sin(\beta-\alpha)=\pm\frac{1}{3}.$

所以 $\pm\sin(\beta-\alpha)=\cos 2\beta=\frac{1}{3}.$

1412. 若 $\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2(ab+cd)}{a^2-b^2+c^2-d^2}$，

$$\mathrm{tg}\,2\beta=\frac{2(ac+bd)}{a^2-c^2+b^2-d^2},$$

证明 $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{b-c}{a+d}.$

这里 $a^2-d^2>b^2-c^2$，$b\geq c$，
且 2α 和 2β 都是锐角。

解 $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$

$$=\sqrt{[1-\cos(2\alpha-2\beta)]\div[1+\cos(2\alpha-2\beta)]}$$

$$=\sqrt{\frac{\sec 2\alpha\sec 2\beta-(1+\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,2\beta)}{\sec 2\alpha\sec 2\beta+(1+\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,2\beta)}}. \quad ①$$

另一方面

$$\sec 2\alpha\sec 2\beta=\sqrt{(1+\mathrm{tg}^2 2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2 2\beta)}$$

$$=\frac{(a-d)^2+(b+c)^2(a+d)^2+(b-c)^2}{(a^2-d^2)^2-(b^2-c^2)^2},$$

$$1+\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,2\beta$$
$$=\frac{(a+d)^2-(b-c)^2(a-d)^2+(b+c)^2}{(a^2-d^2)^2-(b^2-c^2)^2}.$$

将这些代入①，即得

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$$
$$=\sqrt{\frac{2(b-c)^2[(a-d)^2+(b+c)^2]}{2(a+d)^2[(a-d)^2+(b+c)^2]}}$$
$$=\frac{b-c}{a+d}.$$

1413. 若 $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\mathrm{tg}^3\frac{\beta}{2}$，$\mathrm{tg}\,\beta=2\,\mathrm{tg}\varphi$，证明 $\alpha+\beta=2n\pi+2\varphi$。

解 因为 $2\,\mathrm{tg}\varphi=\mathrm{tg}\,\beta$，所以

$$2\,\mathrm{tg}\varphi=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}}.$$

因此
$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}\right)}$$
$$=\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^3\frac{\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^4\frac{\beta}{2}}=\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}$$
$$=\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

因此
$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=n\pi+\varphi,$$
即
$$\alpha+\beta=2n\pi+2\varphi.$$

1414. 若 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，证明

$$\frac{\left(1-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1+\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta-1}{\sin\alpha+\sin\beta+1}.$$

解 左边

$$=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)}$$
$$=\frac{\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta}{(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)}$$
$$=\frac{(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta-(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)}{(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)-\cos\alpha\cos\beta}.$$

又因为 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\frac{\pi}{2}=0$，所以

$$\text{上式}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta-1}{\sin\alpha+\sin\beta+1}.$$

1415. 若 x、y、z 成等差数列，证明

$$\frac{\mathrm{tg}y}{\mathrm{tg}(y-z)}=\frac{\sin x+\sin z}{\sin x-\sin z}=\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(x+z)}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(x-z)}.$$

解
$$\frac{\mathrm{tg}y}{\mathrm{tg}(y-z)}=\frac{\sin y\cos(y-z)}{\cos y\sin(y-z)}$$
$$=\frac{\sin(2y-z)+\sin z}{\sin(2y-z)-\sin z}.$$

又因为 x、y、z 成等差数列，所以 $2y=x+z$，代入上式即得

$$\frac{\mathrm{tg}y}{\mathrm{tg}(y-z)}=\frac{\sin x+\sin z}{\sin x-\sin z}=\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(x+z)}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(x-z)}.$$

1416. 证明在三角形 ABC 中

$$\frac{1-\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C}{\cos^2A}+\frac{1-\mathrm{tg}\,C\,\mathrm{tg}\,A}{\cos^2B}$$
$$+\frac{1-\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B}{\cos^2C}=-\frac{3}{\cos A\cos B\cos C}.$$

解
$$\frac{1-\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C}{\cos^2A}$$
$$=\frac{\cos B\cos C-\sin B\sin C}{\cos^2A\cos B\cos C}$$
$$=\frac{\cos(B+C)}{\cos^2A\cos B\cos C}=-\frac{\cos A}{\cos^2A\cos B\cos C}$$
$$=-\frac{1}{\cos A\cos B\cos C}.$$

上面这个结果是对称的，根据它显然有所要证明的结果。

1417. 若 $A+B+C=180^\circ$，证明

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}$$
$$=2.$$

解
$$\text{左边}=\frac{p}{\sin A\sin B\sin C},$$

这里 $p=\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C$

$=\frac{1}{2}[\sin 2A+\sin 2B-2\sin C\cos(A+B)]$

$=\frac{1}{2}[2\sin(A+B)\cos(A-B)$

$-2\sin C\cos(A+B)]$

$=\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$=2\sin A\sin B\sin C.$

因此 左边$=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}=2.$

1418. 若 $A+B+C=180°$，证明

$$\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{2\cos A\cos B\cos C}.$$

解 因为$A+B=180°-C$，所以$\operatorname{tg}(A+B)=-\operatorname{tg}C$. 由此得

$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C.$

又 $\sin A+\sin B+\sin C$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

因此由除法得

$$\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}{16\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{16\cos A\cos B\cos C\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{2\cos A\cos B\cos C}.$$

1419. 证明 $2\sin 7A\cos A+16\sin A\cos^3 A=\sin 6A+4\sin 2A(1+2\cos^3 2A)$.

解 $2\sin 7A\cos A=\sin 8A+\sin 6A.$

因此 $2\sin 7A\cos A+16\sin A\cos^3 A$

$=\sin 6A+\sin 8A+16\sin A\cos^3 A$

$=\sin 6A+2\sin 4A\cos 4A+8\sin 2A\cos^2 A$

$=\sin 6A+4\sin 2A\cos 2A\cos 4A$

$+8\sin 2A\cos^2 A$

$=\sin 6A+4\sin 2A(2\cos^2 A+\cos 2A\cos 4A)$

$=\sin 6A+4\sin 2A[1+\cos 2A(1+\cos 4A)]$

$=\sin 6A+4\sin 2A(1+2\cos^3 2A).$

1420. 若 $\operatorname{tg}(A+B)=3\operatorname{tg}A$，证明 $\sin(2A+2B)+\sin 2A=2\sin 2B$.

解 因为 $\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{3\sin A}{\cos A}$，所以

$\sin(A+B)\cos A-\cos(A+B)\sin A$

$=2\sin A\cos(A+B).$

因此 $\sin(A+B-A)=2\sin A\cos(A+B)$,

即 $\sin B=2\sin A\cos(A+B)$

$=\sin(2A+B)-\sin B.$

因此 $2\sin B=\sin(2A+B)$,

$2\sin B\cos B=\sin(2A+B)\cos B$,

$\sin 2B=\frac{1}{2}[\sin(2A+2B)+\sin 2A]$,

即 $\sin(2A+2B)+\sin 2A=2\sin 2B.$

1421. 若

$2\sec\theta=\sec(\theta+2\alpha)+\sec(\theta-2\alpha)$,

证明 $\cos^2\theta=2\cos^2\alpha.$

解 $\frac{2}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos(\theta+2\alpha)}+\frac{1}{\cos(\theta-2\alpha)}$

$$=\frac{2\cos\theta\cos 2\alpha}{\cos(\theta+2\alpha)\cos(\theta-2\alpha)}$$

$$=\frac{2\cos\theta\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(\cos 2\theta+\cos 4\alpha)}$$

$$=\frac{2\cos\theta\cos 2\alpha}{\cos^2\theta-\sin^2 2\alpha}.$$

因此 $\cos^2\theta-\sin^2 2\alpha=\cos^2\theta\cos 2\alpha$,

$\cos^2\theta(1-\cos 2\alpha)=\sin^2 2\alpha$

$=4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=2(1-\cos 2\alpha)\cos^2\alpha.$

因此 $\cos^2\theta=2\cos^2\alpha.$

1422. 证明

$\cos 11A+3\cos 9A+3\cos 7A+\cos 5A$

$=16\cos^3 A\cos\left(4A+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4A-\frac{\pi}{4}\right).$

解 $\cos 11A+3\cos 9A+3\cos 7A+\cos 5A$

$=(\cos 11A+\cos 5A)+3(\cos 9A+\cos 7A)$

$=2\cos 8A\cos 3A+6\cos 8A\cos A$

$=2\cos 8A(\cos 3A+3\cos A)$

$=2\cos 8A(4\cos^3 A-3\cos A+3\cos A)$

$=8\cos^3 A\cos 8A=8\cos^3 A(2\cos^2 4A-1)$

$=16\cos^3 A\left(\cos^2 4A-\frac{1}{2}\right)$

$=16\cos^3 A\left(\cos^2 4A-\cos^2\frac{\pi}{4}\right)$

$=16\cos^3 A\left(\cos 4A-\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$\times\left(\cos 4A+\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$=16\cos^3 A\left[-2\sin\left(2A+\frac{\pi}{8}\right)\right.$

$\left.\times\sin\left(2A-\frac{\pi}{8}\right)\right]$

$\times\left[2\cos\left(2A+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(2A-\frac{\pi}{8}\right)\right]$

$=16\cos^3 A\left[-2\sin\left(2A-\frac{\pi}{8}\right)\right.$

$\left.\times\cos\left(2A-\frac{\pi}{8}\right)\right]$

$\times\left[2\sin\left(2A+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(2A+\frac{\pi}{8}\right)\right]$

$=16\cos^3 A\left[-\sin\left(4A-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\times\sin\left(4A+\frac{\pi}{4}\right)$

$=16\cos^3 A\sin\left(\frac{\pi}{4}-4A\right)\sin\left(4A+\frac{\pi}{4}\right)$

$=16\cos^3 A\cos\left(4A+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4A-\frac{\pi}{4}\right).$

1423. 若 $\frac{\cos x}{a_1}=\frac{\cos 2x}{a_2}=\frac{\cos 3x}{a_3}$，证明

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{2a_2-a_1-a_3}{4a_2}.$$

解 设 $\frac{\cos x}{a_1}=\frac{\cos 2x}{a_2}=\frac{\cos 3x}{a_3}=\frac{1}{k}$，

则　$a_1=k\cos x$，　$a_2=k\cos 2x$，

$a_3=k\cos 3x$.

$\therefore\ \frac{2a_2-a_1-a_3}{4a_2}$

$=\frac{2\cos 2x-\cos x-\cos 3x}{4\cos 2x}$

$=\frac{2\cos 2x-2\cos 2x\cos x}{4\cos 2x}$

$=\frac{1-\cos x}{2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2}=\sin^2\frac{x}{2}$，

即　$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{2a_2-a_1-a_3}{4a_2}.$

1424. 若 $\frac{\sin x}{a_1}=\frac{\sin 3x}{a_3}=\frac{\sin 5x}{a_5}$，证明

$$\frac{a_1-2a_3+a_5}{a_3}=\frac{a_3-3a_1}{a_1}.$$

解 设 $\frac{\sin x}{a_1}=\frac{\sin 3x}{a_3}=\frac{\sin 5x}{a_5}=\frac{1}{k}$，

则　$a_1=k\sin x$，　$a_3=k\sin 3x$，

$a_5=k\sin 5x$.

因此　$\frac{a_1-2a_3+a_5}{a_3}$

$=\frac{\sin x-2\sin 3x+\sin 5x}{\sin 3x}$

$=\frac{2\sin 3x\cos 2x-2\sin 3x}{\sin 3x}$

$=2(\cos 2x-1)=2(1-2\sin^2 x-1)$

$=-4\sin^2 x$.

又　$\frac{a_3-3a_1}{a_1}=\frac{\sin 3x-3\sin x}{\sin x}$

$=\frac{3\sin x-4\sin^3 x-3\sin x}{\sin x}=-4\sin^2 x$.

所以　$\frac{a_1-2a_3+a_5}{a_3}=\frac{a_3-3a_1}{a_1}.$

1425. 若

$$\frac{\cos x}{a_1}=\frac{\cos(x+\theta)}{a_2}=\frac{\cos(x+2\theta)}{a_3}=\frac{\cos(x+3\theta)}{a_4},$$

证明　$\frac{a_1+a_3}{a_2}=\frac{a_2+a_4}{a_3}.$

解 设 $\frac{\cos x}{a_1}=\frac{\cos(x+\theta)}{a_2}=\frac{\cos(x+2\theta)}{a_3}$

$=\frac{\cos(x+3\theta)}{a_4}=\frac{1}{k}$，

则　$a_1=k\cos x$，　$a_2=k\cos(x+\theta)$，

$a_3=k\cos(x+2\theta)$，　$a_4=k\cos(x+3\theta)$.

$\therefore\ \frac{a_1+a_3}{a_2}=\frac{\cos x+\cos(x+2\theta)}{\cos(x+\theta)}$

$=\frac{2\cos(x+\theta)\cos\theta}{\cos(x+\theta)}=2\cos\theta$，

$\frac{a_2+a_4}{a_3}=\frac{\cos(x+\theta)+\cos(x+3\theta)}{\cos(x+2\theta)}$

$=\frac{2\cos(x+2\theta)\cos\theta}{\cos(x+2\theta)}=2\cos\theta$，

$\therefore\ \frac{a_1+a_3}{a_2}=\frac{a_2+a_4}{a_3}.$

1426. 若 $a\cos\varphi=b\cos\theta$，证明

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\varphi+\theta)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\varphi-\theta)=\frac{a+b}{a-b}.$$

解　因为 $a\cos\varphi=b\cos\theta$，所以

$$\frac{a}{b}=\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}.$$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{\cos\theta+\cos\varphi}{\cos\theta-\cos\varphi}$$

$$=\frac{2\cos\frac{\varphi+\theta}{2}\cos\frac{\varphi-\theta}{2}}{2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\varphi+\theta)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\varphi-\theta).$$

即　$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\varphi+\theta)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\varphi-\theta)=\frac{a+b}{a-b}$.

1427. 证明 $(\cos\theta+\sin\theta)(\cos2\theta+\sin2\theta)$
$=\cos\theta+\cos\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)$.

解　$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos2\theta+\sin2\theta)$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\times\sqrt{2}\left(\cos2\theta\cos\frac{\pi}{4}+\sin2\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\theta+\cos\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right).$$

1428. 证明　$[\operatorname{tg}(A+B)+\operatorname{tg}(A-B)]\times(\cos2A+\cos2B)=2\sin2A$.

解　$\operatorname{tg}(A+B)+\operatorname{tg}(A-B)$

$$=\frac{\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin(A-B)\cos(A+B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)}$$
$$=\frac{2\sin[(A+B)+(A-B)]}{2\cos(A+B)\cos(A-B)}$$
$$=\frac{2\sin2A}{\cos2A+\cos2B}.$$

因此　左边$=2\sin2A$.

1429. 证明

$4\sin(\theta-\alpha)\sin(m\theta-\alpha)\cos(\theta-m\theta)$
$=1+\cos(2\theta-2m\theta)-\cos(2\theta-2\alpha)$
$-\cos(2m\theta-2\alpha)$.

解　$4\sin(\theta-\alpha)\sin(m\theta-\alpha)\cos(\theta-m\theta)$

$$=2\cos(\theta-m\theta)[\cos(\theta-m\theta)-\cos(\theta+m\theta-2\alpha)]$$
$$=2\cos^2(\theta-m\theta)-2\cos(\theta-m\theta)\times\cos(\theta+m\theta-2\alpha)$$
$$=1+\cos2(\theta-m\theta)-[\cos(2\theta-2\alpha)+\cos(2m\theta-2\alpha)]$$
$$=1+\cos(2\theta-2m\theta)-\cos(2\theta-2\alpha)-\cos(2m\theta-2\alpha).$$

1430. 证明

$\cos(\alpha+\beta)\sin\beta-\cos(\alpha+\gamma)\sin\gamma$
$=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin(\alpha+\gamma)\cos\gamma$.

解　左边

$$=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta+\beta)-\sin(\alpha+\beta-\beta)]$$
$$-\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\gamma+\gamma)-\sin(\alpha+\gamma-\gamma)]$$
$$=\frac{1}{2}\sin(\alpha+2\beta)-\frac{1}{2}\sin(\alpha+2\gamma).$$

$$右边=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta+\beta)+\sin(\alpha+\beta-\beta)]$$
$$-\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\gamma+\gamma)+\sin(\alpha+\gamma-\gamma)]$$
$$=\frac{1}{2}\sin(\alpha+2\beta)-\frac{1}{2}\sin(\alpha+2\gamma).$$

因此　左边=右边.

别解　$[\cos(\alpha+\beta)\sin\beta-\cos(\alpha+\gamma)\sin\gamma]$
$-[\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin(\alpha+\gamma)\cos\gamma]$
$=[\sin(\alpha+\gamma)\cos\gamma-\cos(\alpha+\gamma)\sin\gamma]$
$-[\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta]$
$=\sin(\alpha+\gamma-\gamma)-\sin(\alpha+\beta-\beta)$
$=\sin\alpha-\sin\alpha=0$.

$\therefore$　$\cos(\alpha+\beta)\sin\beta-\cos(\alpha+\gamma)\sin\gamma$
$=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin(\alpha+\gamma)\cos\gamma$.

1431. 证明 $\sin(\alpha+\beta-2\gamma)\cos\beta-\sin(\alpha+\gamma-2\beta)\cos\gamma=\sin(\beta-\gamma)[\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\alpha+\gamma-\beta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)]$.

解　左边

$$=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+2\beta-2\gamma)+\sin(\alpha-2\gamma)$$
$$-\sin(\alpha+2\gamma-2\beta)-\sin(\alpha-2\beta)].$$

$$右边=\frac{1}{2}[\sin(2\beta-\alpha)+\sin(\alpha-2\gamma)]$$
$$+\frac{1}{2}[\sin\alpha+\sin(2\beta-2\gamma-\alpha)]$$
$$+\frac{1}{2}[-\sin\alpha+\sin(2\beta-2\gamma+\alpha)]$$
$$=\frac{1}{2}[\sin(2\beta-\alpha)+\sin(\alpha-2\gamma)$$
$$+\sin(2\beta-2\gamma-\alpha)$$
$$+\sin(2\beta-2\gamma+\alpha)].$$

所以　左边=右边.

1432. 证明

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta$$
$$=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin\gamma.$$

解　$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)$

$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+2\beta+\gamma)].$$

$$\sin\alpha\sin\gamma=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)].$$

因此　$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin\gamma$

$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\gamma)-\cos(\alpha+2\beta+\gamma)]$$
$$=\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta.$$

1433. 证明

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)$$
$$+\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)$$
$$=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\gamma).$$

解　$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)$

$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)$$
$$-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{1}{4}\sin2(\alpha-\beta)-\frac{1}{4}(\sin2\alpha-\sin2\beta).$$

同样　$\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)$

$$=\frac{1}{4}\sin2(\beta-\gamma)-\frac{1}{4}(\sin2\beta-\sin2\gamma),$$

$\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)$

$$=\frac{1}{4}\sin2(\gamma-\alpha)-\frac{1}{4}(\sin2\gamma-\sin2\alpha).$$

因此　左边$=\frac{1}{4}[\sin2(\alpha-\beta)+\sin2(\beta-\gamma)$

$$+\sin2(\gamma-\alpha)]$$
$$=\frac{1}{4}[2\sin(\alpha-\gamma)\cos(\gamma+\alpha-2\beta)$$
$$+2\sin(\gamma-\alpha)\cos(\gamma-\alpha)]$$
$$=\frac{1}{2}\sin(\gamma-\alpha)[\cos(\gamma-\alpha)$$
$$-\cos(\gamma+\alpha-2\beta)]$$
$$=\frac{1}{2}\sin(\gamma-\alpha)[2\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\beta)]$$
$$=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\gamma).$$

1434. 证明

$$\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)$$
$$+\cos(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha)=0.$$

解　左边

$$=\frac{1}{2}(\sin2\alpha-\sin2\beta)+\frac{1}{2}(\sin2\beta-\sin2\gamma)$$
$$+\frac{1}{2}(\sin2\gamma-\sin2\alpha)=0.$$

1435. 证明

$$\sin(\delta-\beta)\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\gamma)\sin(\alpha-\delta)$$
$$+\sin(\gamma-\delta)\sin(\alpha-\beta)=0.$$

解　左边

$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta)-\cos(\alpha-\beta-\gamma+\delta)]$$
$$+\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta+\gamma-\delta)-\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta)]$$
$$+\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta-\gamma+\delta)$$
$$-\cos(\alpha-\beta+\gamma-\delta)]=0.$$

1436. 证明

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\sin\beta$$
$$\times\sin(\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\alpha-\beta)$$
$$+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta-\gamma)=0.$$

解　左边$=\frac{1}{2}[\cos(\gamma+\alpha-\beta)$

$$-\cos(\alpha+\beta-\gamma)]\cos(\beta+\gamma-\alpha)$$
$$+\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma-\alpha)]$$
$$\times\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\frac{1}{2}[\cos(\beta+\gamma-\alpha)$$
$$-\cos(\gamma+\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$=\frac{1}{2}\cos(\beta+\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\alpha-\beta)$$
$$-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma-\alpha)$$
$$+\frac{1}{2}\cos(\gamma+\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$-\frac{1}{2}\cos(\beta+\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\alpha-\beta)$$
$$+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma-\alpha)$$
$$-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta-\gamma)\cos(\gamma+\alpha-\beta)$$
$$=0.$$

1437. 证明

$$\sin A\sin B\sin(A-B)+\sin B\sin C\sin(B-C)$$
$$+\sin C\sin A\sin(C-A)$$

$=\frac{1}{4}[\sin(2A-2B)+\sin(2B-2C)$
$+\sin(2C-2A)]$.

解　$\sin A\sin B\sin(A-B)$

$=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\sin(A-B)$

$=\frac{1}{2}\sin(A-B)\cos(A-B)$

$-\frac{1}{2}\cos(A+B)\sin(A-B)$

$=\frac{1}{4}\sin(2A-2B)-\frac{1}{4}(\sin 2A-\sin 2B)$

$=\frac{1}{4}\sin(2A-2B)-\frac{1}{4}\sin 2A+\frac{1}{4}\sin 2B$.

同样　$\sin B\sin C\sin(B-C)$

$=\frac{1}{4}\sin(2B-2C)-\frac{1}{4}\sin 2B+\frac{1}{4}\sin 2C$,

$\sin C\sin A\sin(C-A)$

$=\frac{1}{4}\sin(2C-2A)-\frac{1}{4}\sin 2C+\frac{1}{4}\sin 2A$.

将上面这几个式子两边相加，得

左边$=\frac{1}{4}[\sin(2A-2B)+\sin(2B-2C)$
$+\sin(2C-2A)]$.

1438. 证明

$\sin(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)$
$+\sin(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)$
$+\sin(C-A)\cos(A-B)\cos(B-C)$
$=-\frac{1}{4}[\sin(2A-2B)+\sin(2B-2C)$
$+\sin(2C-2A)]$.

解　$\sin(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)$

$=\frac{1}{2}\sin(A-B)[\cos(A-B)$
$+\cos(A+B-2C)]$

$=\frac{1}{2}\sin(A-B)\cos(A-B)$

$+\frac{1}{2}\sin(A-B)\cos(A+B-2C)$

$=\frac{1}{4}\sin(2A-2B)+\frac{1}{4}[\sin(2A-2C)$
$+\sin(2C-2B)]$

$=\frac{1}{4}[\sin(2A-2B)-\sin(2B-2C)$
$-\sin(2C-2A)]$.

同样　$\sin(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)$

$=\frac{1}{4}[\sin(2B-2C)-\sin(2C-2A)$
$-\sin(2A-2B)]$,

$\sin(C-A)\cos(A-B)\cos(B-C)$

$=\frac{1}{4}[\sin(2C-2A)-\sin(2A-2B)$
$-\sin(2B-2C)]$.

将上面这几个式子两边相加，就得到所要证明的等式.

1439. 证明

$\cos\beta\cos\gamma\sin(\gamma-\beta)+\cos\gamma\cos\alpha\sin(\alpha-\gamma)$
$+\cos\alpha\cos\beta\sin(\beta-\alpha)$
$=\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)$.

解　$\cos\beta\cos\gamma\sin(\gamma-\beta)$

$=\frac{1}{2}[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)]\sin(\gamma-\beta)$

$=\frac{1}{2}\cos(\beta+\gamma)\sin(\gamma-\beta)$

$-\frac{1}{2}\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma)$

$=\frac{1}{4}(\sin 2\gamma-\sin 2\beta)-\frac{1}{4}\sin(2\beta-2\gamma)$

$=\frac{1}{4}\sin 2\gamma-\frac{1}{4}\sin 2\beta-\frac{1}{4}\sin(2\beta-2\gamma)$.

同样　$\cos\gamma\cos\alpha\sin(\alpha-\gamma)$

$=\frac{1}{4}\sin 2\alpha-\frac{1}{4}\sin 2\gamma-\frac{1}{4}\sin(2\gamma-2\alpha)$,

$\cos\alpha\cos\beta\sin(\beta-\alpha)$

$=\frac{1}{4}\sin 2\beta-\frac{1}{4}\sin 2\alpha-\frac{1}{4}\sin(2\alpha-2\beta)$.

将上面这些式子两边相加，得

左边$=-\frac{1}{4}\sin(2\beta-2\gamma)-\frac{1}{4}\sin(2\gamma-2\alpha)$

$-\frac{1}{4}\sin(2\alpha-2\beta)$

$=-\frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)\cos(\alpha+\beta-2\gamma)$

$-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)[\cos(\alpha+\beta-2\gamma)$
$-\cos(\alpha-\beta)]$

$=\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)$.

1440. 若 α、β、γ 和 x 是任意角，证明

$\sin(2\alpha+x)+\sin(2\beta+x)+\sin(2\gamma+x)$
$-\sin(2\alpha+2\beta+2\gamma+3x)$
$=4\sin(\alpha+\beta+x)$
$\times\sin(\beta+\gamma+x)\sin(\gamma+\alpha+x)$。

解 $\sin(2\alpha+x)+\sin(2\beta+x)$
$=2\sin(\alpha+\beta+x)\cos(\alpha-\beta)$，
$\sin(2\gamma+x)-\sin(2\alpha+2\beta+2\gamma+3x)$
$=-2\sin(\alpha+\beta+x)\cos(\alpha+\beta+2\gamma+2x)$。

将这两个式子两边相加，得

左边$=2\sin(\alpha+\beta+x)[\cos(\alpha-\beta)$
$-\cos(\alpha+\beta+2\gamma+2x)]$
$=2\sin(\alpha+\beta+x)\times2\sin(\beta+\gamma+x)$
$\times\sin(\alpha+\gamma+x)$
$=4\sin(\alpha+\beta+x)\sin(\beta+\gamma+x)$
$\times\sin(\gamma+\alpha+x)$。

1441. 证明

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}+\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=0.$$

解 将左边的分式用 P 来表示，则

$P\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)$
$=-\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)-\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)$
$-\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)$
$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)-\cos(\gamma+\alpha-\beta)]$
$+\frac{1}{2}[\cos(\beta+\gamma-\alpha)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)]$
$+\frac{1}{2}[\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\beta+\gamma-\alpha)]$
$=0$。

因此 $P=0$。

1442. 证明

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin(\theta-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)}+\frac{\sin(\theta-\gamma)}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=0.$$

解 将左边的分数用 P 来表示，则

$P\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)$
$=-\sin(\theta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)$
$-\sin(\theta-\beta)\sin(\gamma-\alpha)$
$-\sin(\theta-\gamma)\sin(\alpha-\beta)$
$=\frac{1}{2}[\cos(\theta-\alpha+\beta-\gamma)-\cos(\theta-\alpha-\beta+\gamma)]$
$+\frac{1}{2}[\cos(\theta-\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\theta+\alpha-\beta-\gamma)]$
$+\frac{1}{2}[\cos(\theta+\alpha-\beta-\gamma)$
$-\cos(\theta-\alpha+\beta-\gamma)]=0$。

因此 $P=0$。

1443. 若 $\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}$，证明

$$\operatorname{tg}z=\frac{\sin x\sin y}{\cos x+\cos y}.$$

解 $$\operatorname{tg}z=\frac{2\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}}$$
$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{y}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2}}$$
$$=\frac{\sin x\sin y}{2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)}$$
$$=\frac{\sin x\sin y}{\cos x+\cos y}.$$

1444. 若 $x\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=x\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)=x\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\gamma-\alpha)$，证明

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

解 从 $x\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$
$=x\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)$

求 x，得 $$x=\frac{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\beta+\gamma)}$$
$$=\frac{\sin\left(\beta-\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\beta+\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}.$$

同样，从 $x\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)$
$=x\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\gamma-\alpha)$

得 $$x=\frac{\sin\left(\gamma-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)},$$

从
$$x\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\gamma-\alpha)=x\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

求得
$$x=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}.$$

因此
$$\frac{\sin\left(\beta-\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\beta+\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\gamma-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}.$$

从
$$\frac{\sin\left(\beta-\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\beta+\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\gamma-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

得
$$\frac{\sin\left(\beta+\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)+\sin\left(\beta-\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\beta+\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)-\sin\left(\beta-\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sin\left(\gamma-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\sin\left(\gamma-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)},$$

$$\therefore\quad \frac{2\sin\beta\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}}{2\cos\beta\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}=\frac{2\sin\gamma\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\gamma\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

$$\therefore\quad \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

同样，从
$$\frac{\sin\left(\gamma-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\gamma-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)},$$

得
$$\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}.$$

因此
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

1445. 若 $\sin^2\varphi=\dfrac{\cos 2\alpha\cos 2\alpha'}{\cos^2(\alpha+\alpha')}$，证明
$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha'\right)}.$$

解 $\sin^2\varphi=\dfrac{\cos 2\alpha\cos 2\alpha'}{\cos^2(\alpha+\alpha')}$.

因此
$$\cos^2\varphi=\frac{\cos^2(\alpha+\alpha')-\cos 2\alpha\cos 2\alpha'}{\cos^2(\alpha+\alpha')}$$
$$=\frac{1+\cos 2(\alpha+\alpha')-\cos 2(\alpha+\alpha')-\cos 2(\alpha-\alpha')}{2\cos^2(\alpha+\alpha')}$$
$$=\frac{\sin^2(\alpha-\alpha')}{\cos^2(\alpha+\alpha')},$$

即
$$\cos\varphi=\pm\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\cos(\alpha+\alpha')}.$$

上式的右边若取正号，则
$$\cos\varphi=\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\cos(\alpha+\alpha')}.$$

因此
$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$$
$$=\frac{\cos(\alpha+\alpha')-\sin(\alpha-\alpha')}{\cos(\alpha+\alpha')+\sin(\alpha-\alpha')}$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\alpha'\right)-\sin(\alpha-\alpha')}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\alpha'\right)+\sin(\alpha-\alpha')}$$
$$=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha'\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha'\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha'\right)}.$$

若取负号，则
$$\cos\varphi=-\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\cos(\alpha+\alpha')}$$

因此
$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$$
$$=\frac{\cos(\alpha+\alpha')+\sin(\alpha-\alpha')}{\cos(\alpha+\alpha')-\sin(\alpha-\alpha')}$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\alpha'\right)+\sin(\alpha-\alpha')}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\alpha'\right)-\sin(\alpha-\alpha')}$$
$$=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha'\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha'\right)}$$
$$=\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{4}\pi-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{4}\pi-\alpha'\right)}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\alpha'\right)},$$

因此　$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi=\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi\pm\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi\pm\alpha'\right)}$.

1446. 证明

$$\frac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}A\operatorname{ctg}\frac{1}{2}B.$$

解

$$左边=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}A+2\sin\left(\frac{1}{2}A+B\right)\sin\frac{1}{2}A}{2\cos^2\frac{1}{2}A-2\cos\left(\frac{1}{2}A+B\right)\cos\frac{1}{2}A}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}A\left[\sin\frac{1}{2}A+\sin\left(\frac{1}{2}A+B\right)\right]}{\cos\frac{1}{2}A\left[\cos\frac{1}{2}A-\cos\left(\frac{1}{2}A+B\right)\right]}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{1}{2}A\frac{2\sin\left(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B\right)\cos\frac{1}{2}B}{2\sin\left(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B\right)\sin\frac{1}{2}B}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{1}{2}A\operatorname{ctg}\frac{1}{2}B.$$

1447. 证明

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{2(\cos B-\cos A)}{\sin A\sin B}.$$

解　左边

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}-\frac{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)^2-\left(\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)^2}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\sin A\sin B}$$

$$=\frac{2(\cos B-\cos A)}{\sin A\sin B}.$$

1448. 证明，当

$$\frac{\cos\theta\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\left(\theta-\frac{\varphi}{2}\right)}+\frac{\cos\varphi\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\varphi-\frac{\theta}{2}\right)}=1$$

时，有 $\cos\theta+\cos\varphi=1$.

解　由已知条件，

$$\frac{\cos\left(\theta+\frac{\varphi}{2}\right)+\cos\left(\theta-\frac{\varphi}{2}\right)}{2\cos\left(\theta-\frac{\varphi}{2}\right)}+\frac{\cos\left(\varphi+\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\varphi-\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\varphi-\frac{\theta}{2}\right)}=1,$$

故
$$\frac{\cos\left(\theta+\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\theta-\frac{\varphi}{2}\right)}=-\frac{\cos\left(\varphi+\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\varphi-\frac{\theta}{2}\right)},$$

$$\frac{\cos\theta\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\theta\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\varphi\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\varphi\cos\frac{\theta}{2}},$$

$$\frac{\cos\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\varphi},$$

$$\cos\theta\cos\varphi=4\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$=(1-\cos\varphi)(1-\cos\theta),$$

因此有　　$\cos\theta+\cos\varphi=1$.

1449. 已知 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}=\frac{\sin3\beta-\sin3\gamma}{\cos3\gamma-\cos3\beta}.$$

解　原式的右边

$$=\frac{2\sin\frac{3}{2}(\beta-\gamma)\cos\frac{3}{2}(\beta+\gamma)}{2\sin\frac{3}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{3}{2}(\beta+\gamma)}$$

$$=\frac{\cos\frac{3}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{3}{2}(\beta+\gamma)}=\operatorname{ctg}\frac{3}{2}(\beta+\gamma).$$

因为 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，故

$$\frac{3}{2}(\beta+\gamma)=\frac{3\pi}{2}-\frac{3}{2}\alpha.$$

因此　　$\operatorname{ctg}\frac{3}{2}(\beta+\gamma)=\operatorname{tg}\frac{3}{2}\alpha.$

第五章　三角形与三角函数

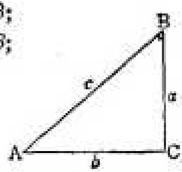
1. 直角三角形

1450. 已知有直角三角形 ABC (C 为直角)，证明

(1) $a=c\sin A=c\cos B$;

(2) $b=c\cos A=c\sin B$;

(3) $a^2+b^2=c^2$.



解　(1) $\sin A=\dfrac{a}{c}$,

$$\cos B=\frac{a}{c},$$

$$\therefore\quad a=c\sin A=c\cos B.$$

(2) $\cos A=\dfrac{b}{c}$, $\sin B=\dfrac{b}{c}$.

$$\therefore\quad b=c\cos A=c\sin B.$$

(3) 即勾股定理。

1451. 在直角三角形 ABC(C 为直角)中，证明

(1) $\sin 2A=\sin 2B$;

(2) $\cos 2A+\cos 2B=0$;

(3) $\sin(A-B)+\cos 2A=0$.

解　(1) 因为 $2A+2B=180°$，所以

$$\sin 2A=\sin 2B.$$

(2) $\cos 2A+\cos 2B=(2\cos^2 A-1)+(2\cos^2 B-1)$,

因为 $A+B=90°$，所以 $\cos B=\sin A$，因而

$$\begin{aligned}上式&=2\cos^2 A-1+2\sin^2 A-1\\&=2(\cos^2 A+\sin^2 A)-2\\&=2-2=0.\end{aligned}$$

(3) 在 $\sin A\cos B-\cos A\sin B+2\cos^2 A-1$ 中用 $\cos B=\sin A$, $\sin B=\cos A$ 代入，

$$\begin{aligned}上式&=\sin^2 A-\cos^2 A+2\cos^2 A-1\\&=\sin^2 A+\cos^2 A-1=0.\end{aligned}$$

1452. 证明：在 C 为直角的三角形 ABC 中，

$$\cos 2B=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}.$$

解　$$\begin{aligned}\cos 2B&=\cos^2 B-\sin^2 B\\&=\sin^2 A-\sin^2 B,\end{aligned}$$

因为 $\sin^2 A+\sin^2 B=1$，所以

$$\cos 2B=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}.$$

1453. 证明：在 C 为直角的三角形 ABC 中，

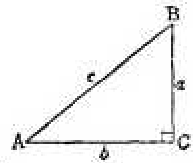
$$\operatorname{tg} B=\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} C.$$

解　因为 $C=90°$，所以 $\operatorname{ctg} C=0$，从而 $B+A=90°$，$\operatorname{tg} B=\operatorname{ctg} A$,

$$\therefore\quad \operatorname{tg} B=\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} C.$$

1454. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，证明

$$\sin 2A=\frac{2ab}{c^2}.$$



解

$$\begin{aligned}\sin 2A&=2\sin A\cos A\\&=2\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}=\frac{2ab}{c^2}.\end{aligned}$$

1455. 证明：在 C 为直角的三角形 ABC 中，

$$(\sin A-\sin B)^2+(\cos A+\cos B)^2=2.$$

解　原式左边

$$\begin{aligned}&=\sin^2 A-2\sin A\sin B+\sin^2 B\\&\quad+\cos^2 A+2\cos A\cos B+\cos^2 B\\&=(\sin^2 A+\cos^2 B)+(\sin^2 B+\cos^2 B)\\&\quad+(-2\sin A\sin B+2\cos A\cos B)\\&=2+2\cos(A+B)\\&=2+2\cos 90°=2.\end{aligned}$$

1456. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，证明

$$\sin(A-B)+\sin(2A+C)=0.$$

解　$$\begin{aligned}\sin(A-B)&=-\sin(180°+A-B)\\&=-\sin(A+B+C+A-B)\\&=-\sin(2A+C),\end{aligned}$$

因此　$\sin(A-B)+\sin(2A+C)=0$.

1457. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，证明

$$\cos 2A=\frac{b^2-a^2}{c^2}.$$

解　$$\begin{aligned}\cos 2A&=\cos^2 A-\sin^2 A\\&=\frac{b^2}{c^2}-\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2-a^2}{c^2}.\end{aligned}$$

1458. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，证明

$$\cos(A-B)+\cos(2A+C)=0.$$

解

原式的左边

$$=2\cos\frac{1}{2}(3A-B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B+C),$$

由于 $\frac{1}{2}(A+B+C)=90^\circ$,

$$\therefore\quad \cos(A-B)+\cos(2A+C)=0.$$

1459. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，证明

$$\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2=\frac{a+c}{c}.$$

解 $\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2$

$$=\left(\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\right)+2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$=1+\sin A=1+\frac{a}{c}=\frac{a+c}{c}.$$

1460. 已知直角三角形中 $a+b=3c$，求这个三角形的各个角.

解 这个三角形中，C 不会是直角. 因为如果 C 是直角，原式 $=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=3$，即 $\sin A+\sin B=3$. 于是 $\sin A$, $\sin B$ 中至少有一个大于1，这显然不能成立. 因此 A、B 中有一个为直角. 设 A 为直角，于是有 $1+\frac{b}{a}=\frac{3c}{a}$ 或 $1+\cos C=3\sin C$，即

$$2\cos^2\frac{C}{2}=6\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

两边除以不为 0 的 $2\cos\frac{1}{2}C$，有 $\cos\frac{1}{2}C=3\sin\frac{1}{2}C$. 故由 $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\frac{1}{3}$ 可求出 $\angle C$ 的大小，从而求出 $\angle B$.

1461. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，证明

$$\operatorname{tg}^2\left(45^\circ+\frac{1}{2}A\right)=\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}B.$$

解 $A+B=90^\circ$，从而 $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B=45^\circ$，故

$$\left(45^\circ+\frac{1}{2}A\right)+\frac{1}{2}B=90^\circ.$$

因此 $\operatorname{tg}^2\left(45^\circ+\frac{1}{2}A\right)=\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}B.$

1462. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，证明

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{c-b}{2c}.$$

解 $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{c}\right)=\frac{c-b}{2c}.$$

1463. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，证明

$$\csc 2B=\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}.$$

解 $\csc 2B=\frac{1}{\sin 2B}=\frac{1}{2\sin B\cos B}$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{c}}=\frac{c^2}{2ab}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}.$$

1464. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，证明

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b+c}{2c}.$$

解 $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{1+\frac{b}{c}}{2}=\frac{c+b}{2c}.$

1465. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，证明

$$\operatorname{tg}^2\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)=\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}.$$

解 $\operatorname{tg}^2\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)=\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(90^\circ-A)$

$$=\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}.$$

1466. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，证明

$$\cos(2A-B)=\frac{a(3c^2-4a^2)}{c^3}.$$

解 $C=90^\circ$，从而

$$\cos(2A-B)=\cos[2(90^\circ-B)-B]$$

$$=-\cos 3B=3\cos B-4\cos^3 B$$

$$=\frac{3a}{c}-\frac{4a^3}{c^3}=\frac{3ac^2-4a^3}{c^3}=\frac{a(3c^2-4a^2)}{c^3}.$$

1467. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，证

明

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B=\frac{c^2}{ab}.$$

解 $\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} B=\frac{b}{a}$，故

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ba}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B=\frac{c^2}{ab}.$$

1468. 在C为直角的三角形ABC中，证明

$$\operatorname{tg}^2\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)=\frac{c-a}{c+a}.$$

解 $$\operatorname{tg}^2\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)=\frac{\sin^2\left(45^\circ-\frac{1}{2}A\right)}{\cos^2\left(45^\circ-\frac{1}{2}A\right)}$$

$$=\frac{1-\left[1-2\sin^2\left(45^\circ-\frac{1}{2}A\right)\right]}{2\cos^2\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)-1+1}$$

$$=\frac{1-\cos(90^\circ-A)}{\cos(90^\circ-A)+1}=\frac{1-\sin A}{1+\sin A}$$

$$=\frac{1-\frac{a}{c}}{1+\frac{a}{c}}=\frac{c-a}{c+a}.$$

1469. 在C为直角的三角形ABC中，证明

$$\cos 3A=\frac{b^3-3a^2b}{c^3}.$$

解 $$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$$

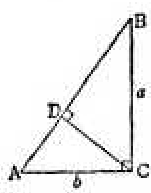
$$=4\left(\frac{b}{c}\right)^3-3\left(\frac{b}{c}\right)$$

$$=\frac{4b^3-3bc^2}{c^3}$$

$$=\frac{4b^3-3b(a^2+b^2)}{c^3}$$

$$=\frac{b^3-3a^2b}{c^3}.$$

1470. 证明直角三角形的斜边，等于各直角边与邻角之积的和。



解 作$\angle C$为直角的三角形ABC，由C向斜边AB作垂线CD，$AB=AD+DB$，因为

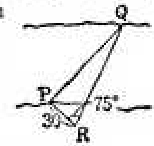
$$AD=AC\cos\angle DAC,$$
$$BD=BC\cos\angle CBD,$$

所以

$$AB=AC\cos\angle DAC+BC\cos\angle CBD,$$

即 $$c=b\cos A+a\cos B.$$

1471. 河的两岸有P、Q两点。在与PQ成直角的方向上，离P 30 m处有R，测出角PRQ为75°，求PQ的距离。



解 在三角形PQR中，

$$PQ=PR\operatorname{tg}75^\circ$$

$$=30\times\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}30^\circ}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}$$

$$=30\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

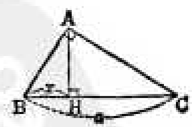
$$=30(2+\sqrt{3})\approx 30\times 3.732$$

$$\approx 112.0(\mathrm{m}).$$

1472. 已知由直角三角形的直角顶点A向斜边BC作垂线AH，且$BC=4AH$。求角B、C。

解 在直角三角形ABC中，

$$AH^2=BH\cdot HC,$$



$$\therefore\quad \left(\frac{BC}{4}\right)^2=BH\cdot HC,$$

设 $BC=a$，$BH=x$，则

$$\left(\frac{a}{4}\right)^2=x(a-x),$$

$$16x^2-16ax+a^2=0,$$

$$\therefore\quad x=\frac{8a\pm\sqrt{64a^2-16a^2}}{16}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{3}}{4}a.$$

当$x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}a$时，

$$\operatorname{tg}B=\frac{AH}{BH}=\frac{\frac{a}{4}}{\frac{2+\sqrt{3}}{4}a}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$=2-\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad B=15^\circ,\quad \therefore\quad C=75^\circ.$$

当$x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}a$时，

$$\operatorname{tg} B=\frac{\frac{a}{4}}{\frac{2-\sqrt{3}}{4}a}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$=2+\sqrt{3}.$$

$\therefore\ B=75°,\ \therefore\ C=15°.$

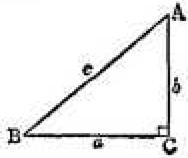
1473. 已知下列元素，解直角三角形（$C=90°$）.

(1) $c=53.6$, $A=39°30'$;

(2) $a=10$, $B=10°$;

(3) $a=25.6$, $c=37.2$;

(4) $a=7.38$, $b=5.43$.



解 (1) $B=90°-39°30'=50°30'$,

$a=c\sin A=53.6\sin 39°30'$
$=53.6\times 0.6361\approx 34.09$,

$b=c\cos A=53.6\cos 39°30'$
$=53.6\times 0.7716\approx 41.26$.

(2) $A=90°-10°=80°$,

$b=a\operatorname{tg} B=10\operatorname{tg} 10°$
$=10\times 0.1763\approx 1.76$,

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10^2+1.763^2}$
≈ 10.15.

(3) $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{37.2^2-25.6^2}$
$=\sqrt{62.8\times 11.6}$,

两边取对数有

$$\lg b=\frac{1}{2}(\lg 62.8+\lg 11.6)$$

$$=\frac{1}{2}(1.7980+1.0645)$$

$$=1.4312,$$

$\therefore\ b=26.99.$

$$\cos B=\frac{a}{c}=\frac{25.6}{37.2}=0.6882.$$

$\therefore\ B=46°31'$,

$A=90°-46°31'=43°29'$.

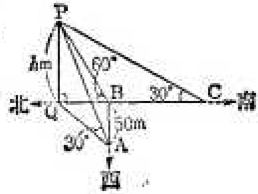
(4) $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7.38^2+5.43^2}$
≈ 9.16.

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{7.38}{9.162}\approx 0.8055.$$

$\therefore\ A\approx 53°40'$,

$B=90°-53°40'=36°20'$.

1474. 同一水平面上有 A、B、C 三处. A 在 B 的正西，C 在 B 的正南. 在 B 的正北有一个塔，在 A、C 处观察塔顶的仰角都是 $30°$，在 B 处观察的仰角为 $60°$. A、B 间的距离为 50 m, B、C 间的距离是多少.



解 设塔为 PQ, 塔高为 h m, 因为

$\angle PCQ=30°$,

$\angle PBQ=60°$,

所以

$$BC=QC-QB$$

$$=h\operatorname{ctg} 30°-h\operatorname{ctg} 60°$$

$$=\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)h=\frac{2}{3}\sqrt{3}\,h. \quad ①$$

另一方面，因为

$\angle PAQ=30°$, $\angle ABQ=90°$,

$$\therefore\ AB^2=50^2=AQ^2-BQ^2$$

$$=(h\operatorname{ctg} 30°)^2-(h\operatorname{ctg} 60°)^2$$

$$=3h^2-\frac{h^2}{3}=\frac{8}{3}h^2,$$

$$\therefore\ h=50\sqrt{\frac{3}{8}}=25\sqrt{\frac{3}{2}},$$

代入 ① 式，

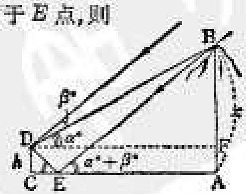
$$BC=\frac{2}{3}\sqrt{3}\times 25\sqrt{\frac{3}{2}}=25\sqrt{2}$$

$$\approx 35.4(\mathrm{m}).$$

1475. 一个人在池边看小山顶的仰角为 $\alpha°$，太阳则在同一方向上，而且比山顶高出 $\beta°$ 的视角. 另外，朝池中看，这时太阳的象和山顶的影子重合. 设人的眼睛高出水面 h m, 问山顶比水面高出多少 m?

解 设水面为 AC, 从水面算起山顶的高为 $AB(=x\,\mathrm{m})$, 眼睛的位置为 D. 又山顶和太阳的连线交水面于 E 点，则

$CD=h$, $\angle AEB$
$=\angle CED$
$=\alpha°+\beta°$.



又设从 D 向 AB 所作垂线的足为 F, 则

$$DF=CA=CE+EA=h\operatorname{ctg}(\alpha°+\beta°)$$

$$+x\operatorname{ctg}(\alpha°+\beta°)$$

$$=(h+x)\operatorname{ctg}(\alpha°+\beta°), \quad ①$$

在三角形 BDF 中

$$DF=(x-h)\operatorname{ctg}\alpha^\circ, \qquad ②$$

由①、②得

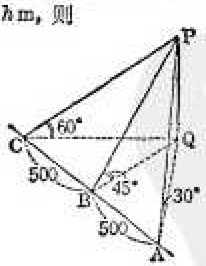
$$[\operatorname{ctg}\alpha^\circ-\operatorname{ctg}(\alpha^\circ+\beta^\circ)]x=[\operatorname{ctg}\alpha^\circ+\operatorname{ctg}(\alpha^\circ+\beta^\circ)]h,$$

$$\therefore\quad x=h\frac{\operatorname{ctg}\alpha^\circ+\operatorname{ctg}(\alpha^\circ+\beta^\circ)}{\operatorname{ctg}\alpha^\circ-\operatorname{ctg}(\alpha^\circ+\beta^\circ)}=h\frac{\frac{\cos\alpha^\circ}{\sin\alpha^\circ}+\frac{\cos(\alpha^\circ+\beta^\circ)}{\sin(\alpha^\circ+\beta^\circ)}}{\frac{\cos\alpha^\circ}{\sin\alpha^\circ}-\frac{\cos(\alpha^\circ+\beta^\circ)}{\sin(\alpha^\circ+\beta^\circ)}}$$

$$=h\frac{\sin(\alpha^\circ+\beta^\circ+\alpha^\circ)}{\sin(\alpha^\circ+\beta^\circ-\alpha^\circ)}=h\frac{\sin(2\alpha^\circ+\beta^\circ)}{\sin\beta^\circ}(\mathrm{m}).$$

1476. 从水平道路上某点 A 观测山顶 P 的仰角为 30°，沿道路行走 500 m 后到达 B 点，从 B 看 P 的仰角为 45°，再行 500 m 到达 C 点，从 C 看 P 的仰角为 60°，求山的高度。

解　从山顶 P 向道路所在的水平面作垂线，垂足为 Q，设 $PQ=h$ m，则



$$QA=h\operatorname{ctg}30^\circ=\sqrt{3}h,$$

$$QB=h\operatorname{ctg}45^\circ=h,$$

$$QC=h\operatorname{ctg}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}h,$$

而在三角形 QAC 中，

$$QA^2+QC^2=2(QB^2+AB^2),$$

$$3h^2+\frac{h^2}{3}=2(h^2+500^2),$$

$$4h^2=6\times500^2,$$

$$h=\frac{500}{2}\sqrt{6}=250\sqrt{6}(\mathrm{m}).$$

1477. 正在向北开的轮船看见正东方有两座灯塔，过 15 分钟后再看这两座灯塔，分别在东南和南 75° 东的方向。设两座灯塔相距 10 海里，轮船的速度是多少节*？

解　设轮船最初时的位置为 P，15 分钟后的位置为 Q，两灯塔的位置为 A、B，轮船的速度为 x 节，则

$$PQ=\frac{15}{60}x=\frac{x}{4},$$

$$PA=\frac{x}{4}\operatorname{tg}45^\circ=\frac{x}{4},$$

$$PB=\frac{x}{4}\operatorname{tg}75^\circ=\frac{x}{4}\cdot\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}30^\circ}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}=\frac{x}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{x}{4}(2+\sqrt{3}),$$

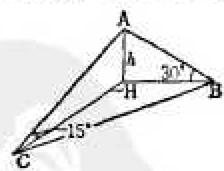
因此

$$PB-PA=\frac{x}{4}(2+\sqrt{3}-1)=10,$$

$$x=\frac{40}{\sqrt{3}+1}=20(\sqrt{3}-1)\approx14.64(\text{节}).$$

1478. 从高出海面 h m 的 A 处看东面的一只船 B，俯角为 30°，看南面的一只船 C，俯角为 15°，求 BC 的距离。

解　设从 A 向水平面所作垂线的足为 H，则



$$\angle ABH=30^\circ,$$

$$\angle ACH=15^\circ,$$

$$BH=h\operatorname{ctg}30^\circ=\sqrt{3}h,$$

$$CH=h\operatorname{ctg}15^\circ=h\operatorname{tg}75^\circ=h\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}30^\circ}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}$$

$$=h\cdot\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{h(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1}=(2+\sqrt{3})h,$$

因此在直角三角形 BCH 中，

$$BC^2=BH^2+CH^2=3h^2+(7+4\sqrt{3})h^2=(10+4\sqrt{3})h^2,$$

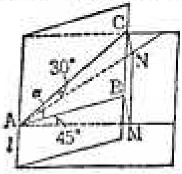
$$\therefore\quad BC=\sqrt{10+4\sqrt{3}}\,h(\mathrm{m}).$$

1479. 有一个倾角为 45° 的斜面，现在要修建一条与水平面成倾角 30° 的斜着攀上斜面的道路，这条道路和直着攀上斜面的道路应成多大的角才行？

---

* 1 节 = 1 海里/小时。——译注

解 斜面和水平面的交线设为 l，从 l 上的一点 A 直着攀上斜面的道路设为 AB，倾角为 30° 的道路设为 AC，由 C 向 AB 作垂线，垂足设为 B．由 B、C 向水平面所作的垂线足分别 M、N，则



$$\angle BAM=45°,$$
$$\angle CAN=30°.$$

设 $\angle BAC=\alpha$，则

$$CN=AC\sin 30°,$$
$$BM=AB\sin 45°=AC\cos\alpha\sin 45°,$$

因为 $BM=CN$，所以

$$AC\sin 30°=AC\cos\alpha\sin 45°$$
$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{\sin 30°}{\sin 45°}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故所求的 α 角为 45°.

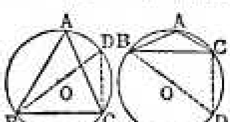
2．正弦定理、余弦定理和正切定理

1480．设三角形 ABC 的三个角为 A、B、C，这些角所对的边分别为 a、b、c，则

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

其中 R 为外接圆的半径．〔正弦定理〕

解 三角形 ABC 的外接圆过 B 的直径设为 BD．当 $A\leq 90°$ 时 $\angle BDC=\angle BAC$，当 $A>90°$ 时 $\angle BDC=180°-\angle BAC$，不管在哪一种情况下，都有



$$\sin\angle BDC=\sin A.$$

因为 BD 是直径，所以

$$BC=BD\sin\angle BDC,\quad 即\quad a=2R\sin A,$$
$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=2R.$$

同理 $\quad \dfrac{b}{\sin B}=2R,\ \dfrac{c}{\sin C}=2R.$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

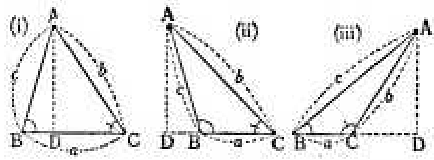
1481．设三角形 ABC 的三个角为 A、B、C，这些角所对的边分别为 a、b、c，则下列等式成立．

$$(1)\ \begin{cases}a=c\cos B+b\cos C,\\ b=a\cos C+c\cos A,\ 〔第一余弦定理〕\\ c=b\cos A+a\cos B.\end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{cases}$$

〔第二余弦定理〕

解 (1) 设从 A 向 BC 所作垂线的足为 D，



(i) 当 $B\leq 90°$，$C\leq 90°$ 时，因为 $BC=BD+CD$，所以

$$a=c\cos B+b\cos C.$$

(ii) 当 $B>90°$，$C<90°$ 时，因为 $BC=CD-BD$，所以

$$a=b\cos C-c\cos(180°-B)$$
$$=b\cos C+c\cos B.$$

(iii) 当 $B<90°$，$C>90°$ 时，因为

$$BC=BD-CD,$$
$$\therefore\quad a=c\cos B-b\cos(180°-C)$$
$$=c\cos B+b\cos C.$$

从而不管在什么情况下，都有

$$a=c\cos B+b\cos C.$$

同理可证其他关系式成立．

(2) 在图中有

$$AC^2=AD^2+CD^2,$$
$$AD=c\sin B,\ CD=a-c\cos B,$$
$$\therefore\quad b^2=(c\sin B)^2+(a-c\cos B)^2$$
$$=c^2+a^2-2ca\cos B.$$

其他的关系式也可同样地推出．

注 1．若把第一余弦定理中的三个式子看成是关于 $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ 的联立方程式，则可解得

$$\begin{cases}\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.\end{cases}$$

这和(2)中得到的关系是等价的。

反过来，把(2)中的第二、三式两边分别相加，整理后可以得到(1)中的第一式。

2. 由本题图中得 $AD=c\sin B=b\sin C$，

$$\therefore\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

同理，可得 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

3. 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，

则 $a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C$。

$$\therefore\quad c\cos B+b\cos C=k\sin(B+C)=k\sin A=a.$$

$$\therefore\quad a=c\cos B+b\cos C.$$

1482. 证明正切定理：

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}}.$$

〔纳皮尔(Napier)法则〕

解 $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$$

$$=\frac{2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}}{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}}.$$

1483. 在三角形 ABC 中，证明

$$(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+(c-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+(b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=0.$$

解 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，则

$$(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+(c-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+(b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

$$=k\Big[(\sin A-\sin B)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+(\sin C-\sin A)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+(\sin B-\sin C)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\Big]$$

$$=2k\Big[\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{C+A}{2}+\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}\Big]$$

$$=2k\Big(\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\Big)$$

$$=0.$$

1484. 已知三角形 ABC 中

$$\frac{7}{\sin A}=\frac{8}{\sin B}=\frac{13}{\sin C},$$

求 C。

解 由已知式和正弦定理知

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=7:8:13.$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{49+64-169}{2\times7\times8}=-\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad C=120^\circ.$$

1485. 已知三角形 ABC 中，A、B、C 成等差数列，公差为 θ，试用 a、b、c 三边表出 $\cos\theta$。

解 因为 A、B、C 成等差数列，故可设

$$A=B+\theta,\ C=B-\theta,$$

又因为 $A+B+C=180^\circ$，所以

$$(B+\theta)+B+(B-\theta)=180^\circ,$$

$$3B=180^\circ,\quad\therefore\quad B=60^\circ.$$

由正弦定理，

$$\frac{\sin(60^\circ+\theta)}{a}=\frac{\sin60^\circ}{b}=\frac{\sin(60^\circ-\theta)}{c}$$

$$=\frac{\sin60^\circ\cos\theta+\cos60^\circ\sin\theta}{a}$$

$$=\frac{\sin60^\circ\cos\theta-\cos60^\circ\sin\theta}{c}$$

$$=\frac{2\sin60^\circ\cos\theta}{a+c}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{b}=\frac{2\cos\theta}{a+c}.$$

$$\therefore \quad \cos\theta=\frac{a+c}{2b}.$$

1486. 在三角形 ABC 中，已知 $B=30°$，$b=\sqrt{2}$，$c=2$，求 A。

解 $\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sin 30°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 C 满足 $0°<C<180°$，所以 C 为 $45°$ 或 $135°$. 由 $b<c$ 知 $B<C$，所以 $45°$、$135°$ 都是可能的解。故 $C=45°$ 时 $A=105°$，$C=135°$ 时 $A=15°$。

1487. 化简 $\dfrac{\cos\alpha-\cos 5\alpha}{\sin\alpha+\sin 5\alpha}$.

解 分子 $=2\sin\dfrac{5\alpha+\alpha}{2}\sin\dfrac{5\alpha-\alpha}{2}$

$=2\sin 3\alpha\sin 2\alpha$.

分母 $=2\sin\dfrac{5\alpha+\alpha}{2}\cos\dfrac{5\alpha-\alpha}{2}$

$=2\sin 3\alpha\cos 2\alpha$,

$$\therefore \quad 原式=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha.$$

1488. 已知三角形 ABC 的三边为

$a=2\sqrt{6}$，$b=6+2\sqrt{3}$，$c=4\sqrt{3}$，

求 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的大小。

解 由余弦定理，得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \quad C=\frac{\pi}{4},\ A=\frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore \quad B=\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{7}{12}\pi.$$

1489. 在三角形 ABC 中，已知

$b=a(\sqrt{3}-1)$，$C=30°$，

求 A、B。

解 由余弦定理，

$$\cos C=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

用已知条件把这个式子变形，

$$a^2+a^2(4-2\sqrt{3})-c^2$$
$$=\sqrt{3}a^2(\sqrt{3}-1),$$
$$c^2=(2-\sqrt{3})a^2.$$

$$\therefore \quad c=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}\,a$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}a.$$

由正弦定理，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a(\sqrt{3}-1)}{\sin B}$$
$$=\frac{a(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}\sin 30°},$$

$$\therefore \quad \sin B=\sqrt{2}\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因此 $B=45°$ 或 $B=135°$. 因为 $a>b$，所以 $A>B$，从而 B 必须是锐角，即 $B=45°$。

$$\therefore \quad A=180°-(45°+30°)=105°.$$

1490. 设三角形 ABC 的面积为 S，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c，证明

$$8S^2(\operatorname{ctg}^2 A+\operatorname{ctg}^2 B+\operatorname{ctg}^2 C+1)$$
$$=a^4+b^4+c^4.$$

解 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，则

$$\operatorname{ctg}^2 A=\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\frac{k^2(b^2+c^2-a^2)^2}{4a^2b^2c^2}$$
$$=\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4a^2b^2\sin^2 C}$$
$$=\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{16S^2}.$$

关于 $\operatorname{ctg}^2 B$，$\operatorname{ctg}^2 C$ 也成立着类似的式子，因此原式左边

$$=8S^2\{[(b^2+c^2-a^2)^2+(c^2+a^2-b^2)^2+(a^2+b^2-c^2)^2]\div 16S^2+1\}$$
$$=\frac{1}{2}[3(a^4+b^4+c^4)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+16S^2]$$
$$=\frac{1}{2}[3(a^4+b^4+c^4)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)]$$
$$=a^4+b^4+c^4.$$

1491. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{1}{12}[(a^2+b^2)\sin 2C+(b^2+c^2)\sin 2A+(c^2+a^2)\sin 2B]=S.$$

解 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，则

原式左边$=\dfrac{k^2}{12}\Big[(\sin^2 A+\sin^2 B)\sin 2C$
$+(\sin^2 B+\sin^2 C)\sin 2A$
$+(\sin^2 C+\sin^2 A)\sin 2B\Big]$

$$=\frac{k^2}{12}\Big[\frac{1}{2}(2-\cos 2A-\cos 2B)\sin 2C+\frac{1}{2}(2-\cos 2B-\cos 2C)\sin 2A+\frac{1}{2}(2-\cos 2C-\cos 2A)\sin 2B\Big]$$

$$=\frac{k^2}{24}\left[2\sum\sin 2A-\sum\sin(2A+2B)\right]$$

$$=\frac{k^2}{2}\sin A\sin B\sin C$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C=S.$$

1492. 证明三角形 ABC 的周长等于

$$2C\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sec\frac{A+B}{2}.$$

解 周长$=a+b+c$

$$=\frac{c\sin A}{\sin C}+\frac{c\sin B}{\sin C}+c$$

$$=\frac{c(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin C}$$

$$=\frac{4c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin C}$$

$$=\frac{2c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{2c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$=2c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sec\frac{A+B}{2}.$$

1493. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}.$$

解 因为 $c=a\cos B+b\cos A$，所以

$$a\cos B=c-b\cos A. \qquad ①$$

又因为 $\quad b=c\cos A+a\cos C$，

所以

$$a\cos C=b-c\cos A. \qquad ②$$

把①、②两边相除，

$$\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}.$$

1494. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}.$$

解 把 $\quad a=b\cos C+c\cos B,$
$\qquad b=c\cos A+a\cos C$

两边分别相减，得

$$a-b=(b-a)\cos C+c(\cos B-\cos A),$$
$$(a-b)(1+\cos C)=c(\cos B-\cos A),$$

因此 $\quad \dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}.$

1495. 在三角形 ABC 中，已知

$$\angle A=135^\circ,\ BC=a,\ B=2C.$$

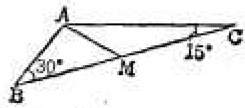
求过 A 的中线的长度。

解 因为

$$\angle A=135^\circ,\ 2\angle C=\angle B,$$

所以

$\angle C=15^\circ,$
$\angle B=30^\circ,$



由正弦定理，有

$$\frac{a}{\sin 135^\circ}=\frac{AB}{\sin 15^\circ}.$$

因为 $\sin 135^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

所以

$$AB=\frac{a}{\sin 135^\circ}\times\sin 15^\circ$$
$$=\frac{2a}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}a.$$

在三角形 ABM 中用余弦定理，

$$AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cos 30^\circ$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2a^2+\frac{a^2}{4}-2\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{2-\sqrt{3}}{4}a^2.$$

$$\therefore\quad AM=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}a.$$

1496. 已知 $A+B+C=180^\circ$，证明

$$1+\cos A\cos B\cos C=\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin A\sin C+\cos C\sin A\sin B.$$

解

$\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin A\sin C$
$\quad+\cos C\sin A\sin B$
$=\sin C(\cos A\sin B+\cos B\sin A)$
$\quad+\cos C\sin A\sin B$
$=\sin C\sin(A+B)+\cos C\sin A\sin B$
$=\sin^2 C+\cos C\sin A\sin B$
$=1-\cos^2 C+\cos C\sin A\sin B$
$=1+\cos C[\cos(A+B)+\sin A\sin B]$
$=1+\cos A\cos B\cos C.$

1497. 已知 $A+B+C=180^\circ$，证明

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C=\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C+\csc A\csc B\csc C.$$

解 把上题得到的等式两边除以 $\sin A\sin B\sin C$，有

$$\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}+\frac{\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}.$$

由此得到要证的式子。

1498. 已知

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi,\ \cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma,$$

证明
$$\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma=\frac{1}{2}.$$

解 因为 $\cos\alpha=-\cos(\beta+\gamma)$，有

$$-\cos(\beta+\gamma)=\cos\beta\cos\gamma,$$
$$-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma=\cos\beta\cos\gamma,$$
$$\sin\beta\sin\gamma=2\cos\beta\cos\gamma,$$

两边除以 $2\sin\beta\sin\gamma$，得

$$\frac{1}{2}=\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma.$$

1499. 已知 $A+B+C=180^\circ$，证明

$$\frac{\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C}{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}+\frac{\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} A}{\operatorname{tg} C+\operatorname{tg} A}+\frac{\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}=1.$$

解 $\dfrac{\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C}{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}=\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C.$

原式左边 $=\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} C\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B$

$$=\frac{\cos B}{\sin B}\times\frac{\cos C}{\sin C}+\frac{\cos C}{\sin C}\times\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos A}{\sin A}\times\frac{\cos B}{\sin B}$$

$$=\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}(\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B),$$

因为 $A+B+C=180^\circ$，

$$\text{前式}=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}=1.$$

1500. 已知 $A+B+C=180^\circ$，证明

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

解 $\sin 2A+\sin 2B$
$=2\sin(A+B)\cos(A-B)$
$=2\sin C\cos(A-B)$，

$\sin 2C=2\sin C\cos C$
$=-2\sin C\cos(A+B)$，

因此

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$
$=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$
$=4\sin C\sin A\sin B.$

1501. 已知 $A+B+C=180^\circ$，证明

$$\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)=4\sin A\sin B\sin C.$$

解 $\sin(B+C-A)=\sin(180^\circ-2A)$
$=\sin 2A.$

因此

原式左边 $=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$
$=4\sin A\sin B\sin C.$

1502. 证明 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}.$

解 左边 $=\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$

$=\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}.$

1503. 在三角形 ABC 中，证明

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B=\frac{c}{b\sin A}.$$

解 设

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k,$$

则

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}$$
$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin A\sin B}$$
$$=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}$$
$$=\frac{k\sin C}{(k\sin B)\sin A}=\frac{c}{b\sin A}.$$

1504. 在三角形 ABC 中,证明

$$b\cos A\operatorname{ctg} B+c\operatorname{ctg} C=a\sin B.$$

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k,$

则

$$b\cos A\frac{\cos B}{\sin B}+c\frac{\cos C}{\sin C}$$
$$=k\cos A\cos B+k\cos C$$
$$=k\cos A\cos B-k\cos(A+B)$$
$$=k\sin A\sin B=a\sin B.$$

1505. 在三角形 ABC 中, 已知 $A=2B$, 证明

$$a=2b\cos B.$$

解 因为 $A=2B$, 所以

$$\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B,$$

在等式的两边把 $\sin A$、$\sin B$ 换成与之成比例的 a、b, 则有 $a=2b\cos B$.

1506. 在三角形 ABC 中,证明

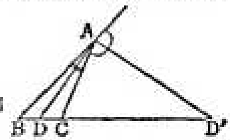
$$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos B+\cos C}{1-\cos A}.$$

解 由正弦定理知,

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}$$
$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}$$
$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A}$$
$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}{2\sin^2\frac{1}{2}A}$$
$$=\frac{\cos B+\cos C}{1-\cos A}.$$

1507. 三角形 ABC 顶角 A 的内角和外角的平分线,与对边的交点分别为 D、D', 试用正弦定理证明

$$AB:AC=BD:DC=BD':D'C.$$



解 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 中,

设 $\angle BAC=\angle A,$

$$\frac{AB}{BD}=\frac{\sin\angle ADB}{\sin\frac{A}{2}},$$
$$\frac{AC}{DC}=\frac{\sin(180^\circ-\angle ADB)}{\sin\frac{A}{2}}$$
$$=\frac{\sin\angle ADB}{\sin\frac{A}{2}},$$

$$\therefore\quad AB:AC=BD:DC. \qquad ①$$

在 $\triangle ABD'$ 和 $\triangle ACD'$ 中,

$$\frac{AB}{BD'}=\frac{\sin\angle AD'B}{\sin\frac{180^\circ+A}{2}}=\frac{\sin\angle AD'B}{\cos\frac{A}{2}},$$
$$\frac{AC}{CD'}=\frac{\sin\angle AD'B}{\sin\frac{180^\circ-A}{2}}=\frac{\sin\angle AD'B}{\cos\frac{A}{2}},$$

$$\therefore\quad AB:AC=BD':CD'. \qquad ②$$

由 ①、② 得

$$AB:AC=BD:DC=BD':D'C.$$

1508. 在 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 中, 设 $A_1=A_2$ 或 $A_1+A_2=\pi$. 证明 $\triangle A_1B_1C_1$ 外接圆的半径 R_1 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的外接圆半径 R_2 之比为 $B_1C_1:B_2C_2$.

解 设 $B_1C_1=a_1$, $B_2C_2=a_2$, 则由正弦定理有 $a_1=2R_1\sin A_1$, $a_2=2R_2\sin A_2$,

$$\therefore\quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{R_1\sin A_1}{R_2\sin A_2}. \qquad ①$$

又因为 $A_1=A_2$ 或 $A_1+A_2=\pi$, 所以 $\sin A_1=\sin A_2$. 把 ① 式右边约分,则有

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{R_1}{R_2}.$$

注 如果 $B_1C_1=B_2C_2$ 则得两外接圆是等圆.

1509. 在三角形 ABC 中,证明

$$\operatorname{ctg} B-\operatorname{ctg} A=\frac{a^2-b^2}{ab}\cdot\csc C.$$

解 $\dfrac{\cos B}{\sin B}-\dfrac{\cos A}{\sin A}$

$$=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\sin(A-B)\sin(A+B)}{\sin A\sin B\sin(A+B)}$$

$$=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\sin B}\csc(A+B)$$

$$=\frac{a^2-b^2}{ab}\csc C.$$

1510. 在三角形 ABC 中，证明

$$a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=(b+c)\sin\frac{A}{2}.$$

解 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，则

$$a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=k\sin A\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)$$

$$=2k\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)$$

$$=k\sin\frac{A}{2}[\sin B+\sin(A+B)]$$

$$=k\sin\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)$$

$$=(k\sin B+k\sin C)\sin\frac{A}{2}$$

$$=(b+c)\sin\frac{A}{2}.$$

1511. 已知三角形 ABC 中 $2b=a+c$，求 $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$ 的值。

解 据正弦定理，由 $2b=a+c$，得

$$2\sin B=\sin A+\sin C,$$

$$4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2},$$

因为 $\dfrac{B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A+C}{2}$，所以

$$\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A+C}{2},$$

$$\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}.$$

$$\therefore\quad 4\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{B}{2}=2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2},$$

因为 $0<\dfrac{B}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\cos\dfrac{B}{2}\neq 0$，

$$\therefore\quad 2\cos\frac{A+C}{2}=\cos\frac{A-C}{2},$$

$$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}=3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2},$$

由于 $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}\neq 0$，两边除以 $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ 后得

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}.$$

1512. 在三角形 ABC 中，证明

$$a(\cos B+\cos C)=2(b+c)\sin^2\frac{A}{2}.$$

解 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，即有

$$a(\cos B+\cos C)$$

$$=2a\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=2k\sin A\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=4k\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=4k\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=4k\sin^2\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=2k\sin^2\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)$$

$$=2(k\sin B+k\sin C)\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=2(b+c)\sin^2\frac{A}{2}.$$

1513. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{a\cos\dfrac{B-C}{2}}{\cos\dfrac{B+C}{2}}+\frac{b\cos\dfrac{C-A}{2}}{\cos\dfrac{C+A}{2}}+\frac{c\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}=2(a+b+c).$$

解 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，则

$$\frac{a\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}=\frac{k\sin A\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$=\frac{k\sin(B+C)\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$=2k\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=k(\sin B+\sin C)=b+c,$$

同理有，$$\frac{b\cos\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{C+A}{2}}=c+a,$$

和 $$\frac{c\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=a+b.$$

因此欲证之式成立。

1514. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}-\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{b-c}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{c-a}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{a-b}.$$

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}-\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{b-c}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}-\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{k(\sin B-\sin C)}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{2k\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{1}{2k\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

由对称性，知

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{c-a}\quad 和\quad \frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{a-b}$$

都等于上式最后所得结果．因此欲证之式成立。

1515. 在三角形 ABC 中，证明

$$\left(b\operatorname{tg}\frac{B}{2}-c\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\cos^2\frac{B+C}{2}$$
$$+\left(c\operatorname{tg}\frac{C}{2}-a\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\cos^2\frac{C+A}{2}$$
$$+\left(a\operatorname{tg}\frac{A}{2}-b\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\cos^2\frac{A+B}{2}=0.$$

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则

$$\left(b\operatorname{tg}\frac{B}{2}-c\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\cos^2\frac{B+C}{2}$$

$$=k\left(\sin B\times\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}-\sin C\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\right)\cos^2\frac{B+C}{2}$$

$$=k\left(2\sin^2\frac{B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}\right)\cos^2\frac{B+C}{2}$$

$$=2k\sin\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos^2\frac{B+C}{2}$$

$$=\frac{1}{2}k\sin A(\sin B-\sin C)$$

$$=\frac{1}{2k}(ab-ac),$$

同理，

$$\left(c\operatorname{tg}\frac{C}{2}-a\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\cos^2\frac{C+A}{2}=\frac{1}{2k}(bc-ab),$$

$$\left(a\operatorname{tg}\frac{A}{2}-b\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\cos^2\frac{A+B}{2}=\frac{1}{2k}(ca-bc).$$

因此原式左边之和常为 0.

1516. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{\sin A+2\sin B}{a+2b}=\frac{\sin C}{c}.$$

解 设 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=k$，则

$$\sin A=ak,\ \sin B=bk,\ \sin C=ck.$$

因此 $$\frac{\sin A+2\sin B}{a+2b}=\frac{ak+2bk}{a+2b}=k,$$

从而 $$\frac{\sin A+2\sin B}{a+2b}=\frac{\sin C}{c}.$$

1517. 在三角形 ABC 中，证明

$$b\sin B-c\sin C=a\sin(B-C).$$

解　设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，则

$$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C,$$

即有

$$\begin{aligned}b\sin B-c\sin C&=k\sin^2 B-k\sin^2 C\\&=k\sin(B+C)\sin(B-C)\\&=k\sin A\sin(B-C)\\&=a\sin(B-C).\end{aligned}$$

1518. 用正弦定理、余弦定理证明

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B,$$

其中 $0^\circ<A$、B，且 $A+B<180^\circ$。

解　设三角形 ABC 的外接圆直径为 d，由正弦定理知

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=d,$$

因为

$$\sin C=\sin[180^\circ-(A+B)]=\sin(A+B).$$

所以

$$a=d\sin A,\ b=d\sin B,\ c=d\sin(A+B),$$

用第一余弦定理

$$c=a\cos B+b\cos A,$$

则有

$$d\sin(A+B)=d\sin A\cos B+d\sin B\cos A,$$
$$\therefore\quad \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

又用第二余弦定理，有

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$
$$\begin{aligned}\cos C&=\cos[180^\circ-(A+B)]\\&=-\cos(A+B),\end{aligned}$$

所以 $\begin{aligned}&2d\sin A\cdot d\sin B\cdot\cos(A+B)\\&=[d\sin(A+B)]^2-(d\sin A)^2\\&\quad-(d\sin B)^2,\end{aligned}$

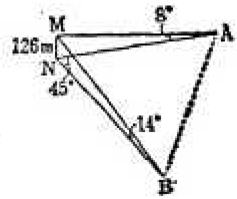
$$\begin{aligned}\therefore\quad &2\sin A\sin B\cos(A+B)\\&=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)^2\\&\quad-\sin^2 A-\sin^2 B\\&=2\sin A\cos B\cdot\cos A\sin B\\&\quad-\sin^2 A(1-\cos^2 B)\\&\quad-\sin^2 B(1-\cos^2 A)\\&=2\sin A\sin B(\cos A\cos B\\&\quad-\sin A\sin B),\end{aligned}$$

因为 $\sin A\neq 0$，$\sin B\neq 0$，所以

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

1519. 从标高为 126 m 的山顶上看正南方的一条船 A 俯角为 8°，向西南看一条船 B 俯角 14°，两船的距离为多少 m？

解　设山顶 M 向水平面所作的垂线的足为 N，则



$$\angle MAN=8^\circ,$$
$$\angle MBN=14^\circ,$$
$$\begin{aligned}AN&=MN\operatorname{ctg}8^\circ\\&=126\operatorname{ctg}8^\circ,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}BN&=MN\operatorname{ctg}14^\circ\\&=126\operatorname{ctg}14^\circ,\end{aligned}$$

在三角形 ABN 中，

$$\begin{aligned}AB^2&=AN^2+BN^2-2AN\cdot BN\cdot\cos 45^\circ\\&=(126\operatorname{ctg}8^\circ)^2+(126\operatorname{ctg}14^\circ)^2\\&\quad-2\times126\operatorname{ctg}8^\circ\times126\operatorname{ctg}14^\circ\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=126^2(\operatorname{ctg}^2 8^\circ+\operatorname{ctg}^2 14^\circ\\&\quad-\sqrt{2}\operatorname{ctg}8^\circ\operatorname{ctg}14^\circ).\end{aligned}$$

查三角函数表，得

$$\begin{aligned}&=126^2(7.115^2+4.011^2\\&\quad-1.414\times7.115\times4.011)\\&=126^2\times26.3583,\end{aligned}$$
$$AB=126\times5.13\approx646.4(\text{m}).$$

1520. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{a\sin\dfrac{(B-C)}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}+\frac{b\sin\dfrac{(C-A)}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}}+\frac{c\sin\dfrac{(A-B)}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}=0.$$

解　设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，则

$$\begin{aligned}\frac{a\sin\dfrac{(B-C)}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}&=\frac{2R\sin A\sin\dfrac{(B-C)}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}\\&=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{(B-C)}{2}\\&=4R\sin\frac{(B+C)}{2}\sin\frac{(B-C)}{2}\\&=4R\left(\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right).\end{aligned}$$

同理，原式左边的第二、三项分别等于

$$4R\left(\sin^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right),$$

$$4R\left(\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right).$$

因此原式左边的和$=0$。

1521. 在三角形 ABC 中，证明

$$a\sin(B-C)\cos(B+C-A)$$
$$+b\sin(C-A)\cos(C+A-B)$$
$$+c\sin(A-B)\cos(A+B-C)=0.$$

解 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，则

$$\begin{aligned}
&a\sin(B-C)\cos(B+C-A)\\
&=k\sin A\sin(B-C)\cos(180^\circ-2A)\\
&=-k\sin(B+C)\sin(B-C)\cos 2A\\
&=k(\sin^2 B-\sin^2 C)(2\sin^2 A-1)\\
&=2k\sin^2 A(\sin^2 B-\sin^2 C)\\
&\quad -k(\sin^2 B-\sin^2 C).
\end{aligned}$$

原式的其他两项也可作同样的变形，从而全式为 0，这是因为

$$\begin{aligned}
&\sin^2 A(\sin^2 B-\sin^2 C)\\
&\quad+\sin^2 B(\sin^2 C-\sin^2 A)\\
&\quad+\sin^2 C(\sin^2 A-\sin^2 B)=0
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&\sin^2 B-\sin^2 C+\sin^2 C-\sin^2 A\\
&\quad+\sin^2 A-\sin^2 B=0.
\end{aligned}$$

1522. 已知三角形 ABC 中有一点 P，满足

$$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA.$$

(1) $\angle CPA$，$\angle APB$，$\angle BPC$ 和三角形 ABC 的各内角有什么关系？

(2) 用正弦定理证明

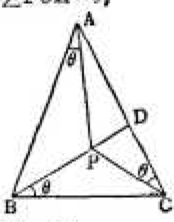
$$PA:PB:PC=\frac{b}{a}:\frac{c}{b}:\frac{a}{c}.$$

其中 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$。

解 (1) 设

$$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\theta,$$

BP 延长交 AC 于点 D，则



$$\begin{aligned}
\angle APD&=\angle PBA+\angle BAP\\
&=(\angle B-\theta)+\theta=\angle B,\\
\angle CPD&=\angle BCP+\angle PBC\\
&=(\angle C-\theta)+\theta=\angle C,
\end{aligned}$$

$\therefore\ \angle CPA=\angle B+\angle C.$

同理可得 $\angle APB=\angle C+\angle A,$
$\angle BPC=\angle A+\angle B.$

(2) 把正弦定理分别用于 $\triangle ABP$, $\triangle BCP$, $\triangle CAP$，结合 (1) 的结果，有

$$\frac{BP}{\sin\theta}=\frac{c}{\sin(A+C)}=\frac{c}{\sin B},\qquad ①$$

$$\frac{CP}{\sin\theta}=\frac{a}{\sin(A+B)}=\frac{a}{\sin C},\qquad ②$$

$$\frac{AP}{\sin\theta}=\frac{b}{\sin(B+C)}=\frac{b}{\sin A}.\qquad ③$$

再把正弦定理用于 $\triangle ABC$，有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,\qquad ④$$

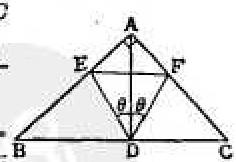
由 ①、④ 得 $BP=\dfrac{c}{b}\cdot 2R\sin\theta$，

由 ②、④ 得 $CP=\dfrac{a}{c}\cdot 2R\sin\theta$，

由 ③、④ 得 $AP=\dfrac{b}{a}\cdot 2R\sin\theta$。

$$\therefore\quad PA:PB:PC=\frac{b}{a}:\frac{c}{b}:\frac{a}{c}.$$

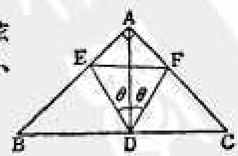
1523. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\dfrac{\pi}{2}$，$AD\perp BC$，$AD=h$，



(1) 当 $\angle ADE=\angle ADF=\theta$ 时，把三角形 DEF 的面积 S 用 h、θ 和 $\angle B$ 表示。

(2) 把 S 看成是 θ 的函数，求 θ 为何值时函数取得最大值。

解 (1) 把正弦定理用于 $\triangle BDE$、$\triangle CDF$，则



$$DE=\frac{BD\sin B}{\sin\angle BED},$$

$$DF=\frac{DC\sin C}{\sin\angle DFC},$$

$$BD=\frac{AD}{\operatorname{tg}B}=\frac{h}{\operatorname{tg}B},$$

$$CD=\frac{AD}{\operatorname{tg}C}=h\operatorname{tg}B.$$

$$\begin{aligned}
\angle BED&=\pi-B-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\
&=\frac{\pi}{2}-(B-\theta),
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sin\angle BED=\cos(B-\theta),$$

$$\angle DFC=\pi-C-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-C+\theta=B+\theta,$$

$$\therefore\quad \sin\angle DFC=\sin(B+\theta).$$

因此

$$DE=\frac{h\sin B}{\operatorname{tg}B\cos(B-\theta)}=\frac{h\cos B}{\cos(B-\theta)},$$

$$DF=\frac{h\cos B\operatorname{tg}B}{\sin(B+\theta)}=\frac{h\sin B}{\sin(B+\theta)},$$

所以 $\triangle DEF=\frac{1}{2}DE\cdot DF\sin 2\theta$

$$=\frac{1}{2}\frac{h^2\sin B\cos B\sin 2\theta}{\cos(B-\theta)\sin(B+\theta)}$$

$$=\frac{h^2\sin 2B\sin 2\theta}{2(\sin 2B+\sin 2\theta)}$$

(2) 因为 h、B 为常数，为使 S 最大，只需求使

$$f(\theta)=\frac{\sin 2\theta}{\sin 2B+\sin 2\theta}$$

取最大的 θ 即可，令

$f'(\theta)$

$$=\frac{2\cos 2\theta(\sin 2B+\sin 2\theta)-2\cos 2\theta\sin 2\theta}{(\sin 2B+\sin 2\theta)^2}$$

$$=\frac{2\cos 2\theta\sin 2B}{(\sin 2B+\sin 2\theta)^2}=0,$$

$$\therefore\quad \cos 2\theta=0,\quad \therefore\quad 2\theta=\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{4}.$$

因为 $\sin 2B>0$，所以当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时 $f(\theta)$ 取到极大，除此之外没有其他的极值，所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时取最大值。

1524. 在三角形 ABC 中，已知 $C=2B$，证明 $c^2-b^2=ab$。

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则

$$c^2-b^2=k^2(\sin^2 C-\sin^2 B)$$

$$=k^2\sin(C+B)\sin(C-B),$$

因为 $\sin(C+B)=\sin A,$

$$\sin(C-B)=\sin(2B-B)=\sin B,$$

所以 $c^2-b^2=k^2\sin A\sin B$

$$=(k\sin A)(k\sin B)=ab.$$

1525. 在三角形 ABC 中，已知 $A=3B$，证明

$$\sin B=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3b-a}{b}}.$$

解 由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $\frac{a}{\sin 3B}=\frac{b}{\sin B}$，即为

$$\frac{a}{3\sin B-4\sin^3 B}=\frac{b}{\sin B},$$

$$\frac{a}{3-4\sin^2 B}=b,$$

所以 $\sin B=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3b-a}{b}}.$

1526. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}$$

$$+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0.$$

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，则

$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{4R^2\sin^2 A\sin(B-C)}{2\sin\frac{(B+C)}{2}\cos\frac{(B-C)}{2}}$$

$$=\frac{4R^2\sin^2 A\sin\frac{(B-C)}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=8R^2\sin A\sin\frac{A}{2}\sin\frac{(B-C)}{2}$$

$$=4R^2\sin A\left(\cos\frac{A-B+C}{2}\right.$$

$$\left.-\cos\frac{A+B-C}{2}\right)$$

$$=2R^2(\sin A\sin B-\sin A\sin C).$$

其他两项也可作同样的变换，因此原式左边之和为 0。

1527. 在三角形 ABC 中，证明

$$(b^2-c^2)\operatorname{ctg}A+(c^2-a^2)\operatorname{ctg}B$$

$$+(a^2-b^2)\operatorname{ctg}C=0.$$

解 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则

$$(b^2-c^2)\operatorname{ctg}A=k^2(\sin^2B-\sin^2C)\operatorname{ctg}A$$
$$=k^2\sin(B+C)\sin(B-C)\frac{\cos A}{\sin A}$$
$$=-k^2\sin A\sin(B-C)\frac{\cos(B+C)}{\sin A}$$
$$=-k^2\sin(B-C)\cos(B+C)$$
$$=-\frac{1}{2}k^2(\sin 2B-\sin 2C),$$

同理,

$$(c^2-a^2)\operatorname{ctg}B=-\frac{1}{2}k^2(\sin 2C-\sin 2A),$$
$$(a^2-b^2)\operatorname{ctg}C=-\frac{1}{2}k^2(\sin 2A-\sin 2B).$$
$$\therefore\quad (b^2-c^2)\operatorname{ctg}A+(c^2-a^2)\operatorname{ctg}B+(a^2-b^2)\operatorname{ctg}C=0.$$

1528. 在三角形 ABC 中,证明

$$a\sin\frac{1}{2}(B-C)\sec\frac{1}{2}A+b\sin\frac{1}{2}(C-A)\sec\frac{1}{2}B+c\sin\frac{1}{2}(A-B)\sec\frac{C}{2}=0.$$

解 设

$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C,$

则

$$原式左边=4R\left(\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$=2R\left(\cos\frac{A+C-B}{2}-\cos\frac{A+B-C}{2}+\cos\frac{B+A-C}{2}-\cos\frac{B+C-A}{2}+\cos\frac{B+C-A}{2}-\cos\frac{A+C-B}{2}\right)=0.$$

1529. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{\sin(A-B)}{ab}+\frac{\sin(B-C)}{bc}+\frac{\sin(C-A)}{ca}=0.$$

解 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$, 则

$$\frac{\sin(A-B)}{ab}=\frac{c\sin(A-B)}{abc}=\frac{2R\sin(A+B)\sin(A-B)}{abc}$$
$$=\frac{2R}{abc}(\sin^2A-\sin^2B).$$

其他两项也可作同样的变形,则

$$原式左边=\frac{2R}{abc}[\sum(\sin^2A-\sin^2B)]=0.$$

1530. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0.$$

解 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$. 则

$$左边=2R[a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)]$$
$$=4R^2[\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)+\sin C\sin(A-B)]$$
$$=4R^2[\sin(B+C)\sin(B-C)+\sin(C+A)\sin(C-A)+\sin(A+B)\sin(A-B)]$$
$$=4R^2(\sin^2B-\sin^2C+\sin^2C-\sin^2A+\sin^2A-\sin^2B)=0.$$

1531. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}.$$

解 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$, 则

$$\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{k\sin A\sin(B-C)}{b^2-c^2}$$
$$=\frac{k\sin(B+C)\sin(B-C)}{b^2-c^2}$$
$$=\frac{k(\sin^2B-\sin^2C)}{b^2-c^2}.$$

而 $\dfrac{\sin^2B-\sin^2C}{b^2-c^2}=\dfrac{1}{k^2}$, 所以

$$\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{1}{k}.$$

同理 $\dfrac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}$, $\dfrac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$

都为 $\dfrac{1}{k}$, 故欲证之式成立.

1532. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{\sin^2 A-m\sin^2 B}{a^2-mb^2}=\frac{\sin^2 C}{c^2}.$$

解　设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{1}{k}$, 则

$$\frac{\sin^2 A-m\sin^2 B}{a^2-mb^2}=\frac{k^2a^2-mk^2b^2}{a^2-mb^2}$$
$$=k^2=\frac{\sin^2 C}{c^2}.$$

1533. 在三角形 ABC 中, 证明

$$(a^2-b^2)\cos C=c(b\cos B-a\cos A).$$

解　设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$, 则

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=k^2(\sin^2 A-\sin^2 B)\cos C\\
&=k^2\sin(A+B)\sin(A-B)\cos C\\
&=-k^2\sin C\sin(A-B)\cos(A+B)\\
&=-k^2\sin C\cdot\frac{1}{2}(\sin 2A-\sin 2B)\\
&=-k^2\sin C(\sin A\cos A-\sin B\cos B)\\
&=-k\sin C(k\sin A\cos A-k\sin B\cos B)\\
&=-c(a\cos A-b\cos B).
\end{aligned}$$

1534. 在三角形 ABC 中, 证明

$$(b+c)\sqrt{bc\sin B\sin C}=b^2\sin C+c^2\sin B.$$

解　设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$, 则

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=4R^2(\sin B+\sin C)\sin B\sin C\\
&=(2R\sin B)(2R\sin C)(\sin B+\sin C)\\
&=bc(\sin B+\sin C)\\
&=b(c\sin B)+c(b\sin C)\\
&=b^2\sin C+c^2\sin B.
\end{aligned}$$

1535. 在三角形 ABC 中, 证明

$$b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc\sin A.$$

解　设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$, 则

$$\begin{aligned}
&b^2\sin 2C+c^2\sin 2B\\
&=k^2\sin^2 B\sin 2C+k^2\sin^2 C\sin 2B\\
&=k^2\sin^2 B\cdot 2\sin C\cos C\\
&\quad+k^2\sin^2 C\cdot 2\sin B\cos B\\
&=2k^2\sin B\sin C(\sin B\cos C+\sin C\cos B)\\
&=2k^2\sin B\sin C\sin(B+C)\\
&=2k^2\sin B\sin C\sin A\\
&=2(k\sin B)(k\sin C)\sin A=2bc\sin A.
\end{aligned}$$

1536. 在三角形 ABC 中, 证明

$$c(1-\cos^2 B-\cos^2 A)=\cos C(a\cos A+b\cos B).$$

解　设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$, 则

$$\begin{aligned}
\text{原式左边}&=c(\sin^2 B-\cos^2 A)\\
&=-c(\cos^2 A-\sin^2 B)\\
&=-c\cos(A+B)\cos(A-B)\\
&=c\cos C\cos(A-B)\\
&=k\cos C\sin C\cos(A-B)\\
&=k\cos C\sin(A+B)\cos(A-B)\\
&=\frac{1}{2}k\cos C(\sin 2A+\sin 2B)\\
&=k\cos C(\sin A\cos A+\sin B\cos B)\\
&=\cos C(a\cos A+b\cos B).
\end{aligned}$$

1537. 在三角形 ABC 中, 证明

$$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0.$$

解　设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$, 则

$$\begin{aligned}
\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}&=\frac{k^2(\sin^2 A-\sin^2 B)}{\cos A+\cos B}\\
&=\frac{k^2\sin(A+B)\sin(A-B)}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\\
&=2k^2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\\
&=2k^2\left(\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right).
\end{aligned}$$

同理, 有

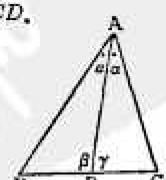
$$\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}=2k^2\left(\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right),$$

和 $$\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=2k^2\left(\sin^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right).$$

因此原式左边之和为 0.

1538. 用正弦定理证明下述定理.

定理: 在三角形 ABC 中, 设角 A 的平分线为 AD, 则 $AB:AC=BD:CD$.



解　把要求证的式子交换内项, 有

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}.\qquad ①$$

只要证明 ① 式就行了. 由正弦定理, 一个三角形中两边之比等于对应的对角正弦之比, 因此在三角形 ABD 中,

$$\frac{AB}{BD}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

在三角形 ACD 中，

$$\frac{AC}{CD}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

因为 $\beta+\gamma=\pi$，所以 $\sin\beta=\sin\gamma$，即 ① 式成立。

1539. 三角形 ABC 的内角 A、B、C 所对之边设为 a、b、c，且 $A:B:C=2:3:4$。证明

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{a+c}{2b}.$$

解 由 $A:B:C=2:3:4$，$A+B+C=180°$，得

$$A=40°,\ B=60°,\ C=80°.$$

由正弦定理，

$$\frac{a+c}{2b}=\frac{\sin A+\sin C}{2\sin B}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin B}$$

$$=\frac{2\sin\frac{40°+80°}{2}\cos\frac{40°-80°}{2}}{2\sin B}$$

$$=\frac{2\sin 60°\cos\frac{40°}{2}}{2\sin B}$$

$$=\frac{2\sin B\cos\frac{A}{2}}{2\sin B}=\cos\frac{A}{2}.$$

1540. 在三角形 ABC 中，已知 $C=60°$，证明

$$a+b=2c\cos\frac{A-B}{2}.$$

解 由正弦定理，

$$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C,$$

因此

$$a+b-2c\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=k\left(\sin A+\sin B-2\sin C\cos\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=k\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right.$$

$$\left.-2\sin C\cos\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=2k\cos\frac{A-B}{2}\left(\sin\frac{180°-C}{2}-\sin C\right)$$

$$=2k\cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{C}{2}-\sin C\right)$$

$$=2k\cos\frac{A-B}{2}(\cos 30°-\sin 60°)$$

$$=0.$$

$$\therefore\quad a+b=2c\cos\frac{A-B}{2}.$$

1541. 在三角形 ABC 中，已知 $A=2B$，证明下列各式成立。

(1) $a<2b$; (2) $a^2=b^2+bc$; (3) $c<3b$.

解 (1) 因为

$$\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B,$$

$$A+B+C=3B+C=180°,$$

所以 $\qquad 0°<B<60°$.

所以 $\qquad \frac{1}{2}<\cos B<1,$

$$\therefore\quad \sin A<2\sin B.$$

$$\therefore\quad a<2b.$$

(2) $\cos A=\cos 2B=2\cos^2 B-1$.

由余弦定理，

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=2\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2-1,$$

把这个式子变形，

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a^2+c^2)^2+b^4-2b^2(a^2+c^2)-2a^2c^2}{2a^2c^2},$$

$$a^2c(b^2+c^2-a^2)$$

$$=b[a^4+c^4+b^4-2b^2(a^2+c^2)],$$

$$a^4(b+c)-a^2(2b^3+b^2c+c^3)$$

$$+b^5+bc^4-2b^3c^2=0,$$

$$a^4(b+c)-a^2(b+c)(2b^2-bc+c^2)$$

$$+b(b^2-c^2)^2=0,$$

$$(b+c)[a^4-a^2(2b^2-bc+c^2)$$

$$+b(b+c)(b-c)^2]=0,$$

$$(b+c)[a^2-(b^2+bc)][a^2-(b-c)^2]=0,$$

$$(b+c)(a+b-c)(a-b+c)$$

$$\times[a^2-(b^2+bc)]=0,$$

但是因为

$$b+c\neq 0,\ a+b-c\neq 0,\ a-b+c\neq 0,$$

所以必有 $\qquad a^2=b^2+bc.$

(3) 由余弦定理和(2)，得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+bc,$$

因此 $\qquad 2bc\cos A=c^2-bc,$

$$\therefore\quad \cos A=\frac{c-b}{2b}<1,$$

由此得　$c-b<2b$，$\therefore\ c<3b$。

1542. 已知 $A+B+C=180^\circ$，证明

$$\sin(B+C-A)-\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)=4\cos A\sin B\cos C.$$

解

$$\begin{aligned}\text{原式左边}&=2\sin\frac{1}{2}(B+C-A-C-A+B)\\&\quad\times\cos\frac{1}{2}(B+C-A+C+A-B)\\&\quad+\sin 2C\\&=2\sin(B-A)\cos C+2\sin C\cos C\\&=2\cos C[\sin(B-A)+\sin C]\\&=2\cos C[\sin(B-A)+\sin(A+B)]\\&=2\cos C(2\sin B\cos A)\\&=4\cos A\sin B\cos C.\end{aligned}$$

别解　原式左边 $=\sin(180^\circ-2A)-\sin(180^\circ-2B)+\sin(180^\circ-2C)$

$$=\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\sin B\cos C.$$

1543. 在三角形 ABC 中，证明下列等式成立：

(1) $(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}=c^2$;

(2) $\dfrac{1}{2}(a+b+c)=b\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{B}{2}$;

(3) $\cos A+\cos B=\dfrac{2(a+b)}{c}\sin^2\dfrac{C}{2}$;

(4) $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$.

解　(1) 由半角公式得

$$\begin{aligned}\text{左边}&=(a^2-2ab+b^2)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos C)\\&\quad+(a^2+2ab+b^2)\cdot\frac{1}{2}(1-\cos C)\\&=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2)+\frac{\cos C}{2}(-4ab)\\&=a^2+b^2-2ab\cos C=c^2.\end{aligned}$$

(2) 同理，有

$$\begin{aligned}\text{右边}&=\frac{b}{2}(1+\cos C)+\frac{c}{2}(1+\cos B)\\&=\frac{1}{2}(b+c)+\frac{b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\&\quad+\frac{c}{2}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\&=\frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{4a}\cdot 2a^2\\&=\frac{1}{2}(a+b+c).\end{aligned}$$

(3) 由余弦定理，

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\&=\frac{ab^2+ac^2-a^3+a^2b+bc^2-b^3}{2abc}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{分子}&=ab(a+b)+c^2(a+b)\\&\quad-(a+b)(a^2-ab+b^2)\\&=(a+b)(ab+c^2-a^2+ab-b^2)\\&=(a+b)[c^2-(a-b)^2].\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \text{左边}=\frac{(a+b)[c^2-(a-b)^2]}{2abc},$$

$$\begin{aligned}\text{右边}&=\frac{2(a+b)}{c}\cdot\frac{1-\cos C}{2}\\&=\frac{a+b}{c}\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\\&=\frac{(a+b)[c^2-(a-b)^2]}{2abc}.\end{aligned}$$

(4) 同样由余弦定理得

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{1}{a}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{1}{b}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\&\quad+\frac{1}{c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.\end{aligned}$$

1544. 证明在 C 为直角的三角形 ABC 中，

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{b+c}{a}.$$

解　$\cos A=\dfrac{b}{c}$，$\sin A=\dfrac{a}{c}$。所以

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{\sin A}=\frac{c+b}{a}.$$

1545. 在三角形 ABC 中，证明

$$c(a\cos B-b\cos A)=a^2-b^2.$$

解　设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，则

$$\begin{aligned}&c(a\cos B-b\cos A)\\&=k^2\sin C(\sin A\cos B-\sin B\cos A)\\&=k^2\sin C\sin(A-B)\\&=k^2\sin(A+B)\sin(A-B)\\&=k^2\sin^2 A-k^2\sin B=a^2-b^2.\end{aligned}$$

别解 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$.

所以
$$a^2-b^2=-(a^2-b^2)+2c(a\cos B-b\cos A),$$
$$2(a^2-b^2)=2c(a\cos B-b\cos A),$$
即 $a^2-b^2=c(a\cos B-b\cos A)$.

1546. 设三角形的三边为 a、b、c，其对角为 2θ、3θ、4θ，证明
$$\operatorname{tg}^2\theta=\left(\frac{2b}{a+c}\right)^2-1.$$

解 由正弦定理，
$$\frac{a}{\sin 2\theta}=\frac{b}{\sin 3\theta}=\frac{c}{\sin 4\theta}$$
$$=\frac{a+c}{\sin 2\theta+\sin 4\theta}=\frac{a+c}{2\sin 3\theta\cos\theta},$$
$$\therefore\quad b=\frac{a+c}{2\cos\theta},$$
$$\therefore\quad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{2b}{a+c},$$
因此 $\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta-1=\left(\dfrac{2b}{a+c}\right)^2-1.$

1547. 在三角形 ABC 中，证明
$$a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=2ab\sin C.$$

解 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{1}{k}$，由正弦的倍角公式和余弦定理，
$$左边=a^2\cdot 2\sin B\cos B+b^2\cdot 2\sin A\cos A$$
$$=2\left(a^2\cdot bk\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+b^2\cdot ak\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$
$$=\frac{abk}{c}(c^2+a^2-b^2+b^2+c^2-a^2)$$
$$=\frac{abk}{c}\cdot 2c^2=2ab\cdot ck=2ab\sin C.$$

1548. 已知 $B=75^\circ$，$C=60^\circ$，$a=100$．解这个三角形.

解 $A=180^\circ-(B+C)=45^\circ$，因此
$$\frac{100}{\sin 45^\circ}=\frac{b}{\sin 75^\circ}=\frac{c}{\sin 60^\circ},$$
$$b=\frac{100\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=100\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\sqrt{2}=50(\sqrt{3}+1).$$
$$c=\frac{100\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=100\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=50\sqrt{6}.$$

1549. 在三角形 ABC 中，证明
$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0.$$

解 设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$,
$$左边的第一式=\frac{ak\sin A\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}$$
$$=\frac{ak\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}$$
$$=\frac{ak(\sin^2 B-\sin^2 C)}{\sin B+\sin C}$$
$$=k^2\sin A(\sin B-\sin C).$$
因为其他两式也可作同样的变形，所以
$$左边=k^2(\sin A\sin B-\sin A\sin C+\sin B\sin C-\sin A\sin B+\sin A\sin C-\sin B\sin C)=0.$$

1550. 在三角形 ABC 中，已知
$$a\sin^2\frac{C}{2}+c\sin^2\frac{A}{2}=\frac{b}{2},$$
证明 a、b、c 成等差数列.

解 用半角公式把已知式变形，则
$$a\cdot\frac{1}{2}(1-\cos C)+c\cdot\frac{1}{2}(1-\cos A)=\frac{b}{2}.$$
$$\therefore\quad c\cos A+a\cos C=a+c-b.$$
由余弦定理，
$$c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=a+c-b,$$
$$(b^2+c^2-a^2)+(a^2+b^2-c^2)=2b(a+c-b),$$
$$2b^2=2b(a+c-b),$$
$$2b(a+c-2b)=0,$$
$$\therefore\quad a+c=2b.$$
故 a、b、c 成等差数列.

1551. 已知三角形 ABC 中 $\angle C=60^\circ$，证明

(1) $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$;

(2) $\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{a}{b+c}=1$.

解 (1) 由余弦定理，
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$$
$$=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab,$$
$$\therefore\quad 3ab=(a+b)^2-c^2$$
$$=(a+b+c)(a+b-c).$$
(2) 由余弦定理和(1)同样地可得

$$a^2+b^2=c^2+ab,$$

$$\therefore\quad \frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}=\frac{a^2+b^2+ac+bc}{(a+c)(b+c)}$$

$$=\frac{c^2+ab+ac+bc}{(a+c)(b+c)}$$

$$=\frac{(a+c)(b+c)}{(a+c)(b+c)}=1.$$

1552. 在三角形 ABC 中，已知 $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}B$、$\operatorname{tg}C$ 成调和数列，证明 a^2、b^2、c^2 成等差数列.

解 $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}B$、$\operatorname{tg}C$ 成调和数列，即

$$\frac{\cos A}{\sin A},\quad \frac{\cos B}{\sin B},\quad \frac{\cos C}{\sin C}$$

成等差数列，也即

$$\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}-2\cdot\frac{\cos B}{\sin B}=0.$$

把它化简，

$$\frac{\sin C\cos A+\sin A\cos C}{\sin A\sin C}-\frac{2\cos B}{\sin B}=0,$$

$$\sin B\sin(A+C)-2\sin A\cos B\sin C=0,$$

$$\therefore\quad \sin^2 B=2\sin A\cos B\sin C,$$

即 $$b^2=2ac\cos B.$$

由此式和余弦定理知

$$a^2+c^2-2b^2=(a^2+c^2-b^2)-b^2$$

$$=2ac\cos B-b^2=0.$$

故 a^2、b^2、c^2 成等差数列.

1553. 在三角形 ABC 中，已知

$$2(\cos A-1)+\cos B+\cos C=0.$$

证明 a、b、c 成等差数列.

解 把余弦定理用于已知式，得

$$2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1\right)+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0.$$

化简这个式子，得

$$\frac{(b-c)^2-a^2}{bc}$$

$$+\frac{a^2b+a^2c+b^2c+bc^2-(b^3+c^3)}{2abc}=0.$$

$$2a[(b-c)^2-a^2]+(b+c)$$
$$\times[a^2+bc-(b^2-bc+c^2)]=0.$$

$$2a[(b-c)^2-a^2]$$
$$-(b+c)[(b-c)^2-a^2]=0.$$

$$(b-c+a)(b-c-a)[2a-(b+c)]=0.$$

由三角形的性质知

$$b-c+a\neq0,\quad b-c-a\neq0,$$

$$\therefore\quad 2a=b+c.$$

即 a、b、c 成等差数列.

1554. 在三角形 ABC 中，已知

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{m}{n}\quad 和\quad \frac{\cos A}{\cos B}=\frac{p}{q},$$

证明 $$\cos C=\frac{mp-nq}{np-mq}.$$

解 $$\frac{\sin(B+C)}{\sin B}=\frac{m}{n},\ \frac{\cos(B+C)}{\cos B}=-\frac{p}{q}.$$

所以 $$\cos C+\operatorname{ctg}B\sin C=\frac{m}{n},$$

$$\operatorname{tg}B\sin C-\cos C=\frac{p}{q}.$$

所以 $$\sin^2 C=\left(\frac{m}{n}-\cos C\right)\left(\frac{p}{q}+\cos C\right),$$

$$1=\frac{mp}{nq}+\cos C\left(\frac{m}{n}-\frac{p}{q}\right),$$

所以 $$\cos C=\frac{mp-nq}{np-mq}.$$

1555. 化简:

$$[\sin A+\sin B+\sin(A+B)]^2$$
$$+[1+\cos A+\cos B+\cos(A+B)]^2.$$

解

$$原式=\left[2\sin\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}\right.$$
$$\left.+2\sin\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A+B)}{2}\right]^2$$
$$+[(\cos A+\cos B)$$
$$+1+\cos(A+B)]^2$$
$$=4\sin^2\frac{(A+B)}{2}\left[\cos\frac{(A-B)}{2}\right.$$
$$\left.+\cos\frac{(A+B)}{2}\right]^2+\left[2\cos\frac{(A+B)}{2}\right.$$
$$\left.\times\cos\frac{(A-B)}{2}+2\cos^2\frac{(A+B)}{2}\right]^2$$
$$=4\sin^2\frac{(A+B)}{2}\left[\cos\frac{(A-B)}{2}\right.$$
$$\left.+\cos\frac{(A+B)}{2}\right]^2+4\cos^2\frac{(A+B)}{2}$$
$$\times\left[\cos\frac{(A-B)}{2}+\cos\frac{(A+B)}{2}\right]^2$$
$$=4\left[\cos\frac{(A-B)}{2}+\cos\frac{(A+B)}{2}\right]^2$$
$$=4\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)^2$$
$$=16\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}.$$

1556． 有一以 AB 为弦的弓形，弦 AB 的长度为 a，弓形所含的角为 $\frac{5}{6}\pi$．由弧 AB 上的点 C 向 AB 作垂线，垂足为 H．

(1) 用 $\angle CAB$ 的大小 θ 和 a 表示弦 AC 的长度；

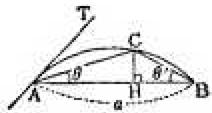
(2) 能使三角形 ACH 的面积取最大的 θ 是多少？

解 (1) 把正弦定理用于 $\triangle ACB$，因为

$$\theta+\theta'=\frac{\pi}{6},$$

$$\angle C=\frac{5\pi}{6},$$

$$\frac{AC}{\sin\theta'}=\frac{AB}{\sin C}$$



及
$$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

所以
$$AC=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}{\sin\frac{5\pi}{6}}\cdot AB$$
$$=2a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right).$$

(2) $AH=AC\cdot\cos\theta,CH=AC\cdot\sin\theta$，

$$\therefore\quad \triangle ACH=\frac{1}{2}AH\cdot CH$$
$$=2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\sin\theta\cos\theta,$$

设这个式子为 $f(\theta)$，用和与积的变形公式，可得

$$f(\theta)=\frac{a^2}{2}\left[2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\sin\theta\right]$$
$$\times\left[2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\cos\theta\right]$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\theta\right)-\cos\frac{\pi}{6}\right]$$
$$\times\left[\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\theta\right)\right]$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[-\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right.$$
$$+\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$+\cos\frac{\pi}{6}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\left.-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\right]$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[-\frac{1}{2}\sin\left(4\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\sin 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{4}\right].$$

$$\therefore\quad f'(\theta)=a^2\left[-\cos\left(4\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2\theta\right]$$
$$=-2a^2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\cdot\sin\left(3\theta-\frac{\pi}{6}\right).\qquad ①$$

设点 A 处的切线为 AT，因为弦 AC 在 $\angle TAB$ 内，所以

$$0<\theta<\frac{\pi}{6}.\qquad ②$$

由①，②，即有

$$0<\theta<\frac{\pi}{18}\quad 时\quad f'(\theta)>0,$$

$$\frac{\pi}{18}<\theta<\frac{\pi}{6}\quad 时\quad f'(\theta)<0.$$

从而当 $\theta=\frac{\pi}{18}$ 时 $f(\theta)$ 最大。

1557． 已知三角形中

$$B=30°,\ b=50\sqrt{3}\,\text{cm},\ c=150\,\text{cm},$$

证明这是等腰三角形或直角三角形，并求出三角形的第三边 a．

解 由余弦定理可得

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos 30°,$$
$$2500\times3=a^2+22500-2a\times150\times\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$a^2-150\sqrt{3}a+15000=0,$$
$$(a-100\sqrt{3})(a-50\sqrt{3})=0.$$

$\therefore\quad a=100\sqrt{3}\,(\text{cm})$ 或 $50\sqrt{3}\,(\text{cm})$．

当 $a=100\sqrt{3}$ 时，因为有

$$(50\sqrt{3})^2+150^2=(100\sqrt{3})^2,$$

所以是 $\angle A=90°$ 的直角三角形．当

$$a=50\sqrt{3}$$

时，显然有 $a=b$，所以是等腰三角形．

1558． 已知三角形的三个角为 $30°$、$60°$ 和 $90°$．证明它们的对边之比为 $1:\sqrt{3}:2$．

解 设 $30°$、$60°$ 和 $90°$ 的对边分别为 a、b 和 c，则

$$\frac{a}{\sin 30°}=\frac{b}{\sin 60°}=\frac{c}{\sin 90°},$$

即
$$\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{c}{1},$$

也即　　$\frac{a}{1}=\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{c}{2}$.

1559. 在三角形 ABC 中，设 BC 的中点为 D, $\angle ADC=\theta$.

(1) 证明 $\operatorname{ctg}\theta=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C)$. 只讨论其中 $\angle B$、$\angle C$ 都是锐角的情形.

(2) 当 $\angle B=15^\circ$, $\angle C=60^\circ$ 时求 $\operatorname{ctg}\theta$ 的值至三位小数.

解　(1)(i) 当 $\angle B=\angle C$ 时，因为 $\operatorname{ctg}B=\operatorname{ctg}C$, $\operatorname{ctg}\theta=\operatorname{ctg}90^\circ=0$, 所以原式两边都为 0, 即原式成立.

(ii) 当 $90^\circ>\angle C>\angle B$ 时，由 A 向 BC 作垂线 AE, 则垂足 E 落在 DC 上. 因为 $\theta<90^\circ$, 所以 $\operatorname{ctg}\theta>0$. 从而

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{DE}{AE}. \qquad ①$$

$$\operatorname{ctg}B=\frac{BE}{AE},\ \operatorname{ctg}C=\frac{EC}{AE}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C=\frac{BE-EC}{AE}. \qquad ②$$

但是　$BE=BD+DE$, $EC=DC-DE$.

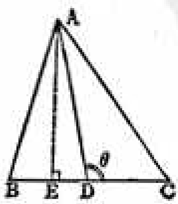
从而，由 $BD=DC$(已知条件)可知

$$BE-EC=2DE.$$

结合②有　$\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C=2\frac{DE}{AE}$.

由①得　$\operatorname{ctg}\theta=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C)$.

(iii) 当 $90^\circ>\angle B>\angle C$ 时，E 在 BD 上，$\theta>90^\circ$, 所以 $\operatorname{ctg}\theta<0$.



$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\theta=-\frac{DE}{AE}.$$

$$\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C=\frac{BE-EC}{AE}=\frac{BD-DE-(DC+DE)}{AE}=-\frac{2DE}{AE}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\theta=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C).$$

别解　用下面的做法可以不必分 $\angle B$、$\angle C$ 的大小讨论.

因为 AD 是中线，所以 $\triangle ABD=\triangle ACD$.

$$\therefore\quad \frac{1}{2}AB\cdot AD\sin(\theta-B)=\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin[\pi-(\theta+C)].$$

用正弦定理，由上式可得

$$\sin C\sin(\theta-B)=\sin B\sin(\theta+C).$$

$$\therefore\quad \sin C(\sin\theta\cos B-\sin B\cos\theta)=\sin B(\sin\theta\cos C+\sin C\cos\theta).$$

$$\therefore\quad (\sin C\cos B-\sin B\cos C)\sin\theta=2\sin B\sin C\cos\theta.$$

在上式中两边除以 $2\sin B\sin C\sin\theta(\neq 0)$, 得

$$\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C)=\operatorname{ctg}\theta.$$

(2) $\operatorname{ctg}15^\circ=\operatorname{tg}75^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ+30^\circ)$

$$=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}30^\circ}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}$$

$$=2+\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{ctg}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\theta=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}15^\circ-\operatorname{ctg}60^\circ)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=1+\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 1+\frac{1.7320}{3}$$

$$=1.577\cdots.$$

1560. (1) 若三角形 ABC 中 $C=90^\circ$, 证明

$$\sin(A-B)+\cos 2A=0.$$

(2) 上述定理的逆定理是否正确. 若正确则说出理由，若不正确则举出反例.

解　(1) 把原式左边变形，得

$$\text{左边}=\sin[A-(90^\circ-A)]+\cos 2A$$
$$=\sin[-(90^\circ-2A)]+\cos 2A$$
$$=-\cos 2A+\cos 2A=0.$$

(2) 反之，若 $\sin(A-B)+\cos 2A=0$, 则

$$\sin(A-B)+\cos 2A$$
$$=\sin(A-B)+\sin(90^\circ-2A)$$
$$=2\sin\frac{90^\circ-(A+B)}{2}\cos\frac{3A-B-90^\circ}{2}$$
$$=0.$$

若 $\sin\dfrac{90^\circ-(A+B)}{2}=0$，则

$$90^\circ-(A+B)=0,\ A+B=90^\circ,$$

$$\therefore\ C=90^\circ.$$

又若 $\cos\dfrac{3A-B-90^\circ}{2}=0$，则

$$3A-B-90^\circ=180^\circ,$$

$$\therefore\ 3A=270^\circ+B.$$

这表示，(1) 中定理的逆定理不正确．例如 $A=100^\circ$，$B=30^\circ$ 就是一个反例．

1561．已知两个三角形 ABC、$A'B'C'$ 中 $B=B'$，$aa'=bb'+cc'$，A 和 A' 的角度间有什么关系？

解　设 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 的外接圆半径分别为 R，R'，则

$$a=2R\sin A,\ a'=2R'\sin A',$$
$$b=2R\sin B,\ b'=2R'\sin B',$$
$$c=2R\sin C,\ c'=2R'\sin C'.$$

把这些式子代人 $aa'=bb'+cc'$，并用公式

$$\sin C=\sin(A+B),$$
$$\sin C'=\sin(A'+B'),$$

有
$$\sin A\sin A'=\sin^2 B+\sin(A+B)\sin(A'+B'),$$

根据积化和的公式，有

$$\cos(A-A')-\cos(A+A')=2\sin^2 B+\cos(A-A')-\cos(A+A'+2B),$$

$$\therefore\ \cos(A+A')+2\sin^2 B-\cos(A+A')\cos 2B+\sin(A+A')\sin 2B=0,$$

$$\cos(A+A')(1-\cos 2B)+\sin(A+A')\sin 2B+2\sin^2 B=0.$$

$$\therefore\ 2\sin B[\cos(A+A')\sin B+\sin(A+A')\cos B+\sin B]=0,$$

因为 $\sin B\neq 0$，用加法定理，

$$\sin(A+A'+B)+\sin B=0,$$

用和化积的公式，有

$$\sin\left(\frac{A+A'}{2}+B\right)\cos\frac{A+A'}{2}=0.$$

$$\because\ 0^\circ<\frac{A+B}{2}+\frac{A'+B}{2}<180^\circ,$$

$$\therefore\ \sin\left(\frac{A+A'}{2}+B\right)\neq 0.$$

因此 $\cos\dfrac{A+A'}{2}=0$．又因为

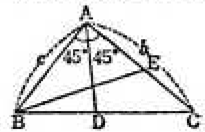
$$0^\circ<\frac{A+A'}{2}<180^\circ,$$

$$\therefore\ \frac{A+A'}{2}=90^\circ.$$

$$\therefore\ A+A'=180^\circ.$$

1562．在直角三角形 ABC 中，设 $\angle A$ 的角平分线交 BC 于 D，AC 的中点为 E．若 $AB=c$，$AC=b$，试用 b、c 表出 AD 和 $\sin\angle CBE$．

解　$BC=\sqrt{b^2+c^2}$，因为 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，所以



$$BD:DC=AB:AC=c:b.$$

$$\therefore\ BD:BC=c:(c+b).$$

$$\therefore\ BD=\frac{c\sqrt{b^2+c^2}}{b+c}.$$

把正弦定理用于 $\triangle ABD$，有

$$\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}.$$

但是因为

$$\sin\angle ABD=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

$$\sin\angle BAD=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore\ AD=\frac{c\sqrt{b^2+c^2}}{b+c}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{2}bc}{b+c}.$$

再把中线定理用于 $\triangle ABC$，则有

$$BA^2+BC^2=2(BE^2+EC^2),$$

$$\because\ BA^2+BC^2=c^2+(\sqrt{b^2+c^2})^2=b^2+2c^2,$$

$$EC=\frac{b}{2},$$

$$\therefore\ BE^2=\frac{1}{2}(b^2+2c^2)-\frac{b^2}{4}=\frac{b^2+4c^2}{4}.$$

$$\therefore\ BE=\frac{\sqrt{b^2+4c^2}}{2}.$$

把正弦定理用于 $\triangle BEC$，则

$$\frac{\sin\angle CBE}{BC}=\frac{\sin\angle ECB}{BE},$$

$$\therefore\quad \sin\angle CBE=\frac{\sin\angle ECB}{BE}\cdot EC$$
$$=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{b^2+4c^2}}\cdot\frac{b}{2}$$
$$=\frac{bc}{\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+4c^2)}}.$$

1563. 四边形 $ABCD$ 中

$$\angle A=\angle C=90°,$$

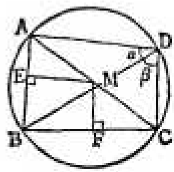
$ABCD$ 的对角线 AC 中点为 M，由 M 向 AB、BC 所作的垂线足为 E、F。

(1) 若 $BD=a$，$\angle ADB=\alpha$，$\angle CDB=\beta$，试用 a，α，β 表出 AC 的长度。

(2) 证明

$$ME\cdot AD+MF\cdot CD=\frac{1}{2}AC^2.$$

解 (1) 因为 BD 为四边形 $ABCD$ 外接圆的直径，用正弦定理，有



$$\frac{AC}{\sin(\alpha+\beta)}=BD=a,$$

$\therefore\quad AC=a\sin(\alpha+\beta)$.

(2) $ME=\dfrac{1}{2}AC\sin\beta$，$MF=\dfrac{1}{2}AC\sin\alpha$，

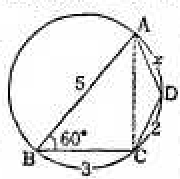
$$\therefore\quad ME\cdot AD+MF\cdot CD$$
$$=\frac{1}{2}AC\sin\beta\cdot a\cos\alpha$$
$$+\frac{1}{2}AC\sin\alpha\cdot a\cos\beta$$
$$=\frac{1}{2}ACa\sin(\alpha+\beta),$$

由(1)，　　$AC=a\sin(\alpha+\beta)$，

$$\therefore\quad ME\cdot AD+MF\cdot CD=\frac{1}{2}AC^2.$$

1564. 已知圆的内接四边形 $ABCD$ 中，$AB=5\text{cm}$，$BC=3\text{cm}$，$CD=2\text{cm}$，$\angle B=60°$，求 DA 的长度。

解 因为四边形 $ABCD$ 内接于一圆，所以 $\angle D=180°-\angle B=120°$，把余弦定理用于 $\triangle ABC$，则有



$$AC^2=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cos60°=19.$$

又设 $AD=x$，把余弦定理用于 $\triangle ACD$，则

$$AC^2=x^2+2^2-2\cdot2\cdot x\cos120°=x^2+2x+4,$$

因此　　$x^2+2x+4=19$，

取正根 $x=3$，

$$\therefore\quad DA=3\text{cm}.$$

1565. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{a\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{r_1-r}=\frac{b\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{r_2-r}=\frac{c\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{r_3-r},$$

其中 r 表示内切圆半径，r_1、r_2、r_3 表示傍切圆半径。

解 因为

$$r_1-r=s\operatorname{tg}\frac{A}{2}-(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=a\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

所以

$$\frac{a\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{r_1-r}=1,$$

同理 $\dfrac{b\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{r_2-r}$、$\dfrac{c\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{r_3-r}$ 都等于1。因此欲证之式成立。

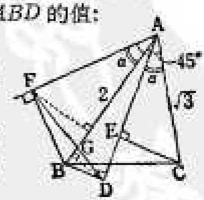
1566. 已知三角形 ABC 中，$AB=2$，$AC=\sqrt{3}$，$\angle A=45°$，过 A 在 $\angle A$ 内引一条直线，使得 $\triangle ABD=\triangle AEC$。其中 D、E 是由 B、C 向这条直线所作垂线的垂足。再过 A 作一条与 AD 成 $45°$ 的直线(与 AB 位于 AD 的同侧)，B 至该直线的垂线足为 F。

(1) 求 $\triangle AFB:\triangle ABD$ 的值；

(2) 求 DF 的长；

(3) 证明 $\triangle AFD>\triangle BDF$；

(4) 设 FD 和 AB 的交点为 G，求 AG 的长。



解 (1) 由题意知，可设

$$\angle CAD=\angle BAF=\alpha.$$
$$\triangle AFB:\triangle ABD=\triangle AFB:\triangle AEC$$
$$=\frac{1}{2}AB\cdot AF\sin\alpha:\frac{1}{2}AC\cdot AE\sin\alpha$$
$$=2AF:\sqrt{3}AE$$
$$=2^2\cos\alpha:(\sqrt{3})^2\cos\alpha=4:3.$$

(2) 因为 A、F、B、D 四点在以 AB 为直径的圆上，所以由正弦定理，

$$\frac{DF}{\sin45°}=AB=2,$$

$\therefore\quad DF=2\sin 45^\circ=\sqrt{2}.$

(3) $\because\quad \angle DBF=180^\circ-45^\circ=135^\circ,$

$$\therefore\quad \frac{\triangle AFD}{\triangle BDF}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot AF\sin 45^\circ}{\frac{1}{2}BD\cdot BF\sin 135^\circ}=\frac{AD}{BD}\cdot\frac{AF}{BF},$$

因为 $\frac{AD}{BD}>1$, $\frac{AF}{BF}>1$, 所以

$\frac{\triangle AFD}{\triangle BDF}>1,\quad \therefore\quad \triangle AFD>\triangle BDF.$

(4) 因为 DF 是 $\triangle ADF$ 和 $\triangle BDF$ 的公共底边，由(3)的结果知，

$$AG>GB,\ AG+GB=2. \qquad ①$$

又因为从 D、F 向 AB 所作垂线之比等于 $DG:GF$, 所以

$$\frac{\triangle ABD}{\triangle AFB}=\frac{DG}{GF},$$

由(1)、(2)的结果知，

$$\frac{DG}{GF}=\frac{3}{4},\ DG+GF=\sqrt{2},$$

$$\therefore\quad DG=\frac{3\sqrt{2}}{7},\ GF=\frac{4\sqrt{2}}{7}. \qquad ②$$

由圆幂定理知

$$AG\cdot GB=DG\cdot GF. \qquad ③$$

从而

$$AG\cdot GB=\frac{24}{49}. \qquad ④$$

由此，AG、GB 是

$$x^2-2x+\frac{24}{49}=0$$

的两个根，AG 是其中大的一个根。

$$49x^2-2\times 49x+24=0,$$
$$(7x-2)(7x-12)=0,$$
$$x=\frac{2}{7},\ \frac{12}{7}.$$
$$\therefore\quad AG=\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}.$$

1567. 在三角形 ABC 中，证明

$$a\sec A+b\sec B+c\sec C=a\sec A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C.$$

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$, 则

原式左边 $=2R(\sin A\sec A+\sin B\sec B+\sin C\sec C)$

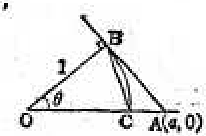
$$=2R\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}\right)$$
$$=2R(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C)$$
$$=2R\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$
$$=2R\frac{\sin A}{\cos A}\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$
$$=\frac{a}{\cos A}\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=a\sec A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C.$$

1568. 在圆心为 O、半径为 1 的圆外有一点 A, 使 $OA=a$. 线段 OA 与圆的交点为 C. 设从 A 向圆所作的一条切线的切点为 B.

(1) 求线段 BC 的长；

(2) 求 $\triangle ABC$ 的外接圆半径的长。

解 (1) 由余弦定理，



$$BC^2=1^2+1^2-2\cos\theta=2-\frac{2}{a},$$

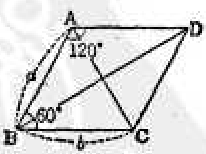
$$\therefore\quad BC=\sqrt{\frac{2a-2}{a}}.$$

(2) 设所求的半径为 R, 由正弦定理，

$$2R=\frac{BC}{\sin A}=BC\cdot a=\sqrt{2a^2-2a},$$

$$\therefore\quad R=\sqrt{\frac{a^2-a}{2}}.$$

1569. 设边长为 a、b, 所夹角为 60° 的平行四边形，求两条对角线的长。



解 设平行四边形 $ABCD$ 中的对角线为 AC、BD, 由余弦定理，

$$AC=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ}=\sqrt{a^2+b^2-ab}.$$

$$BD=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ}=\sqrt{a^2+b^2+ab}.$$

即两条对角线的长为 $\sqrt{a^2+b^2\pm ab}$.

1570. 已知三角形 ABC 中

$$a:b:c=5:6:7.$$

(1) 求 $\sin A:\sin B:\sin C$;

(2) 求 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$.

解 (1) 由正弦定理显然有

$$\sin A:\sin B:\sin C=5:6:7.$$

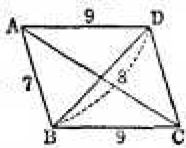
(2) 在 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 中用 $a=5k$,

$b=6k,\ c=7k$ 代入，有
$$\cos A=\frac{36k^2+49k^2-25k^2}{2\cdot 6k\cdot 7k}=\frac{5}{7}.$$
因为 $\sin A>0$，
$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{25}{49}}=\frac{2\sqrt{6}}{7},$$
$$\sin B=\frac{6}{5}\sin A=\frac{12\sqrt{6}}{35},$$
$$\sin C=\frac{7}{5}\sin A=\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

1571. 回答下列关于平行四边形 $ABCD$ 的问题：

(1) 若 $AB=7,\ BC=9,\ BD=8,\ AC=?$

(2) 若 $AB=3,\ BC=5,\ BD=7,\ \angle B=?$



解　(1) 在 $\triangle ABD$ 中，
$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD,$$
$$8^2=7^2+9^2-2\cdot 7\cdot 9\cos\angle BAD,$$
$$\therefore\quad \cos\angle BAD=\frac{49+81-64}{126}=\frac{11}{21}.$$
又在 $\triangle ABC$ 中，
$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC$$
$$=7^2+9^2+2\cdot 7\cdot 9\cos\angle BAD$$
$$=7^2+9^2+2\cdot 7\cdot 9\times\frac{11}{21}=196=14^2,$$
$$\therefore\quad AC=14.$$
(2) $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A$
$$=AB^2+AD^2+2AB\cdot AD\cos B,$$
$$\therefore\quad \cos B=\frac{7^2-3^2-5^2}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{1}{2},$$
因为 $0^\circ<\angle B<180^\circ$，所以 $\angle B=60^\circ$。

1572. 已知 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，$x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma=0$，证明
$$(y+z\cos\alpha)(z+x\cos\beta)(x+y\cos\gamma)+(y\cos\alpha+z)(z\cos\beta+x)(x\cos\gamma+y)=0.$$
解　由已知条件，
$$z=-\frac{x\sin\alpha+y\sin\beta}{\sin\gamma}=-\frac{x\sin\alpha+y\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}.$$
因此
$$(y+z\cos\alpha)(z+x\cos\beta)(x+y\cos\gamma)$$
$$=-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\gamma}(y\cos\beta-x\cos\alpha)\times(y+x\cos\gamma)(x+y\cos\gamma),$$
同理
$$(y\cos\alpha+z)(z\cos\beta+x)(x\cos\gamma+y)$$
$$=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\gamma}(y\cos\gamma+x)\times(y\cos\beta-x\cos\alpha)(x\cos\gamma+y),$$
因此其和为 0。

1573. 已知 $A+B+C=180^\circ$，证明
$$\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\sin B\cos C.$$
解
$$\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C$$
$$=2\sin(A-B)\cos(A+B)+2\sin C\cos C$$
$$=-2\sin(A-B)\cos C+2\sin C\cos C$$
$$=2\cos C[-\sin(A-B)+\sin C]$$
$$=2\cos C[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$
$$=2\cos C(2\cos A\sin B)$$
$$=4\cos A\sin B\cos C.$$

1574. 已知 $A+B+C=180^\circ$，证明
$$\frac{\sin B+\sin C-\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$
解　$\sin B+\sin C-\sin A$
$$=4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2},$$
$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$
$$\therefore\quad \frac{\sin B+\sin C-\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

1575. 已知 $A+B+C=180^\circ$，证明
$$\sin A(\cos B+\cos C)+\sin B(\cos C+\cos A)+\sin C(\cos A+\cos B)=\sin A+\sin B+\sin C.$$

解　原式左边 $=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$
$+(\sin A\cos C+\sin C\cos A)$
$+(\sin B\cos C+\sin C\cos B)$
$=\sin(A+B)+\sin(A+C)$
$+\sin(B+C)$
$=\sin C+\sin B+\sin A.$

1576. 若三角形 ABC 的面积为 S，证明

$$\frac{a^2}{2(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)}=S.$$

解　$\dfrac{a^2}{2(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)}=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$

$$=\frac{(a\sin B)(a\sin C)}{2\sin A}$$

$$=\frac{b\sin A\cdot c\sin A}{2\sin A}=\frac{bc\sin A}{2}=S.$$

1577. 证明

$$2\sin^2\alpha\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$
$$+2\sin^2\beta\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$$
$$+2\sin^2\gamma\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$=-(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\beta-\cos\gamma)$$
$$\times(\cos\gamma-\cos\alpha).$$

解　$2\sin^2\alpha\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}$

$=(1-\cos^2\alpha)(\cos\gamma-\cos\beta)$
$=\cos^2\alpha(\cos\beta-\cos\gamma)$
$+\cos\gamma-\cos\beta,$

其他两项也可变形得到类似的式子，所以

原式左边 $=\cos^2\alpha(\cos\beta-\cos\gamma)$
$+\cos^2\beta(\cos\gamma-\cos\alpha)$
$+\cos^2\gamma(\cos\alpha-\cos\beta),$

易知它等于欲证之式的右边.

1578. 已知 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\beta+\cos\gamma)$$
$$\times(\cos\gamma+\cos\alpha)+(\sin\beta+\sin\gamma)$$
$$\times(\cos\gamma+\cos\alpha)(\cos\alpha+\cos\beta)$$
$$+(\sin\gamma+\sin\alpha)(\cos\alpha+\cos\beta)$$
$$\times(\cos\beta+\cos\gamma)$$
$$=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\beta+\sin\gamma)$$
$$\times(\sin\gamma+\sin\alpha).$$

解　$(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\beta+\cos\gamma)$
$\times(\cos\gamma+\cos\alpha)$

$$=8\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$
$$\times\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$$
$$=8\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$\times\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$$
$$\times(\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma).$$

$\therefore$　原式左边 $=2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}$

$$\times\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$
$$=8\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$$
$$\times\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$
$$=8\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$$
$$\times\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\beta+\sin\gamma)$$
$$\times(\sin\gamma+\sin\alpha).$$

1579. 已知 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\sec^2\beta+\sec^2\gamma+2\sec\beta\sec\gamma\cos\alpha$$
$$=\sec\beta\sec\gamma\sin\alpha(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma).$$

解

原式左边 $=\sec^2\beta\sec^2\gamma(\cos^2\gamma+\cos^2\beta$
$+2\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha)$
$=\sec^2\beta\sec^2\gamma[\cos^2\gamma+\cos\beta(\cos\beta$
$+2\cos\gamma\cos\alpha)]=\sec^2\beta\sec^2\gamma\{\cos^2\gamma$
$+\cos\beta[-\cos(\alpha+\gamma)+2\cos\gamma\cos\alpha]\}$
$=\sec^2\beta\sec^2\gamma[\cos^2\gamma+\cos\beta\cos(\alpha-\gamma)]$
$=\sec^2\beta\sec^2\gamma$
$\times[\cos^2\gamma-\cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)]$
$=\sec^2\beta\sec^2\gamma(\cos^2\gamma-\cos^2\gamma+\sin^2\alpha)$
$=\sec^2\beta\sec^2\gamma\sin^2\alpha$
$=\sec^2\beta\sec^2\gamma\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)$
$=\sec^2\beta\sec^2\gamma\sin\alpha$
$\times(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma)$
$=\sec\beta\sec\gamma\sin\alpha(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma).$

1580. 已知 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2$$
$$+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2$$
$$+2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)-3$$
$$=4(\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha+\sin\alpha\sin\beta).$$

解　把原式左边去括号并变形，则有

$$2[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma+\cos(\beta-\gamma)+\cos\alpha+\cos(\gamma-\alpha)+\cos\beta]$$
$$=2[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)-\cos(\gamma+\alpha)]$$
$$=4(\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha+\sin\alpha\sin\beta).$$

1581. 在边长为 a 的正三角形 ABC 的 BC 边上取一点 P，设三角形 ABP 和三角形 ACP 的内心分别是 O、O'，$\angle APB=\theta$，

(1) 求 $\angle AOB$ 和 $\angle AOP$；

(2) 求 AO 和 AO' 的长度；

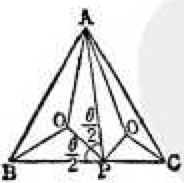
(3) 当 P 在 BC 边上运动时，$AO:AO'$ 的取值范围是什么？

解　(1)

$$\angle AOB=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle BAP+\angle ABP)$$
$$=90^\circ+\frac{1}{2}\angle APB=90^\circ+\frac{\theta}{2}.$$

同理，

$$\angle AOP=90^\circ+\frac{1}{2}\angle ABP=120^\circ.$$



(2) 在 $\triangle AOB$ 中用正弦定理，有

$$\frac{AB}{\sin\left(90^\circ+\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{AO}{\sin 30^\circ},$$

$$\therefore\quad AO=\frac{a}{2\cos\frac{\theta}{2}}.$$

设 $\angle APC=\theta'$，则 $\theta'=180^\circ-\theta$，在上式中把 θ 用 θ' 代入，

$$AO'=\frac{a}{2\cos\frac{\theta'}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

(3) $AO:AO'=\sin\frac{\theta}{2}:\cos\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$，由题意知 $60^\circ<\theta<120^\circ$，所以

$$\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{AO}{AO'}<\sqrt{3}.$$

1582. 已知 $0\leqq x\leqq\pi$，$0\leqq y\leqq\pi$，

$$\sin^2 x+\cos^2 y\geqq 1.$$

用图表示出点 (x,y) 在怎样的范围内。

解　由 $\sin^2 x+\cos^2 y\geqq 1$ 知

$$\cos^2 x-\cos^2 y\leqq 0,$$
$$(\cos x+\cos y)(\cos x-\cos y)\leqq 0,$$
$$\therefore\quad 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\times\left(-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right)\leqq 0,$$
$$\therefore\quad \sin(x+y)\sin(x-y)\geqq 0.$$

(i) 当 $\sin(x+y)\geqq 0$，$\sin(x-y)\geqq 0$ 时，有

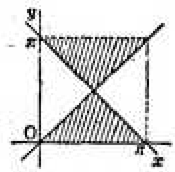
$$0\leqq x+y\leqq\pi\quad 及\quad 0\leqq x-y\leqq\pi.$$

(ii) 当 $\sin(x+y)\leqq 0$，$\sin(x-y)\leqq 0$ 时，有

$$\pi\leqq x+y\leqq 2\pi$$

及　$-\pi\leqq x-y\leqq 0$，

因此所求范围如图中斜线部分所示。



1583. 已知锐角三角形 ABC 中，$\angle C=2\angle B$，问 $AB:AC$ 的值在什么范围内。

解　由正弦定理，

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=\frac{2\sin B\cos B}{\sin B}=2\cos B.$$

因为三角形 ABC 是锐角三角形，所以

$$0^\circ<C<90^\circ,\quad 0^\circ<B<45^\circ,$$
$$\therefore\quad 1>\cos B>\frac{\sqrt{2}}{2},$$

从而　$\sqrt{2}<2\cos B=\frac{AB}{AC}<2$，

$$\therefore\quad \sqrt{2}<\frac{AB}{AC}<2.$$

1584. 已知三角形 ABC 中 $\angle A=60^\circ$，求 $\cos B\cos C$ 的值的范围。

解　因为 $B+C=180^\circ-A=120^\circ$，所以

$$\cos B\cos C=\frac{1}{2}[\cos(B+C)+\cos(B-C)]$$
$$=\frac{1}{2}[\cos 120^\circ+\cos(B-C)]$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(B-C).$$

又因为 $-120^\circ<B-C<120^\circ$，所以

$$\cos 120^\circ<\cos(B-C)\leqq 1.$$

$\therefore\quad -\frac{1}{2}<\cos(B-C)\leq 1.$

$$\therefore\quad -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}<-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(B-C)\leq -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.$$

故 $$-\frac{1}{2}<\cos B\cos C\leq\frac{1}{4}.$$

注　使 $\cos B\cos C=\frac{1}{4}$ 成立的三角形 ABC 是正三角形.

1585. 已知三角形两边长为 a、b，当夹角 C 变化时，第三边 c 在什么范围内变化？

解　在式子 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 中，因为 $0°<C<180°$，$1>\cos C>-1$，
$$-2ab<-2ab\cos C<2ab,$$
所以
$$a^2+b^2-2ab<a^2+b^2-2ab\cos C<a^2+b^2+2ab,$$
从而 $$(a-b)^2<c^2<(a+b)^2$$
$$\therefore\quad a-b<c<a+b.$$

3. 证明题

本节的证明问题形式多样，难以给出明确的分类．为了读者的便利，现作如下的区分：

一、用正弦定理、余弦定理可解的问题；

二、用半角公式
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$
$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$
等可解的问题；

三、用三角函数的和、差、积互化公式可解的问题；

四、与图形有关的问题．

（一）

1586. 在三角形 ABC 中，证明
$$(b^2-c^2)\sin A=a^2\sin(B-C).$$

解　设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则
$$\begin{aligned}左边&=k^2(\sin^2 B-\sin^2 C)\sin A\\&=k^2\sin(B+C)\sin(B-C)\sin A\\&=k^2\sin^2 A\sin(B-C)\\&=a^2\sin(B-C).\end{aligned}$$

1587. 设三角形的三边为 a、b、c，它们所对角为 A、B、C，证明下列各式：

(1) $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$；

(2) $2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)=a^2+b^2+c^2$；

(3) $\frac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$；

(4) $\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{\sin B}{\sin A}$；

(5) $a\cos^2\frac{B}{2}+b\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

解　(1) 由第一余弦定理，
$$\begin{aligned}&(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C\\&=(c\cos B+b\cos C)+(a\cos C+c\cos A)\\&\quad+(b\cos A+a\cos B)=a+b+c.\end{aligned}$$

(2) 由第二余弦定理，
$$左边=2\left(bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ca\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=a^2+b^2+c^2.$$

(3) 由余弦定理，
$$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C,$$
$$a^2-b^2+c^2=2ac\cos B,$$
$$\therefore\quad \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}=\frac{b\cos C}{c\cos B},$$
由正弦定理，$$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C},$$
$$\therefore\quad \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}=\frac{\sin B}{\sin C}\cdot\frac{\cos C}{\cos B}=\frac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}C}.$$

(4) 由第一余弦定理，
$$a=c\cos B+b\cos C,$$
$$\therefore\quad a-c\cos B=b\cos C.$$
同理，$$b-c\cos A=a\cos C,$$
$$\therefore\quad \frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{b\cos C}{a\cos C}=\frac{b}{a},$$
由正弦定理知这个比值等于 $\frac{\sin B}{\sin A}$.

(5) $$\begin{aligned}&a\cos^2\frac{B}{2}+b\cos^2\frac{A}{2}\\&=\frac{a}{2}(1+\cos B)+\frac{b}{2}(1+\cos A)\\&=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a\cos B+b\cos A),\end{aligned}$$
由余弦定理知，$a\cos B+b\cos A=c$,

$$\therefore\quad a\cos^2\frac{B}{2}+b\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(a+b)}{2}+\frac{c}{2}$$
$$=\frac{(a+b+c)}{2}.$$

1588. 在三角形 ABC 中,证明
$$a^2(\cos^2B-\cos^2C)+b^2(\cos^2C-\cos^2A)$$
$$+c^2(\cos^2A-\cos^2B)=0.$$

解　把式中的余弦换成正弦,则得
$$a^2(\sin^2C-\sin^2B)+b^2(\sin^2A-\sin^2C)$$
$$+c^2(\sin^2B-\sin^2A),$$
即
$$(a^2\sin^2C-c^2\sin^2A)$$
$$+(b^2\sin^2A-a^2\sin^2B)$$
$$+(c^2\sin^2B-b^2\sin^2C),$$
由正弦定理,上式中的三个括号内都为 0,故欲证之式常成立.

1589. 在三角形 ABC 中,证明
$$\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}$$
$$+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}=0.$$

解　$$\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A}\cos^2\frac{A}{2}$$
$$=\frac{2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cos^2\frac{A}{2}$$
$$=\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}$$
$$=\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$$
$$=\cos^2C-\cos^2B.$$
同理,$$\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}=\cos^2A-\cos^2C,$$
$$\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}=\cos^2B-\cos^2A.$$
所以三项之和常为 0.

1590. 证明满足 $5x^2-2xy+y^2=4$ 的实数 x、y 总可表成 $x=\cos\theta$,
$$y=\cos\theta+2\sin\theta\quad(0\leq\theta<2\pi)$$
的形式.

解　由于 y 是实数,故
$$y^2-2x\cdot y+5x^2-4=0$$
中应有 $(2x)^2-4(5x^2-4)=16(1-x^2)\geq0$.
$$\therefore\quad x^2\leq1,\ \text{可设 } x=\cos\theta.$$
把 $x=\cos\theta$ 代入 $5x^2-2xy+y^2=4$,得
$$y^2-2\cos\theta\cdot y+5\cos^2\theta-4=0.$$
$$y=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-20\cos^2\theta+16}}{2}$$
$$=\frac{2\cos\theta\pm4\sin\theta}{2}$$
$$=\cos\theta\pm2\sin\theta.$$
只要令 $\theta'=2\pi-\theta$,仍得 $\cos\theta-2\sin\theta=\cos\theta'+2\sin\theta'$. 故只需取
$$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\cos\theta+2\sin\theta,\end{cases}\quad(0\leq\theta<2\pi)$$
即可将满足 $5x^2-2xy+y^2=4$ 的 x、y 都用上式表出.

1591. 在三角形 ABC 中,证明
$$a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}+b\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}$$
$$+c\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=0.$$

解　$$a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$
$$=a\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$
$$=\frac{1}{2}a(\sin B-\sin C).$$
同理,
$$b\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}=\frac{1}{2}b(\sin C-\sin A),$$
$$c\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=\frac{1}{2}c(\sin A-\sin B).$$
因此
$$\text{原式左边}=\frac{1}{2}(a\sin B-b\sin A)$$
$$+\frac{1}{2}(b\sin C-c\sin B)$$
$$+\frac{1}{2}(c\sin A-a\sin C).$$
由正弦定理,上式的三个括弧中都为 0,所以欲证之式常成立.

1592. 在三角形 ABC 中,证明
$$\left[\frac{2(a^2-b^2)}{\cos2B-\cos2A}\right]^{\frac{3}{2}}=\frac{abc}{\sin A\sin B\sin C}.$$

解　$$\text{原式左边}=\left[\frac{2(a^2-b^2)}{2\sin^2A-2\sin^2B}\right]^{\frac{3}{2}}$$
$$=\left[\frac{a^2-b^2}{\sin^2A-\sin^2B}\right]^{\frac{3}{2}},$$

把 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ 代入，上式为

$$\left(\frac{4R^2\sin^2 A-4R^2\sin^2 B}{\sin^2 A-\sin^2 B}\right)^{\frac{3}{2}}=8R^3.$$

而 $\frac{abc}{\sin A\sin B\sin C}$ 也等于 $8R^3$，所以原式常成立。

1593. 在三角形 ABC 中，证明

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{2a\sin B\sin C}{a+b+c}.$$

解 $$\frac{2a\sin B\sin C}{a+b+c}=\frac{2\sin B\sin C}{1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}$$

$$=\frac{2\sin B\sin C}{1+\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin C}{\sin A}}$$

$$=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=\cos A+\cos B+\cos C-1.$$

故

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{2a\sin B\sin C}{a+b+c}.$$

1594. 在三角形 ABC 中，证明

$$a\cos A\cos 2B+b\cos B\cos 2A+c\cos C=0.$$

解 原式左边

$$=2R(\sin A\cos A\cos 2B+\sin B\cos B\cos 2A+\sin C\cos C)$$

$$=R(\sin 2A\cos 2B+\sin 2B\cos 2A+\sin 2C)$$

$$=R[\sin(2A+2B)+\sin 2C].$$

因为 $(2A+2B)+2C=360°$，

所以 $\sin(2A+2B)=-\sin 2C$，

因此原式左边常为 0。

1595. 已知三角形 ABC 中 $a^2=bc$，证明

$$\cos(B-C)=1-\cos A-\cos 2A.$$

解 因为 $bc=a^2$，把这个式子中的 a、b、c 代以与之分别成比例的 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$，则有

$$\sin B\sin C=\sin^2 A.$$

因此

$$\cos(B-C)-\cos(B+C)=1-\cos 2A.$$

$$\therefore\quad \cos(B-C)=\cos(B+C)+1-\cos 2A$$
$$=1-\cos A-\cos 2A.$$

1596. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0.$$

解 $$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A=\frac{\sin^2 B-\sin^2 C}{\sin^2 A}\sin 2A$$

$$=\frac{\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin^2 A}\cdot 2\sin A\cos A$$

$$=2\sin(B-C)\cos A$$

$$=-2\sin(B-C)\cos(B+C)$$

$$=-\sin 2B+\sin 2C.$$

同理，

$$\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B=-\sin 2C+\sin 2A,$$

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=-\sin 2A+\sin 2B.$$

因此欲证之式成立。

1597. 证明三角形 ABC 中，

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc},$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。

解

$$\text{原式左边}=a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{1}{2abc}[a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)]$$

$$=\frac{1}{2abc}[16s(s-a)(s-b)(s-c)]$$

$$=\frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}.$$

1598. 证明：在三角形 ABC 中，

$$\frac{\cos A}{b}-\frac{\cos B}{a}=\frac{\cos C}{c}\left(\frac{\sin B}{\sin A}-\frac{\sin A}{\sin B}\right).$$

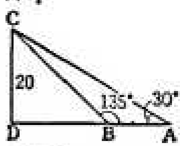
解

$$\frac{\cos A}{b}-\frac{\cos B}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b^2c}$$
$$-\frac{c^2+a^2-b^2}{2a^2c}$$
$$=\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)-b^2(c^2+a^2-b^2)}{2a^2b^2c}$$
$$=\frac{(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)}{2a^2b^2c}$$
$$=\frac{-(a^2-b^2)2ab\cos C}{2a^2b^2c}$$
$$=\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\frac{\cos C}{c}$$
$$=\left(\frac{\sin B}{\sin A}-\frac{\sin A}{\sin B}\right)\frac{\cos C}{c}.$$

1599. 已知 CD 是直线 DBA 的垂线，

$$CD=20,\ \angle CBA=135^\circ,$$
$$\angle CAD=30^\circ.$$

求 BA.



解

$$DA=CD\operatorname{ctg}A$$
$$=20\operatorname{ctg}30^\circ$$
$$=20\sqrt{3},$$

又　$\angle CBD=180^\circ-\angle CBA$
$$=180^\circ-135^\circ=45^\circ.$$

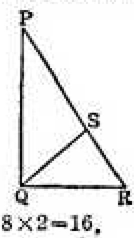
所以　$DB=CD=20.$

因此　$BA=DA-DB=20\sqrt{3}-20$
$$=14.64\cdots.$$

1600. 已知直角三角形 PQR 中，

$$QR=8,\ \angle QRP=60^\circ,\ \angle QPR=30^\circ.$$

求自 Q 向斜边 PR 所作的垂线把斜边分成的两部分长度之比.



解　设由 Q 向斜边所作垂线的足为 S，则

$$RS=QR\cos R=8\times\cos 60^\circ$$
$$=8\times\frac{1}{2}=4,$$

又

$$RP=RQ\sec R=8\sec 60^\circ=8\times 2=16.$$

从而　$PS=PR-RS=16-4=12.$

$$\therefore\ RS:SP=1:3.$$

1601. 已知三角形各角余弦的平方和等于1. 证明最大角与最小角之差等于第三个角.

解　已知 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1$,

所以　$3-\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=1,$

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2.$$

但是因为

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$$
$$-2\cos A\cos B\cos C=2,$$

由 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$ 可知

$$\cos A\cos B\cos C=0.$$

所以 A、B、C 中必有一个为 90°，而且这个角是三角形中最大的角. 现设 $A=90^\circ$，则因为 $B+C=90^\circ$，故 $A=B+C$，所以

$$A-C=B.$$

1602. 已知锐角三角形 ABC 中，

$$a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B=(a+b)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}.$$

证明，三角形 ABC 是等腰三角形.

解　用正切的加法定理把已知式变形，则

$$a\left(\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right)$$
$$+b\left(\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right)=0,$$
$$a\operatorname{tg}\left(A-\frac{A+B}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right)$$
$$+b\operatorname{tg}\left(B-\frac{A+B}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=0,$$
$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\left[a\left(1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right)\right.$$
$$\left.-b\left(1+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right)\right]=0.$$
$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\left[(a-b)\right.$$
$$\left.+(a\operatorname{tg}A-b\operatorname{tg}B)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right]=0.$$

若 $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=0$，则 $A=B$. 设方括弧中为 P，则

$a>b$　时　$P>0$，$a<b$　时　$P<0$.

而只有当 $a=b$ 时 $P=0$. 因此不论何时，三角形 ABC 都必须是 $a=b$ 这样的等腰三角形.

1603. 已知三角形 ABC 中

$$\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2},$$

证明 $a+c=2b$.

解　在已知条件式的两边乘上 $\cos\frac{B}{2}$，得

$$\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

把这个式子变形,有

$$\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{180°-(A+C)}{2}=\sin B,$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A-C}{2}\sin\frac{A+C}{2}=\sin B,$$

$$\frac{1}{2}[\sin A-\sin(-C)]=\sin B,$$

$$\sin A+\sin C=2\sin B.$$

由正弦定理得

$$a+c=2b.$$

1604. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{\cos A\cos B}{ab}+\frac{\cos A\cos C}{ac}+\frac{\cos B\cos C}{bc}.$$

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$, 则

$$\frac{\cos A\cos B}{ab}+\frac{\cos A\cos C}{ac}+\frac{\cos B\cos C}{bc}$$

$$=\frac{1}{k^2}\left(\frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}+\frac{\cos A\cos C}{\sin A\sin C}+\frac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C}\right)$$

$$=\frac{1}{k^2}(\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C)$$

$$=\frac{1}{k^2}\cdot\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}$$

$$=\frac{1}{k^2}=\frac{\sin^2 A}{a^2}.$$

1605. 已知三角形 ABC 中 $\angle C=2\angle B$, 又设

$$BC=x,$$
$$CA=y,$$
$$\angle B=\theta.$$

(1) 证明 x、y、θ 间常有

$$\frac{x}{\sin 3\theta}=\frac{y}{\sin\theta}.$$

(2) 当 θ 取一切可能值时, $\frac{x}{y}$ 在什么范围内?

解 (1) 因为 $\angle B=\theta$, $\angle C=2\angle B$, 所以 $\angle C=2\theta$, $\angle A=180°-3\theta$, 由正弦定理

$$\frac{x}{\sin(180°-3\theta)}=\frac{y}{\sin\theta},$$

$$\therefore\quad \frac{x}{\sin 3\theta}=\frac{y}{\sin\theta}.$$

(2) 由(1)知

$$\frac{x}{y}=\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=\frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{\sin\theta}$$

$$=3-4\sin^2\theta,$$

因为 $0°<3\theta<180°$, 即 $0°<\theta<60°$, 所以

$$3-4\sin^2 60°<\frac{x}{y}<3-4\sin^2 0°,$$

$$\therefore\quad 0<\frac{x}{y}<3.$$

1606. 已知在三角形 ABC 中 $b-a=mc$ $(m\neq 0)$, 证明

$$\operatorname{ctg}\frac{B-A}{2}=\frac{1+m\cos B}{m\sin B}.$$

解 $\sin B-\sin A=m\sin C$, 从而

$$2\sin\frac{B-A}{2}\cos\frac{B+A}{2}$$

$$=2m\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\therefore\quad \sin\frac{B-A}{2}=m\cos\frac{C}{2}$$

$$=m\sin\frac{A+B}{2}$$

$$=m\sin\left(B-\frac{B-A}{2}\right)$$

$$=m\sin B\cos\frac{B-A}{2}$$

$$-m\cos B\sin\frac{B-A}{2}.$$

由已知条件知 $B\neq A$, 两边用 $\sin\frac{B-A}{2}$ 除, 得

$$1=m\sin B\operatorname{ctg}\frac{B-A}{2}-m\cos B.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\frac{B-A}{2}=\frac{1+m\cos B}{m\sin B}.$$

1607. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{4}-\csc\frac{A}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}=\frac{b+c-a}{2a}.$$

解

$$\frac{b+c-a}{2a}=\frac{\sin B+\sin C-\sin A}{2\sin A}$$

$$=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

另一方面,

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{4}-\csc\frac{A}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{4}}{\sin\frac{A}{4}}-\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{A}{4}-1}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

$$\therefore\quad \frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{4}-\csc\frac{A}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{b+c-a}{2a}.$$

1608. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{\sin 2A}{a^2(b^2+c^2-a^2)}=\frac{\sin 2B}{b^2(c^2+a^2-b^2)}$$

$$=\frac{\sin 2C}{c^2(a^2+b^2-c^2)}.$$

解 $$\frac{\sin 2A}{a^2(b^2+c^2-a^2)}=\frac{2\sin A\cos A}{a^2(2bc\cos A)}$$

$$=\frac{\sin A}{a}\cdot\frac{1}{abc},$$

由正弦定理和对称性,可知欲证之式成立。

1609. 在三角形 ABC 中,证明

$$\operatorname{tg}A(\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A)$$

$$=\operatorname{tg}B(\sin^2 C+\sin^2 A-\sin^2 B).$$

解 在 $\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}$ 中把 a、b、c 代以与之成比例的 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$,则有

$$\frac{\sin^2 C+\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}$$

$$=\frac{\sin^2 C+\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2 B+\sin(C+A)\sin(C-A)}$$

$$=\frac{\sin C[\sin(A+B)+\sin(A-B)]}{\sin B[\sin(C+A)+\sin(C-A)]}$$

$$=\frac{2\sin C\sin A\cos B}{2\sin B\sin C\cos A}=\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}.$$

由此知欲证之式成立。

1610. 设三角形的两边分别为

$$x+y\cos A,\quad y+x\cos A.$$

设这两边的夹角为 A,第三边为 a,证明

$$a=\sin A(x^2+y^2+2xy\cos A)^{\frac{1}{2}}.$$

解

$$a^2=(x+y\cos A)^2+(y+x\cos A)^2$$

$$-2(x+y\cos A)(y+x\cos A)\cos A,$$

化去上式右边的括弧,得

$$a^2=\sin^2 A(x^2+y^2+2xy\cos A),$$

从而 $a=\sin A(x^2+y^2+2xy\cos A)^{\frac{1}{2}}.$

1611. 在三角形 ABC 中,证明

$$(a+b+c)(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$=2a\cos^2\frac{A}{2}+2b\cos^2\frac{B}{2}+2c\cos^2\frac{C}{2}.$$

解

$$(a+b+c)(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$=a\cos A+b\cos B+c\cos C$$

$$+(a\cos B+b\cos A)+(a\cos C+c\cos A)$$

$$+(b\cos C+c\cos B)$$

$=a\cos A+b\cos B+c\cos C+c+b+a$

$=a(1+\cos A)+b(1+\cos B)+c(1+\cos C)$

$=2a\cos^2\dfrac{A}{2}+2b\cos^2\dfrac{B}{2}+2c\cos^2\dfrac{C}{2}.$

1612. 已知三角形 ABC 中 BC 边上的中点为 D, 连接 AD, 证明

$$\operatorname{tg}\angle ADB=\frac{2bc\sin A}{b^2-c^2}.$$

解 设 $\angle ADB=\varphi$. 由三角形 ABD 得

$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{AB}=\frac{a}{2c}.$$

故
$$\frac{\sin(\varphi+B)}{\sin\varphi}=\frac{a}{2c},$$

$$\cos B+\sin B\operatorname{ctg}\varphi=\frac{a}{2c},$$

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{\dfrac{a}{2c}-\cos B}{\sin B}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2c\sin B}{a-2c\cos B}=\frac{2ac\sin B}{a^2-(a^2+c^2-b^2)}$$
$$=\frac{2ac\sin B}{b^2-c^2}=\frac{2bc\sin A}{b^2-c^2}.$$

1613. 在三角形 ABC 中, 证明

$$c^2=(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2},$$

试从右边证到左边.

解

$$\text{原式右边}=a^2\cos^2\frac{C}{2}-2ab\cos^2\frac{C}{2}$$
$$+b^2\cos^2\frac{C}{2}+a^2\sin^2\frac{C}{2}$$
$$+2ab\sin^2\frac{C}{2}+b^2\sin^2\frac{C}{2}$$
$$=a^2-2ab\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)+b^2$$
$$=a^2-2ab\cos C+b^2=c^2.$$

1614. 若 A、B、C 为三角形的内角, 证明不等式

$$\sin A+\sin B>\sin C.$$

解 设三角形的三边为 a、b、c, 外接圆半径为 R, 因为 a、b、c 间有

$$a+b>c$$

成立. 由正弦定理,

$$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C,$$

从而 $2R(\sin A+\sin B)>2R\sin C$,

$$\therefore\ \sin A+\sin B>\sin C.$$

1615. 三角形 ABC 中, 证明

$$\frac{a\cos B-b\cos A}{\sin(A-B)}=\frac{c}{\sin C}.$$

解 $a\cos B-b\cos A$

$$=\frac{1}{c}(ca\cos B-bc\cos A)$$
$$=\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$
$$=\frac{a^2-b^2}{c}.$$

因此

$$\text{原式左边}=\frac{a^2-b^2}{c\sin(A-B)}$$
$$=\frac{c^2\sin^2A-c^2\sin^2B}{c\sin^2C\sin(A-B)}=\frac{c(\sin^2A-\sin^2B)}{\sin^2C\sin(A-B)}$$
$$=\frac{c\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2C\sin(A-B)}=\frac{c}{\sin C}.$$

1616. 在三角形 ABC 中, 证明

$$\frac{b^2\cos A}{a}+\frac{c^2\cos B}{b}+\frac{a^2\cos C}{c}$$
$$=\frac{a^4+b^4+c^4}{2abc}.$$

解
$$\text{原式左边}=\frac{b^2}{a}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$+\frac{c^2}{b}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$+\frac{a^2}{c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{a^4+b^4+c^4}{2abc}.$$

1617. 在三角形 ABC 中, 证明

$$a^2-2ab\cos(60^\circ+C)$$
$$=c^2-2bc\cos(60^\circ+A).$$

解

$a^2-2ab\cos(60^\circ+C)$

$$=a^2-2ab(\cos 60^\circ\cos C-\sin 60^\circ\sin C)$$
$$=a^2-ab\cos C+2ab\sin 60^\circ\sin C$$
$$=a^2-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}+2cb\sin 60^\circ\sin A$$
$$=c^2-\frac{c^2+b^2-a^2}{2}+2bc\sin 60^\circ\sin A$$
$$=c^2-bc\cos A+2bc\sin 60^\circ\sin A$$
$$=c^2-2bc\cos(60^\circ+A).$$

1618. 在三角形 ABC 中, 证明

$$a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})\cos A+b^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}})\cos B$$
$$+c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})\cos C$$
$$=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}).$$

解　把原式左边的 $\cos A$、$\cos B$、$\cos C$ 用 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 分别代入，则

$$左边=\frac{1}{2abc}(2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^2+2a^2b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}}+2a^{\frac{3}{2}}b^2c^{\frac{3}{2}})$$
$$=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c+ab^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}bc^{\frac{1}{2}}$$
$$=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}).$$

1619. 在三角形 ABC 中，证明

$$s(s-a)-(s-b)(s-c)=bc\cos A.$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

解　原式左边 $=s^2-as-(s^2-bs-cs+bc)$
$$=-as+bs+cs-bc$$
$$=s(-a+b+c)-bc$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)(-a+b+c)-bc$$
$$=\frac{1}{2}[(b+c)^2-a^2]-bc$$
$$=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)=bc\cos A.$$

1620. 已知 $a=\sqrt{3}+1$，$b=2$，$c=\sqrt{2}$，解这个三角形.

解　$$\cos C=\frac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 2(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2\cdot 2(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\therefore\quad C=30^\circ.$$
$$\cos B=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2^2}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$
$$\therefore\quad B=45^\circ,\ A=180^\circ-(B+C)=105^\circ.$$

1621. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{\sin 2A}=\frac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{\sin 2B}$$
$$=\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{\sin 2C}.$$

解　设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，则

$$\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{\sin 2A}=\frac{a^2\cdot 2bc\cos A}{2\sin A\cos A}$$
$$=\frac{a}{\sin A}abc=2Rabc.$$

其他同理可得.

1622. 在三角形 ABC 中，证明

$$a(b^2+c^2)\cos A+b(c^2+a^2)\cos B$$
$$+c(a^2+b^2)\cos C=3abc.$$

解　原式左边 $=ab(b\cos A+a\cos B)$
$$+ac(c\cos A+a\cos C)$$
$$+bc(c\cos B+b\cos C)$$
$$=abc+abc+abc=3abc.$$

1623. 已知三角形 ABC 中 $b-a=mc$，证明

$$\cos\left(A+\frac{C}{2}\right)=m\cos\frac{C}{2}.$$

解　把 $b-a=mc$ 中的 a、b、c 用与之成比例的 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 代入，有 $\sin B-\sin A=m\sin C$.

$$\therefore\quad 2\cos\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2}$$
$$=m\sin(A+B),$$
$$\therefore\quad 2\cos\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2}$$
$$=2m\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$$
$$\therefore\quad \sin\frac{B-A}{2}=m\sin\frac{A+B}{2}.$$
$$\therefore\quad \sin\left(\frac{A+B+C}{2}-\frac{2A+C}{2}\right)=m\cos\frac{C}{2}.$$
$$\therefore\quad \cos\left(A+\frac{C}{2}\right)=m\cos\frac{C}{2}.$$

1624. 已知三角形 ABC 中

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\sin\frac{C}{2},$$

证明　$$c=\pm(a-b)\sec\varphi.$$

解　$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$=a^2+b^2-2ab\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)$$
$$=(a-b)^2+4ab\sin^2\frac{C}{2}$$
$$=(a-b)^2+(a-b)^2\operatorname{tg}^2\varphi$$
$$=(a-b)^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)$$
$$=(a-b)^2\sec^2\varphi.$$

$\therefore\quad c=\pm(a-b)\sec\varphi.$

1625. 三角形 ABC 中，证明

$b^2\cos 2C+2bc\cos(B-C)+c^2\cos 2B=a^2.$

解

$$\begin{aligned}\text{原式的左边}&=b^2(\cos^2C-\sin^2C)\\&\quad+2bc\cos(B-C)+c^2(\cos^2B-\sin^2B)\\&=(b\cos C+c\cos B)^2-(b\sin C-c\sin B)^2\\&=\left(b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2+0\\&=a^2.\end{aligned}$$

1626. 在三角形 ABC 中，证明

$b^2\sin 2C-c^2\sin 2B=2bc\sin(B-C).$

解 原式的左边

$$\begin{aligned}&=2b^2\sin C\cos C-2c^2\sin B\cos B\\&=2bc\sin B\cos C-2bc\sin C\cos B\\&=2bc(\sin B\cos C-\sin C\cos B)\\&=2bc\sin(B-C).\end{aligned}$$

1627. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B}=\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}.$$

解 原式左边$=\dfrac{1-\cos(A-B)\cos(A+B)}{1-\cos(A-C)\cos(A+C)}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1-\cos^2A+\sin^2B}{1-\cos^2A+\sin^2C}\\&=\frac{\sin^2A+\sin^2B}{\sin^2A+\sin^2C}=\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}.\end{aligned}$$

1628. 已知三角形 ABC 中，$a=2.5c$，$b=3c$，证明 $\cos B=-\dfrac{7}{20}$.

解 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$=\frac{6.25c^2+c^2-9c^2}{2\cdot 2.5c\cdot c}=-\frac{7}{20}.$$

1629. 已知三角形 ABC 中，$b=6$，$c=4$，$\cos A=\dfrac{1}{3}$. 证明 $a=6$.

解 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{1}{3}=36.$$

$$\therefore\quad a=6.$$

1630. 已知三角形的三边为 m，n，$\sqrt{m^2+mn+n^2}$. 证明最大的一个内角是 $120°$.

解 显然最大内角所对的边为

$$\sqrt{m^2+mn+n^2},$$

设这个内角为 A，则

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{m^2+n^2-(m^2+mn+n^2)}{2mn}\\&=-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

因此 $A=120°$.

1631. 已知三角形 ABC 中 $C=60°$，证明

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$

解 因为 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

$$\cos C=\cos 60°=\frac{1}{2},$$

故有 $\qquad ab=a^2+b^2-c^2,$

$3ab=(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c),$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &3ab+3c(a+b+c)\\&=(a+b+c)(a+b+2c).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &3(a+c)(b+c)\\&=(a+b+c)[(a+c)+(b+c)].\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\frac{3}{a+b+c}=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}.$$

1632. 已知三角形 ABC 中

$$a:b:c=2:3:4,$$

证明 $\cos A=\dfrac{7}{8}$，$\cos B=\dfrac{11}{16}$，$\cos C=-\dfrac{1}{4}$.

解 在 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 中用2、3、4代入 a、b、c，则 $\cos A=\dfrac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot 3\cdot 4}=\dfrac{7}{8}$. 同理

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2^2+4^2-3^2}{2\cdot 2\cdot 4}=\frac{11}{16}.$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 3}=-\frac{1}{4}.$$

1633. 已知三角形 ABC 中，

$$a=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ b=\frac{\sqrt{2}}{2},\ c=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

证明 $A=15°$，$B=45°$，$C=120°$.

解 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$=\frac{\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore\quad B=45°.$$

同理

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}{2\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad C=120°.$$

从而　$A=180°-(45°+120°)=15°$.

1634. 已知三角形的各边 a、b、c 成等差数列，证明 $\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$ 和 $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$.

解　由 a、b、c 成等差数列可得 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 也成等差数列，从而

$$\sin A+\sin C=2\sin B.$$

故　$\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$

$$=2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A+C}{2}.$$

故　　$\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$.

又　$a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}$

$$=\frac{a}{2}(1+\cos C)+\frac{c}{2}(1+\cos A)$$

$$=\frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}(a\cos C+c\cos A)$$

$$=\frac{1}{2}(a+c)+\frac{b}{2}=b+\frac{b}{2}=\frac{3b}{2}.$$

1635. 满足下列条件的三角形是怎样的三角形：

(1) $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{c}$;

(2) $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}$.

解　(1) 由正弦定理，

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

因为 $A+B+C=180°$，所以

$$\cos\frac{A+B}{2}=\cos\left(90°-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}.$$

从而由给出的关系式

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{c}$$

可得　$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

因此有

$$\sin\frac{A-B}{2}=0\quad\text{或}\quad\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}.$$

因为 $\left|\frac{A-B}{2}\right|<90°$，所以由前者得 $\frac{A-B}{2}=0°$，$\therefore A=B$．又由后者得

$$\frac{A-B}{2}=\pm\frac{C}{2},$$

$$\therefore\quad A=B+C\quad\text{或}\quad B=A+C,$$

从而 $A=90°$ 或 $B=90°$．因此 $\triangle ABC$ 或者是 $AC=BC$ 的等腰三角形，或者是 A 为直角或 B 为直角的直角三角形.

(2) 由正弦定理，

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}.$$

因此由已知关系式得

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}-1\right)=0,$$

$$\therefore\quad\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=0\quad\text{或}\quad\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=1.$$

因为　　$-90°<\frac{A-B}{2}<90°$,

$$0°<\frac{A+B}{2}<90°.$$

所以　$\frac{A-B}{2}=0°$　或　$\frac{A+B}{2}=45°$,

$$\therefore\quad A=B\quad\text{或}\quad A+B=90°.$$

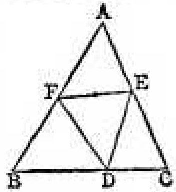
因此，$\triangle ABC$ 是 $AC=BC$ 的等腰三角形，或是 $\angle C$ 为直角的直角三角形.

1636. 三角形 ABC 的边 BC、CA、AB 上

分别有点 D、E、F，三角形 AEF，BDF，CDE 的外接圆是等圆。

(1) 试用三角形的三个内角表示三角形 DEF 的三边之比。

(2) 由此证明 $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$。



解 (1) 设三角形 AEF，BDF，CDE 的外接圆半径为 R，由正弦定理知

$$\frac{EF}{\sin A}=2R,\quad \frac{FD}{\sin B}=2R,\quad \frac{DE}{\sin C}=2R.$$

$$\therefore\quad \frac{EF}{\sin A}=\frac{FD}{\sin B}=\frac{DE}{\sin C}, \qquad ①$$

即 $EF:FD:DE=\sin A:\sin B:\sin C$。

(2) 由正弦定理，

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{CA}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}, \qquad ②$$

因此由①、②得

$$\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA}=\frac{DE}{AB}.$$

$$\therefore\quad \triangle DEF\backsim\triangle ABC.$$

1637. 三角形 ABC 三边 a、b、c 与该边上的高的比值分别是 α、β、γ。证明

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4=0.$$

解 $\alpha=\dfrac{a}{c\sin B}=\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}$，同理有

$$\beta=\frac{\sin B}{\sin C\sin A}\quad 和\quad \gamma=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}.$$

故

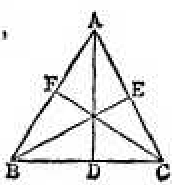
$$\begin{aligned}&2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2\\&=\frac{1}{\sin^2A\sin^2B\sin^2C}(2\sin^2B\sin^2C\\&\quad+2\sin^2C\sin^2A+2\sin^2A\sin^2B\\&\quad-\sin^4A-\sin^4B-\sin^4C),\end{aligned}$$

括弧内的式子为

$$\begin{aligned}&(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin A+\sin B-\sin C)\\&\times(\sin A-\sin B+\sin C)\\&\times(\sin B+\sin C-\sin A),\end{aligned}$$

上式可化成

$$\begin{aligned}&4^4\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\\&\times\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\\&=4\sin^2A\sin^2B\sin^2C.\end{aligned}$$



由此

$$2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=4.$$

所以

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)+4=0.$$

（二）

1638. 已知 a、b、c、A、B、C 间有关系

$$a=b\cos C+c\cos B,\ c=a\cos B+b\cos A,$$
$$A+B+C=180^\circ,$$

证明 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，其中 $\sin A\sin B\neq0$。

解 $$a=b\cos C+c\cos B,$$
$$c=a\cos B+b\cos A,$$

$C=\pi-(A+B)$。把上面的第二式代入第一式，有

$$\begin{aligned}a=&-b\cos(A+B)\\&+(a\cos B+b\cos A)\cos B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &a(1-\cos^2B)\\&=b[-\cos(A+B)+\cos A\cos B],\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a\sin^2B=b\sin A\sin B.$$

两边除以 $\sin A\sin^2B(\neq0)$，则有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

注 设上式之比为 k，则

$$a=k\sin A,\quad b=k\sin B,$$

从而

$$\begin{aligned}c&=k(\sin A\cos B+\sin B\cos A)\\&=k\sin(A+B)=k\sin C,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

又若 a、b、$c>0$，$0<A$、B、$C<\pi$，则有

$$\sin A+\sin B>\sin(A+B)=\sin C,$$

所以 $a+b>c$。同理 $b+c>a$，$c+a>b$。因此可以作出一个三边为 a、b、c 的三角形，三内角为 A、B、C。

1639. 在三角形 ABC 中，证明

$$1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{2c}{a+b+c}.$$

解

$$\begin{aligned}&1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\\&=1-\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}\\&=1-\frac{s-c}{s}=\frac{c}{s}=\frac{2c}{a+b+c}.\end{aligned}$$

1640. 在三角形 ABC 中,证明

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{b+c-a}{b+c+a}.$$

解 由前题, $1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{2a}{a+b+c}$,
从而

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1-\frac{2a}{a+b+c}=\frac{b+c-a}{b+c+a}.$$

1641. 在三角形 ABC 中,证明

$$4\left(bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}\right)=(a+b+c)^2.$$

解 原式的左边 $=4[s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)]$

$$=4s(s-a+s-b+s-c)$$
$$=4s(3s-a-b-c)=4s^2$$
$$=4\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2=(a+b+c)^2.$$

1642. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{a}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{b}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{c}=\frac{s^2}{abc}.$$

解 因为 $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$, 等等. 所以

原式左边 $=\frac{1}{abc}[s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)]=\frac{1}{abc}[3s^2-(a+b+c)s]$

$$=\frac{1}{abc}(3s^2-2s^2)=\frac{s^2}{abc}.$$

1643. 在三角形 ABC 中,证明

$$a\left(b\cos^2\frac{C}{2}-c\cos^2\frac{B}{2}\right)^2=(b-c)\left(b^2\cos^2\frac{C}{2}-c^2\cos^2\frac{B}{2}\right).$$

解 原式左边

$$=a\left[b\,\frac{s(s-c)}{ab}-c\,\frac{s(s-b)}{ac}\right]^2=\frac{s^2(b-c)^2}{a},$$

而原式右边

$$=(b-c)\left[b^2\frac{s(s-c)}{ab}-c^2\frac{s(s-b)}{ac}\right]$$
$$=(b-c)\left[\frac{bs(s-c)}{a}-\frac{cs(s-b)}{a}\right]$$
$$=\frac{s^2(b-c)^2}{a}.$$

因此欲证之式成立.

1644. 在三角形 ABC 中,证明

$$bc\sin^2\frac{A}{2}+ca\sin^2\frac{B}{2}+ab\sin^2\frac{C}{2}=bc+ca+ab-s^2.$$

解

原式的左边 $=bc\left[\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\right]+ca\left[\frac{(s-a)(s-c)}{ac}\right]+ab\left[\frac{(s-a)(s-b)}{ab}\right]$

$=(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)+(s-a)(s-b)$

$=3s^2-2s(a+b+c)+bc+ca+ab$

$=3s^2-4s^2+bc+ca+ab$

$=bc+ca+ab-s^2.$

1645. 在三角形 ABC 中,证明

$$(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(c+a-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(a+b-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

即

$$(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(s-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(s-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

解 $(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=2(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$

$$=2(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}},$$

同理,另两式也等于上面那个对称式.

1646. 在三角形 ABC 中,证明

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{a+b+c}{b+c-a}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

解 $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}=\frac{s-b}{s-a}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$

同理, $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{s-c}{s-a}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, 因此

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$
$$=\left(1+\frac{s-b}{s-a}+\frac{s-c}{s-a}\right)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$
$$=\frac{3s-a-b-c}{s-a}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{s}{s-a}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$
$$=\frac{a+b+c}{b+c-a}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

1647. 在三角形 ABC 中，证明

$$a^2(s-a)\sec^2\frac{A}{2}+b^2(s-a)\sec^2\frac{B}{2}+c^2(s-c)\sec^2\frac{C}{2}=2abc.$$

解 $a^2(s-a)\sec^2\frac{A}{2}=\dfrac{a^2(s-a)}{\cos^2\frac{A}{2}}$

$$=\frac{a^2(s-a)bc}{s(s-a)}=\frac{a^2bc}{s}.$$

原式左边$=\dfrac{a^2bc}{s}+\dfrac{ab^2c}{s}+\dfrac{abc^2}{s}$

$$=\frac{abc}{s}(a+b+c)$$
$$=\frac{abc}{s}\times 2s=2abc.$$

1648. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}=\frac{a}{s-a}.$$

解 左边$=\dfrac{\sin\frac{(B+C)}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\cdot\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}}\times\sqrt{\frac{ac}{(s-a)(s-c)}}\times\sqrt{\frac{ab}{(s-a)(s-b)}}=\frac{a}{s-a}.$$

1649. 在三角形 ABC 中，已知 $a=35$，$b=84$，$c=91$，证明 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{5}$，$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{2}{3}$，$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1$。

解 $2s=35+84+91=210$，从而 $s=105$，$s-a=70$，$s-b=21$，$s-c=14$，因此

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{21\times14}{105\times70}}=\frac{1}{5}.$$
$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}=\sqrt{\frac{70\times14}{105\times21}}=\frac{2}{3}.$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\sqrt{\frac{70\times21}{105\times14}}=1.$$

1650. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{a}+\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{b}+\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{c}=\frac{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}{4abc}.$$

解

原式的左边$=\dfrac{(s-b)(s-c)}{abc}+\dfrac{(s-a)(s-c)}{abc}+\dfrac{(s-a)(s-b)}{abc}$

$$=\frac{1}{abc}[3s^2-2s(a+b+c)+ab+bc+ca]$$
$$=\frac{1}{4abc}(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2).$$

1651. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{bc}{(b-a)(c-a)}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+\frac{ca}{(c-b)(a-b)}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\frac{ab}{(a-c)(b-c)}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}=1.$$

解

$$\frac{bc}{(b-a)(c-a)}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{bc}{(b-a)(c-a)}\times\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}\cdot\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}$$
$$=\frac{bc(s-a)^2}{s^2(b-a)(c-a)}=\frac{bc(s-a)^2(c-b)}{s^2(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{bc(c-b)s^2-2abc(c-b)s+abc(ac-ab)}{s^2(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

因此

原式左边

$$=\{[\sum bc(c-b)]s^2-2abc[\sum(c-b)]s+abc[\sum(ac-ab)]\}\div[s^2(a-b)(b-c)(c-a)],$$

又 $\sum bc(c-b)=(a-b)(b-c)(c-a)$,

$\sum(c-b)=0$, $\sum(ac-ab)=0$.

所以 原式左边=1.

1652. 在三角形 ABC 中,证明

(1) $(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(s-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}$;

(2) $(b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+(c-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=0$.

解 (1) 左边 $=(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$,

右边 $=(s-b)\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$,

$\therefore\quad (s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(s-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}$.

注 $(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ 等于三角形 ABC 的内切圆半径.

(2)

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=(b-c)\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}+(c-a)\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-c)(s-a)}}+(a-b)\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}\\
&=\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}\times[(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)]\\
&=\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}\times[s(b-c+c-a+a-b)-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)]\\
&=0.
\end{aligned}$$

1653. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{4}-\csc\frac{A}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}=\frac{b+c-a}{2a}.$$

解

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg}\frac{A}{4}-\csc\frac{A}{2}&=\frac{\cos\frac{A}{4}}{\sin\frac{A}{4}}-\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\\
&=\frac{\cos\frac{A}{4}}{\sin\frac{A}{4}}-\frac{1}{2\sin\frac{A}{4}\cos\frac{A}{4}}\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{A}{4}\cos\frac{A}{4}}\left(2\cos^2\frac{A}{4}-1\right)\\
&=\frac{\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{4}\cos\frac{A}{4}}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.
\end{aligned}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{(B+C)}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \text{原式的左边}&=\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\\
&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\times\sqrt{\frac{bc}{(s-b)(s-c)}}=\frac{s-a}{a}\\
&=\frac{b+c-a}{2a}.
\end{aligned}$$

1654. 在 C 为直角的三角形 ABC 中,证明

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\frac{2\sin A}{\sqrt{\cos 2B}}.$$

解 原式的左边 $=\dfrac{(a+b)+(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}$

$$=\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{\dfrac{2a}{c}}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{c^2}-\dfrac{b^2}{c^2}\right)}}$$

$$=\frac{2\sin A}{\sqrt{\cos^2 B-\sin^2 B}}=\frac{2\sin A}{\sqrt{\cos 2B}}.$$

1655. 在三角形 ABC 中，证明

$$\sqrt{c+(a-b)\cos\frac{C}{2}}+\sqrt{c-(a-b)\cos\frac{C}{2}}$$
$$=2\sqrt{c}\cos\frac{A-B}{4}.$$

解

$$\sqrt{c+(a-b)\cos\frac{C}{2}}$$
$$=\sqrt{c}\sqrt{1+\frac{a-b}{c}\cos\frac{C}{2}}$$
$$=\sqrt{c}\sqrt{1+\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}\cos\frac{C}{2}}$$
$$=\sqrt{c}\sqrt{1+\frac{\sin\dfrac{(A-B)}{2}\cos\dfrac{(A+B)}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}\cdot\cos\dfrac{C}{2}}}$$
$$=\sqrt{c}\sqrt{1+\sin\frac{(A-B)}{2}}$$
$$=\sqrt{c}\left[\cos\frac{(A-B)}{4}+\sin\frac{(A-B)}{4}\right],$$

同理，

$$\sqrt{c-(a-b)\cos\frac{C}{2}}$$
$$=\sqrt{c}\left[\cos\frac{(A-B)}{4}-\sin\frac{(A-B)}{4}\right],$$

因此，原式左边 $=2\sqrt{c}\cos\dfrac{A-B}{4}$.

1656. 在三角形 ABC 中，证明

$$b\sin^2\frac{C}{2}+c\sin^2\frac{B}{2}=s-a.$$

解

$$\text{左边}=b\times\frac{(s-a)(s-b)}{ab}+c\times\frac{(s-c)(s-a)}{ca}$$
$$=\frac{(s-a)(2s-b-c)}{a}=\frac{(s-a)a}{a}$$
$$=s-a.$$

1657. 证明：已知三角形的各边求一个内角的正弦公式：

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

解 因为 $\sin A=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$，所以

$$\sin A=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$
$$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

别解 也可由 $\cos A$ 的值来求 $\sin A$，即

$$\sin^2 A=1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$
$$=\frac{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2},$$

故

$$\sin A=\frac{\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}{2bc}.$$

容易验证这个结果和前面由 s、$s-a$、$s-b$、$s-c$ 相乘得到的结果是一致的。

1658. 在三角形 ABC 中，试由

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

推出 $$a<b+c.$$

解 因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，所以

$$a^2=b^2+2bc+c^2-2bc-2bc\cos A,$$
$$a^2=(b+c)^2-2bc(1+\cos A)$$
$$=(b+c)^2-2bc\cdot 2\cos^2\frac{A}{2},$$
$$a^2<(b+c)^2,\quad\text{即}\quad a<b+c.$$

1659. 证明：在三角形 ABC 中，若设

$$\cos\theta=\frac{a}{b+c},\quad \cos\alpha=\frac{b}{c+a},$$
$$\cos\beta=\frac{c}{a+b},$$

则有 $$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}=1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\pm\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

解 把 $\cos\theta=\dfrac{a}{b+c}$ 代入 $\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$，得

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{b+c-a}{a+b+c},$$

同理 $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{c+a-b}{a+b+c}$，$\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{a+b-c}{a+b+c}$，

因此 $$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}=1,$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)}$$

$$=\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\cdot\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}$$

$$\times\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}$$

$$=\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2},$$

故得证。

1660. 在三角形 ABC 中，证明

(1) $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$;

(2) $S=s^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$;

(3) $S=\dfrac{2s^2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$.

解 (1) $S=\frac{1}{2}bc\sin A$

$$=\frac{1}{2}(2R\sin B)(2R\sin C)\sin A$$

$$=2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

(2) 原式的右边$=s^2\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$$\times\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=S.$$

(3) 原式的右边$=\Big[2s^2\Big(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\Big)$

$$\times\Big(2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\Big)\Big(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\Big)\Big]$$

$$\div16\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=s^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=S.$$

1661. 在三角形 ABC 中，证明

(1) $\dfrac{a+b}{a+b+c}=\dfrac{1}{2}\Big(1+\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\Big)$;

(2) $\dfrac{a+b+c}{a+b-c}=\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}$.

解 (1) 右边$=\dfrac{1}{2}\Big[1+\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$$\times\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\Big(1+\frac{s-c}{s}\Big)=\frac{2s-c}{2s}=\frac{a+b}{a+b+c}.$$

(2)

右边$=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}\cdot\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{(s-c)(s-a)}}$

$$=\frac{s}{s-c}=\frac{2s}{2s-2c}=\frac{a+b+c}{a+b+c-2c}$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b-c}.$$

1662. 在三角形 ABC 中，A、B、C 的对边分别是 a、b、c，$2s=a+b+c$，证明

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}.$$

解 由余弦定理，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

$$=\frac{(2s-2c)(2s-2b)}{4bc}$$

$$=\frac{(s-c)(s-b)}{bc}.$$

因为 A 是三角形的内角，$\frac{A}{2}$ 为锐角，所以 $\sin\frac{A}{2}>0$. 又因为两边之和大于第三边，所以 $s>a$, $s>b$, $s>c$.

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

同理 $\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}$,

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}{a^2b^2c^2}}$$

$$=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}.$$

1663. 在三角形 ABC 中，已知 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{5}{6}$，$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{20}{37}$，求 $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ 和 $\operatorname{tg}C$，并证明 $a+c=2b$.

解　$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$

$$=\frac{\frac{5}{6}+\frac{20}{37}}{1-\frac{5}{6}\times\frac{20}{37}}=\frac{5}{2}.$$

因为　$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}},$$

且 $\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)\to\infty$，所以

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1.$$

从而必有

$$1-\frac{5}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=0.\quad\therefore\quad\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{2}{5}.$$

$$\operatorname{tg}C=\frac{2\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}=\frac{2\times\frac{2}{5}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{20}{21}.$$

因为　$\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{5}\right)\times\frac{20}{37}=\frac{2}{3}$，

所以有　$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{2}{3}$.

由此得

$$\left(\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}+\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\right)\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{s-c}{s}+\frac{s-a}{s}=\frac{2}{3},$$

$$3(2s-a-c)=2s.$$

即　$3b=a+b+c,\quad\therefore\quad a+c=2b.$

1664. 设三角形三边的长度为 a、b、c，$2s=a+b+c$，面积为 S，证明

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

解

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,\qquad ①$$

由余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，又由 $\sin^2A=1-\cos^2A$，得

$$\sin^2A=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$$

$$=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\times\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}\times\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

由于

$$a+b+c=2s,\quad b+c-a=2(s-a),$$
$$a+b-c=2(s-c),\quad c+a-b=2(s-b).$$

所以 $\sin^2A=\frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{4b^2c^2}$，

$$\therefore\quad\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

由 ① 得

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

（三）

1665. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{b-c}{\sin B-\sin C}.$$

解　由　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

可知上式等于

$$\frac{b+c}{\sin B+\sin C}\quad 和\quad\frac{b-c}{\sin B-\sin C}.$$

1666. 证明

$$1-\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C+2\sin A\sin B\sin C$$
$$=4\cos\left(\frac{A+B+C}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{-A+B+C}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{A-B+C}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{A+B-C}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

解

右边$=\left[\cos(B+C)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\right]$

$\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+\cos(B-C)\right]$

$=(\cos B\cos C-\sin B\sin C+\sin A)$

$\times(\cos B\cos C+\sin B\sin C-\sin A)$

$=(\cos B\cos C)^2-(\sin B\sin C-\sin A)^2$

$=(1-\sin^2 B)(1-\sin^2 C)$

$-(\sin B\sin C-\sin A)^2$

$=1-\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C$

$+2\sin A\sin B\sin C.$

1667． 证明

$$\frac{\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{(\alpha+\gamma)}{2}}{\sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}\sin\frac{(\alpha-\gamma)}{2}}\cos\alpha+\frac{\sin\frac{(\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\beta+\alpha)}{2}}{\sin\frac{(\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\beta-\alpha)}{2}}\cos\beta+\frac{\sin\frac{(\gamma+\alpha)}{2}\sin\frac{(\gamma+\beta)}{2}}{\sin\frac{(\gamma-\alpha)}{2}\sin\frac{(\gamma-\beta)}{2}}\cos\gamma=\cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

解

$$\frac{\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{(\alpha+\gamma)}{2}\cos\alpha}{\sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}\sin\frac{(\alpha-\gamma)}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{(\alpha+\gamma)}{2}}{-\sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}\sin\frac{(\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\gamma-\alpha)}{2}}\cos\alpha$$

$$=\left\{\left[\cos\frac{(\alpha+\gamma)}{2}-\cos\frac{1}{2}(2\beta+\alpha-\gamma)\right]\times\sin\frac{(\alpha+\gamma)}{2}\cos\alpha\right\}$$

$$\div\left[-2\sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}\sin\frac{(\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\gamma-\alpha)}{2}\right]$$

$$=\frac{[\sin(\alpha+\gamma)-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta-\gamma)]\cos\alpha}{-4\sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}\sin\frac{(\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\gamma-\alpha)}{2}}$$

$$=[\sin(2\alpha+\gamma)+\sin\gamma-\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha-\beta+\gamma)]$$

$$\div\left[-8\sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}\sin\frac{(\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\gamma-\alpha)}{2}\right],$$

因此

原式的左边

$$=\frac{1}{-8\sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}\sin\frac{(\beta-\gamma)}{2}\sin\frac{(\gamma-\alpha)}{2}}$$

$$\times[\sin(2\alpha+\gamma)-\sin(2\beta+\gamma)+\sin(2\beta+\alpha)-\sin(2\gamma+\alpha)+\sin(2\gamma+\beta)-\sin(2\alpha+\beta)].$$

因为　$\sin(2\alpha+\gamma)-\sin(2\beta+\gamma)$

$=2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta+\gamma).$

所以上式中最后的方括弧内

$=2\cos(\alpha+\beta+\gamma)[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)],$

又　$\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$

$=-4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2},$

所以　　原式左边$=\cos(\alpha+\beta+\gamma).$

1668． 已知三角形 ABC 中，

$$\frac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}=\frac{c-b}{c},$$

证明 $A=60°$.

解　$\frac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}=\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)},$

故 $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=1-\frac{b}{c}$, 由此

$$\frac{\sin(A+B)-\sin(A-B)}{\sin C}=\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}.$$

从而　　$2\cos A=1$,　$A=60°$.

1669． 在三角形 ABC 中，证明

$$a^3\cos 3B+b^3\cos 3A=c^3-3abc\cos(A-B).$$

解　设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$, 则

左边$=k^3(\sin^3 A\cos 3B+\sin^3 B\cos 3A)$

$=k^3[4(\sin^3 A\cos^3 B+\sin^3 B\cos^3 A)$

$-3(\sin^3 A\cos B+\sin^3 B\cos A)]$

$=k^3[4\sin^3 C-12\sin A\sin B\cos A\cos B\sin C$

$-3\sin A\cos B(1-\cos^2 A)$

$-3\sin B\cos A(1-\cos^2 B)]$

$=k^3\{4\sin^3 C-6\cos A\cos B\sin C$

$\times[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$-3\sin C+3\cos A\cos B(\sin A\cos A$

$+\sin B\cos B)\}$

$=k^3\{\sin^3 C-3\sin C\cos^2 C$
$-6\cos A\cos B\sin C[\cos(A-B)+\cos C]$
$+3\cos A\cos B\sin C\cos(A-B)\}$
$=k^3\{\sin^3 C-3\sin C[\cos^2 C$
$+2\cos A\cos B\cos(A-B)$
$+2\cos A\cos B\cos C$
$-\cos A\cos B\cos(A-B)]\}$
$=k^3\{\sin^3 C-3\sin C[\cos C\cos(A-B)$
$+\cos A\cos B\cos(A-B)]\}$
$=k^3\{\sin^3 C-3\sin C\cos(A-B)$
$\times[-\cos(A+B)+\cos A\cos B]\}$
$=k^3\sin^3 C-3k^3\sin C\sin A\sin B\cos(A-B)$
$=c^3-3abc\cos(A-B)$.

1670. 证明

$$\frac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\frac{\operatorname{tg}8A}{\operatorname{tg}2A}.$$

解 左边$=\dfrac{(1-\cos 8A)\cos 4A}{(1-\cos 4A)\cos 8A}$

$$=\frac{2\sin^2 4A\cos 4A}{2\sin^2 2A\cos 8A}$$
$$=\frac{\sin 8A\sin 4A}{2\cos 8A\sin^2 2A}$$
$$=\frac{\operatorname{tg}8A\cdot 2\sin 2A\cos 2A}{2\sin^2 2A}$$
$$=\operatorname{tg}8A\frac{\cos 2A}{\sin 2A}=\frac{\operatorname{tg}8A}{\operatorname{tg}2A}.$$

1671. 在三角形 ABC 中,证明

$a\cos(B-C)+b\cos(C-A)$
$+c\cos(A-B)+a\cos A+b\cos B$
$+c\cos C=6a\sin B\sin C$.

解

原式左边$=a[\cos(B-C)+\cos A]$
$+b[\cos(C-A)+\cos B]$
$+c[\cos(A-B)+\cos C]$
$=a[\cos(B-C)-\cos(B+C)]$
$+b[\cos(C-A)-\cos(C+A)]$
$+c[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$
$=2a\sin B\sin C+2b\sin C\sin A$
$+2c\sin A\sin B=2a\sin B\sin C$
$+2a\sin B\sin C+2a\sin B\sin C$
$=6a\sin B\sin C$.

1672. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{a^2-b^2}{ab\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{b^2-c^2}{bc\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{c^2-a^2}{ca\sin^2\frac{B}{2}}$$
$$=\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}\times\left[-8\sin\frac{(A-B)}{2}\sin\frac{(B-C)}{2}\times\sin\frac{(C-A)}{2}\right].$$

解 $\dfrac{a^2-b^2}{ab\sin^2\frac{C}{2}}$

$$=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\sin B\sin^2\frac{C}{2}}$$
$$=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin A\sin B\sin^2\frac{C}{2}}$$
$$=\frac{\sin C\sin(A-B)}{\sin A\sin B\sin^2\frac{C}{2}}$$
$$=\frac{2\cos\frac{C}{2}\sin(A-B)}{\sin A\sin B\sin\frac{C}{2}}$$
$$=\frac{4\cos^2\frac{C}{2}\sin(A-B)}{\sin A\sin B\sin C}$$
$$=\frac{2(1+\cos C)\sin(A-B)}{\sin A\sin B\sin C}.$$

因此原式左边为

$$\frac{2[\sum\sin(A-B)+\sum\cos C\sin(A-B)]}{\sin A\sin B\sin C}.$$

因为

$\sum\sin(A-B)$
$$=-4\sin\frac{(A-B)}{2}\sin\frac{(B-C)}{2}\sin\frac{(C-A)}{2},$$

$\sum\cos C\sin(A-B)$
$=\sum[-\cos(A+B)\sin(A-B)]$
$=\dfrac{1}{2}\sum(\sin B-\sin A)=0.$

所以

原式左边

$$=\frac{-8\sin\frac{(A-B)}{2}\sin\frac{(B-C)}{2}\sin\frac{(C-A)}{2}}{\sin A\sin B\sin C}.$$

1673. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{a^2\cos\frac{(B-C)}{2}}{\cos\frac{(B+C)}{2}}+\frac{b^2\cos\frac{(C-A)}{2}}{\cos\frac{(C+A)}{2}}+\frac{c^2\cos\frac{(A-B)}{2}}{\cos\frac{(A+B)}{2}}=2(ab+bc+ca).$$

解　$$\frac{a^2\cos\frac{(B-C)}{2}}{\cos\frac{(B+C)}{2}}=\frac{a^2\cos\frac{(B-C)}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{a^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{(B-C)}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2a^2}{\sin A}\sin\frac{(B+C)}{2}\cos\frac{(B-C)}{2}$$

$$=\frac{a^2}{\sin A}(\sin B+\sin C)$$

$$=\frac{a^2\sin B}{\sin A}+\frac{a^2\sin C}{\sin A}$$

$$=\frac{a^2b}{a}+\frac{a^2c}{a}=ab+ac.$$

同样地可得，

$$\frac{b^2\cos\frac{(C-A)}{2}}{\cos\frac{(C+A)}{2}}=ba+bc,$$

$$\frac{c^2\cos\frac{(A-B)}{2}}{\cos\frac{(A+B)}{2}}=ca+cb.$$

故　　原式左边$=2(ab+bc+ca)$.

1674. 证明

$$\frac{(\cos B+\cos C)(1+2\cos A)}{1+\cos A-2\cos^2 A}=\frac{b+c}{a}.$$

解

$$左边=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}(1+2\cos A)}{(1+2\cos A)(1-\cos A)}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{b+c}{a}.$$

1675. 证明，在三角形 ABC 中，若 $B=60°$，则

$$\frac{a+c}{2b}=\sin(30°+C).$$

解　$$\frac{a+c}{2b}=\frac{\sin A+\sin C}{2\sin B}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin 60°}$$

$$=\frac{2\sin\left(90°-\frac{B}{2}\right)\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin 60°}$$

$$=\frac{2\sin 60°\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin 60°}$$

$$=\cos\frac{A-C}{2}=\sin\left(\frac{A+B+C}{2}-\frac{A-C}{2}\right)=\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)$$

$$=\sin(30°+C).$$

1676. 在三角形 ABC 中，证明

$a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C.$

解

$a\cos A+b\cos B+c\cos C$

$$=a\cos A+\frac{a\sin B}{\sin A}\cos B+\frac{a\sin C}{\sin A}\cos C$$

$$=a\cos A+\frac{a(\sin 2B+\sin 2C)}{2\sin A}$$

$$=a\cos A+\frac{2a\sin(B+C)\cos(B-C)}{2\sin A}$$

$$=a\cos A+a\cos(B-C)$$

$$=-a\cos(B+C)+a\cos(B-C)$$

$$=2a\sin B\sin C.$$

1677. 在三角形 ABC 中，证明

$$b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C).$$

解　设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则

$b\cos B+c\cos C=k\sin B\cos B$

$+k\sin C\cos C=\frac{1}{2}k(\sin 2B+\sin 2C)$

$=k\sin(B+C)\cos(B-C)$

$=k\sin A\cos(B-C)=a\cos(B-C)$.

1678. 设 $\angle A$ 的平分线与 BC 边交于 D, 则

$$AD=\frac{2S}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

解 在 $\triangle ABD+\triangle ACD=\triangle ABC$ 中,把

$$\triangle ABD=\frac{c\cdot AD\sin\frac{A}{2}}{2},$$

$$\triangle ACD=\frac{b\cdot AD\sin\frac{A}{2}}{2},$$

$$\triangle ABC=S$$

代入即得所要证明的结果.

1679. 在三角形 ABC 中,证明

$$(a-b)\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=(a+b)\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$,

则

$$左边=k(\sin A-\sin B)\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=2k\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$
$$\times\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2},$$

$$右边=k(\sin A+\sin B)\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$=2k\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\times\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$$

因此所要证明的式子总是成立的.

1680. 在三角形 ABC 中,证明

$$(b-c)\cos\frac{A}{2}=a\sin\frac{B-C}{2}.$$

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$, 则

$$(b-c)\cos\frac{A}{2}=k(\sin B-\sin C)\cos\frac{A}{2}$$
$$=2k\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

又因为 $\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$,

所以

$$(b-c)\cos\frac{A}{2}=2k\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$
$$=k\sin A\sin\frac{B-C}{2}=a\sin\frac{B-C}{2}.$$

1681. 证明: 在三角形中, 高将底边分成的两段与两底角的余切成比例.

解 设三角形是 ABC, 高是 AD, 于是从 $\triangle ABD$ 得 $BD=AD\operatorname{ctg}B$, 从 $\triangle ACD$ 得 $CD=AD\operatorname{ctg}C$. 因此

$$\frac{BD}{CD}=\frac{\operatorname{ctg}B}{\operatorname{ctg}C}.$$

1682. 在三角形 ABC 中,证明

$$(a+b)\sin\frac{C}{2}=c\cos\frac{A-B}{2}.$$

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$, 则

$$(a+b)\sin\frac{C}{2}=k(\sin A+\sin B)\sin\frac{C}{2}$$
$$=2k\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

又因为 $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$,

所以

$$(a+b)\sin\frac{C}{2}=2k\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$=k\sin C\cos\frac{A-B}{2}=c\cos\frac{A-B}{2}.$$

1683. 设三角形的三个角是 A、B、C, 证明 $\frac{a}{2\sin A}=\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$.

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$, 则

右边

$$=\frac{k(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C)}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$
$$=\frac{k(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)}{2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)}$$
$$=\frac{k}{2}=\frac{a}{2\sin A}.$$

1684. 在三角形 ABC 中,证明

$$2(a\cos A-b\cos B)\sin C=c(\sin 2A-\sin 2B).$$

解

左边

$$=2\left(\frac{c\sin A}{\sin C}\cos A-\frac{c\sin B}{\sin C}\cos B\right)\sin C$$
$$=2(c\sin A\cos A-c\sin B\cos B)$$
$$=c(\sin 2A-\sin 2B).$$

1685. 在三角形 ABC 中,证明

$$\operatorname{tg} A=\frac{a\sin C}{b-a\cos C}.$$

解 $\operatorname{tg} A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{c\sin A}{c\cos A}=\dfrac{a\sin C}{b-a\cos C}.$

1686. 在三角形 ABC 中, 证明 $c(\sin^2 A+\sin^2 B)=\sin C(a\sin A+b\sin B)$.

解 去掉左边的括弧, 将第一项和第二项中的 $c\sin A$、$c\sin B$, 根据正弦定理分别代换成和它们相等的 $a\sin C$、$b\sin C$, 然后再提取公因式,即得到右边的式子.

1687. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{\cos A\cos B}{ab}+\frac{\cos B\cos C}{bc}+\frac{\cos C\cos A}{ca}=\frac{\sin^2 A}{a^2}.$$

解 将

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

分别代入左边的 $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, 得

$$\text{左边}=\frac{1}{4a^2b^2c^2}(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4)=\frac{1}{a^2}\times\frac{(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4)}{4b^2c^2}=\frac{\sin^2 A}{a^2}.$$

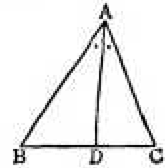
(四)

1688. 在三角形 ABC 中, 设角 A 的平分线的长是 l, θ 是它和底边的交角, 并设 $2s$ 是三角形的周长,证明

$$s\left(\sin\theta-\sin\frac{A}{2}\right)=l\sin\theta\cos\frac{A}{2}.$$

解 设角 A 的平分线和底边交于 D 点,则

$$\angle ADC=\angle ABD+\angle BAD,$$



因此

$$\sin\theta=\sin\left(B+\frac{A}{2}\right).$$

从而

$$s\left(\sin\theta-\sin\frac{A}{2}\right)$$
$$=s\left[\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\right]$$
$$=2s\cos\frac{B+A}{2}\sin\frac{B}{2}$$
$$=2s\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}$$
$$=\frac{2s}{a}(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$
$$=\frac{2s(s-a)}{a}\sin\frac{A}{2}$$
$$=\frac{2bc}{a}\cos^2\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}$$
$$=\frac{bc}{a}\cos\frac{A}{2}\sin A.$$

$$l\sin\theta=b\sin C,$$

$$l\sin\theta\cos\frac{A}{2}=b\sin C\cos\frac{A}{2}=\frac{bc}{a}\sin A\cos\frac{A}{2}.$$

因此 $s\left(\sin\theta-\sin\dfrac{A}{2}\right)=l\sin\theta\cos\dfrac{A}{2}.$

1689. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=c\left(\frac{\cos B}{b}-\frac{\cos A}{a}\right).$$

解 左边$=\dfrac{a^2-b^2}{ab}=\dfrac{c(a\cos B-b\cos A)}{ab}$

$$=c\left(\frac{\cos B}{b}-\frac{\cos A}{a}\right).$$

1690. 在三角形 ABC 中,证明

$$\frac{a}{\cos B}-\frac{b}{\cos A}=\cos C\left(\frac{b}{\cos B}-\frac{a}{\cos A}\right).$$

解 左边$=\dfrac{a\cos A-b\cos B}{\cos A\cos B}$

$$=\frac{1}{\cos A\cos B}\left(a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-b\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)$$
$$=\frac{1}{\cos A\cos B}\cdot\frac{(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)}{2abc}$$

$$=\frac{1}{\cos A\cos B}$$

$$\times\frac{c(a\cos B-b\cos A)(-2ab\cos C)}{2abc}$$

$$=\cos C\left(\frac{b}{\cos B}-\frac{a}{\cos A}\right).$$

1691. 在三角形 ABC 中，从左至右证明

$$c^2=(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}+(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}.$$

解 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$=(a^2+b^2)\left(\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

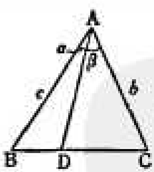
$$-2ab\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$=(a^2+b^2-2ab)\cos^2\frac{C}{2}$$

$$+(a^2+b^2+2ab)\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}.$$

1692. 将三角形的一个角分成两部分，若这两部分的正弦的比等于这个角的两条边的比，证明这两部分的余切的差等于这两条边对角的余切的差。



解 用直线 AD 将 $\angle A$ 分成两部分，设 $\angle BAD$ 为 α，$\angle CAD$ 为 β，则根据假定有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c}{b}.$$

因此 $$\frac{\sin(A-\beta)}{\sin\beta}=\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B},$$

$$\sin A\operatorname{ctg}\beta-\cos A=\frac{\sin C}{\sin B}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\beta=\operatorname{ctg}A+\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}$$

$$=2\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B.$$

同样 $\operatorname{ctg}\alpha=2\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}C.$

因此 $\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C.$

1693. 在三角形 ABC 中，连结顶点 A 和 BC 上的一点 P，证明

$$BP\operatorname{ctg}\angle PAB-CP\operatorname{ctg}\angle PAC$$
$$=CP\operatorname{ctg}B-BP\operatorname{ctg}C.$$

解 因为

$$\angle C+\angle PAB+\angle B+\angle PAC=180^\circ,$$

所以

$$\sin(C+\angle PAB)=\sin(B+\angle PAC).\quad ①$$

又，从 $\triangle APB$ 和 $\triangle APC$ 得

$$\frac{AP}{\sin B}=\frac{BP}{\sin\angle PAB},$$

$$\frac{AP}{\sin C}=\frac{CP}{\sin\angle PAC}.$$

因此

$$\frac{BP}{\sin\angle PAB\sin C}=\frac{CP}{\sin\angle PAC\sin B}.\quad ②$$

①×②，得

$$\frac{BP\sin(C+\angle PAB)}{\sin\angle PAB\sin C}$$
$$=\frac{CP\sin(B+\angle PAC)}{\sin\angle PAC\sin B},$$

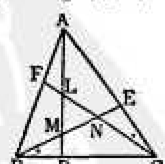
即 $$BP(\operatorname{ctg}\angle PAB+\operatorname{ctg}C)$$
$$=CP(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}\angle PAC).$$

从上式移项得

$$BP\operatorname{ctg}\angle PAB-CP\operatorname{ctg}\angle PAC$$
$$=CP\operatorname{ctg}B-BP\operatorname{ctg}C.$$

1694. 在三角形 ABC 中，从各个角的顶点引三条直线，这三条直线依次和三条边构成 α 弧度的角，证明这三条直线相割而形成的三角形和原三角形相似，且相似比是

$$[\cos\alpha-\sin\alpha(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)]:1.$$



解 从 A、B、C 引三条直线，和对边分别交于 D、E、F，设

$$\angle BAD=\angle CBE$$
$$=\angle ACF=\alpha.$$

于是，这三条直线所围成的三角形 LMN 是和三角形 ABC 相似的，这是因为

$$\angle MLN=\angle MAC+\angle LCA$$
$$=A-\alpha+\alpha=A,$$

同样 $\angle NML=B,\quad \angle LNM=C,$

三角形 LMN 和原来的三角形对应角相等，所以它们相似。又

$$\frac{BN}{BC}=\frac{\sin\angle BCN}{\sin\angle BNC}$$

$$=\frac{\sin(C-\alpha)}{\sin(\pi-C)}=\frac{\sin(C-\alpha)}{\sin C},$$

因此 $$BN=\frac{a\sin(C-\alpha)}{\sin C};$$

$$\frac{BM}{BA}=\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle BMA}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\pi-B)}$$
$$=\frac{\sin\alpha}{\sin B},$$

因此 $$BM=\frac{c\sin\alpha}{\sin B}.$$

$$\therefore\quad MN=\frac{a\sin(C-\alpha)}{\sin C}-\frac{c\sin\alpha}{\sin B}$$
$$=a\cos\alpha-a\operatorname{ctg}C\sin\alpha-\frac{a\sin C}{\sin A\sin B}\sin\alpha$$
$$=a\cos\alpha-a\operatorname{ctg}C\sin\alpha-\frac{a\sin(A+B)}{\sin A\sin B}\sin\alpha$$
$$=a\cos\alpha-a\sin\alpha(\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}A).$$

这个值和 a 的比是

$[\cos\alpha-\sin\alpha(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)]:1.$

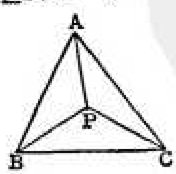
1695. 在三角形 ABC 中，从顶点 A 和 B 引直线，将 $\angle A$ 和 $\angle B$ 分成两部分，使得两个分角的正弦的比都是 $1:n$. 若设这两条直线的交点是 P，那么 PC 将平分 $\angle C$，或把 $\angle C$ 分成正弦之比为 $1:n^2$ 的两部分.

解　首先，假定

$$\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}=\frac{1}{n},\quad\frac{\sin\angle PBC}{\sin\angle PBA}=\frac{1}{n}.$$

从三角形 BPC 得

$$\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PBC}=\frac{BP}{PC}.$$



因而再根据假定

$$\frac{\sin\angle PBC}{\sin\angle PBA}=\frac{1}{n},$$

得 $$\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PBA}=\frac{BP}{PC}\cdot\frac{1}{n}.$$

同样 $$\frac{\sin\angle PCA}{\sin\angle PAB}=\frac{AP}{PC}\cdot\frac{1}{n}.$$

因此 $$\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PCA}\cdot\frac{\sin\angle PAB}{\sin\angle PBA}=\frac{BP}{AP},$$
$$\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PCA}\cdot\frac{PB}{PA}=\frac{BP}{AP},$$
$$\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PCA}=1.$$

即，在这种情况下，$\angle C$ 被 PC 二等分.

其次，假定

$$\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}=\frac{1}{n},\quad\frac{\sin\angle PBA}{\sin\angle PBC}=\frac{1}{n}.$$

这里 B 所分成的两个分角的正弦比和前面相同，但它们的位置不同了. 这时，象前面一样推得

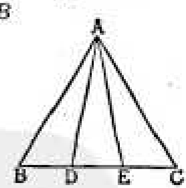
$$\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PBC}=\frac{BP}{PC},\quad\frac{\sin\angle PBC}{\sin\angle PBA}=n,$$
$$\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PBA}=\frac{n\cdot BP}{PC},$$
$$\frac{\sin\angle PCA}{\sin\angle PAB}=\frac{AP}{PC}\cdot\frac{1}{n}.$$

因此

$$\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PCA}=n^2,\quad\frac{\sin\angle PCA}{\sin\angle PCB}=\frac{1}{n^2}.$$

1696. 将三角形的底边三等分，设 t_1、t_2、t_3 是汇聚在顶点的各等分线段所对的角的正切，证明 $\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)=4\left(1+\frac{1}{t_2^2}\right)$.

解　设底边 BC 在 D 和 E 被分成 $BD=DE=EC$，$\angle BAD$ 为 α_1，$\angle DAE$ 为 α_2，$\angle EAC$ 为 α_3，则由三角形 AEB 得



$$\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\angle AEB}=\frac{BE}{AB}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{c},$$

由三角形 AEC 得

$$\frac{\sin\alpha_3}{\sin\angle AEC}=\frac{EC}{AC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{b},$$

因此由除法得

$$\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\alpha_3}=\frac{2b}{c}.$$

同样 $$\frac{\sin(\alpha_3+\alpha_2)}{\sin\alpha_1}=\frac{2c}{b}.$$

因此 $$\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_3+\alpha_2)}{\sin\alpha_1\sin\alpha_3}=4$$
$$=4(\sin^2\alpha_2+\cos^2\alpha_2),$$
$$(\cos\alpha_2+\sin\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_1)(\cos\alpha_2+\sin\alpha_2\operatorname{ctg}\alpha_3)$$
$$=4(\sin^2\alpha_2+\cos^2\alpha_2).$$

用不等于 0 的 $\sin^2\alpha_2$ 除上式，得

$$(\operatorname{ctg}\alpha_2+\operatorname{ctg}\alpha_1)(\operatorname{ctg}\alpha_2+\operatorname{ctg}\alpha_3)$$
$$=4(1+\operatorname{ctg}^2\alpha_2),$$

因而所要证明的等式成立.

1697. 从三角形 ABC 的各顶点向对边作垂线 AD、BE、CF，证明

$a\sin(\angle BAD-\angle CAD)+b\sin(\angle CBE-\angle ABE)+c\sin(\angle ACF-\angle BCF)=0.$

解 假定三角形的各角都是锐角，则

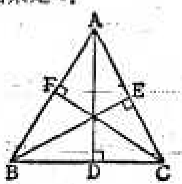
$$a\sin(\angle BAD-\angle CAD)=a(\sin\angle BAD\times\cos\angle CAD-\cos\angle BAD\sin\angle CAD)=a(\cos B\sin C-\sin B\cos C).$$

同样
$$b\sin(\angle CBE-\angle ABE)=b(\cos C\sin A-\sin C\cos A),$$
$$c\sin(\angle ACF-\angle BCF)=c(\cos A\sin B-\sin A\cos B).$$

因此，三个式子的和是

$$\cos A(c\sin B-b\sin C)+\cos B(a\sin C-c\sin A)+\cos C(b\sin A-a\sin B)=0.$$

如果三角形中有一个是钝角，那么在上面的解法中，只要将 $\cos C$ 换成 $\cos(180°-C)$，就能同样证得结果是 0。



1698. 证明

$$\cos\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}+\cos\gamma\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\delta-\beta}{2}+\cos\delta\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}=2\sin\frac{\gamma-\delta}{2}\sin\frac{\delta-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\times\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}.$$

解
$$\cos\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}=\frac{1}{2}\cos\beta\left[\cos\frac{(\alpha+\beta-\gamma+\delta)}{2}-\cos\frac{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\alpha-\beta-\gamma+\delta}{2}+\cos\frac{\alpha+3\beta-\gamma+\delta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{2}-\cos\frac{\alpha+3\beta+\gamma-\delta}{2}\right).$$

其他两项也能变形成和上面同样的式子，因此这三项的和是

$$\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\alpha+3\beta-\gamma+\delta}{2}-\cos\frac{\alpha+3\gamma+\delta-\beta}{2}\right)$$

与具有同样形式的其他两个式子的和。因为上式可化成

$$\frac{1}{2}\sin(\gamma-\beta)\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{2},$$

所以，所要证明的式子的左边变成

$$\frac{1}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{2}$$

和 $\sin(\gamma-\beta)+\sin(\delta-\gamma)+\sin(\beta-\delta)$

的乘积。又因为

$$\sin(\gamma-\beta)+\sin(\delta-\gamma)+\sin(\beta-\delta)=-4\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\delta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\delta}{2},$$

所以

$$\text{左边}=-2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\delta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\delta}{2}\times\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\gamma-\delta}{2}\sin\frac{\delta-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\times\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}.$$

1699. 证明：

$$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)[\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma-\cos(\beta+\gamma)-\cos(\gamma+\alpha)-\cos(\alpha+\beta)]-(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)[\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma-\sin(\beta+\gamma)-\sin(\gamma+\alpha)-\sin(\alpha+\beta)]=\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma-3\cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

解 将 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 分别用 l、m、n，$\sin\alpha$、$\sin\beta$、$\sin\gamma$ 分别用 p、q、r 来表示，于是，由于

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos(\beta+\gamma)=\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma,$$
$$\sin(\beta+\gamma)=\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma,$$

所以

$$\begin{aligned}\text{左边}=&(l+m+n)[l^2-p^2+m^2-q^2\\&+n^2-r^2-(mn-qr)-(ln-pr)\\&-(lm-pq)]-(p+q+r)[2lp\\&+2mq+2nr-(qn+mr)\\&-(rl+np)-(pm+lq)]\\=&(l+m+n)[(l^2+m^2+n^2-lm\\&-mn-ln)-(p^2+q^2+r^2-pq\\&-qr-pr)]-(p+q+r)[l(2p-q\\&-r)+m(2q-p-r)\\&+n(2r-p-q)]\\=&l^3+m^3+n^3-3lmn-3l(p^2-qr)\\&-3m(q^2-pr)-3n(r^2-pq)\\=&l(l^2-3p^2)+m(m^2-3q^2)\\&+n(n^2-3r^2)-3(lmn-lqr\\&-mpr-npq).\qquad①\end{aligned}$$

又　$l(l^2-3p^2)=l[l^2-3(1-l^2)]$

$$=4l^3-3l=\cos 3\alpha,$$

$$lmn-lqr-mpr-npq=\cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

将这些代入①，就得

$$\text{左边}=\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma-3\cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

1700. 证明 $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{8}$.

解

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{1}{2}\cos\frac{6\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}+1\right)\\&=\frac{1}{4}\cos\frac{8\pi}{7}\left(1+2\cos\frac{4\pi}{7}\right)+\frac{1}{4}.\qquad①\end{aligned}$$

由于 $\frac{\sin 3A}{\sin A}=3-4\sin^2 A$，所以①中的

$$1+2\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}.$$

因此

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{\cos\frac{8\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}}{4\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{4}\\&=\frac{\sin 2\pi-\sin\frac{2\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{4}\\&=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

1701. 证明

$$\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{7}+\cos 2\varphi}+\frac{1}{\cos\frac{4\pi}{7}+\cos 2\varphi}+\frac{1}{\cos\frac{6\pi}{7}+\cos 2\varphi}=\frac{7\operatorname{tg}7\varphi-\operatorname{tg}\varphi}{2\sin 2\varphi}.$$

解

$$\begin{aligned}\text{左边的公分母}=&\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos 2\varphi\right)\\&\times\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos 2\varphi\right)\left(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos 2\varphi\right)\\=&\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\\&+\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right.\\&\left.+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\right)\cos 2\varphi+\left(\cos\frac{2\pi}{7}\right.\\&\left.+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)\cos^2 2\varphi+\cos^3 2\varphi\\=&\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{1}{2}\cos^2 2\varphi+\cos^3 2\varphi.\end{aligned}$$

通分后，分子是

$$\begin{aligned}&\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos 2\varphi\right)\left(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos 2\varphi\right)\\&+\left(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos 2\varphi\right)\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos 2\varphi\right)\\&+\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos 2\varphi\right)\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos 2\varphi\right)\\=&\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\\&+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\right.\\&\left.+\cos\frac{6\pi}{7}\right)\cos 2\varphi+3\cos^2 2\varphi\\=&-\frac{1}{2}-\cos 2\varphi+3\cos^2 2\varphi.\end{aligned}$$

因此

原式的左边

$$=\frac{4(6\cos^2 2\varphi-2\cos 2\varphi-1)}{8\cos^3 2\varphi-4\cos^2 2\varphi-4\cos 2\varphi+1}.$$

又

原式的右边 $=\dfrac{7\operatorname{tg}7\varphi-\operatorname{tg}\varphi}{2\sin 2\varphi}$

$$=\frac{7\sin 7\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\cos 7\varphi}{2\sin 2\varphi\cos 7\varphi\cos\varphi}$$

$$=\frac{3\sin 8\varphi+3\sin 6\varphi+\sin(7\varphi-\varphi)}{\sin 2\varphi(\cos 8\varphi+\cos 6\varphi)}$$

$$=\frac{6\sin 4\varphi\cos 4\varphi+4(3\sin 2\varphi-4\sin^3 2\varphi)}{\sin 2\varphi(2\cos^2 4\varphi-1+4\cos^3 2\varphi-3\cos 2\varphi)}$$

$$=\frac{\left\{\begin{matrix}12\cos 2\varphi(2\cos^2 2\varphi-1)+12\\ -16(1-\cos^2 2\varphi)\end{matrix}\right\}}{2(2\cos^2 2\varphi-1)^2-1+4\cos^3 2\varphi-3\cos 2\varphi}$$

$$=\frac{4(6\cos^2 2\varphi-2\cos 2\varphi-1)}{8\cos^3 2\varphi-4\cos^2 2\varphi-4\cos 2\varphi+1}.$$

因此，所要证明的等式成立。

1702. 证明 $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$.

解

$$\text{左边}=2\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$=\cos\frac{4\pi}{7}\left(2\cos\frac{2\pi}{7}+1\right)$$

$$=\cos\frac{4\pi}{7}\left(2-4\sin^2\frac{\pi}{7}+1\right)$$

$$=\cos\frac{4\pi}{7}\left(3-4\sin^2\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{\cos\frac{4\pi}{7}\left(3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\pi-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}.$$

1703. 在三角形 ABC 中，证明下列两式成立：

(1) $r\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}=r_1$;

(2) $\dfrac{b-c}{r_1}+\dfrac{c-a}{r_2}+\dfrac{a-b}{r_3}=0$.

解 (1)

$$\text{左边}=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=r_1.$$

(2) $$\text{左边}=\frac{(s-a)(b-c)}{S}+\frac{(s-b)(c-a)}{S}+\frac{(s-c)(a-b)}{S}=\frac{1}{S}\times 0=0.$$

1704. 从三角形 ABC 的顶点 A 向底边引垂线 AD，再从 D 点向边 AB、AC 引垂线 DE、DF，证明

$$AE\times EB\cos^2 C=AF\times FC\cos^2 B.$$

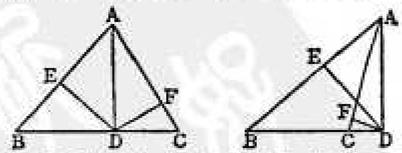
解 设角 B 和角 C 是锐角，AD 的长度是 p，于是

$$AE=p\cos(90^\circ-B)=p\sin B,$$
$$DE=p\sin(90^\circ-B)=p\cos B,$$
$$EB=DE\operatorname{ctg}B=p\cos B\operatorname{ctg}B.$$

因此　$AE\cdot EB=p^2\cos^2 B.$

同样　$AF\cdot FC=p^2\cos^2 C.$

因此　$AE\cdot EB\cos^2 C=AF\cdot FC\cos^2 B.$



设角 B 和角 C 中有一个是钝角，象前面一样可得

$$AE\cdot EB=p^2\cos^2 B,$$
$$AF=p\cos(C-90^\circ)=p\sin C,$$
$$DF=p\sin(C-90^\circ)=-p\cos C,$$
$$FC=DF\operatorname{ctg}(180^\circ-C)$$
$$=-DF\operatorname{ctg}C=p\cos C\operatorname{ctg}C,$$
$$AF\cdot FC=p^2\cos^2 C.$$

因此同样可证得

$$AE\cdot EB\cos^2 C=AF\cdot FC\cos^2 B.$$

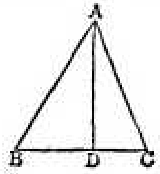
1705. 若 AD 是三角形 ABC 的一条高，证明 $\dfrac{\cos\angle BAD}{\cos\angle CAD}=\dfrac{AC}{AB}$.

解 从 $\triangle ABD$ 得

$$\cos\angle BAD=\frac{AD}{AB}.$$

从$\triangle ACD$得

$$\cos\angle CAD=\frac{AD}{AC}.$$



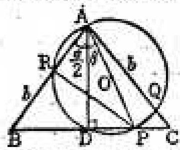
因此

$$\frac{\cos\angle BAD}{\cos\angle CAD}=\frac{\dfrac{AD}{AB}}{\dfrac{AD}{AC}}=\frac{AC}{AB}.$$

1706. 在三角形ABC中，$BC=a$，$AB=AC=b$（a，b是定值）。设D是BC的中点，过A、D的圆分别和边BC、CA、AB交于P、Q、R，证明：

(1) $PQ+PR$是一个定值；

(2) 四边形$ARPQ$的周长是一个定值。



解　设过A、D的圆的中心是O，半径是r，则由于$\angle PDA$是直角，所以O在AP上。因此得

$$AP=2r.$$

现再设　$\angle DAP=\theta$，$\angle BAC=\alpha$，

于是　　$2r=AP=AD\sec\theta$。

(1) $PR=AP\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\theta\right)$

$$=AD\sec\theta\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right),$$

$$PQ=AP\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)$$

$$=AD\sec\theta\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right).$$

$\therefore$　$PQ+PR$

$$=AD\sec\theta\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)\right]$$

$$=2AD\sec\theta\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+\theta+\frac{\alpha}{2}-\theta\right)$$

$$\times\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+\theta-\frac{\alpha}{2}+\theta\right)$$

$$=2AD\sec\theta\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta=2AD\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}.$$

(2) $AR+RP+PQ+QA$

$$=AP\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)\right.$$

$$\left.+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right]$$

$$=AD\sec\theta\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)\right.$$

$$+\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)$$

$$\left.+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right]$$

$$=AD\sec\theta\left[2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\theta\right.$$

$$\left.+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta\right]$$

$$=\frac{4b^2-a^2}{2b}+\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}$$

$=$定值。

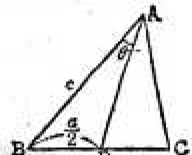
1707. 在三角形ABC中，设BC边上的中点是D，证明

$$\operatorname{ctg}\angle BAD-\operatorname{ctg}B=2\operatorname{ctg}A.$$

解　三角形ABD中

$$\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{BD}$$

$$=\frac{2c}{a}.$$



设$\angle BAD=\theta$，于是

$$\frac{\sin(\theta+B)}{\sin\theta}=\frac{2c}{a}=\frac{2\sin C}{\sin A}.$$

因此　$$\frac{\sin\theta\cos B+\cos\theta\sin B}{\sin\theta}=\frac{2\sin C}{\sin A},$$

$$\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}\theta=\frac{2\sin C}{\sin A\sin B}$$

$$=\frac{2\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=2\operatorname{ctg}A+2\operatorname{ctg}B.$$

因此　$\operatorname{ctg}\angle BAD-\operatorname{ctg}B=2\operatorname{ctg}A$。

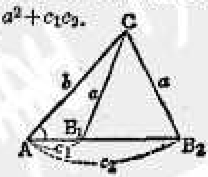
1708. 已知两条边a、b和a的对角，可作出两个三角形。设这两个三角形的第三条边是c_1和c_2，证明$b^2=a^2+c_1c_2$。

解　在$\triangle AB_1C$和$\triangle AB_2C$中，设

$$CB_1=CB_2=a,$$

$$AC=b,$$

$$AB_1=c_1,\ AB_2=c_2,$$



于是，对于$\triangle AB_1C$，由余弦定理得

$$a^2=b^2+c_1^2-2bc_1\cos A.$$

同样，对于$\triangle AB_2C$，有

$$a^2=b^2+c_2^2-2bc_2\cos A.$$

$$\therefore\quad \cos A=\frac{b^2+c_1^2-a^2}{2bc_1}=\frac{b^2+c_2^2-a^2}{2bc_2}.$$

因此　$c_2(b^2+c_1^2-a^2)=c_1(b^2+c_2^2-a^2)$,

$$(c_2-c_1)(b^2-a^2-c_1c_2)=0.$$

因为 $c_2-c_1\neq 0$, 所以

$$b^2=a^2+c_1c_2.$$

1709. 已知三角形的三条边,求各角的余弦. 即要证明 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

解　设三角形 ABC 的角 C 是锐角,于是

$$AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot CD,$$
$$CD=AC\cos C,$$

因此　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

如果角 C 是钝角,那么

$$AB^2=BC^2+AC^2+2BC\cdot CD,$$

并且

$$CD=AC\cos(180^\circ-C)=-AC\cos C,$$

因此,同样有

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

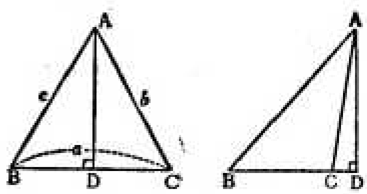
当角 C 是直角的时候

$$a^2+b^2=c^2.$$

因此 $\cos C$ 的值是 0.

综上所述,所求得的 $\cos C$ 的公式在各种情况下都成立. 同样可求得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$$

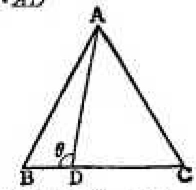


1710. 在三角形 ABC 的 BC 边上取一点 D, 使 $2BD=DC$, 证明

$$2AB^2+AC^2=3(AD^2+2BD^2).$$

解　设 $\angle ADB=\theta$, 于是在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ACD$ 中,用余弦定理得

$$\cos\theta=\frac{BD^2+AD^2-AB^2}{2BD\cdot AD},$$



$\cos\angle ADC$
$=\cos(180^\circ-\theta)$
$=-\cos\theta$
$=\frac{DC^2+AD^2-AC^2}{2DC\cdot AD}.$

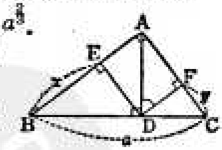
因此,从上面两式得

$$\frac{BD^2+AD^2-AB^2}{BD}=-\frac{DC^2+AD^2-AC^2}{2BD},$$
$$2(BD^2+AD^2-AB^2)$$
$$=-(DC^2+AD^2-AC^2),$$
$$2AB^2+AC^2=3AD^2+6BD^2.$$
$$\therefore\quad 2AB^2+AC^2=3(AD^2+2BD^2).$$

1711. 在直角三角形 ABC 中, 从直角的顶点 A 向斜边 BC 作垂线, 再从它的垂足 D 向 AB、AC 分别作垂线 DE、DF. 设 BC、BE、CF 的长度分别是 a、x、y, $\angle ABC$ 的大小是 θ, 解下列问题.

(1) 将 x、y 分别表示成 a 和 θ 的函数.

(2) 证明 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.



解　(1) 在$\triangle EBD$ 中

$x=BD\cos\theta$.　①

在 $\triangle ABD$ 中

$$BD=AB\cos\theta.\qquad ②$$

在 $\triangle ABC$ 中

$$AB=a\cos\theta.\qquad ③$$

从 ①、②、③ 得,

$$x=a\cos^3\theta.$$

设 $\angle ACB=\theta'$, 同样可得

$$y=a\cos^3\theta'.$$

又因为 $\theta'=90^\circ-\theta$, 所以 $\cos\theta'=\sin\theta$.

$$\therefore\quad y=a\sin^3\theta.$$

(2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=(a\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}}+(a\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}$

$$=a^{\frac{2}{3}}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a^{\frac{2}{3}}.$$

1712. 在三角形 ABC 中, 如果 BC 边上的旁切圆半径等于外接圆的半径,证明

$$\cos A=\cos B+\cos C.$$

解　设 R、r、a、b、c 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径、相切于 BC 边的旁切圆半径和三条边的长,那么它们之间存在下列关系:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{r}{2}(b+c-a)=\frac{abc}{4R}.$$

假定 $R=r$，运用正弦定理由上式可得

$$\sin B+\sin C-\sin A=2\sin A\sin B\sin C,$$

$$\therefore\quad 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}[\cos(B-C)-\cos(B+C)].$$

上式的左边

$$\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2},$$

$$\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}.$$

右边运用倍角公式得

$$\cos(B-C)-\cos(B+C)=2\left(\cos^2\frac{B-C}{2}-\cos^2\frac{B+C}{2}\right).$$

$$\therefore\quad 1=2\cos\frac{B+C}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B+C}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}+2\cos^2\frac{B+C}{2}.$$

用 $\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$ 代入右边的第二项，移项得

$$1-2\sin^2\frac{A}{2}=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

因此

$$\cos A=\cos B+\cos C.$$

注 一般地，设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，外接圆的半径为 R，$\angle A$ 内的旁心为 O'，旁切圆的半径为 r，那么有

(1) $r=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$，

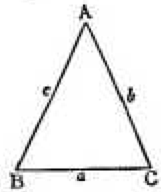
(2) $OO'^2=R^2+2Rr$.

当 $R=r$ 时，可以由(1)同样算得本题的结果．如果对 $\triangle BOO'$ 运用余弦定理，那么也可以由(2)进行计算．

1713. 具有给定的两条边和夹角的三角形有而且只有一个．试加以说明．

解 设已知两条边是 c、b，夹角是 A，由这些条件解三角形．首先求

$$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2},$$



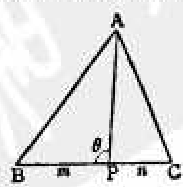
并从公式

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$$

求 $\frac{B-C}{2}$，从而求 B 和 C，然后再计算 a．因为 A 是已知的，所以 $90^\circ-\frac{A}{2}$，即 $\frac{B+C}{2}$ 总可以求出．并且由于 A 是三角形的内角，所以 $\frac{A}{2}$ 总小于 90°，而 $\frac{B+C}{2}$ 也总小于 90°，因此 $\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$ 是确定的有限值．又因为 b 和 c 是已知的，所以 $\frac{b-c}{b+c}$ 也应该是确定的．因此它们的积 $\frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$ 是定值，而和这个积相等的 $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$ 也是确定的有限值．又，$\frac{B-C}{2}$ 当然小于 180°，因此 $\frac{B-C}{2}$ 必定在第一或第二象限．第一象限的正切和第二象限的正切，它们的符号是不同的，所以当 $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$ 是确定的有限值时，$\frac{B-C}{2}$ 也就唯一地确定下来．因此角 B 和角 C 就可以求出．此外，这个三角形的第三条边 a 也总是可求的，并且它的值是唯一的．

1714. 设 P 是将三角形 ABC 的 BC 边分成 $m:n$ 的分点，证明 $nAB^2+mAC^2=nBP^2+mCP^2+(m+n)AP^2$.

解 设 $\angle APB=\theta$，于是在三角形 ABP 中，由余弦定理得



$$\cos\theta=\frac{AP^2+BP^2-AB^2}{2AP\cdot BP}.$$

又，在三角形 APC 中

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta=\frac{AP^2+CP^2-AC^2}{2AP\cdot CP},$$

所以从上面两式得

$$\frac{AP^2+BP^2-AB^2}{BP}=-\frac{AP^2+CP^2-AC^2}{CP}.$$

将这个等式变形，得

$$\frac{AP^2+BP^2-AB^2}{AP^2+CP^2-AC^2}=-\frac{BP}{CP}=-\frac{m}{n},$$

$$n(AP^2+BP^2-AB^2)$$
$$+m(AP^2+CP^2-AC^2)=0.$$

$$\therefore\quad nAB^2+mAC^2=nBP^2$$
$$+mCP^2+(m+n)AP^2.$$

4. 三角形的形状

1715. 以下列长度为三边长的三角形是否存在？如果存在的话，那么是锐角三角形，直角三角形，还是钝角三角形？

(1) 3cm, 4cm, 6cm;

(2) 5cm, 12cm, 13cm;

(3) 10cm, 11cm, 22cm;

(4) 9cm, 10cm, 12cm.

解 成为三角形三条边的充要条件是，三条线段中，任意两条长度的和大于第三条。由于(3)不满足这个条件，所以不能构成三角形。

设三角形的最大角是 θ，于是它是锐角三角形，直角三角形，还是钝角三角形，就决定于 $\cos\theta$ 的符号。

(1) $\cos\theta=\dfrac{3^2+4^2-6^2}{2\times3\times4}<0,$

$$\therefore\quad \theta>90^\circ.$$

是钝角三角形。

(2) $\cos\theta=\dfrac{5^2+12^2-13^2}{2\times5\times12}=0,$

$$\therefore\quad \theta=90^\circ.$$

是直角三角形。

(4) $\cos\theta=\dfrac{9^2+10^2-12^2}{2\times9\times10}>0,$

$$\therefore\quad \theta<90^\circ.$$

是锐角三角形。

1716. 在三角形 ABC 中，$\angle A=60^\circ$，$AB=2$，$AC=4$，$\angle A$ 的平分线和 BC 交于 D 点，求 AD 的长度。

解 设 $AD=x$，于是由

△ABC 的面积＝△ABD 的面积
＋△ACD 的面积

得

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot2\cdot x\cdot\sin30^\circ$$
$$+\frac{1}{2}\cdot4\cdot x\cdot\sin30^\circ.$$

$$2\sqrt{3}=\frac{x}{2}+x.$$

$$\therefore\quad \frac{3}{2}x=2\sqrt{3},\quad x=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

1717. 若三角形 ABC 中存在着下面的关系，考察这个三角形的形状。

(1) $\dfrac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}=\dfrac{\sin^2A}{\sin^2B}$;

(2) $\sin C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$.

解 (1) 将所给的等式变形，得

$$\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\sin^2A}{\sin^2B}=0,$$

$$\frac{\sin A}{\sin B}\left(\frac{\cos B}{\cos A}-\frac{\sin A}{\sin B}\right)=0.$$

因为 $\qquad \sin A\neq0,\ \sin B\neq0,$

所以 $\qquad \dfrac{\frac{1}{2}\sin2B-\frac{1}{2}\sin2A}{\cos A\sin B}=0,$

$$\sin2A-\sin2B=0.$$

$$\therefore\quad \sin2A=\sin2B.$$

$$\therefore\quad 2A=2B\quad 或\quad 2A=180^\circ-2B.$$

由前者得 $\qquad A=B.$

由后者得 $\qquad A+B=90^\circ.$

因此，这个三角形要末是 $a=b$ 的等腰三角形，要末是 $\angle C$ 为直角的直角三角形。

(2) 将所给的等式变形，得

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}.$$

化去分母，得

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{A+B}{2},$$

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)$$
$$-\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)=0,$$

$$\cos\frac{C}{2}\left(2\sin^2\frac{C}{2}-1\right)=0.$$

$$\therefore\quad -\cos\frac{C}{2}\cos C=0.$$

因为 $\qquad \cos\dfrac{C}{2}\neq0,$

所以　　$\cos C=0$，$C=90°$.

因此，这个三角形是 $\angle C$ 为直角的直角三角形.

1718. 满足下面条件的三角形是怎样的三角形？

(1) $a\cos B=b\cos A$.

(2) $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$.

(3) $\cos A:\cos B=b:a$.

解　(1) 由余弦定理得

$$a\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

从而得到　　$a^2=b^2$，$a=b$.

因此，$\triangle ABC$ 是 $AC=BC$ 的等腰三角形.

(2) 根据 (1)，从 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$ 得 $a=b$，从 $\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$ 得 $b=c$，所以有 $a=b=c$. 因此，$\triangle ABC$ 是正三角形.

(3) 从

$$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

得　　$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$.

因此　　$a^2=b^2$　或　$a^2+b^2=c^2$.

从而知道，$\triangle ABC$ 或是 $AC=BC$ 的等腰三角形，或是 $\angle C$ 为直角的直角三角形.

别解　(1) 由正弦定理，所给的等式可变形成

$$\sin A\cos B-\sin B\cos A=0.$$

从而由　　$\sin(A-B)=0$

得　　$A-B=0$.

(2) 由正弦定理得

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C},$$

即　　$\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}C$.

因此　　$A=B=C$.

(3) 所给的等式可变形成

$$\sin A\cos A=\sin B\cos B.$$

从而由　　$\sin 2A=\sin 2B$

得　　$2A=2B$　或　$2A+2B=180°$.

$\therefore$　$A=B$　或　$A+B=90°$.

1719. 在三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，A 是最小的角，且三边的长度是连续的整数，证明

$$(1-\sin A)\sin A+(1-\cos A)\cos A=\frac{1}{2}\cos A.$$

解　设连续的三个整数是 $n-1$, n, $n+1$，由勾股定理得

$$n^2+(n-1)^2=(n+1)^2,$$
$$n(n-4)=0.\quad \therefore\quad n=4.$$

从而得　　$a=3$, $b=4$, $c=5$.

因此　　$\sin A=\dfrac{3}{5}$，$\cos A=\dfrac{4}{5}$.

$$\begin{aligned}&(1-\sin A)\sin A+(1-\cos A)\cos A\\&=\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{5}+\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\frac{4}{5}\\&=\frac{6}{25}+\frac{4}{25}=\frac{2}{5},\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\cos A=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5},$$

$$\therefore\quad(1-\sin A)\sin A+(1-\cos A)\cos A=\frac{1}{2}\cos A.$$

1720. 在三角形 ABC 中，若 $b=c$，$A=60°$，它是怎样的三角形？

解　因为 $A=60°$，所以 $B+C=120°$，又因为 $b=c$，所以 $B=C$，从而知道角 B 和角 C 都是 $60°$. 因此，这个三角形是正三角形.

1721. 在三角形 ABC 中，

(1) 若

$$\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\cdot\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B=p,$$

求 p 的值.

(2) 若 $\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\sqrt{3}$，试用 (1) 的结果考察三角形 ABC 的形状.

解　(1)

$$\begin{aligned}p&=\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\cdot\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B\\&=\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}(\sin A\cos B\cos C\\&\quad+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C)\\&=\frac{\sin(A+B)\cos C+\cos A\cos B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}\\&=\frac{-\cos(A+B)+\cos A\cos B}{\sin A\sin B}=1,\end{aligned}$$

(2) $(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)^2-2(\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B)-\frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)+1$

$$=\left(\operatorname{ctg}A-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\operatorname{ctg}B-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\operatorname{ctg}C-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=0.$$

因此 $A=B=C=60°$，从而知道 $\triangle ABC$ 是正三角形。

1722. 在三角形 ABC 中，已知三边 a, b, c 之间有 $b=\frac{a+c}{2}$ 的关系。

(1) 证明 $2\sin B=\sin A+\sin(A+B)$；

(2) 证明 $2\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{C-A}{2}$；

(3) 求角 B 的最大值。又，这时三角形 ABC 的形状如何？

解 (1) 用正弦定理将 $2b=a+c$ 变形，得

$$2\sin B=\sin A+\sin C.$$

因为 $\sin C=\sin[180°-(A+B)]=\sin(A+B)$，

所以 $2\sin B=\sin A+\sin(A+B)$.

(2) 将(1)所得的等式化成积的形式，得

$$2\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=2\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)\cos\frac{B}{2}.$$

两边同除以 $2\cos\frac{B}{2}(\neq 0)$，得

$$2\sin\frac{B}{2}=\sin\left(A+\frac{B}{2}\right).$$

因为
$$A+\frac{B}{2}=\frac{180°-C+A}{2}=90°-\frac{C-A}{2},$$

所以
$$\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{C-A}{2}.$$

$$\therefore\quad 2\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{C-A}{2}.$$

(3) 从(2)得

$$\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{C-A}{2}\leq\frac{1}{2}.$$

由于 $\frac{|C-A|}{2}<90°$，$0°<\frac{B}{2}<90°$，所以上式当 $C=A$，$B=60°$ 时等号成立。角 B 最大的时候，也就是 $\sin\frac{B}{2}$ 取最大值 $\frac{1}{2}$ 的时候，这时 $A=B=C=60°$，因此 B 的最大值是 $60°$。$B=60°$ 时，$\triangle ABC$ 变成正三角形。

1723. 有关系式 $2\cos B\sin C=\sin A$ 的三角形，是怎样的形状？

解 从 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=2R$

得 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$.

从 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

得 $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$.

将这些代入所给的等式，得

$$2\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\times\frac{c}{2R}=\frac{a}{2R}.$$

$$\therefore\quad c^2+a^2-b^2=a^2,\quad c^2-b^2=0.$$

从而得 $c=b$.

因此，$\triangle ABC$ 是 $AB=AC$ 的等腰三角形。

1724. 在三角形 ABC 中，若

$$\frac{\cos A+2\cos C}{\cos A+2\cos B}=\frac{\sin B}{\sin C},$$

那么这个三角形有怎样的形状？

解 根据正弦和余弦定理，将原式变形，得

$$\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}}=\frac{b}{c},$$

$$\frac{a(b^2+c^2-a^2)+2c(a^2+b^2-c^2)}{a(b^2+c^2-a^2)+2b(a^2+c^2-b^2)}=\frac{b}{c},$$

$$ac(b^2+c^2-a^2)+2c^2(a^2+b^2-c^2)=ab(b^2+c^2-a^2)+2b^2(a^2+c^2-b^2),$$

$$a(b^2+c^2-a^2)(c-b)+2[a^2(c^2-b^2)-(c^4-b^4)]=0,$$

$$(c-b)[a(b^2+c^2-a^2)+2(c+b)(a^2-c^2-b^2)]=0,$$

$$(c-b)(b^2+c^2-a^2)(a-2b-2c)=0.$$

$$\therefore\quad b=c\quad 或\quad b^2+c^2=a^2.$$

因此，三角形 ABC 是 $b=c$ 的等腰三角形，或是 A 为直角的直角三角形。

1725. 若三角形三边的长 a、b、c 之间有关系式 $\frac{a^4+b^4}{c^4}+\frac{1}{2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}$，这个三角形有

怎样的形状?

解　将 $\frac{a^4+b^4}{c^4}+\frac{1}{2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}$

去分母,然后关于 c 整理得

$$c^4-2(a^2+b^2)c^2+2(a^4+b^4)=0.$$

$$\therefore\quad c^2=(a^2+b^2)\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2-2(a^4+b^4)}$$
$$=(a^2+b^2)\pm\sqrt{-(a^2-b^2)^2}.$$

由 $c>0$ 知道,根号内 $-(a^2-b^2)^2\geq 0$,所以

$$(a+b)^2(a-b)^2\leq 0.$$

又因为 $a+b>0$,所以 $(a-b)^2\leq 0$。从而得

$$a=b.$$

这时　　$c^2=a^2+b^2.$

因此,这个三角形是以 c 为斜边的等腰直角三角形.

1726. 在三角形 ABC 中,若等式 $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$ 成立,这个三角形有怎样的形状?

解　根据正弦定理,由已知等式得

$$a^2+b^2=c^2,$$

因此,这个三角形是以角 C 为直角的直角三角形.

1727. 在三角形 ABC 中,证明下列各等式.

(1) $b\sin^2\frac{A}{2}+a\sin^2\frac{B}{2}=s-c$;

(2) $\csc\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{a+b+c}{2a}$;

(3) $\frac{a}{1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=\frac{b}{1-\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$
$=\frac{c}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$.

解　(1)

$$\text{左边}=\frac{b(s-b)(s-c)}{bc}+\frac{a(s-c)(s-a)}{ca}$$
$$=\frac{(s-c)(2s-b-a)}{c}=s-c.$$

(2) 左边

$$=\sqrt{\frac{bc}{(s-b)(s-c)}}\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$
$$\times\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}=\sqrt{\frac{s^2}{a^2}}$$
$$=\frac{s}{a}=\frac{a+b+c}{2a}.$$

(3) $1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$

$$=1-\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$
$$\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$
$$=1-\frac{s-a}{s}=\frac{a}{s}.$$

因此　$\frac{a}{1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=\frac{a}{\frac{a}{s}}=s.$

同样　$\frac{b}{1-\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=s,$

$$\frac{c}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=s.$$

所以,所要证明的等式成立.

1728. 在三角形 ABC 中,证明

$$\sin A+\sin B>\sin C>\sin A\sim\sin B.$$

又,若 $\cos A+\cos B=\sin C$ 成立,这个三角形是怎样的三角形?

解　从三角形的性质,可得不等式

$$a+b>c>a\sim b.$$

用正弦定理将上式变形,得

$$\sin A+\sin B>\sin C>\sin A\sim\sin B.$$

将　　$\cos A+\cos B=\sin C$

变形,得

$$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=0,$$
$$\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=0,$$
$$\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)=0.$$

因为 $\sin\frac{C}{2}\neq 0$,所以

$$\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}.$$

$$\therefore\quad A-B=\pm C.$$

从而得　$A=B+C$　或　$A+C=B$.

因此,这个三角形是角 A 或角 B 为直角的直角三角形.

1729. 设三角形 ABC 的三个角为 A、B、C,对应的三条边为 a、b、c.

(1) 若 $2\cos A+\cos B+\cos C=2$,证明 b、

a、c 成等差数列.

(2) 进一步，若还有关系式

$$\cos^2 A+\sin B\sin C=1,$$

那么三角形 ABC 有怎样的形状?

解 (1) 用余弦定理将所给的关系式变形，得

$$\frac{2(b^2+c^2-a^2)}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2,$$

$$2a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)=4abc,$$

整理得

$$[a^2-(b-c)^2][2a-(b+c)]=0.$$

$$\therefore\quad (a+b-c)(a-b+c)(2a-b-c)=0.$$

因为 a、b、c 是三角形的三条边，所以

$$a+b-c>0,\ a-b+c>0.$$

因此得 $\qquad 2a=b+c,$

即 b、a、c 成等差数列.

(2) 由已知等式得

$$\sin B\sin C=1-\cos^2 A=\sin^2 A.$$

运用正弦定理，得

$$bc=a^2.$$

从上式和(1)中所得的关系式 $2a=b+c$ 得

$$(b-c)^2=0,\quad \therefore\quad b=c.$$

从而得 $\qquad a=b=c.$

因此，$\triangle ABC$ 是正三角形.

1730. 由给定位置和长度的线段 BC 和一点 A 所构成的三角形 ABC，有关系式

$$\sin B+\sin C=2\sin A.$$

(1) 将上面的三角形各角之间的关系化成边之间的关系.

(2) 点 A 在怎样的图形上? 并说明理由.

解 (1) 根据正弦定理，由已知等式得

$$b+c=2a.$$

(2) B、C 是定点，a 是定长，因此点 A 在以 B、C 为焦点，离焦点的距离的和是 $2a$ 的椭圆上.

1731. 从三角形 ABC 的顶点 A，向 BC 作垂线，若垂足 D 在 BC 边上，且

$$\triangle ABD:\triangle ACD=AB^2:AC^2,$$

那么这个三角形是怎样的三角形?

解 $\quad\triangle ABD:\triangle ACD=BD:CD.$

从上式和已知条件得

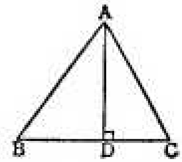
$$c\cos B:b\cos C=c^2:b^2.$$

$$\therefore\quad b\cos B=c\cos C.$$

根据余弦定理，将 $\cos B$、$\cos C$ 化成边之间的关系，得

$$b=c$$

或 $\quad a^2=b^2+c^2.$



因此，这个三角形是 $AB=AC$ 的等腰三角形，或是 $\angle A$ 为直角的直角三角形.

1732. 设三角形的三个角是 α、β、γ. 若 $\sin\alpha\cdot x^2+2\sin\beta\cdot x+\sin\gamma=0$ 有重根，那么这个三角形的三边之间有怎样的关系?

解 设三个角 α、β、γ 的对边的长分别是 a、b、c，由正弦定理得

$$\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=a:b:c.$$

因此，所给的方程可化成

$$ax^2+2bx+c=0.$$

当这个方程有重根时，由判别式等于 0 得

$$b^2-ac=0.$$

这就是说，三边之间有 $b^2=ac$ 的关系.

1733. 在三角形 ABC 中，若下面的关系成立，那么这个三角形是怎样的三角形?

(1) $\cos(B-C)+\cos A=2\sin^2 A$;

(2) $a=(b+c)\sin\dfrac{A}{2}$.

解 (1) $\cos A=\cos[180^\circ-(B+C)]$

$$=-\cos(B+C).$$

因此

$$\cos(B-C)-\cos(B+C)=2\sin^2 A,$$

$$2\sin B\sin C=2\sin^2 A.$$

所以由正弦定理得

$$bc=a^2,$$

即三角形的三边 b、a、c 成等比数列.

(2) 用正弦定理将所给的式子变形，得

$$\sin A=(\sin B+\sin C)\sin\frac{A}{2},$$

$$\sin A-2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}=0,$$

$$\sin A-2\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}=0,$$

$$\sin A-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=0,$$

$$\sin A-\sin A\cos\frac{B-C}{2}=0,$$

$$\therefore\quad \sin A\left(\cos\frac{B-C}{2}-1\right)=0.$$

因为 $\sin A\neq 0$，所以

$$\cos\frac{B-C}{2}=1.$$

从而得　　$B=C$.

因此，这个三角形是 $b=c$ 的等腰三角形.

1734. 在三角形 ABC 中，若

$$a\cos A+b\cos B=c\cos C,$$

考察这个三角形的形状.

解　由正弦定理得

$$\sin A\cos A+\sin B\cos B-\sin C\cos C=0,$$

$$\sin 2A+\sin 2B-2\sin C\cos C=0,$$

$$2\sin(A+B)\cos(A-B)-2\sin C\cos C=0,$$

$$2\sin C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]=0,$$

$$4\sin C\cos A\cos(-B)=0.$$

$$\therefore\quad \cos A\cos B=0.$$

$$\therefore\quad A=90^\circ\quad 或\quad B=90^\circ.$$

因此这个三角形是 A 或 B 为直角的直角三角形.

1735. 在三角形 ABC 中，若有关系

$$(s-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=s\operatorname{tg}\frac{B}{2},$$

考察这个三角形的形状.

解　将所给的关系式变形，得

$$(s-b)\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$$

$$=s\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}.$$

化简得　　$s-b=s-a$.

$$\therefore\quad a=b.$$

因此三角形 ABC 是 $a=b$ 的等腰三角形.

1736. 在三角形 ABC 中，若下面的关系成立，考察这个三角形的形状.

(1) $\sin^2 A=\sin(B+C)\sin(B-C)$;

(2) $\cos A-\cos B=\sin C$.

解　(1) 将所给的式子变形，得

$$\sin^2 A-\sin A\sin(B-C)=0,$$

$$\sin A[\sin A-\sin(B-C)]=0.$$

因为 $\sin A\neq 0$，所以

$$\sin A=\sin(B-C).$$

$$\therefore\quad A=B-C \qquad ①$$

或　　$A=180^\circ-(B-C)$. 　　②

从 ① 得　　$A+C=B=90^\circ$.

同时从 ② 不能求得合适的值，所以这个三角形是以 B 为直角的直角三角形.

(2) 将所给的式子变形，得

$$-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=0,$$

$$\sin\frac{180^\circ-C}{2}\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=0,$$

$$\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=0,$$

$$\cos\frac{C}{2}\left[\sin\frac{A-B}{2}-\sin\left(\frac{A+B}{2}-90^\circ\right)\right]$$

$$=0.$$

又因为 $0^\circ<C<180^\circ$，$\cos\frac{C}{2}\neq 0$，所以得

$$\sin\frac{A-B}{2}=\sin\left(\frac{A+B}{2}-90^\circ\right).$$

$$\therefore\quad \frac{A-B}{2}=\frac{A+B}{2}-90^\circ \qquad ③$$

或

$$\frac{A-B}{2}=180^\circ-\left(\frac{A+B}{2}-90^\circ\right). \qquad ④$$

从 ③ 得　$2B=180^\circ$，$\therefore$　$B=90^\circ$.

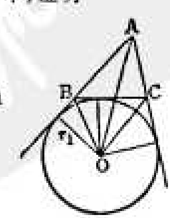
从 ④ 不能得到合适的值．因此这个三角形是以 B 为直角的直角三角形.

5．三角形的外接圆、内切圆、旁切圆

注　三角形 ABC 的外接圆半径用 R 表示，内切圆、旁切圆半径分别用 r、r_1、r_2、r_3 表示，面积用 Δ 表示．又，$a+b+c$ 用 $2s$ 表示，即 $a+b+c=2s$.

1737. 在三角形 ABC 中，证明

$$r_1+r_2=c\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$



解　$\triangle ABO=\frac{1}{2}ABr_1$

$$=\frac{1}{2}cr_1,$$

$$\triangle ACO=\frac{1}{2}br_1,$$

$$\triangle BCO = \frac{1}{2}ar_1,$$

$$\triangle ABC = \triangle ABO + \triangle ACO - \triangle BCO$$
$$= \frac{1}{2}r_1(b+c-a) = (s-a)r_1.$$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 的面积

$$\varDelta = (s-a)r_1.$$

$$\therefore \quad r_1 = \frac{\varDelta}{s-a}.$$

同样 $\quad r_2 = \dfrac{\varDelta}{s-b}.$

因此

$$r_1 + r_2 = \frac{\varDelta}{s-a} + \frac{\varDelta}{s-b}$$
$$= \frac{\varDelta(2s-a-b)}{(s-a)(s-b)} = \frac{c\varDelta}{(s-a)(s-b)}$$
$$= \frac{c\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{(s-a)(s-b)}$$
$$= c\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}} = c\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

1738. 在三角形 ABC 中，证明

$$\sqrt{rr_1r_2r_3} = \varDelta.$$

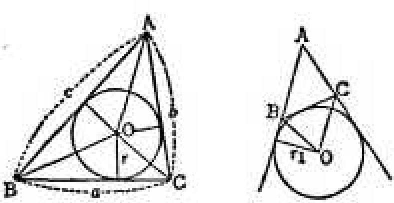
解 $\quad \varDelta = \triangle ABC = rs.$

又 $\quad \triangle ABC = r_1(s-a) = r_2(s-b)$
$$= r_3(s-c).$$

因此

$$r = \frac{\varDelta}{s},\ r_1 = \frac{\varDelta}{s-a},\ r_2 = \frac{\varDelta}{s-b},\ r_3 = \frac{\varDelta}{s-c},$$

$$\sqrt{rr_1r_2r_3} = \sqrt{\frac{\varDelta}{s}\cdot\frac{\varDelta}{s-a}\cdot\frac{\varDelta}{s-b}\cdot\frac{\varDelta}{s-c}}$$
$$= \frac{\varDelta^2}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$
$$= \frac{\varDelta^2}{\varDelta} = \varDelta.$$



1739. 在三角形 ABC 中，证明

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = \frac{rr_1}{r_2r_3}.$$

解 $\quad \dfrac{rr_1}{r_2r_3} = \dfrac{\dfrac{\varDelta^2}{s(s-a)}}{\dfrac{\varDelta^2}{(s-b)(s-c)}}$

$$= \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} = \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}.$$

1740. 在三角形 ABC 中，证明

$$3\sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r}} - \sqrt{\frac{rr_2r_3}{r_1}} - \sqrt{\frac{rr_3r_1}{r_2}}$$
$$-\sqrt{\frac{rr_1r_2}{r_3}} = 2s.$$

解

$$\text{左边} = \sqrt{rr_1r_2r_3}\left(\frac{3}{r} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)$$
$$= \varDelta\left(\frac{3}{r} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)$$
$$= \frac{3\varDelta}{r} - \frac{\varDelta}{r_1} - \frac{\varDelta}{r_2} - \frac{\varDelta}{r_3}$$
$$= 3s - (s-a) - (s-b) - (s-c)$$
$$= a+b+c = 2s.$$

1741. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{r_1 - r}{a} + \frac{r_2 - r}{b} = \frac{c}{r_3}.$$

解 $\quad r_1 = \dfrac{\varDelta}{s-a},\quad r = \dfrac{\varDelta}{s}.$

因此 $\quad r_1 - r = \dfrac{\varDelta}{s-a} - \dfrac{\varDelta}{s} = \dfrac{a\varDelta}{s(s-a)},$

$$\frac{r_1 - r}{a} = \frac{\varDelta}{s(s-a)}.$$

同样 $\quad \dfrac{r_2 - r}{b} = \dfrac{\varDelta}{s(s-b)}.$

$\therefore \quad \dfrac{r_1 - r}{a} + \dfrac{r_2 - r}{b}$

$$= \frac{\varDelta}{s(s-a)} + \frac{\varDelta}{s(s-b)}$$
$$= \frac{\varDelta c}{s(s-a)(s-b)}$$
$$= \frac{\varDelta c(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \frac{\varDelta c(s-c)}{\varDelta^2} = \frac{c(s-c)}{\varDelta} = \frac{c}{r_3}.$$

1742. 在三角形 ABC 中，证明 $r_1r_2 + rr_3 = ab.$

解　$$r_1r_2+rr_3=\frac{\Delta^2}{(s-a)(s-b)}+\frac{\Delta^2}{s(s-c)}$$
$$=\frac{\Delta^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\times[s(s-c)+(s-a)(s-b)]$$
$$=s(s-c)+(s-a)(s-b)$$
$$=s^2-cs+s^2-as-bs+ab$$
$$=2s^2-s(a+b+c)+ab$$
$$=2s^2-2s^2+ab=ab.$$

1743. 在三角形 ABC 中，证明
$$r_1r_2r_3=r^3\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}.$$

解　$$r_1r_2r_3=\frac{\Delta^3}{(s-a)(s-b)(s-c)},$$
$$r^3=\frac{\Delta^3}{s^3}.$$
因此　$$\frac{r_1r_2r_3}{r^3}=\frac{s^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$
又　$$\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}$$
$$=\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}\times\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}\times\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}$$
$$=\frac{s^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$
所以　$$\frac{r_1r_2r_3}{r^3}=\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2},$$
$$r_1r_2r_3=r^3\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}.$$

1744. 在三角形 ABC 中，证明
$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}.$$

解　$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$$
$$=\frac{s-a}{\Delta}+\frac{s-b}{\Delta}+\frac{s-c}{\Delta}$$
$$=\frac{3s-(a+b+c)}{\Delta}=\frac{s}{\Delta}=\frac{1}{r}.$$

别解　所给式子的左边
$$=\frac{r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2}{r_1r_2r_3}$$
$$=\frac{s^2}{rs^2}=\frac{1}{r}.$$

1745. 在三角形 ABC 中，证明
$$a=\frac{r_1(r_2+r_3)}{\sqrt{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}}.$$

解　因为　$$r_1=\frac{\Delta}{s-a},$$
并且　$$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=s^2,$$
所以　所给式子的右边
$$=\frac{\frac{\Delta}{s-a}\left(\frac{\Delta}{s-b}+\frac{\Delta}{s-c}\right)}{s}$$
$$=\frac{\Delta}{s(s-a)}\cdot\frac{\Delta(s-c)+\Delta(s-b)}{(s-b)(s-c)}$$
$$=\frac{\Delta^2(2s-b-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\frac{\Delta^2 a}{\Delta^2}=a.$$

1746. 在三角形 ABC 中，证明
$$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=s^2.$$

解　$$r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2$$
$$=\frac{\Delta^2}{(s-b)(s-c)}+\frac{\Delta^2}{(s-c)(s-a)}+\frac{\Delta^2}{(s-a)(s-b)}$$
$$=\frac{\Delta^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}[s(s-c)+s(s-b)+s(s-c)]$$
$$=s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)$$
$$=3s^2-s(a+b+c)$$
$$=3s^2-2s^2=s^2.$$

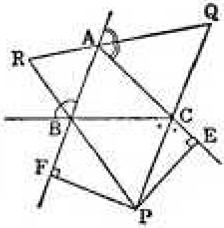
1747. 证明三角形 ABC 的面积
$$\Delta=\frac{r_1r_2r_3}{\sqrt{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}}.$$

解　因为　$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=s^2$，
所以　右边$$=\frac{\Delta}{s-a}\cdot\frac{\Delta}{s-b}\cdot\frac{\Delta}{s-c}\cdot\frac{1}{s}$$
$$=\frac{\Delta^3}{\Delta^2}=\Delta=\text{左边}.$$

1748. 用三角形各外角平分线作一个新的三角形 PQR，证明这个新三角形各边的长是 $4R\cos\dfrac{A}{2}$、$4R\cos\dfrac{B}{2}$ 及 $4R\cos\dfrac{C}{2}$.

解　新三角形的顶点 P、Q、R 是原三角形旁切圆的圆心．现根据下图，得
$$PC=CE\sec\angle PCE=(s-b)\csc\frac{C}{2}.$$
同样，从点 C 到与 BC 及 BA 延长线相切的

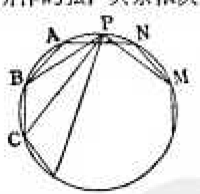
旁切圆圆心的距离是 $(s-a)\csc\frac{C}{2}$. 因此，这两个距离的和是



$$(2s-b-a)\csc\frac{C}{2}$$
$$=c\csc\frac{C}{2}$$
$$=2R\sin C\csc\frac{C}{2}$$
$$=4R\cos\frac{C}{2}.$$

这是新三角形过 C 点的一边的长. 对于其他两条边的长也能求得同样的式子.

1749. 画一个圆的内接正 n 边形，从圆周上的任意一点到各顶点作弦，并分别用 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 来表示. 设 c_1 是到最近顶点所作的弦，c_2 是到次近顶点所作的弦，其余依次类推，证明 $c_1c_2+c_2c_3+\cdots+c_{n-1}c_n-c_nc_1$ 的值与作各条弦的起始点的位置无关.



解 设 A、B、C、$\cdots$、M、N 是正多边形的各顶点，$\alpha=\frac{\pi}{n}$，P 是圆周上的一点，从这个点开始作弦，于是

$$\frac{1}{2}c_1c_2\sin\alpha=\text{三角形 } PAB \text{ 的面积},$$
$$\frac{1}{2}c_2c_3\sin\alpha=\text{三角形 } PBC \text{ 的面积},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2}c_{n-1}c_n\sin\alpha=\text{三角形 } PMN \text{ 的面积}.$$

因此 $\frac{1}{2}(c_1c_2+c_2c_3+\cdots+c_{n-1}c_n)\sin\alpha$ $=$三角形 PAB、PBC、$\cdots$、PMN 的面积和.

又 $\frac{1}{2}c_nc_1\sin\alpha=$三角形 PNA 的面积.

因此 $\frac{1}{2}(c_1c_2+c_2c_3+\cdots+c_{n-1}c_n-c_nc_1)\sin\alpha$ $=$正多边形的面积，

即 $c_1c_2+c_2c_3+\cdots+c_{n-1}c_n-c_nc_1$ $=\frac{2}{\sin\alpha}\times$(正多边形的面积).

这个结果不管圆周上 P 点的位置如何都是相等的.

1750. 设三角形 ABC 的面积是 S，外接圆半径是 R，证明:

(1) $S=\frac{abc}{4R}$;

(2) $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

解 (1) 因为

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,\ \sin C=\frac{c}{2R},$$

所以 $$S=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}.$$

(2) 由正弦定理得

$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$.

将这些代入(1)所得的结果，就得

$$S=\frac{1}{4R}\cdot 2R\sin A\cdot 2R\sin B\cdot 2R\sin C$$
$$=2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

注 从(1)和海伦公式可得用 a、b、c 表示 R 的式子.

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

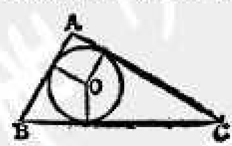
1751. (1) 如果 θ 是 0° 到 180° 之间的角，并且 $-\sqrt{3}\leqq\operatorname{tg}\theta\leqq 1$，那么 θ 的范围是多少?

(2) 在三角形 ABC 中，$AC=1\,\text{cm}$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=30^\circ$，求内切圆的半径.

解 (1) 因为 $\operatorname{tg}\theta=1$ 时 $\theta=45^\circ$，所以 $0\leqq\operatorname{tg}\theta\leqq 1$ 时 $0^\circ\leqq\theta\leqq 45^\circ$. 又因为

$$\operatorname{tg}\theta=-\sqrt{3}$$

时 $\theta=120^\circ$，所以 $-\sqrt{3}\leqq\operatorname{tg}\theta\leqq 0$ 时 $120^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$. 因此 $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ 时，如果 $-\sqrt{3}\leqq\operatorname{tg}\theta\leqq 1$，那么 θ 的范围是 $0^\circ\leqq\theta\leqq 45^\circ$ 和 $120^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$.



(2) 设 $AB=x$，因为 $BC=2x$，所以

$$x^2+1=4x^2.$$

由此得 $$x=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

设 $\triangle ABC$ 内切圆半径是 r，因为

$$\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)=\frac{1}{2}AB\cdot AC,$$

所以 $r\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+1\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\therefore\quad r=\frac{\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{6}$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

1752. 设等腰三角形的腰长是 10 cm，它的顶角是 θ，求使 $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$ 最大的这个三角形的外接圆半径。

解 设 $y=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$,

于是 $y=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)$
$$=2(\sin 60^\circ\cos\theta+\cos 60^\circ\sin\theta)$$
$$=2\sin(\theta+60^\circ).$$

因此在 $0^\circ<\theta<180^\circ$ 的范围内，当 $\theta+60^\circ=90^\circ$ 时，y 的值最大．也就是说，使 y 值最大的 θ 值是 $\theta=30^\circ$。这时，等腰三角形的底角是 75°。因为

$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

设三角形外接圆半径是 R，那么由正弦定理可得

$$2R=\frac{10}{\sin 75^\circ}=10(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

所以 $R=5(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\mathrm{cm})$.

1753. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，证明 $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{c-a}{b}$.

解 $$\frac{c-a}{b}=\frac{\sin C-\sin A}{\sin B}.$$

因为 $C=90^\circ$，所以

$$\sin C=1,\ \sin A=\cos B=1-2\sin^2\frac{B}{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sin C-\sin A}{\sin B}=\frac{1-\cos B}{\sin B}$$
$$=\frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}.$$

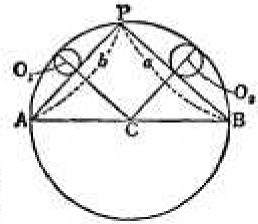
1754. 设 P 是半圆周 APB 上任意一点．现作两个圆，分别相切于 AP、BP 的中点，并与半圆周相切，证明以这两圆半径为长和宽的矩形的面积，等于以三角形 APB 内切圆半径 r 为边长的正方形面积的 $\frac{1}{8}$.

解 设 $AP=b$，$BP=a$，$AB=c$，于是和半圆周及 AP 中点相切的圆的直径是

$$\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\sin\angle PAB,$$

即 $\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\times\frac{a}{c}$,

$\frac{c-a}{2}$.



因此，这个圆的半径是 $\frac{c-a}{4}$．同样，和半圆周及 BP 中点相切的圆的半径是 $\frac{c-b}{4}$．因此，只要证明 $\frac{(c-a)(c-b)}{16}=\frac{r^2}{8}$，即 $\frac{(c-a)(c-b)}{2}=r^2$ 就可以了．因为

$$r=\frac{S}{s}=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2}$$
$$=\frac{a+b-c}{2},$$

(这是由于 $c^2=a^2+b^2$)所以

$$r^2=\frac{(a+b-c)^2}{4}=\frac{2c^2+2ab-2c(a+b)}{4}$$
$$=\frac{(c-a)(c-b)}{2}.$$

1755. 在半径是 a，弦为 $2c$ 的扇形里，画一个半径是 r 的内切圆，证明 $\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$.

解 设 θ 是扇形的圆心角，于是

$$\frac{r}{a-r}=\sin\frac{\theta}{2}.$$

又因为 $$2c=2a\sin\frac{\theta}{2}.$$

所以 $$\frac{r}{a-r}=\frac{c}{a},\quad \frac{a-r}{r}=\frac{a}{c}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

1756. 在边长为 a 的正六边形内作内切圆，再在这个圆内作一个新的内接正六边形，这样继续作下去，一直作到有 n 个正六边形．证明这 n 个正六边形的面积的总和是

$$6\sqrt{3}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]a^2.$$

解 因为正六边形可以分成六个等边三角

形,所以第一个正六边形的面积是 $\frac{6\sqrt{3}a^2}{4}$.

第一个圆的半径是 $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}30^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2}$,它等于第二个正六边形的边长,所以第二个正六边形的面积是 $\frac{6\sqrt{3}a^2}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. 用这个方法,可知各正六边形的面积成公比是 $\frac{3}{4}$ 的等比数列. 因此,它们的和是

$$\frac{\frac{6\sqrt{3}a^2}{4}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{4}}=6\sqrt{3}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]a^2.$$

1757. 如果 $A+B+C=180^\circ$, 证明

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

解 $\quad A+B+C=180^\circ$,

因此 $\quad \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ$.

又因为 $\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=0$,

所以

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}-\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=0.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

1758. 如果 O 是三角形 ABC 内切圆的圆心, D、E、F 分别是内切圆与 BC、CA、AB 的切点,证明 $OA\cdot OB\cdot OC\cdot(AF+BD+CE)=4R\cdot AF\cdot BD\cdot CE$.

解 $\quad OA=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}},\quad OB=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}},$

$$OC=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}.$$

$$AF=r\operatorname{ctg}\frac{A}{2},\ BD=r\operatorname{ctg}\frac{B}{2},$$

$$CE=r\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

因此,只要证明

$$\left(\frac{r^4}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\right)\times\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=4Rr^3\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

就可以了. 根据上题,上式的左边可化成

$$\frac{r^4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}},$$

因此,又只要证明

$$4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=r$$

就可以了.

上面这个式子的左边

$$=4R\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}=\frac{4RS^2}{sabc}=\frac{S}{s}=r.$$

因此,所要证明的等式成立.

1759. 用三角形各外角的平分线作成第二个三角形,再由第二个三角形用同样的方法作第三个三角形. 这样作下去,第 n 个三角形的各角是多少?

解 对应于第一个三角形角 C 的第二个三角形的角是 $\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$. 同样,对应于这个角的第三个三角形的角是

$$\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right),$$

即 $\quad \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{C}{4}$.

于是第 n 个三角形对应的角是

$$\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-1}}\right]+\frac{(-1)^{n-1}C}{2^{n-1}},\quad (n=2,3,\cdots)$$

即　$\dfrac{\dfrac{\pi}{2}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{\left(1+\dfrac{1}{2}\right)}+\dfrac{(-1)^{n-1}C}{2^{n-1}}$,

即　$\dfrac{\pi}{3}\left[1-\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right]+\dfrac{(-1)^{n-1}C}{2^{n-1}}$.

对于其他两个角，也能得到同样的式子.

1760. 从三角形的外心向各边作垂线 l、m、n，证明 $4\left(\dfrac{a}{l}+\dfrac{b}{m}+\dfrac{c}{n}\right)=\dfrac{abc}{lmn}$.

解　因为

$$l=R\cos A,\ m=R\cos B,$$
$$n=R\cos C,$$

所以只要证明

$$\frac{4a}{R\cos A}+\frac{4b}{R\cos B}+\frac{4c}{R\cos C}$$
$$=\frac{abc}{R^3\cos A\cos B\cos C}$$

就可以了．现在

$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$,

因此上式变成

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C.$$

由于 $A+B+C=180°$，所以从 $\operatorname{tg}(A+B+C)$ 的展开公式就容易得到上式．于是，本题得证.

1761. 已知底、高和两底角的差，给出解三角形 ABC 的方法．这里底角都是锐角.

解　设 a 是已知的底，$AD=h$ 是已知的高．于是

$$\operatorname{ctg}B=\frac{BD}{h},\ \operatorname{ctg}C=\frac{CD}{h}.$$

因此

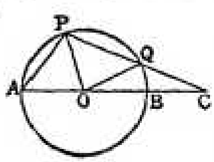
$$\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\frac{BD+CD}{h}=\frac{a}{h}.\qquad ①$$

又因为 $B-C$ 是已知的，所以 $\operatorname{ctg}(B-C)$ 的值也可以知道．设这个值是 m，于是

$$\frac{1+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C}{\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C}=m.\qquad ②$$

从①和②可以求出 $\operatorname{ctg}C$ 和 $\operatorname{ctg}B$，从而可以解出三角形 ABC.

1762. AB 是半径为 a 的圆 O 的直径，在它的延长线上取一点 C，使 $OB=BC$，再从 C 引圆 O 的割线 CQP，设 $\angle AOP=2\alpha$，$\angle BOQ=2\beta$. 解答下列问题.

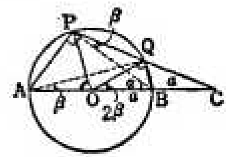


(1) 用 a 及 α、β 表示弦 AP、BQ 的长;

(2) 证明 $CP=\dfrac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$;

(3) 证明 $\operatorname{tg}\alpha=3\operatorname{tg}\beta$.

解　(1) $\angle ABP=\dfrac{1}{2}\angle AOP=\alpha$,



$\angle BAQ$

$=\dfrac{1}{2}\angle BOQ=\beta$,

$\angle APB$

$=\angle AQB=\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore\quad AP=AB\sin\angle ABP=2a\sin\alpha$.

又　　$BQ=AB\sin\beta=2a\sin\beta$.

(2) $\angle BPC=\angle BAQ=\beta$,

$\angle PBC=\pi-\angle ABP=\pi-\alpha$.

在 $\triangle PBC$ 中，运用正弦定理得

$$\frac{CP}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{BC}{\sin\beta}.$$
$$\therefore\quad\frac{CP}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\beta}.$$
$$\therefore\quad CP=a\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.\qquad ①$$

(3) $\angle APC=\angle APB+\angle BPC=\dfrac{\pi}{2}+\beta$,

$\angle CAP=\angle APB-\angle ABP=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$.

在三角形 CAP 中，运用正弦定理得

$$\frac{CP}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{AC}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}.$$
$$\therefore\quad CP=\frac{3a\cos\alpha}{\cos\beta}.\qquad ②$$

从①、②得

$$\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{3a\cos\alpha}{\cos\beta}.$$
$$\therefore\quad\operatorname{tg}\alpha=3\operatorname{tg}\beta.$$

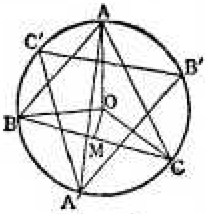
1763. 在半径为1的圆里有一个内接三角形 ABC．设弧 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$ 的中点分别是 A'、B'、C'，并作三角形 $A'B'C'$．再设三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的周长分别是 l 和 l'.

(1) 用 A、B、C 的三角函数表示 l 和 l';

(2) 如果 $C=60°$，比较 l 和 l' 的大小.

解 设圆心是O，BC的中点是M．于是

$$BC=2BM=2OB\sin\angle BOM=2\sin A.$$



同样 $CA=2\sin B$,

$AB=2\sin C$.

所以

$$l=2(\sin A+\sin B+\sin C).$$

$$A'=\angle AA'B'+\angle AA'C'=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C.$$

同样 $B'=\frac{1}{2}(C+A)$, $C'=\frac{1}{2}(A+B)$.

所以

$$l'=2\left(\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{B+C}{2}+\sin\frac{C+A}{2}\right).$$

(2) $C=60°$ 时

$$l=2\left(\sin A+\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sqrt{3}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$l'=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(90°-\frac{A}{2}\right)+\sin\left(90°-\frac{B}{2}\right)\right]=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{A-B}{4}\right).$$

因为 $\cos\frac{A-B}{2}\leq\cos\frac{A-B}{4}$,

所以 $l\leq l'$.

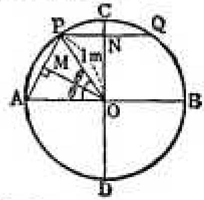
1764. 圆O的半径为1 m，两条直径AB、CD互相垂直．在弧$\overset{\frown}{AC}$上任意取一点P，通过P作AB的平行线，和圆周交于Q点，设$x=\sin\frac{1}{2}\angle AOP$.

(1) 用x表示线段AP的长．

(2) 用x表示线段PQ的长．

(3) $\angle AOP$是多少度时，线段AP、PQ、QB的长度的和最大？最大值是多少？

解 如右图所示，设AP的中点是M，$\frac{1}{2}\angle AOP=\theta$，于是



$$AP=2PM=2OP\sin\theta=2\sin\theta.$$

$$\therefore\quad AP=2x.$$

(2) $PQ=2PN=2OP\sin\angle POC$

$$=2\sin(90°-2\theta)=2\cos2\theta=2(1-2\sin^2\theta)=2-4\sin^2\theta.$$

$$\therefore\quad PQ=2-4x^2.$$

(3) 因为$QB=AP$，设$AP+PQ+QB=l$，那么

$$l=2x+(2-4x^2)+2x=-4x^2+4x+2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3.$$

又因为$0°\leq\theta\leq45°$，所以

$$0\leq\sin\theta\leq\frac{\sqrt{2}}{2},$$

即 $$0\leq x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因此$x=\frac{1}{2}$时l取得最大值，这个值是3.

$\sin\theta=\frac{1}{2}$时$\theta=30°$．所以$\angle AOP=60°$.

$\angle AOP=60°$时，最大值是3 m.

1765. 已知三角形ABC的边a、角B及a上的高h和差$b-h=l$，解这个三角形．

解
$$b-h=\frac{a\sin B}{\sin A}-b\sin C=\frac{a\sin B}{\sin A}-\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}=\frac{a\sin B(1-\sin C)}{\sin(B+C)}=l.$$

由此求得C．从而就可以求出这个三角形的其他元素．

1766. 设$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，$AB=DE$，并且它们的外接圆半径和内切圆半径也分别相等，这两个三角形是否全等，为什么？

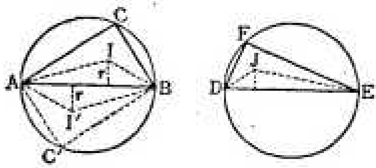
解 设$\triangle ABC$、$\triangle DEF$的外接圆半径是

R，于是

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{DE}{\sin F}=2R.$$

因为 $AB=DE$，所以

$$\sin C=\sin F.$$



$$\therefore\quad \angle C=\angle F$$

或　　　　$$\angle C+\angle F=180^\circ.$$

(i) 在 $\angle C=\angle F$ 的情况下，设 $\triangle ABC$ 的内心是 I，那么

$$\angle AIB=90^\circ+\frac{\angle C}{2}.$$

设 $\triangle DEF$ 的内心是 J，那么

$$\angle DJE=90^\circ+\frac{\angle F}{2}.$$

$$\therefore\quad \angle AIB=\angle DJE.$$

由题意知道，如果设 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 的内切圆的半径是 r，那么 $\triangle IAB$ 中从 I 到对边的高和 $\triangle JDE$ 中从 J 到对边的高都是 r。因此

$$\triangle IAB\cong\triangle JDE.$$

从而得　　$$\triangle ABC\cong\triangle DEF.$$

(ii) 在 $\angle C+\angle F=180^\circ$ 的情况下，设 $\triangle ABC$ 的内心是 I'，那么

$$\angle AI'B=90^\circ+\frac{\angle C}{2}=180^\circ-\frac{\angle F}{2}.$$

由此可见，如果 $\angle C=\angle F=90^\circ$，那么两三角形全等，否则就不全等，总起来说，不能断定这两个三角形是否全等。

1767. 证明

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}.$$

解　因为 $r=\frac{\Delta}{s}$，$r_1=\frac{\Delta}{s-a}$ 等，所以

$$\text{左边}=\frac{s^2}{\Delta^2}+\frac{(s-a)^2}{\Delta^2}+\frac{(s-b)^2}{\Delta^2}+\frac{(s-c)^2}{\Delta^2}$$

$$=\frac{4s^2-2s(a+b+c)+a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}.$$

1768. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{ab-r_1r_2}{r_3}=\frac{bc-r_2r_3}{r_1}=\frac{ca-r_3r_1}{r_2}=r.$$

解

$$\frac{ab-r_1r_2}{r_3}=\left(ab-\frac{\Delta}{s-a}\cdot\frac{\Delta}{s-b}\right)\frac{s-c}{\Delta}$$

$$=[ab-s(s-c)]\frac{s-c}{\Delta}$$

$$=\left[ab-\frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)\right]\frac{s-c}{\Delta}$$

$$=[c^2-(a-b)^2]\frac{s-c}{4\Delta}$$

$$=\frac{(c+a-b)(c-a+b)(s-c)}{4\Delta}$$

$$=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}=\frac{\Delta^2}{\Delta s}=r.$$

同样 $\frac{bc-r_2r_3}{r_1}$，$\frac{ca-r_3r_1}{r_2}$ 也都等于 r，所以本题得证。

1769. 在三角形 ABC 中，证明

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{r(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}{r_1r_2r_3}.$$

解　$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}=\frac{\frac{\Delta}{r_2}\times\frac{\Delta}{r_3}}{\frac{\Delta}{r}\times\frac{\Delta}{r_1}}$$

$$=\frac{rr_1}{r_2r_3}=\frac{rr_1^2}{r_1r_2r_3}.$$

同样 $\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}=\frac{rr_2^2}{r_1r_2r_3}$，$\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{rr_3^2}{r_1r_2r_3}$。

因此　$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}$$

$$=\frac{r(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}{r_1r_2r_3}.$$

1770. 设三角形的内切圆面积是 A，旁切圆的面积分别是 A_1、A_2、A_3，证明

$$\frac{1}{\sqrt{A}}=\frac{1}{\sqrt{A_1}}+\frac{1}{\sqrt{A_2}}+\frac{1}{\sqrt{A_3}}.$$

解　$$\frac{1}{\sqrt{A}}=\frac{1}{\sqrt{\pi r^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{s}{S}.$$

同样　$$\frac{1}{\sqrt{A_1}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{s-a}{S},$$

$$\frac{1}{\sqrt{A_2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{s-b}{S},$$

$$\frac{1}{\sqrt{A_3}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{s-c}{S}.$$

因此 $\frac{1}{\sqrt{\Delta_1}}+\frac{1}{\sqrt{\Delta_2}}+\frac{1}{\sqrt{\Delta_3}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{s-a}{S}+\frac{s-b}{S}+\frac{s-c}{S}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{3s-a-b-c}{S}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{s}{S}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}.$$

1771． 如果 $r_1=r_2+r_3+r$，证明三角形中有一个角是直角.

解 将和 r_1、r_2、r_3 及 r 分别相等的 $\frac{\Delta}{s-a}$、$\frac{\Delta}{s-b}$、$\frac{\Delta}{s-c}$ 及 $\frac{\Delta}{s}$ 代入已知等式，然后两边同除以 Δ，得

$$\frac{1}{s-a}=\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}+\frac{1}{s}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{s-a}-\frac{1}{s}=\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{s(s-a)}=\frac{2s-b-c}{(s-b)(s-c)}.$$

进一步，由 $2s-b-c=a$ 得

$$s(s-a)=(s-b)(s-c).$$

$$\therefore\quad -as=-bs-cs+bc.$$

$$\therefore\quad (b+c-a)s=bc.$$

$$\therefore\quad (b+c-a)(a+b+c)=2bc.$$

$$\therefore\quad (b+c)^2-a^2=2bc.$$

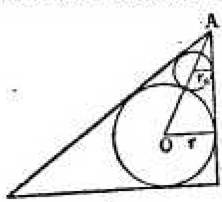
$$\therefore\quad b^2+c^2-a^2=0.$$

因此证得 $\angle A$ 是直角.

1772． 三角形内切圆半径是 r，在这个圆和角 A 的两条边之间再画一个内切圆，设半径是 r_a，证明

$$r_a=r\,\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}=r\,\frac{\left(\cos\frac{A}{4}-\sin\frac{A}{4}\right)^2}{\left(\cos\frac{A}{4}+\sin\frac{A}{4}\right)^2}.$$

解 图中小圆的圆心和两圆的切点都在直线 OA 上．因此



$$OA=r+r_a+r_a\csc\frac{A}{2}.$$

又

$$OA=r\csc\frac{A}{2},$$

所以 $r_a\left(1+\csc\frac{A}{2}\right)=r\left(\csc\frac{A}{2}-1\right)$.

从而

$$r_a=\frac{r\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)}{1+\sin\frac{A}{2}}=\frac{r\left(\cos\frac{A}{4}-\sin\frac{A}{4}\right)^2}{\left(\cos\frac{A}{4}+\sin\frac{A}{4}\right)^2}.$$

1773． 设三角形 ABC 的内切圆半径是 r，和这个圆及角 A 的两边相切的圆的半径是 r_a，和这个圆及角 B 的两边相切的圆的半径是 r_b，和这个圆及角 C 的两边相切的圆的半径是 r_c，证明

$$\sqrt{r_ar_b}+\sqrt{r_br_c}+\sqrt{r_cr_a}=r.$$

解

r_ar_b

$$=\frac{r^2\left(\cos\frac{A}{4}-\sin\frac{A}{4}\right)^2\left(\cos\frac{B}{4}-\sin\frac{B}{4}\right)^2}{\left(\cos\frac{A}{4}+\sin\frac{A}{4}\right)^2\left(\cos\frac{B}{4}+\sin\frac{B}{4}\right)^2}.$$

因此

$\sqrt{r_ar_b}$

$$=\frac{r\left(\cos\frac{A}{4}-\sin\frac{A}{4}\right)\left(\cos\frac{B}{4}-\sin\frac{B}{4}\right)}{\left(\cos\frac{A}{4}+\sin\frac{A}{4}\right)\left(\cos\frac{B}{4}+\sin\frac{B}{4}\right)}$$

$$=r\left(\cos\frac{A}{4}-\sin\frac{A}{4}\right)\left(\cos\frac{B}{4}-\sin\frac{B}{4}\right)$$

$$\times\left(\cos\frac{C}{4}+\sin\frac{C}{4}\right)$$

$$\div\left[\left(\cos\frac{A}{4}+\sin\frac{A}{4}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{B}{4}+\sin\frac{B}{4}\right)\left(\cos\frac{C}{4}+\sin\frac{C}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{r\cos\frac{A+\pi}{4}\cos\frac{B+\pi}{4}\cos\frac{C-\pi}{4}}{\cos\frac{A-\pi}{4}\cos\frac{B-\pi}{4}\cos\frac{C-\pi}{4}}$$

$$=\frac{r\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}.$$

对于 $\sqrt{r_br_c}$ 和 $\sqrt{r_cr_a}$ 也能得到同样的式子，把这三个式子相加，和就是 r.

1774． 连結三角形内切圆的三个切点，设所得三角形的三边分别是 a'、b'、c'，证明

$$\frac{a'b'c'}{abc}=\frac{r^2}{2R^2}.$$

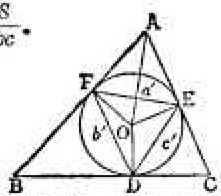
解 $a'=2r\sin\angle FOA=2r\cos\frac{A}{2}$.

同样 $b'=2r\sin\angle DOB=2r\cos\frac{B}{2}$,

$$c'=2r\sin\angle EOC=2r\cos\frac{C}{2}.$$

因此 $$a'b'c'=8r^3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=8r^3\frac{sS}{abc}.$$

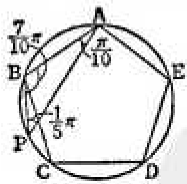


因此

$$\frac{a'b'c'}{abc}=\frac{8r^3S^2}{a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{8r^2}{(4R)^2}=\frac{r^2}{2R^2}.$$

1775. 从圆内接正五边形的一边 AB 的两端，向弧 BC 的中点 P 作两条直线 AP、BP，证明 AP 和 BP 的差等于圆的半径，它们的积等于半径的平方，它们的平方和等于半径平方的3倍。



解 如图所示，因为 $\angle APB$ 是正五边形一边所对的圆周角，所以它等于 $\frac{\pi}{5}$.

同样 $\angle BAP$ 等于 $\frac{\pi}{10}$. 因此 $\angle ABP$ 等于 $\frac{7\pi}{10}$. 设圆的半径是 r，于是

$$AB=2r\sin\frac{\pi}{5},\ PB=2r\sin\frac{\pi}{10},$$

$$PA=2r\sin\frac{3\pi}{10}.$$

因此

$$PA-PB=2r\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)=r,$$

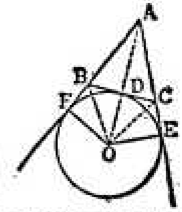
$$PA\cdot PB=\frac{4r^2\times(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{16}$$

$$=r^2,$$

$$PA^2+PB^2=4r^2\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\right]=3r^2.$$

1776. 求三角形旁切圆的半径 r_1、r_2、r_3.

解 设和三角形 ABC 的 BC 边及其他两边延长线相切于 D、E、F 的旁切圆的圆心是 O，连接 OD、OE、OF，则它们分别和 BC、AE、AF 交成直角，再设这个圆的半径是 r_1. 由于四边形 $OBAC$ 可分割成两个三角形 OAB 和 OAC，所以它的面积是 $\frac{c}{2}r_1+\frac{b}{2}r_1$. 同样这个四边形又可分割成两个三角形 OBC 和 ABC，所以它的面积又等于 $\frac{a}{2}r_1+S$. 因此



$$\frac{c}{2}r_1+\frac{b}{2}r_1=\frac{a}{2}r_1+S,$$

$$(c+b-a)\frac{r_1}{2}=S,$$

即 $$r_1(s-a)=S,$$

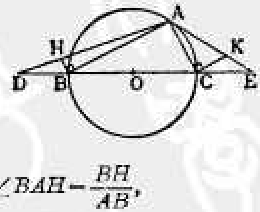
因此 $$r_1=\frac{S}{s-a}.$$

同理，如果设和 CA 及其他两边延长线相切的旁切圆的半径是 r_2，和 AB 及其他两边的延长线相切的旁切圆的半径是 r_3，那么

$$r_2=\frac{S}{s-b},\ r_3=\frac{S}{s-c}.$$

1777. BC 是半径为 r 的圆的直径，将它向两边延长，在延长线上取 $BD=CE$ 为定长，求从圆上一点 A 到这两条线段的张角之间的三角关系。

解 设
$BD=CE=mr$，
并且
$BH\perp AB$，
$CK\perp AC$，



于是 $$\operatorname{tg}\angle BAH=\frac{BH}{AB},$$

$$\operatorname{tg}\angle CAK=\frac{CK}{AC}.$$

因此

$$\operatorname{tg}\angle BAH\cdot\operatorname{tg}\angle CAK=\frac{BH}{AB}\cdot\frac{CK}{AC}.$$

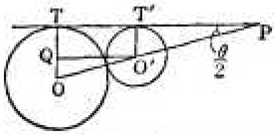
又因为 $$\frac{CK}{AB}=\frac{CE}{BE}=\frac{mr}{2r+mr},$$

$$\frac{BH}{AC}=\frac{BD}{CD}=\frac{mr}{2r+mr},$$

所以 $\operatorname{tg}\angle BAH\cdot\operatorname{tg}\angle CAK=\dfrac{m^2}{(2+m)^2}$,

这就是所要求的关系。

1778. 设两个外切的圆的半径分别是 R、$r(R>r)$，它们的公切线的夹角是 θ，试用 R、r 表示 $\sin\theta$ 的值。



解 设这两个外切的圆的圆心是 O、O'，一条公切线是 TT'，它和中心线 OO' 的交点是 P，于是

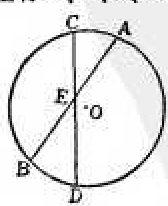
$$\angle OPT=\angle OO'Q=\frac{\theta}{2}.$$

在三角形 $O'QO$ 中

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{R-r}{R+r}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sin\theta&=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\&=2\times\frac{R-r}{R+r}\sqrt{1-\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^2}\\&=2\times\frac{R-r}{R+r}\times\frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}\\&=\frac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(R+r)^2}.\end{aligned}$$

1779. 如图所示，圆周上有 A、B、C、D 四点，弦 AB 和 CD 的交点是 E，$AE=6$，$BE=8$，$CE=4$，$DE=12$，$\angle AEC=60°$，求：(1) 弦 AC 的长，(2) 圆 O 的半径。



解 (1)

$$AC^2=AE^2+CE^2-2AE\cdot CE\cos 60°=6^2+4^2-2\times 6\times 4\times\frac{1}{2}=28.$$

$$\therefore\quad AC=\sqrt{28}=2\sqrt{7}.$$

(2) 用与(1)同样的方法，求得

$$BC=\sqrt{112}=4\sqrt{7}.$$

在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle ABC=\theta$，得

$$\cos\theta=\frac{14^2+112-28}{2\times 14\times 4\sqrt{7}}=\frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

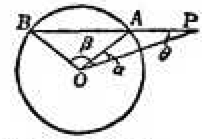
因为 $\angle AOC=2\theta$，设圆 O 的半径是 r，得

$$AC=2\sqrt{7}=2r\sin\theta,$$

所以 $$r=2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{14}{\sqrt{3}}.$$

1780. 已知圆 O 及圆外一点 P，从 P 点引圆的割线 PAB，证明不管 PAB 的位置如何，$\operatorname{tg}\dfrac{\angle AOP}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\angle BOP}{2}$ 是定值。

解 设圆的半径是 r，$PO=a$，$\angle AOP=\alpha$，$\angle BOP=\beta$，及 $\angle BPO=\theta$，于是



$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{a}=\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{\sin(\theta+\beta)}{a}=\frac{\sin\theta}{r}.$$

从上面第一个式子，得

$$r(\sin\theta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\theta)=a\sin\theta,$$

即

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{r\sin\alpha}{a-r\cos\alpha}. \qquad ①$$

同样，从后面一个式子得

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{r\sin\beta}{a-r\cos\beta}. \qquad ②$$

从①、②得

$$\sin\alpha(a-r\cos\beta)=\sin\beta(a-r\cos\alpha),$$

即

$$a(\sin\alpha-\sin\beta)=r(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta).$$

$$\therefore\quad 2a\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2r\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

因此 $$\frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{a}{r}.$$

根据比例的性质，进一步得

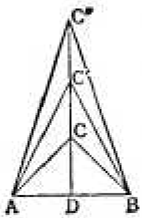
$$\frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}}=\frac{a-r}{a+r}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{a-r}{a+r},$$

即

$$\operatorname{tg}\frac{\angle AOP}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle BOP}{2}=\frac{a-r}{a+r}=\text{定值}.$$

1781. 有三个同底的等腰三角形，它们的公共底是 AB，高分别是 $CD=\frac{AB}{2}$，$C'D=AB$，$C''D=\frac{3}{2}AB$，证明顶角 ACB，$AC'B$，$AC''B$ 的和是 $180°$。



解

$$\operatorname{tg}(\angle ACD+\angle AC'D)=\frac{\operatorname{tg}\angle ACD+\operatorname{tg}\angle AC'D}{1-\operatorname{tg}\angle ACD\operatorname{tg}\angle AC'D}$$

$$=\frac{\frac{AD}{CD}+\frac{AD}{C'D}}{1-\frac{AD}{CD}\times\frac{AD}{C'D}}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

又　　$\operatorname{ctg}\angle AC''D=\frac{C''D}{AD}=3,$

因此

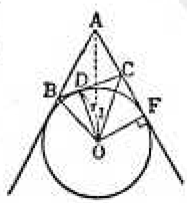
$$\operatorname{tg}(\angle ACD+\angle AC'D)=\operatorname{ctg}\angle AC''D.$$

从而

$$\angle ACD+\angle AC'D+\angle AC''D=90°,$$
$$\angle ACB+\angle AC'B+\angle AC''B=180°.$$

1782. 设三角形旁切圆的半径是 r_1，证明

$$r_1=\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\quad\text{或}\quad r_1=s\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$



解 如图所示，OB 是角 B 的外角平分线，OC 是角 C 的外角平分线，因此

$$BD=r_1\operatorname{ctg}\left(90°-\frac{B}{2}\right),$$

$$CD=r_1\operatorname{ctg}\left(90°-\frac{C}{2}\right).$$

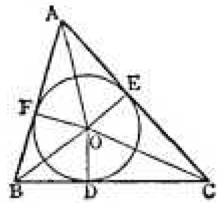
因此　　$r_1\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=a,$

即　$$r_1=\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}=\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

或　　$r_1=AF\operatorname{tg}\frac{A}{2}=s\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$

1783. 设三角形 ABC 内切圆的圆心是 O，r_a、r_b、r_c 分别是三角形 OBC、OCA、OAB 的内切圆的半径，证明

$$\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}=2\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{4}+\operatorname{ctg}\frac{B}{4}+\operatorname{ctg}\frac{C}{4}\right).$$



解　$\angle OBC=\frac{B}{2},$

$\angle OCB=\frac{C}{2}.$

$\therefore$　$BD=r_a\operatorname{ctg}\frac{B}{4},$

$DC=r_a\operatorname{ctg}\frac{C}{4}.$

因此　　$BC=r_a\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{4}+\operatorname{ctg}\frac{C}{4}\right).$

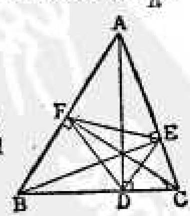
$$\therefore\quad\frac{a}{r_a}=\operatorname{ctg}\frac{B}{4}+\operatorname{ctg}\frac{C}{4}.$$

同样　　$\frac{b}{r_b}=\operatorname{ctg}\frac{C}{4}+\operatorname{ctg}\frac{A}{4},$

$$\frac{c}{r_c}=\operatorname{ctg}\frac{A}{4}+\operatorname{ctg}\frac{B}{4}.$$

将上面三个式子的两边相加，就得到所要证明的结果。

1784. 从锐角三角形 ABC 的各个顶点向对边作垂线，证明垂足三角形的周长是 $\frac{2S}{R}$。



解　$AE=c\cos A,$

$AF=b\cos A,$

$$EF^2=AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cos A$$
$$=c^2\cos^2A+b^2\cos^2A-2bc\cos^3A$$
$$=\cos^2A(c^2+b^2-2bc\cos A)=a^2\cos^2A.$$

$$\therefore\quad EF=a\cos A.$$

同样　　$FD=b\cos B$，$DE=c\cos C$.

即三角形的三边长分别是 $a\cos A$、$b\cos B$、$c\cos C$。因此周长是

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C$$
$$=4R\sin A\sin B\sin C$$
$$=\frac{4R\cdot 8S^3}{(abc)^2}=\frac{2S}{R}.$$

1785. 设三角形 ABC 的三个顶角 A、B、C 所对的旁切圆的圆心是 D、E、F，r'、r''、

r''' 分别是三角形 DBC、ECA、FAB 的外接圆的半径，证明 $r'r''r'''=2R^2r$。

解　$r'=\dfrac{BC}{2\sin\angle BDC}=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{B+C}{2}}$

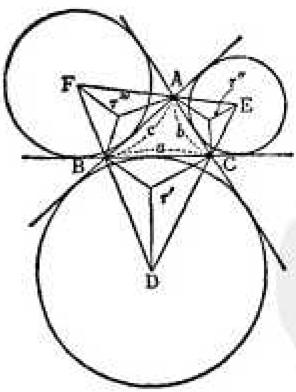
$$=\frac{a}{2\cos\dfrac{A}{2}}.$$

对于 r'' 及 r''' 也能得到同样的式子。因此

$$r'r''r'''=\frac{abc}{8\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$$

$$=\frac{a^2b^2c^2}{8sS}=\frac{16R^2S^2}{8sS}$$

$$=\frac{2R^2S}{s}=2R^2r.$$

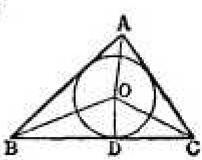


1786. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径是 R，内切圆的半径是 r，证明

$$r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

解　设 $\triangle ABC$ 的面积是 S，于是



$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=sr.$$

$$\therefore\quad r=\frac{S}{s}.$$

由海伦公式得

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

设 BC 边和内切圆的切点是 D，于是

$$BD=r\operatorname{ctg}\frac{B}{2},\quad CD=r\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

因此　$$r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=a.$$

$$\therefore\quad r=\frac{a}{\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}}=\frac{a\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{B+C}{2}}.$$

这里　$$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},$$

$$\therefore\quad \sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}.$$

又，根据正弦定理有

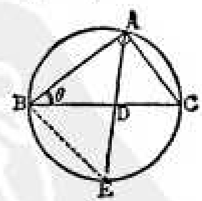
$$\frac{a}{\sin A}=2R,$$

$$\therefore\quad a=2R\sin A=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

因此，从上面 r 的表达式得

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

1787. 在三角形 ABC 中，$\angle A=90°$，$AB>AC$，$\angle A$ 的平分线和对边 BC 及三角形外接圆的交点分别是 D、E。设 $\angle B=\theta$，外接圆的半径是 R，试用 θ 和 R 表示 AE、DE 的长度。



解　$$\angle BAE=45°,$$

$$\angle BEA=\angle BCA=90°-\theta.$$

又，从　$$\angle EBC=\angle EAC=45°,$$

得　$$\angle ABE=\theta+45°.$$

在 $\triangle ABE$ 中，由正弦定理得

$$\frac{AE}{\sin(\theta+45°)}=\frac{BE}{\sin 45°}$$

$$=\frac{AB}{\sin(90°-\theta)}.$$

因为　$$AB=2R\cos\theta,$$

所以　$$\frac{AB}{\sin(90°-\theta)}=2R.$$

$$\therefore\quad AE=2R\sin(\theta+45°),$$

$$BE=2R\sin 45°=\sqrt{2}R.$$

在三角形 ABE 和 BDE 中，

$$\angle BAE=\angle EBD,$$

且 $\angle E$ 是公共角，所以

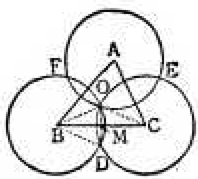
$$\triangle ABE\backsim\triangle BDE.$$

因此 $$\frac{AE}{BE}=\frac{BE}{DE},$$

$$DE=\frac{BE^2}{AE}=\frac{(\sqrt{2}R)^2}{2R\sin(\theta+45^\circ)}$$

$$=\frac{R}{\sin(\theta+45^\circ)}.$$

1788. 在锐角三角形 ABC 中，AB、AC 的长度分别是 c、b，现分别以各顶点 A、B、C 为圆心，作通过外心的圆，要求：



(1) 用 b、c 及 $\angle A$ 表示 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径。

(2) 用 b、c 及 $\angle A$ 表示上面所作的三个圆两两相交部分的面积的和。

解 (1) 设 $\triangle ABC$ 的外心是 O，于是

$$\angle BOC=2\angle A.$$

再设外接圆的半径是 R，因为 $OB=OC=R$，所以从 O 向 BC 作垂线，垂足 M 是 BC 的中点。又因为

$$\angle BOM=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle A,$$

所以 $$BM=\frac{1}{2}BC=OB\cdot\sin A.$$

因此 $$R=OB=\frac{BC}{2\sin A}$$

$$=\frac{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}}{2\sin A}.$$

(2) 设圆 B、C 的公共部分的面积是 S_1，于是

$$S_1=2(\text{扇形 }BOD-\triangle BOD)$$

$$=2\left(\pi R^2\times\frac{2\angle OBC}{360^\circ}-\triangle BOC\right)$$

$$=2\left(\pi R^2\times\frac{180^\circ-\angle BOC}{360^\circ}-\triangle BOC\right)$$

$$=2\left[\pi R^2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\angle A}{180^\circ}\right)-\triangle BOC\right].$$

同样，如果设圆 C、A 的公共部分的面积是 S_2，圆 A、B 的公共部分的面积是 S_3，那么

$$S_2=2\left[\pi R^2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\angle B}{180^\circ}\right)-\triangle COA\right],$$

$$S_3=2\left[\pi R^2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\angle C}{180^\circ}\right)-\triangle AOB\right].$$

因此

$$S_1+S_2+S_3$$

$$=2\left[\pi R^2\times\left(\frac{3}{2}-\frac{\angle A+\angle B+\angle C}{180^\circ}\right)-\triangle ABC\right]$$

$$=2\left(\pi R^2\times\frac{1}{2}-\triangle ABC\right)$$

$$=\pi R^2-bc\sin A$$

$$=\frac{\pi(b^2+c^2-2bc\cos A)}{4\sin^2 A}-bc\sin A.$$

1789. 设三角形 ABC 的三条中线的长度是 h、k、l，证明

$$4(h^2+k^2+l^2)=3(a^2+b^2+c^2),$$

$$16(h^2k^2+k^2l^2+l^2h^2)=9(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2),$$

$$16(h^4+k^4+l^4)=9(a^4+b^4+c^4).$$

解 设 D 是 BC 边的中点，于是

$$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB,$$

$$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC.$$

将这两个式子两边相加，得

$$b^2+c^2=2h^2+\frac{a^2}{2},$$

因此 $$h^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}.$$

同样 $$k^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4},$$

$$l^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

因此 $4(h^2+k^2+l^2)=3(a^2+b^2+c^2)$。

又

$$(4h^2)^2+(4k^2)^2+(4l^2)^2$$

$$=(2b^2+2c^2-a^2)^2+(2c^2+2a^2-b^2)^2+(2a^2+2b^2-c^2)^2$$

$$=9(a^4+b^4+c^4),$$

由此得

$$16(h^4+k^4+l^4)=9(a^4+b^4+c^4).$$

根据已经证明的结果，将

$$16(h^2+k^2+l^2)^2=9(a^2+b^2+c^2)^2$$

和 $$16(h^4+k^4+l^4)=9(a^4+b^4+c^4)$$

相减，并除以2，即得

$$16(h^2k^2+k^2l^2+l^2h^2)=9(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

1790. 在三角形 ABC 中，证明下列等式成立。

(1) $\cos A+\cos B+\cos C$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

(2) $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$.

这里，r、R 分别是三角形 ABC 的内切圆半径和外接圆半径。

解 (1)

$\cos A+\cos B+\cos C$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)+1$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$=1-4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B+\pi-C}{4}\times\sin\frac{A-B-\pi+C}{4}$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

(2) $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

由此得 $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}.$$

设 $\triangle ABC$ 的面积是 S，于是

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs,$$

$$\therefore\quad (s-a)(s-b)(s-c)=r^2s.$$

又 $$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{abc}{4R}=rs,$$

$$\therefore\quad abc=4rsR.$$

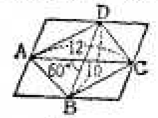
因此 $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r^2s}{4rsR}=\frac{r}{4R}.$$

再利用(1)的结果，即得

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}.$$

6. 面积

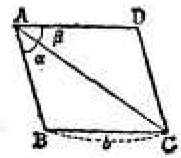
1791. 求对角线是 10 cm 和 12 cm，它们的交角是 60° 的四边形的面积。



解 $$S=\frac{1}{2}\times10\times12\sin60°=60\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=30\sqrt{3}\,(\text{cm}^2).$$

1792. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$BC=b$，$\angle BAC=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，求面积。



解 在 $\triangle ABC$ 中，

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{b}{\sin\alpha},$$

$$\therefore\quad AB=\frac{b\sin\beta}{\sin\alpha},$$

所以面积 S 为

$$S=2\triangle ABC=2\times\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B$$

$$=\frac{b\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot b\sin[180°-(\alpha+\beta)]$$

$$=\frac{b^2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}.$$

1793. 有一个三角形，它的一个角是 120°，这个角的对边是 7 cm，其他两条边的长度的和是 8 cm，求其他两条边的长度及三角形的面积。

解 在三角形 ABC 中，

$$\angle A=120°,\quad BC=7\,\text{cm},$$

设 $$AC=b,\quad AB=c,$$

根据题意，由余弦定理得

$$7^2=b^2+c^2-2bc\cos120°$$

$$=b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc.$$

已知 $b+c=8$，由上式得

$$bc=8^2-7^2=15.$$

得 $b=3$，$c=5$ 或 $b=5$，$c=3$。

又，三角形 ABC 的面积是

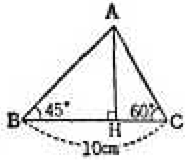
$$\frac{1}{2}bc\sin120°=\frac{15}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

因此三角形其他两边的长度是 3 cm 和 5 cm，面积是 $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ cm²。

1794. 已知三角形 ABC 中 $\angle B=45°$，$\angle C=60°$，$BC=10\,\text{cm}$，求：

(1) AC 的长度。

(2) 三角形 ABC 的面积。



解 (1)

$$CH=AC\cos 60°=\frac{AC}{2}, \qquad ①$$

$$BH=AH=AC\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}AC. \qquad ②$$

从①、②得

$$HC+HB=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)AC=BC=10.$$

$$\therefore\quad AC=\frac{20}{\sqrt{3}+1}=10(\sqrt{3}-1)$$

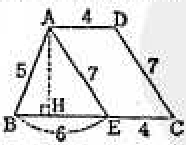
$$\approx 7.3\,(\text{cm}).$$

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}BC\cdot AH$

$$=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10(\sqrt{3}-1)$$

$$=25(3-\sqrt{3})\approx 31.7\,(\text{cm}^2).$$

1795. 求上、下两底是 $4\,\text{cm}$、$10\,\text{cm}$，两腰是 $7\,\text{cm}$ 和 $5\,\text{cm}$ 的梯形的面积。



解 如右图那样，作 $AE\parallel DC$，由海伦公式，得 $\triangle ABE$ 的面积是

$$\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=6\sqrt{6}.$$

$\triangle ABE$ 的高是

$$\frac{6\sqrt{6}}{6}\times 2=2\sqrt{6}.$$

因此，梯形的面积是

$$\frac{1}{2}(10+4)\times 2\sqrt{6}=14\sqrt{6}\,(\text{cm}^2).$$

1796. 半径是 $10\,\text{cm}$ 的圆周被分成 $3:4:5$ 的三段，设分点是 A、B、C，求三角形 ABC 的面积。

解 设圆心是 O，且 $\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}=3:4:5$，于是

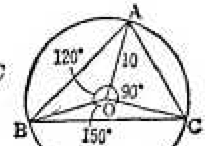
$$\angle AOC=90°,$$
$$\angle AOB=120°,$$
$$\angle BOC=150°.$$

$$\triangle AOC=\frac{10\times 10}{2}=50,$$

$$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times 10^2\times\sin 120°=50\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\triangle BOC=\frac{1}{2}\times 10^2\times\sin 150°=50\cdot\frac{1}{2}.$$

因此



$$\triangle ABC=\triangle AOC+\triangle AOB+\triangle BOC$$

$$=50\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=25(3+\sqrt{3})(\text{cm}^2).$$

别解 $\triangle AOC$ 是等腰直角三角形，所以

$$AC=10\sqrt{2}.$$

由正弦定理得

$$\frac{AB}{\sin 60°}=\frac{AC}{\sin 45°}.$$

$$\therefore\quad AB=10\sqrt{2}\cdot\frac{\sin 60°}{\sin 45°}=10\sqrt{3}.$$

因此 $\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$

$$=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{3}\cdot 10\sqrt{2}\sin 75°$$

$$=50\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$=25(3+\sqrt{3})\,(\text{cm}^2).$$

1797. 已知三角形 ABC 的 $\angle B$、$\angle C$ 和 BC 的长 a，求计算这个三角形面积的公式。

计算 $\angle B=60°$，$\angle C=45°$，$BC=3\,\text{cm}$ 时的面积，精确到 $0.01\,\text{cm}^2$。

解 $$S=\frac{1}{2}ac\sin B.$$

因为 $$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\sin(B+C)},$$

所以 $$c=\frac{a\sin C}{\sin(A+B)}.$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sin B\sin C}{\sin(B+C)}.$$

当 $\angle B=60°$，$\angle C=45°$，$a=BC=3\,\text{cm}$ 时，

$$\sin B=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin C=\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin(B+C)=\sin(60°+45°)$$
$$=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

将这些代入所得的公式，得

$$S=\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

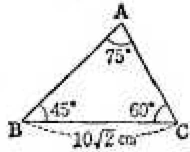
$$=\frac{9\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{9\sqrt{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2\times 4}=\frac{9(3-\sqrt{3})}{4}$$

$$\approx\frac{9}{4}(3-1.732)=\frac{9}{4}\times 1.268$$

$$\approx 2.85(\mathrm{cm}^2).$$

1798．在三角形 ABC 中，$\angle B=45°$，$\angle C=60°$，$BC=10\sqrt{2}$ cm，求 AB 的长度及三角形 ABC 的面积．



解　由题意得

$$\angle A=75°,$$

$$\sin 75°=\sin(45°+30°)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

由
$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A},$$

得
$$\frac{AB}{\sin 60°}=\frac{10\sqrt{2}}{\sin 75°},$$

$$AB=10\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=10(3-\sqrt{3})(\mathrm{cm}).$$

从而

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times BC\times AB\times\sin B$$

$$=\frac{1}{2}\times 10\sqrt{2}\times 10(3-\sqrt{3})\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=50(3-\sqrt{3})(\mathrm{cm}^2).$$

1799．已知两边的积 bc，两角的差 $B-C$ 及 BC 边上的中线，解三角形 ABC．

解　设中线是 m，于是

$$b^2+c^2+2bc\cos A=4m^2.$$

又
$$b^2+c^2=2\left(m^2+\frac{a^2}{4}\right),$$

所以
$$a^2+4bc\cos A=4m^2,$$
$$a^2=4m^2-4bc\cos A.$$

由正弦定理得

$$\frac{a^2}{\sin^2 A}=\frac{bc}{\sin B\sin C}$$

$$=\frac{2bc}{\cos(B-C)-\cos(B+C)}$$

$$=\frac{2bc}{\cos(B-C)+\cos A},$$

即

$$\frac{4m^2-4bc\cos A}{\sin^2 A}=\frac{2bc}{\cos(B-C)+\cos A}.$$

上面这个方程含有唯一的未知数 A，所以可以求出 A．因而这个三角形的其他元素也就可以求出来了．

1800．设以 O 为圆心，以 AB 为直径的半圆弧的中点是 C，在圆弧上另取一点 D，使弦 AD 将这个半圆的面积二等分，比较扇形 COD 和三角形 BOD 的面积．

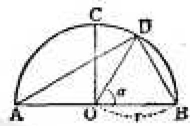
解　设 $\angle BOD=\alpha$（弧度），因为

弓形 ACD＝扇形 $AOD-\triangle OAD$，

所以

$$\frac{1}{2}(\pi-\alpha)r^2-\frac{r^2}{2}\sin(\pi-\alpha)=\frac{\pi r^2}{4}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)r^2=\frac{r^2}{2}\sin\alpha.$$



因为 D 在弧 BC 上，所以

$$\text{扇形 } COD=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)r^2=\triangle BOD.$$

别解　用几何学的方法进行解答．因为

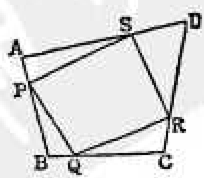
扇形 $AOD-\triangle AOD$

＝弓形 ACD＝扇形 AOC，

所以　扇形 $COD=\triangle AOD=\triangle BOD$．

1801．将四边形的各边分成 $m:n$ 的两段，连结这些分点得到一个新的四边形，证明这个四边形和原四边形的面积之比等于 m^2+n^2 和 $(m+n)^2$ 的比．

解　设 $ABCD$ 是四边形，P、Q、R、S 分别是 AB、BC、CD、DA 上的点，且



$$\frac{AP}{PB}=\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RD}=\frac{DS}{SA}=\frac{m}{n},$$

于是
$$\frac{PB}{AB}=\frac{n}{m+n},\quad\frac{BQ}{BC}=\frac{m}{m+n},$$

并且

三角形 PBQ 的面积

$$=\frac{1}{2}BP\cdot BQ\sin B$$

$$=\frac{mn}{2(m+n)^2}AB\cdot BC\sin B$$

$$=\frac{mn}{(m+n)^2}\times(\text{三角形 }ABC\text{ 的面积}).$$

同样

三角形 RDS 的面积

$$=\frac{mn}{(m+n)^2}\times(\text{三角形 }ADC\text{ 的面积}).$$

因此，三角形 PBQ 和 RDS 的面积的和是 $\frac{mnH}{(m+n)^2}$，其中 H 表示四边形 $ABCD$ 的面积。根据同样的方法，三角形 QCR 和 SAP 的面积和是 $\frac{mnH}{(m+n)^2}$。因此，三角形 PBQ、QCR、RDS 和 SAP 的面积和是 $\frac{2mnH}{(m+n)^2}$，由此得四边形 $PQRS$ 的面积是

$$H\left[1-\frac{2mn}{(m+n)^2}\right]=\frac{H(m^2+n^2)}{(m+n)^2}.$$

因而四边形 $PQRS$ 和 $ABCD$ 的面积之比是

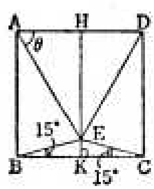
$$(m^2+n^2):(m+n)^2.$$

1802. $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，过顶点 B、C，在正方形内部作和 BC 成 $15°$ 角的两条直线，设它们的交点是 E。又设 AD、BC 的中点分别是 H、K，解答下列问题：

(1) 求 EK 的长度；

(2) 若 $\angle EAH=\theta$，求 $\operatorname{tg}\theta$ 的值；

(3) 三角形 EAD 是怎样的三角形？说明理由。



解　(1)

$$EK=CK\operatorname{tg}15°$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}(45°-30°)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}45°-\operatorname{tg}30°}{1+\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}30°}$$

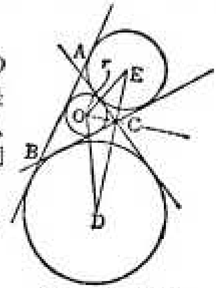
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) $EH=1-EK=1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{EH}{AH}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}.$$

(3) 从 (2) 的结果得 $\theta=60°$，又因为 $EA=ED$，所以 $\triangle EAD$ 是正三角形。

1803. 连结三角形 ABC 的内心和 $\angle A$ 及 $\angle B$ 所对的旁心，证明所得三角形的面积是 $\frac{abc}{2s}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$。



解　设 O 是内心，D 及 E 是旁心，r_1、r_2 是旁切圆的半径，则 D、C、E 都在垂直于 OC 的同一条直线上，并且

三角形 ODE 的面积

$$=\frac{1}{2}OC\cdot DE$$

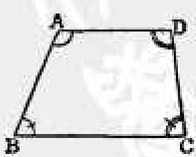
$$=\frac{r}{2}\csc\frac{C}{2}(r_1+r_2)\sec\frac{C}{2}=\frac{r(r_1+r_2)}{\sin C}$$

$$=\frac{S}{s\sin C}\left(\frac{S}{s-a}+\frac{S}{s-b}\right)$$

$$=\frac{S^2c}{s(s-a)(s-b)\sin C}=\frac{(s-c)c}{\sin C}$$

$$=\frac{abc\cos^2\frac{C}{2}}{s\sin C}=\frac{abc}{2s}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

1804. 证明四边形 $ABCD$ 是梯形的充要条件是 $\sin A\sin C=\sin B\sin D$ 成立。



解　如果四边形 $ABCD$ 是梯形，那么

$AD\parallel BC$

或　$AB\parallel CD$.

在前一种情况下

$A+B=\pi,\ C+D=\pi$.

所以　$\sin A=\sin B,\ \sin C=\sin D$.

在后一种情况下

$$A+D=\pi,\ B+C=\pi.$$

所以　$\sin A=\sin D,\ \sin B=\sin C$.

不管是哪一种情况都有

$$\sin A\sin C=\sin B\sin D.$$

反过来，如果 $\sin A\sin C=\sin B\sin D$，那么两边同乘以 2，并用加法定理变形，就得到

$$\cos(A-C)-\cos(A+C)$$
$$=\cos(B-D)-\cos(B+D).$$

$\therefore\quad \cos(A-C)-\cos(B-D)$
$=\cos(A+C)-\cos(B+D)$。

$$\therefore\quad 2\sin\frac{(A-C)-(B-D)}{2}\times\sin\frac{(A-C)+(B-D)}{2}=2\sin\frac{(A+C)-(B+D)}{2}\times\sin\frac{(A+C)+(B+D)}{2}.$$

注意到 $A+B+C+D=2\pi$，所以上式的右边是 0，即

$$2\sin\frac{A-B-C+D}{2}\sin\frac{A+B-C-D}{2}=0.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A-B-C+D}{2}=0$$

或 $$\sin\frac{A+B-C-D}{2}=0.$$

$$\therefore\quad A-B-C+D=2n\pi$$

或 $$A+B-C-D=2n\pi.$$

虽然 n 是表示任意的整数，但由于上面两式的左边只能在 -2π 到 2π 之间，所以这里只能取 $n=0$。从而得

$$A+D=B+C\quad 或\quad A+B=C+D.$$

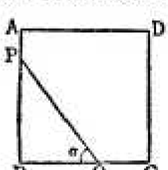
将这两个式子和 $A+B+C+D=2\pi$ 结合起来考虑，得

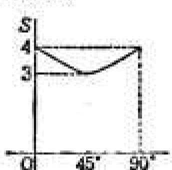
$$A+D=B+C=\pi$$

或 $$A+B=C+D=\pi.$$

在前一种情况下，可推得 $AB\parallel CD$；在后一种情况下，可推得 $AD\parallel BC$。不论是哪一种情况，四边形 $ABCD$ 都是梯形。

1805．在边长为 2 m 的正方形内有一条长 2 m 的线段 PQ，当这条线段的两端分别沿着 AB 和 BC 移动时，五边形 $APQCD$ 的面积 S 怎样变化？设 $\angle PQB=\alpha$，用 α 表示面积 S，并用图象表示它们的关系。





解　$S=AB^2-\frac{1}{2}BQ\cdot BP$

$=2^2-\frac{1}{2}\times 2\cos\alpha\times 2\sin\alpha$

$=4-\sin 2\alpha$。$(0°\leqq\alpha\leqq 90°)$

上式的图象如上面的右图所示。

1806　三角形 ABC 中，$AB=AC=1$，$\angle BAC=2\theta$。

(1) 将 $\triangle ABC$ 与以 BC 为一边的正三角形的面积之和 S，表示成 θ 的函数。

(2) 求 S 的最大值，以及使 S 最大的 θ 的值。

解　(1) 从 A 向 BC 引垂线 AH，于是

$BC=2BH=2\sin\theta$，
$AH=\cos\theta$。

$$\therefore\quad \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

又，正三角形 BCD 的面积是

$$\triangle BCD=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2=\sqrt{3}\sin^2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2\theta).$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\theta\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right).$$

(2) 因为 $0<2\theta<\pi$，所以

$$-\frac{\pi}{3}<2\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3},$$

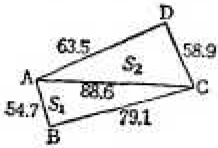
因此，$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $2\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 时有最大值 1。由此得到 S 的最大值是

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{\sqrt{3}+2}{2},$$

这时 θ 的值是 $\frac{5}{12}\pi$。

1807．为了测量一块四边形土地 $ABCD$ 的面积，测得 $AB=54.7$ m，$BC=79.1$ m，$AC=88.6$ m，$AD=63.5$ m，$DC=58.9$ m。请根据这些数据，算出 $ABCD$ 的面积。

解　首先求 $\triangle ABC$ 的面积．为此进行下列计算：



$$s=\frac{1}{2}(54.7+79.1+88.6)=111.2,$$

$$111.2-54.7=56.5,$$

$$111.2-79.1=32.1,$$

$$111.2-88.6=22.6.$$

$$S_1=\sqrt{111.2\times56.5\times32.1\times22.6}.$$

$$\begin{array}{r}\lg 111.2=2.0461\\ \lg 56.5=1.7520\\ \lg 32.1=1.5065\\ \lg 22.6=1.3541\\ \hline 6.6587\end{array}$$

$$\lg S_1=6.6587\times\frac{1}{2}=3.3294.$$

$$\therefore\quad S_1=2135(\mathrm{m}^2).\qquad ①$$

再求 $\triangle DAC$ 的面积．因为

$$AC=88.6,\ AD=63.5,\ DC=58.9,$$

所以

$$s=\frac{1}{2}(88.6+63.5+58.9)=105.5.$$

$$105.5-88.6=16.9,$$

$$105.5-63.5=42.0,$$

$$105.5-58.9=46.6.$$

$$S_2=\sqrt{105.5\times16.9\times42.0\times46.6}.$$

$$\begin{array}{r}\lg 105.5=2.0233\\ \lg 16.9=1.2279\\ \lg 42.0=1.6232\\ \lg 46.6=1.6684\\ \hline 6.5428\end{array}$$

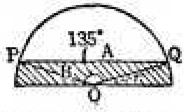
$$\lg S_2=6.5428\div2=3.2714.$$

$$\therefore\quad S_2=1868(\mathrm{m}^2).\qquad ②$$

①＋②，得所要求的面积是

$$2135+1868=4003(\mathrm{m}^2).$$

1808．如图所示，平行于半圆的直径，且圆心角为 $135°$ 的弦将半圆分成两部分，问图中面积 A 和面积 B（阴影部分）哪个大些？

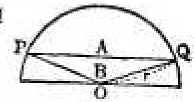


解　设圆的半径是 r，圆心是 O，和半圆的直径平行的弦是 PQ．于是

$$\text{面积 }A=\text{扇形 }OPQ-\triangle OPQ$$

$$=\pi r^2\times\frac{135}{360}-\frac{1}{2}r^2\sin135°$$

$$=\left(\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)r^2,$$



$$\text{面积 }B=\frac{1}{2}\pi r^2-\text{面积 }A$$

$$=\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)r^2,$$

$$\text{面积 }A-\text{面积 }B=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)r^2$$

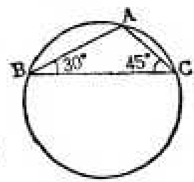
$$=\frac{\pi-2\sqrt{2}}{4}r^2>0.$$

$$\therefore\quad \text{面积 }A>\text{面积 }B.$$

1809．$\triangle ABC$ 中 $\angle B=30°$，$\angle C=45°$，且它的外接圆的半径是 10cm，求：

(1) BC 边的长；

(2) $\triangle ABC$ 的面积．



解　由正弦定理得

$$\frac{BC}{\sin A}=2R,$$

$$BC=2R\sin A.\quad ①$$

（R 是外接圆的半径）

又　$\angle BAC=180°-(30°+45°)=105°$．

$$\therefore\quad \sin A=\sin105°=\sin(60°+45°)$$

$$=\sin60°\cos45°+\cos60°\sin45°$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

将这个值和 $R=10(\mathrm{cm})$ 代入①，得

$$BC=2\times10\times\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$=5(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\mathrm{cm}).$$

(2) 从　$\dfrac{AC}{\sin B}=2R$，

得　$AC=2R\sin B=2\times10\times\sin30°$

$$=2\times10\times\frac{1}{2}=10(\mathrm{cm}).$$

$$\therefore\quad \triangle ABC=\frac{1}{2}BC\cdot AC\cdot\sin C$$

$$=\frac{1}{2}\times5\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\times10\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=25(\sqrt{3}+1)(\mathrm{cm}^2).$$

1810．设三角形 ABC 中，角 A、B、C

的平分线和对边的交点分别是 D、E、F，证明三角形 DEF 的面积是

$$\frac{2S\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2}}.$$

解　　$AB:AC=BD:DC$。

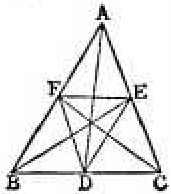
设 $BD=x$, $DC=a-x$, 并代入上式，则

$$c:b=x:(a-x)。$$

从而得

$$BD=x=\frac{ac}{b+c},$$

$$CD=\frac{ab}{b+c}.$$



对于三角形 ABC 的其他两边的线段也可以得到同样的式子。因此三角形 DCE 的面积是

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{b+c}\cdot\frac{ab}{a+c}\sin C=\frac{Sab}{(a+c)(b+c)}.$$

对于三角形 EFA 和 FDB 也可得到同样的式子。因此，三角形 DEF 的面积是

$$S\left(1-\frac{ab}{(a+c)(b+c)}-\frac{bc}{(a+b)(c+a)}-\frac{ca}{(c+b)(a+b)}\right)$$

$$=\frac{S}{(a+b)(b+c)(c+a)}[(a+b)(b+c)\times(c+a)-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)]$$

$$=\frac{2Sabc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=2S\cdot\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b}{c+a}\cdot\frac{c}{a+b}.$$

现　$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

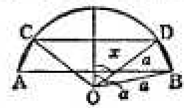
$$=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

同样　$$\frac{b}{c+a}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C-A}{2}},$$

$$\frac{c}{a+b}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}.$$

因此得到所要证的结果。

1811. 设圆心是 O，半径是 a，在圆心角为定值 $2\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 的弧 AB 上取两点，作以 AB 为底的等腰梯形，求这样的等腰梯形的最大面积。



解　设弧 AB 上所取的两点为 C、D，$\angle COD=2x(0<x<\alpha)$。根据题意有 $CD\parallel AB$。等腰梯形的面积是

$$S=\frac{1}{2}(a\cos x-a\cos\alpha)(2a\sin x+2a\sin\alpha)$$

$$=a^2(\sin x\cos x+\sin\alpha\cos x-\cos\alpha\sin x-\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$=a^2\left[\frac{1}{2}\sin 2x+\sin(\alpha-x)-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right].$$

$$\therefore\quad\frac{dS}{dx}=a^2\cos 2x-\cos(\alpha-x)$$

$$=2a^2\sin\frac{\alpha+x}{2}\sin\frac{\alpha-3x}{2}.$$

$$\therefore\quad x<\frac{\alpha}{3}\ \text{时}\ \frac{dS}{dx}>0,$$

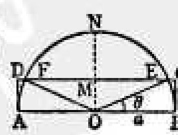
$$x>\frac{\alpha}{3}\ \text{时}\ \frac{dS}{dx}<0.$$

所以 $x=\frac{\alpha}{3}$ 时，S 取得最大值。S 的最大值是

$$a^2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\alpha+\sin\frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(3\sin\frac{2}{3}\alpha-\sin 2\alpha\right).$$

1812. 有一个以长 $2a$ 的线段 AB 为直径的半圆和一个以 AB 为一边的长方形 $ABCD$，CD 和半圆相交。如要使长方形之外的半圆部分与半圆之外的长方形部分的面积之和最小，那么边 AD 要取多长？



解　如图所示，设 CD 和半圆周的交点是 E、F，$\angle EOB=\theta$。从 O 向 CD 作垂线，得垂足 M，并且垂线和半圆周相交于点 N。这时

$$扇形\ OBE=\frac{1}{2}a^2\theta, \qquad ①$$

$$\triangle OME=\frac{1}{2}(a\sin\theta)(a\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{4}a^2\sin 2\theta, \qquad ②$$

$$扇形\ OEN=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), \qquad ③$$

$$长方形\ OBCM=a^2\sin\theta. \qquad ④$$

④－①－②，得

$$图形\ BCE=a^2\sin\theta-\frac{1}{2}a^2\theta-\frac{1}{4}a^2\sin 2\theta.$$

③－②，得

$$图形\ MEN=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{4}a^2\sin 2\theta.$$

因此，长方形之外的半圆部分与半圆之外的长方形部分的面积之和 $S(\theta)$ 是

$$S(\theta)=2\left[\left(a^2\sin\theta-\frac{1}{2}a^2\theta-\frac{1}{4}a^2\sin 2\theta\right)+\left(\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{4}a^2\sin 2\theta\right)\right]$$

$$=a^2\left(2\sin\theta+\frac{\pi}{2}-2\theta-\sin 2\theta\right).$$

$$S'(\theta)=a^2(2\cos\theta-2-2\cos 2\theta)$$
$$=2a^2(\cos\theta-1-\cos 2\theta)$$
$$=-2a^2(2\cos^2\theta-\cos\theta)$$
$$=-2a^2\cos\theta(2\cos\theta-1).$$
$$S''(\theta)=2a^2(-\sin\theta+2\sin 2\theta).$$

从图中注意到 θ 的范围是 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以使 $S'(\theta)=0$ 的 θ 值是 $\frac{\pi}{3}$，这时

$$S''\left(\frac{\pi}{3}\right)=2a^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right)>0.$$

因此知道，$S(\theta)$ 当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时变成极小、即最小。因而所要求的 AD 的长度是

$$a\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

1813. 画具有同样面积的各三角形，证明这些三角形各角余切的和，随着各边上的正方形面积之和的变化而变化。

解　因为

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

所以

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg} A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A}$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}.$$

对于 $\operatorname{ctg} B$ 和 $\operatorname{ctg} C$ 也能得到同样的式子。因此

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

由此证得，当 S 一定的时候，三个角的余切的和随着三边的平方和的变化而变化。

1814. 证明三角形 ABC 的内切圆面积，和这个三角形面积的比是

$$\pi:\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

解　内切圆的面积和三角形的面积之比，也就是 πr^2 和 S 之比。本题即要证明

$$\frac{S}{r^2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

因为

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}\times\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$$

$$=\frac{s\sqrt{s}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}=\frac{s^2}{S}$$

$$=S\cdot\frac{s^2}{S^2}=\frac{S}{r^2},$$

所以本题得证。

1815. A、B、C、D、E、… 是圆内接多边形的顶点，从圆心向各边引垂线，然后连结各垂足得到第二个多边形。如果第一个多边形的面积是第二个多边形的面积的 2 倍，证明 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C+\sin 2D+\sin 2E+\cdots=0$。

解　第一个多边形的面积减去第二个多边形面积的 2 倍，差是

$$\frac{r^2}{4}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C+\sin 2D+\cdots).$$

当第一个多边形的面积恰为第二个多边形面积的 2 倍时，这个差应该为零，所以

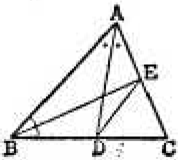
$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C+\cdots=0.$$

1816. 设三角形 ABC 中角 A 和角 B 的平分线分别和对边交于点 D 和 E，证明三角

形 CED 的面积是

$$\frac{S\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{(C-A)}{2}\cos\dfrac{(C-B)}{2}}.$$

解　从三角形 CEB 得



$$\frac{CE}{a}=\frac{\sin\dfrac{B}{2}}{\sin\left(A+\dfrac{B}{2}\right)}.$$

从三角形 CDA 得

$$\frac{CD}{b}=\frac{\sin\dfrac{A}{2}}{\sin\left(B+\dfrac{A}{2}\right)}.$$

因此，三角形 CED 的面积是

$$\frac{1}{2}CE\cdot CD\sin C$$

$$=\frac{ab\sin C\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}{2\sin\left(A+\dfrac{B}{2}\right)\sin\left(B+\dfrac{A}{2}\right)}$$

$$=\frac{S\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{C-A}{2}\cos\dfrac{C-B}{2}}.$$

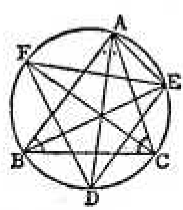
1817. 连结三角形各角的平分线与外接圆的交点，证明所得三角形的面积是 $\dfrac{Rs}{2}$.

解　设角 A、B、C 的平分线和外接圆的交点分别是 D、E、F，于是 $\angle DAC=\dfrac{A}{2}$，$\angle CAE=\angle CBE=\dfrac{B}{2}$，因此 $\angle DAE=\dfrac{A+B}{2}$，从而知道 DE 所对的圆心角是 $A+B$,

$$DE=2R\sin\frac{A+B}{2}=2R\cos\frac{C}{2}.$$

同样

$$EF=2R\cos\frac{A}{2},$$



并且

$$\angle DEF=\frac{A+C}{2},$$

所以三角形 DEF 的面积是

$$\frac{1}{2}\cdot 4R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A+C}{2}$$

$$=2R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=\frac{2R^2 sS}{abc}=\frac{Rs}{2}.$$

1818. 证明圆的外切正多边形的面积，是边数相同的内接正多边形的面积和边数是它一半的外切正多边形的面积的调和中项.

解　设圆的半径是 R，则外切正 n 边形的面积是 $nR^2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$，内接正 n 边形的面积是 $\dfrac{1}{2}nR^2\sin\dfrac{2\pi}{n}$. 又，外切正 $\dfrac{n}{2}$ 边形的面积是 $\dfrac{n}{2}R^2\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{n}$. 因此，只要证明 $nR^2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$ 是 $\dfrac{1}{2}nR^2\sin\dfrac{2\pi}{n}$ 和 $\dfrac{1}{2}nR^2\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{n}$ 的调和中项就可以了. 因为 $\sin\dfrac{2\pi}{n}$ 和 $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{n}$ 的调和中项是

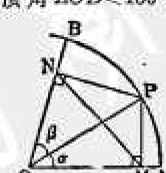
$$\frac{2\sin\dfrac{2\pi}{n}\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{n}}{\sin\dfrac{2\pi}{n}+\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{n}},$$

即 $\dfrac{2\sin\dfrac{2\pi}{n}}{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}$，　即 $2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$,

所以容易证得

$$\frac{2}{nR^2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}=\frac{1}{\dfrac{1}{2}nR^2\sin\dfrac{2\pi}{n}}+\frac{1}{\dfrac{1}{2}nR^2\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{n}}.$$

1819. 在扇形 AOB（顶角 $AOB<180^\circ$）中，从弧 AB 上的任意一点 P 向 OA、OB 作垂线，得垂足 M、N，证明线段 MN 的长是定值.



解　设所给扇形的半径是 r,

$$\angle AOB=\theta,\ \angle AOP=\alpha,\ \angle BOP=\beta.$$

因为 $OP=r$，所以

$$\left.\begin{array}{l}PM=r\sin\alpha,\ OM=r\cos\alpha,\\ PN=r\sin\beta,\ ON=r\cos\beta,\end{array}\right\}\qquad ①$$

且 $\alpha+\beta=\theta$. 又因为 P、M、O、N 四点共圆，所以

$$PN\cdot OM+PM\cdot ON=OP\cdot MN。\quad ②$$

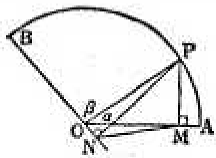
将 ① 代入这个式子，因为 $r=OP$，所以得

$$r\cdot MN=r^2\cos\alpha\cdot\sin\beta+r^2\sin\alpha\cdot\cos\beta$$
$$=r^2\sin(\alpha+\beta)=r^2\sin\theta。$$

因此　　$MN=r\sin\theta$。

因为 r 是定长、θ 是定角，所以 MN 的长是定值。

在 $\theta>90°$ 的情况下，从 P 点引垂线时垂足有时在 OA 或 OB 的延长线上。这时下图中的 r、α、β 和前面的情况作同样的规定，① 变成



$PN=r\sin(180°-\beta)$，

$ON=r\cos(180°-\beta)$，

② 变成

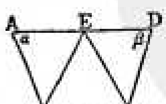
$$PM\cdot ON+OP\cdot MN=PN\cdot OM。$$

因此

$$r\cdot MN=PN\cdot OM-PM\cdot ON$$
$$=r^2\cos\alpha\cdot\sin\beta-r^2\sin\alpha(-\cos\beta)$$
$$=r^2\sin\theta。$$
$$\therefore\quad MN=r\sin\theta。$$

总之，不论哪一种情况，MN 的长度都是一定的，等于 $r\sin\theta$。

1820．四边形的三条边互相相等，第四条边的长度等于其余每一条边的两倍，求第四条边两端的两个角之间的关系。



解　设 $AD=2a$，$AB=BC=CD=a$，AD 的中点是 E，且 $\angle A=\alpha$，$\angle D=\beta$。在三角形 ABE 中

$$BE^2=AB^2+AE^2-2AB\cdot AE\cos A,$$

或　　$$BE^2=2a^2-2a^2\cos\alpha。\quad ①$$

同样，从 $\triangle CDE$ 得

$$CE^2=2a^2-2a^2\cos\beta。\quad ②$$

又，从 $\triangle BEC$ 得

$$BC^2=BE^2+EC^2-2BE\cdot EC\cos\angle BEC。$$

因此，由 ①、② 及

$$\angle BEC=180°-(\angle BEA+\angle CED)$$
$$=180°-\left[\frac{1}{2}(180°-\alpha)+\frac{1}{2}(180°-\beta)\right]=\frac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

得

$$a^2=2a^2-2a^2\cos\alpha+2a^2-2a^2\cos\beta-2\sqrt{(2a^2-2a^2\cos\alpha)(2a^2-2a^2\cos\beta)}\times\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}。$$

化简得

$$0=3-2(\cos\alpha+\cos\beta)-4\sqrt{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2},$$

或 $$0=3-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-4\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot2\sin^2\frac{\beta}{2}}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

或　$$0=3-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

或

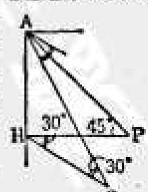
$$3=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

或　$$1=4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-2=2\cos(\alpha+\beta)。$$

因此　$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，$\alpha+\beta=60°$。

7．简单测量(不用数表)

1821．从海边高 100 m 的悬崖上，观测在正东方向的船和在东 30° 南方向上的船，得到它们的俯角分别是 45° 和 30°，求两船的距离。(俯角：视线和水平面的夹角)



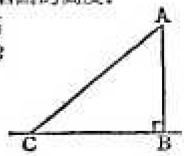
解　如图，设 P、Q 是船，A 点在悬崖上，得

$$HP=HA\operatorname{ctg}45°=100\times1=100,$$
$$HQ=HA\operatorname{ctg}30°=100\times\sqrt{3}=100\sqrt{3}。$$
$$PQ^2=HP^2+HQ^2-2HP\cdot HQ\cos30°$$
$$=100^2+3\times100^2-2\times100^2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=100^2。$$
$$\therefore\quad PQ=100(\text{m})。$$

1822．在离烟囱底基 300 m 的地方，测得

烟囱顶的仰角是 30°，求烟囱的高度。

解 设 AB 是烟囱的高度，C 是观测点，$\angle ACB=30°$，



$AB=BC\operatorname{tg}\angle ACB$。

因此

$$AB=300\operatorname{tg}30°=300\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{300\sqrt{3}}{3}$$

$$=100\sqrt{3}\approx173.2(\mathrm{m})。$$

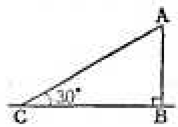
1823. 在离开塔基 100 m 的地方测它的高度，若仰角是 30°，那么塔高多少？

解 设塔的高度是 h，则

$$\frac{h}{100}=\operatorname{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{3}}。$$

因此 $\quad h=\frac{100}{\sqrt{3}}\approx57.74(\mathrm{m})。$

1824. 在离开塔基 86.6 m 的地方，测得塔顶的仰角是 30°，求塔顶和观测者的距离大约是多少。

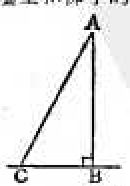


解 设 AB 是塔，C 是观测者的位置，于是 $BC=86.6\,\mathrm{m}$，$\angle BCA=30°$，所要求的距离就是 AC。

$$AC=BC\csc\angle CAB=86.6\csc60°$$

$$=86.6\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{86.6\times2}{1.732}=100(\mathrm{m})。$$

1825. 有一把长 45 m 的梯子，一端靠在墙壁的顶端，另一端放在地上，墙壁和梯子的夹角是 30°，问墙壁的高度和墙壁到梯脚的距离各是多少？



解 设 AB 是墙壁，AC 是梯子，这时 AB 是壁的高度，BC 是壁到梯脚的距离。

$$AB=AC\sin\angle ACB=45\sin60°=\frac{45\sqrt{3}}{2}$$

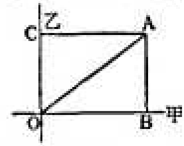
$$=\frac{45\times1.732}{2}\approx39.0(\mathrm{m})。$$

$$BC=AC\cos\angle ACB=45\cos60°$$

$$=45\times\frac{1}{2}=22.5(\mathrm{m})。$$

1826. 甲、乙两条直线交成直角，一条长 a m 的线段和甲的夹角是 30°，求这条线段在甲、乙两条直线上的正射影的长。

解 设甲、乙两条直线的交点是 O，OA 是长 a m、且和甲成 30° 角的线段。不管这条线段的位置如何，如果只讨论它的正投影的长，那么不妨把它看成是通过甲、乙两直线的交点 O，$\angle AOB=30°$ 的线段，因此由直角三角形 AOB 得



$$OB=OA\cos\angle AOB=a\cos30°=\frac{a\sqrt{3}}{2}。$$

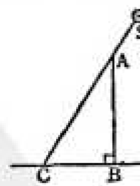
从直角三角形 AOC 又得

$$OC=OA\sin\angle OAC=a\sin30°=\frac{a}{2}。$$

因此，所要求的正射影的长是 $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ m 和 $\frac{a}{2}$ m。

1827. 若高 6 m 的竹竿，影长 $2\sqrt{3}$ m，求太阳的高度。

解 假定 S 是太阳，AB 是竹竿，连结 S、A 的直线和通过 B 且与 AB 垂直的直线相交于 C 点，那么 BC 就相当于竹竿的影子。因此 $AB=6\,\mathrm{m}$，$BC=2\sqrt{3}\,\mathrm{m}$，所要求的就是 $\angle BCA$ 的大小。



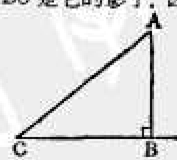
因为

$$\operatorname{tg}\angle BCA=\frac{AB}{BC}=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}，$$

所以 $\qquad \angle BCA=60°。$

1828. 若太阳的高度是 30°，求高 4 m 的电线杆的影长。

解 设 AB 是电线杆，BC 是它的影子。因为太阳的高度是 30°，



所以

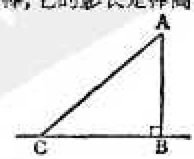
$$BC=AB\operatorname{ctg}\angle ACB$$

$$=4\operatorname{ctg}30°=4\sqrt{3}$$

$$=6.93(\mathrm{m})。$$

1829. 一根直立的木棒，它的影长是棒高的 2 倍，求这时太阳光线和地平线的夹角。

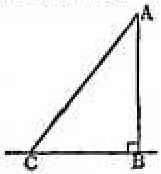
解 设 AB 是棒高，BC 是它的影子。这时 $BC=2AB$，因此，



$$\operatorname{tg} C=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2},$$

C 是正切为 $\frac{1}{2}$ 的角。

1830. 有一棵直立的树，在离开根部 6 m 的地方，测得树顶的仰角是 60°，求树的高度。



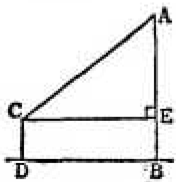
解　设 AB 是树的高度，C 是观测者的位置。这时

$\angle ACB=60°$，$BC=6$ m。

因此　$AB=BC\operatorname{tg}\angle ACB=6\operatorname{tg}60°$

$=6\sqrt{3}=10.4$ (m)。

1831. 从高 117 m 的塔顶上测得到一座高 37 m 的屋顶的俯角是 30°，求塔和这座房屋的距离。



解　设 AB 是塔，CD 是房屋，从屋顶 C 引水平线和 AB 交于 E，于是 $\angle ACE$ 就是 A 到 C 的俯角，它等于 30°，并且

$$AE=AB-CD=117-37=80\text{(m)}。$$

因此，从 $\triangle ACE$ 得

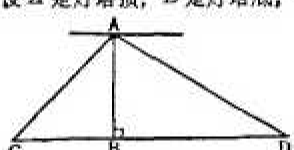
$$CE=AE\times\operatorname{ctg}\angle ACE=80\operatorname{ctg}30°$$
$$=80\sqrt{3}\approx138.6\text{(m)}。$$

1832. 有一段和水平面成 45° 的长 1000 m 的坡路，如果把倾斜角减小到 30°，那么这段坡路长多少 m?

解　这段坡路的顶端离平地的高度是 $1000\sin45°$ (m)，这一点是明显的。因此，如果使倾斜角变成 30° 的话，那么这段坡路的长应是 $\frac{1000\sin45°}{\sin30°}$，即是 $1000\sqrt{2}$ (m)。

1833. 从高出海平面 200 米的灯塔顶端测得到两艘船的俯角分别是 45° 和 30°，这两艘船的方向一艘在正北、一艘在正南，求它们的距离。

解　设 A 是灯塔顶，B 是灯塔底，C 是在



正北方向的船的位置，D 是在正南方向的船的位置，则 C、B、D 成一直线，且 $\angle ADB=30°$，$\angle ACB=45°$。从三角形 ABC 得

$$BC=AB\operatorname{ctg}\angle ACB=200\operatorname{ctg}45°=200。$$

同样　$BD=AB\operatorname{ctg}\angle ADB=200\operatorname{ctg}30°$

$=200\sqrt{3}$。

因此　$CD=BC+BD=200(1+\sqrt{3})$

$=546.42$ (m)。

1834. 测得某塔的影长是 100 m，同时高 9 m 的电线柱的影长是 $3\sqrt{3}$ m，求太阳的高度和塔高。

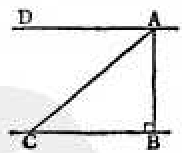
解　9 m 高的电线柱影长 $3\sqrt{3}$ m，设太阳的高度是 α，那么

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{9}{3\sqrt{3}},\quad 从而\ \alpha=60°。$$

进一步求得塔的高度是

$$100\operatorname{tg}60°=100\sqrt{3}=173.21\text{(m)}。$$

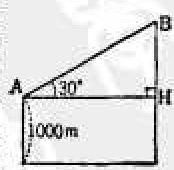
1835. 在高 160 m 的船樯上测得到对面的小艇的俯角是 30°，求船和艇的距离。



解　设 A 是船樯顶，BC 是水面，C 是小艇的位置，AD 是通过 A 的水平线，于是 $\angle DAC=30°$，$AB=160$ m，BC 就是所要求的长度。从三角形 ACB 得

$$BC=AB\operatorname{tg}\angle CAB$$
$$=AB\operatorname{tg}(90°-\angle DAC)$$
$$=160\operatorname{tg}60°=160\sqrt{3}$$
$$=160\times1.732=277.12\text{(m)}。$$

1836. 从海拔 1000 m 的 A 地测得某山顶 B 地的仰角是 30°，这两地的距离在比例尺为五万分之一的地图上是 6 cm，问 B 地海拔多少 m? 如果从地图上读得的距离有 1 mm 的误差，那么对于 B 地的海拔有多少米的影响?



解　上图中 AH 的实际距离是

$$6\text{ cm}\times50000=3000\text{ m}。$$

因此　$BH=AH\operatorname{tg}30°$

$$=3000\times\frac{1}{\sqrt{3}}=1732\text{(m)}。$$

又因为 A 地的海拔是 1000 m，所以 B 地的海拔是

$$1732+1000=2732(\text{m}).$$

如果地图的读数有 1 mm 的误差，那么

$$5.9\times 50000\,\text{cm}\leqq AH\leqq 6.1\times 50000\,\text{cm},$$

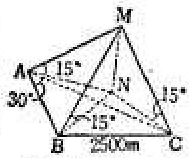
即 $\qquad 2950\,\text{m}\leqq AH\leqq 3050\,\text{m}.$

因此可知，当取 $AH=3000$ m 时有 50 m 以内的误差．因此对于高 BH 来说，误差是

$$50\times\frac{1}{\sqrt{3}}=28.89\approx 29(\text{m}).$$

也就是说，对于 B 地的海拔要产生 29 m 的误差．

1837．从平地上的 A、B、C 三点测得到某山顶的仰角都是 15°．从 A 看 B、C 两点的角度是 30°，B、C 两点的距离是 2500 m，求山顶离平地的高度，精确到 10 m．



解　从山顶 M 向平面 ABC 引垂线，垂足是 N，于是

$$\angle MAN=\angle MBN=\angle MCN=15°.$$

$$\therefore\quad NA=NB=NC.$$

因此 A、B、C 三点在以 N 为圆心的同一个圆上，且由于 BC 所对的圆周角 BAC 是 30°，所以圆心角 BNC 是 60°．因此三角形 NBC 是正三角形，

$$NB=BC=2500.$$

$$\therefore\quad MN=NB\operatorname{tg}15°$$

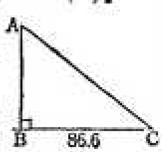
$$=2500\times\frac{\operatorname{tg}45°-\operatorname{tg}30°}{1+\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}30°}$$

$$=2500\times\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=2500\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=2500(2-\sqrt{3})=670(\text{m}).$$

1838．从离塔底 86.6 m 的某一点，测得塔的仰角是 30°，求塔的高度．



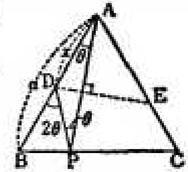
解　设 AB 是塔，C 是观测点，则 $\angle ACB=30°$，$BC=86.6$ m．因此由 $AB=BC\operatorname{tg}C$ 得

$$AB=86.6\operatorname{tg}30°$$

$$=86.6\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{86.6\sqrt{3}}{3}$$

$$\approx 50.0(\text{m}).$$

1839．在正三角形 ABC 的边 AB、AC 上分别取 D、E 两点，使沿线段 DE 折三角形时，顶点 A 正好落在边 BC 上．在这种情况下，若要使 AD 最小，求 $AD:AB$．



解　因为 A 关于 DE 的对称点 P 在 BC 上，所以若设 $\angle BAP=\theta$，那么 $\angle DPA=\theta$，$\angle BDP=2\theta$．再设 $AB=a$，$AD=x$，于是在 $\triangle ABP$ 中

$$\frac{BP}{\sin\angle BAP}=\frac{AB}{\sin\angle APB}.$$

$$\therefore\quad BP=\frac{a\sin\theta}{\sin(120°-\theta)}.\qquad ①$$

在 $\triangle PBD$ 中

$$\frac{DP}{\sin\angle B}=\frac{BP}{\sin\angle BDP}.$$

其中 $DP=DA=x$，

$$\therefore\quad BP=\frac{x\sin 2\theta}{\sin 60°}.\qquad ②$$

从 ①、② 得

$$x=\frac{a\sin\theta\sin 60°}{\sin 2\theta\sin(120°-\theta)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}a\sin\theta}{2\cdot 2\sin\theta\cos\theta\sin(60°+\theta)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}a}{4\cos\theta\sin(60°+\theta)}.$$

这里分母是

$$4\cos\theta\sin(60°+\theta)$$

$$=2\sin(60°+2\theta)+2\sin 60°$$

$$=2\sin(60°+2\theta)+\sqrt{3}.$$

从 $0\leqq\theta\leqq 60°$ 得

$$60°\leqq 60°+2\theta\leqq 180°.$$

$$\therefore\quad 0\leqq\sin(60°+2\theta)\leqq 1.\qquad ③$$

因此

$$\sqrt{3}\leqq 4\cos\theta\sin(60°+\theta)\leqq 2+\sqrt{3}.$$

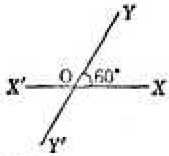
从而 $\qquad \dfrac{\sqrt{3}a}{2+\sqrt{3}}\leqq x\leqq\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}},$

$$\therefore\quad (2\sqrt{3}-3)a\leqq x\leqq a.$$

其中$(2\sqrt{3}-3)a=x$只有当 ③ 式右边取等号时，即$60°+2\theta=90°$，$\theta=15°$时才成立．因此，AD在$\theta=15°$时取得最小值$(2\sqrt{3}-3)a$．这时

$$AD:AB=(2\sqrt{3}-3):1.$$

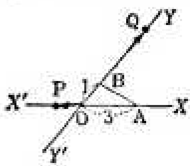
1840. 如图所示，有两条相交成$60°$角的直线XX'、YY'，交点是O．起初，甲、乙分别在OX、OY上，甲离O点3km，乙离O点1km．后来两人同时用每小时4km的速度，甲朝O点，乙背离O点步行．



(1) 起初，两人的距离是多少？

(2) 用包含t的式子表示t小时后两人的距离．

(3) 几分钟后两人的距离最短？



解 (1) 设甲、乙两人起初的位置是A、B，则

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos 60°$$
$$=3^2+1^2-2\times 3\times\frac{1}{2}=7.$$
$$\therefore\quad AB=\sqrt{7}\,(\text{km}).$$

(2) 设甲、乙两人t小时后的位置分别是P、Q，则$AP=4t$，$BQ=4t$．当$0\leqq t\leqq\frac{3}{4}$时

$$PQ^2=(3-4t)^2+(1+4t)^2-2(3-4t)(1+4t)\cos 60°,$$

当$t>\frac{3}{4}$时

$$PQ^2=(4t-3)^2+(1+4t)^2-2(4t-3)(1+4t)\cos 120°.$$

上面两式实际上是统一的，所以

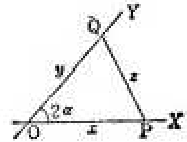
$$PQ^2=16t^2-24t+9+16t^2+8t+1+(16t^2-8t-3)$$
$$=48t^2-24t+7.$$
$$\therefore\quad PQ=\sqrt{48t^2-24t+7}.$$

(3) $$PQ^2=48\left(t^2-\frac{1}{2}t\right)+7$$
$$=48\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+4.$$

因此$t=\frac{1}{4}$，即15分钟后PQ最短．

1841. 在$\angle XOY$的两边OX、OY上分别取点P、Q，设线段OP、OQ、PQ的长是x、y、z．

(1) 证明$z^2=(x+y)^2\sin^2\alpha+(x-y)^2\cos^2\alpha$．这里$\alpha$是$\angle XOY$的半角．



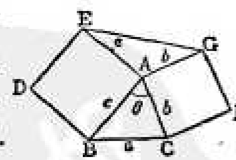
(2) $x+y$一定时，z在什么时候最小？

解 (1) 在$\triangle OPQ$中，运用余弦定理得

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos 2\alpha$$
$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(x^2+y^2)-2xy(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$
$$=(x^2+y^2+2xy)\sin^2\alpha+(x^2+y^2-2xy)\cos^2\alpha$$
$$=(x+y)^2\sin^2\alpha+(x-y)^2\cos^2\alpha.$$

(2) 在$x+y$一定的情况下，由于α是定值，所以当$x=y$时z变成最小．

1842. 在三角形ABC的外侧，分别以AB、AC为一边作正方形$ABDE$、$ACFG$．用三角形ABC的三边表示EG的长．设$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$．



解 设$\angle BAC=\theta$，在三角形ABC中，由余弦定理得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta. \qquad ①$$

同样，在$\triangle AEG$中，因为$\angle EAG=180°-\theta$，所以

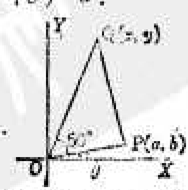
$$EG^2=b^2+c^2-2bc\cos(180°-\theta)$$
$$=b^2+c^2+2bc\cos\theta. \qquad ②$$

①+②，得

$$a^2+EG^2=2(b^2+c^2).$$
$$\therefore\quad EG=\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

注 因为两边相等，且顶角互补，所以

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AEG}.$$



1843. 设直角坐标系的原点是O，X轴正的部分是OX．又设P、Q是直角坐标平面上的两点，且$OP=r$，OQ

$=2r$, $\angle POX=\theta$, $\angle QOX=\theta+60°$。

(1) 求 PQ 的长。

(2) 若 P 的坐标是 (a, b)，用 a、b 表示 Q 的坐标。

解 (1) 在三角形 OPQ 中，运用余弦定理得

$$PQ^2=r^2+(2r)^2-2r\cdot 2r\cos 60°$$
$$=r^2+4r^2-2r^2=3r^2.$$
$$\therefore\quad PQ=\sqrt{3}r.$$

(2) 设点 Q 的坐标是 (x, y)，则

$$x=2r\cos(\theta+60°)$$
$$=2r(\cos\theta\cos 60°-\sin\theta\sin 60°)$$
$$=r\cos\theta-\sqrt{3}r\sin\theta,$$
$$y=2r\sin(\theta+60°)$$
$$=2r(\sin\theta\cos 60°+\cos\theta\sin 60°)$$
$$=r\sin\theta+\sqrt{3}r\cos\theta.$$

又因为　$r\cos\theta=a$, $r\sin\theta=b$,

所以　$x=a-\sqrt{3}b$, $y=\sqrt{3}a+b$.

1844. 设 $\angle AOB=120°$，它的平分线是 OC，一条任意直线和 OA、OB、OC 分别交于 P、Q、R，且 $OP=p$, $OQ=q$, $OR=r$。

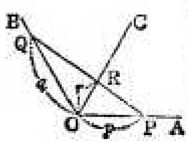
(1) 用 p、q、r 表示 $\triangle OPQ$、$\triangle OPR$、$\triangle OQR$ 的面积。

(2) 推导等式 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$。

解 (1)

$$\triangle OPQ\text{ 的面积}=\frac{1}{2}pq\sin 120°$$
$$=\frac{1}{2}pq\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}pq.$$
$$\triangle OPR\text{ 的面积}=\frac{1}{2}pr\sin 60°$$
$$=\frac{1}{2}pr\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}pr.$$
$$\triangle OQR\text{ 的面积}=\frac{1}{2}qr\sin 60°$$
$$=\frac{1}{2}qr\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}qr.$$

(2) 从图得 $\triangle OPR+\triangle OQR=\triangle OPQ$。用(1)的结果代入上式，两边分别除以 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，得

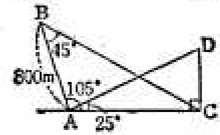


$$pr+qr=pq.$$

两边再分别除以 pqr，得

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=\frac{1}{r}.$$

1845. A、B 是同一水平面上的两点，距离是 800 m。在 A 点观测 B 和山顶上的 D，测得它们间的水平角是 105°，D 的仰角是 25°，另外在 B 点又测得 A 和 C 间的水平角是 45°，求山的高度。其中取 $\sin 25°=0.423$, $\cos 25°=0.906$, $\operatorname{tg} 25°=0.466$。($C$ 是 D 到水平面的垂足)



解 右图中 D 是山顶，DC 是 D 到地平面的垂线。在 $\triangle ACD$ 中

$$\frac{CD}{AC}=\operatorname{tg}\angle DAC,$$
$$CD=AC\operatorname{tg}25°. \qquad ①$$

为了求 AC，考虑 $\triangle ABC$。在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle BCA}. \qquad ②$$

因为

$$AB=800,\ \sin\angle ABC=\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\sin\angle BCA=\sin(180°-105°-45°)$$
$$=\sin 30°=\frac{1}{2},$$

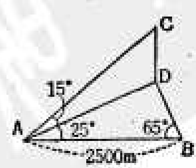
所以，从②得

$$\sqrt{2}AC=2\times 800,\ AC=800\sqrt{2}.$$

由①得

$$CD=AC\operatorname{tg}25°$$
$$=800\sqrt{2}\times 0.466\approx 527\,(\text{m}).$$

1846. A、B 是某湖上的两点，它们的距离是 2500 m。现从 A 点观测 B 点和山顶 C，测得 B 和 C 之间的水平角是 25°，C 的仰角是 15°，另外从 B 点又测得 A 和 C 之间的水平角是 65°，求这座山的高度和 A、C 间的直线距离。其中取 $\cos 25°=0.9063$, $\sin 15°=0.2588$, $\cos 15°=0.9659$。



解 设 C 到湖面的垂足是 D，则三角形

ABD 中，$\angle ADB=90°$。因此

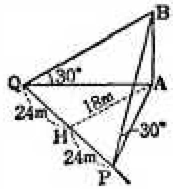
$$AD=2500\cos 25°=2500\times 0.9063\approx 2266(\mathrm{m})。$$

从而，在三角形 ADC 中

$$AC=AD\sec 15°=\frac{2266}{0.9659}\approx 2346(\mathrm{m}),$$

$$CD=AC\sin 15°=2346\times 0.2588\approx 607.1(\mathrm{m})。$$

1847. 离开一条直路 18 m 的地方有一棵直立着的树．现有一人沿这条道路散步，他从看这棵树顶的仰角是 30° 的地方走到仰角再次是 30° 的地方，所走的距离是 48 m．问树的高度是多少？其中，取 $\sqrt{3}=1.732$，又这个人的眼睛离地面的高度是 1.5 m，答数精确到小数点后面第一位．



解 设树的高度是 h，仰角是 30° 的两点分别是 P、Q，从 A 到 PQ 的垂足是 H，于是

$$AH=18,\quad PH=QH=24,$$

$$AP=\sqrt{AH^2+PH^2}=\sqrt{18^2+24^2}=30。$$

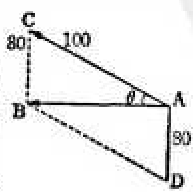
因此

$$h=AB+1.5=AP\operatorname{tg}30°+1.5$$

$$=30\times\frac{1}{\sqrt{3}}+1.5=10\sqrt{3}+1.5$$

$$=17.3+1.5=18.8(\mathrm{m})。$$

1848. 船在静水中的速度为每分钟 100 m，如果要和河岸成直角地横渡水速为每分钟 80 m 的河，那么船必须朝什么方向行驶？



解 设和河岸成直角的方向是 AB，船行驶的方向是 AC，水流的方向是 AD，$AC=100$ m，$AD=80$ m，于是四边形 $ACBD$ 必定是平行四边形．设 $\angle BAC=\theta$，因为 $\angle ABC=90°$，所以

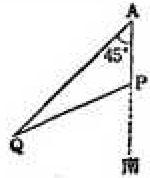
$$\sin\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{AD}{AC}=\frac{80}{100}=0.8。$$

$$\therefore\quad \theta\approx 53°8'。$$

1849. 有一架飞机始终保持 800 m 的高度沿一定方向飞行．某人在某一地点的正南，仰角为 11°20′ 的位置上看到这架飞机后，过了 50 秒钟又在西南方，仰角为 5°40′ 的位置上再次看到这架飞机，问飞机的速度是每秒钟多少 m？其中取

$$\operatorname{tg}11°20'=\frac{1}{5},$$

$$\operatorname{tg}5°40'=\frac{1}{10}。$$



解 设观测点是 A，第一次看到飞机时，飞机正下方的地点是 P，第二次看到飞机时，飞机正下方的地点是 Q，于是

$$AP=800\operatorname{ctg}11°20'=800\times 5,$$

$$AQ=800\operatorname{ctg}5°40'=800\times 10。$$

设飞机每秒钟的速度是 x m，那么

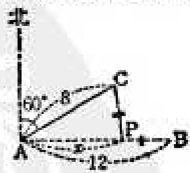
$$PQ^2=(50x)^2=(800\times 5)^2+(800\times 10)^2-2(800\times 5)(800\times 10)\cos 45°$$

$$=800^2(125-50\sqrt{2})。$$

$$\therefore\quad 50x=800\times 5\sqrt{5-2\sqrt{2}}。$$

$$\therefore\quad x=80\times 1.47\approx 118(米/秒)。$$

1850. B 市在 A 市正东 12 km 的地方．C 市在 A 市北 60° 东的方向上距离 8 km 的地方．求从 A 市去 B 市的途中，到 B 市和 C 市距离相等的地点．



解 设所要求的地点是 P，$AP=x$ km，于是

$$PB=12-x,$$

$$PC^2=x^2+8^2-2x\times 8\cos(90°-60°)$$

$$=x^2+64-8\sqrt{3}x。$$

因此从 $PB=PC$，即 $PB^2=PC^2$ 得

$$144-24x+x^2=x^2+64-8\sqrt{3}x,$$

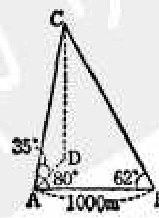
$$(24-8\sqrt{3})x=80,$$

$$\therefore\quad x=\frac{80}{8(3-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{5}{3}(3+\sqrt{3})$$

$$\approx 7.89(\mathrm{km})。$$

1851. 为了知道山的高度，在同一水平面上取两点 A、B，设山顶 C 到这个水平面的垂足是 D，测得 $AB=1000$ m，$\angle CAB=80°$，$\angle CBA=62°$，$\angle CAD=35°$．



求山的高度。

解　在三角形 ABC 中

$$\frac{\sin[180°-(80°+62°)]}{1000}=\frac{\sin 62°}{AC}.$$

$$\therefore\quad AC=1000\times\frac{\sin 62°}{\sin 38°}$$

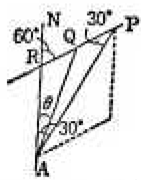
$$=1000\times\frac{0.8829}{0.6157}\approx 1434.$$

因此在三角形 ADC 中,

$$CD=AC\sin 35°=1434\times 0.5736$$
$$\approx 822.5(\mathrm{m}).$$

1852. 想用每小时 10 海里的速度驾船笔直前往北 30° 东方向上相距 50 海里的小岛。现已知这附近一带有向北 60° 东方向的，时速为 4 海里的潮流，问船应朝什么方向行驶？

解　右图中，P 是目的地，A 是出发点，潮流的方向是 RP。设船朝北 $\theta°$ 东方向、即沿 AQ 的方向行驶，但由于潮流的影响，实际上却始终沿着直线 AP 前进。现考虑三角形 APQ。如果船在静水中，从 A 到 Q 要行 t 小时，那么



$$AQ=10t,\quad PQ=4t,$$
$$\angle APQ=\angle PRN-\angle PAR$$
$$=60°-30°=30°,$$
$$\angle PAQ=\angle PAR-\angle QAR$$
$$=30°-\theta°,$$

由正弦定理得

$$\frac{AQ}{\sin\angle APQ}=\frac{PQ}{\sin\angle PAQ}.$$

因此　$$\frac{10t}{\sin 30°}=\frac{4t}{\sin(30°-\theta°)},$$

$$20=\frac{4}{\sin(30°-\theta°)},$$

$$\sin(30°-\theta°)=\frac{1}{5}=0.2.$$

从而　$30°-\theta°\approx 11°32'$，$\theta\approx 18°28'$。

即船应沿北 18°28′ 东的方向行驶。

1853. 有一座直立的塔，如果从和塔底在同一水平面的 A 点观测它，那么塔在正北方向，并且张角是 15°。现观测者一边移动，一边始终用同样的张角观测塔，这样移动 100 m 后，看到塔在北东方向。求塔的高度和 A 点到塔的距离。

解　设塔的高度是 x m，那么从 A 到塔底的距离是 $x\operatorname{ctg}15°$ m，由于观测者始终用同样的张角观测塔，所以他移动的路径是一段以塔底为中心的圆弧。又因为塔的位置从正北变到了北东，所以这段圆弧是整个圆周的 $\frac{1}{8}$。因此

$$\frac{2\pi x\operatorname{ctg}15°}{8}=100.$$

因此

$$x=\frac{400\operatorname{tg}15°}{\pi}=\frac{400(2-\sqrt{3})}{\pi}(\mathrm{m}).$$

1854. 有一座塔，从它正南的 A 点测得仰角是 30°，从 A 正西、和 A 相距 a 的 B 点测得塔顶的仰角是 18°，证明塔的高度是 $\frac{a}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}$。

解　设塔的高度是 h，从 A 到塔的基底的距离是 x，从 B 到塔的基底的距离是 y，则 $x=h\operatorname{ctg}30°$，$y=h\operatorname{ctg}18°$。因为 $y^2-x^2=a^2$，所以

$$h^2(\operatorname{ctg}^2 18°-\operatorname{ctg}^2 30°)=a^2.$$

因此　$$h^2\left[\frac{10+2\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-1)^2}-3\right]=a^2,$$

$$4h^2(\sqrt{5}-1)=a^2(3-\sqrt{5}),$$

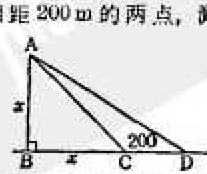
$$h^2=\frac{3-\sqrt{5}}{4(\sqrt{5}-1)}a^2$$

$$=\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}a^2$$

$$=\frac{4a^2}{4(2+2\sqrt{5})}=\frac{a^2}{2+2\sqrt{5}}.$$

$$\therefore\quad h=\frac{a}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}.$$

1855. 从塔正东相距 200 m 的两点，测得塔顶的仰角分别是 45° 和 30°，求塔的高度大约是多少。



解　设 AB 是塔，C 和 D 是塔正东的两点。因为 $\angle ACB=45°$，所以 $AB=BC$。设 AB 为 x，那么由于

$$\angle BAD=90^\circ-\angle D=90^\circ-30^\circ=60^\circ,$$

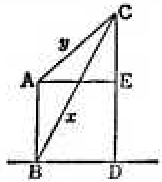
且　　$\operatorname{tg}\angle BAD=\dfrac{BD}{AB}$,

所以　　$\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}=\dfrac{x+200}{x}$.

因此　$x=\dfrac{200}{\sqrt{3}-1}=100(\sqrt{3}+1)$

$$\approx 100(1.73+1)\approx 273(\text{m}).$$

1856. 从地上一点望烟囱顶,仰角是 60°. 从这一点正上方 40 m 高的地方,再测得到烟囱顶的仰角是 45°. 求烟囱的高度,及烟囱顶到两个观测点的距离.



解　设 CD 是烟囱, B 是观测者起初的位置, A 是观测者第二次的位置. 这时 $AB=40$ m, $\angle CBD=60^\circ$, $\angle CAE=45^\circ$ (AE 是通过 A 的水平线), 由此得 $\angle CBA=30^\circ$, $\angle CAB=135^\circ$, $\angle ACB=15^\circ$. 设 $CA=y$, $CB=x$, 由正弦定理得

$$\frac{y}{\sin 30^\circ}=\frac{40}{\sin 15^\circ},$$

从而

$$y=\frac{40\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ}=40\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$
$$=20(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\text{m}).$$

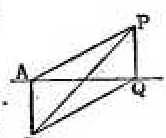
又　　$\dfrac{x}{\sin 135^\circ}=\dfrac{40}{\sin 15^\circ}$,

从而

$$x=\frac{40\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}=40\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$
$$=40(\sqrt{3}+1)(\text{m}).$$

由此进一步得

$$DC=BC\sin\angle CBD=40(\sqrt{3}+1)\sin 60^\circ$$
$$=40(\sqrt{3}+1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=20(3+\sqrt{3})(\text{m}).$$



1857. 设塔的顶部是 P, 基底是 Q, 水平面上 A、B 两点的距离是 32 m, $\angle QAB=90^\circ$, $\operatorname{ctg}\angle PAQ=\dfrac{2}{5}$, $\operatorname{ctg}\angle PBQ=\dfrac{3}{5}$, 问塔的高度约是多少?

解　设 PQ 是 x m, 于是

$$AQ=PQ\operatorname{ctg}\angle PAQ=\frac{2x}{5},$$

$$BQ=PQ\operatorname{ctg}\angle PBQ=\frac{3x}{5},$$

从直角三角形 BAQ 得

$$\left(\frac{2x}{5}\right)^2+32^2=\left(\frac{3x}{5}\right)^2.$$

因此　　$x=71.6$ m.

8. 其他

1858. 已知直角三角形的内切圆半径和直角的角平分线,解这个直角三角形.

解　设 $\triangle ABC$ 中 $\angle C=90^\circ$, 角 C 的平分线是 m, 内切圆的半径是 r, 则

$$m=\frac{2ab\cos\dfrac{C}{2}}{a+b}=\frac{\sqrt{2}\,ab}{a+b},$$

又　　$c+2r=a+b$,　$c^2=a^2+b^2$.

于是,从上面三个式子就可以求出边 a、b、c, 从而再求出角 A、B. 即从第二式得

$$(c+2r)^2=a^2+b^2+2ab=c^2+2ab,$$

因此　　$2ab=4cr+4r^2$,

$$ab=2cr+2r^2.$$

将这代入第一式,得

$$m=\frac{\sqrt{2}\,(2cr+2r^2)}{c+2r},$$

或　　$mc+2rm=2\sqrt{2}\,cr+2\sqrt{2}\,r^2$.

因此　　$c=\dfrac{2r(\sqrt{2}\,r-m)}{m-2\sqrt{2}\,r}$,

从而　$a+b=\dfrac{2r(\sqrt{2}\,r-m)}{m-2\sqrt{2}\,r}+2r$

$$=\frac{-2\sqrt{2}\,r^2}{m-2\sqrt{2}\,r},$$

$$ab=\frac{4r^2(\sqrt{2}\,r-m)}{m-2\sqrt{2}\,r}+2r^2$$

$$=\frac{-2mr^2}{m-2\sqrt{2}\,r}.$$

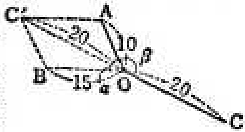
因此, a、b 是方程

$$(m-2\sqrt{2}\,r)X^2+2\sqrt{2}\,r^2X-2mr^2=0$$

的根.

1859. 要使作用于一点的三个力 10 kg、

15 kg、20 kg 平衡，各个力的方向必须如何确定？



解　设作用于一点的力分别是 OA、OB、OC，若取 OC 的反向延长线 $OC'=OC$，那么四边形 $OAC'B$ 是平行四边形，三个力就平衡. 设平行四边形 $OAC'B$ 中，$\angle AOB=\alpha$，$\angle AOC=\beta$，于是在三角形 AOC' 中

$$\cos\angle AOC'=\frac{10^2+20^2-15^2}{2\times10\times20}=\frac{275}{400}=0.6875,$$

$$\therefore\quad \angle AOC'=180^\circ-\beta\approx46^\circ34',$$

$$\therefore\quad \beta=133^\circ26'.$$

同样　$$\cos\angle OC'A=\frac{20^2+15^2-10^2}{2\times20\times15}=\frac{525}{600}=0.8750,$$

$$\therefore\quad \angle OC'A=\angle BOC'=\alpha-\angle AOC'\approx28^\circ57',$$

$$\therefore\quad \alpha=28^\circ57'+46^\circ34'=75^\circ31'.$$

1860. 一个三角形三边的大小分别是 a、b、c，a 所对的角是 α，它们之间有下列关系：

$$a+c=2b\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad ①$$

$$c^2=a(a+b), \qquad ②$$

求 a、b、c 的大小顺序和 α 的值.

解　在余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ 中，利用 ② 的关系 $c^2-a^2=ab$，得

$$ab=2bc\cos\alpha-b^2.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a&=2c\cos\alpha-b\\&=2c\cos\alpha-(c\cos\alpha+a\cos C)\\&=c\cos\alpha-a\cos C.\end{aligned}$$

运用正弦定理，再将 a、c 化成角，得

$$\begin{aligned}\sin\alpha&=\sin C\cos\alpha-\sin\alpha\cos C\\&=\sin(C-\alpha).\end{aligned}$$

因为从 ② 得 $c>a$，所以 $180^\circ>C>\alpha$.

$$\therefore\quad \alpha=C-\alpha,\quad \therefore\quad C=2\alpha.$$

从而　$$B=180^\circ-3\alpha.$$

又，在 ① 中利用正弦定理，将所有的边都化成角，得

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin2\alpha&=2\sin(180^\circ-3\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}\\&=2\sin3\alpha\cos\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

$$左边=2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$右边=4\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

在这个式子中，因为 $\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\neq0$，所以得

$$2\cos\frac{3\alpha}{2}=1,\quad \therefore\quad \frac{3}{2}\alpha=60^\circ,$$

$\therefore\quad \alpha=40^\circ.$

$\therefore\quad C=80^\circ,\ B=180^\circ-120^\circ=60^\circ.$

$\therefore\quad a:b:c=\sin40^\circ:\sin60^\circ:\sin80^\circ.$

$\therefore\quad a<b<c.$

1861. 在 $\triangle ABC$ 中：

(1) 已知 B、C 和 a，求 A 和 b、c；

(2) 已知 B、C 和 b，求 A 和 c、a.

解　首先

$$A=\pi-(B+C). \qquad ①$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sin A&=\sin[\pi-(B+C)]\\&=\sin(B+C). \qquad ②\end{aligned}$$

(1) 由正弦定理得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

用 ② 代入，为了区别已知项和未知项，我们将已知的用方框标出，即

$$\frac{\boxed{a}}{\boxed{\sin(B+C)}}=\frac{b}{\boxed{\sin B}}=\frac{c}{\boxed{\sin C}}.$$

从这个式子和 ① 容易得

$$A=\pi-(B+C),\quad b=\frac{a\sin B}{\sin(B+C)},$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin(B+C)}.$$

(2) 将它化成 (1) 的情况，容易得

$$A=\pi-(B+C),\quad c=\frac{b\sin C}{\sin B},$$

$$a=\frac{b\sin(B+C)}{\sin B}.$$

1862. 在三角形 ABC 中，已知 a、B、C，求 A、b、c. 如果 $a=143$，$B=70^\circ$，$C=23^\circ30'$，那么 A、b、c 各等于多少？

解　　$A=180^\circ-(B+C),$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

$$\therefore\quad b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{a\sin B}{\sin(B+C)},\qquad ①$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{a\sin C}{\sin(B+C)}.\qquad ②$$

因为 $a=143$, $B=70°$, $C=23°30'$, 所以

$$A=180°-(70°+23°30')=86°30'.$$

从①得

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{143\times\sin 70°}{\sin 86°30'}=\frac{143\times 0.9397}{0.9981}=134.6.$$

从②得

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{143\times\sin 23°30'}{\sin 86°30'}=\frac{143\times 0.3987}{0.9981}=57.1.$$

$$\therefore\quad A=86°30',\ b=134.6,\ c=57.1.$$

1863. 解不等式

$$\frac{\cos^2 x}{4\cos^2 x-3}>\frac{\sin^2 x}{1-4\sin^2 x}.$$

解　$4\cos^2 x-3=4(1-\sin^2 x)-3$

$$=1-4\sin^2 x.$$

因此,所给的不等式是

$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1-4\sin^2 x}>0.$$

$$\therefore\quad \frac{\cos 2x}{2\cos 2x-1}>0.$$

$$\therefore\quad \cos 2x(2\cos 2x-1)>0.$$

因此

$$\cos 2x<0\qquad ①$$

或

$$\cos 2x>\frac{1}{2}.\qquad ②$$

从①得

$$2n\pi+\frac{\pi}{2}<2x<2n\pi+\frac{3}{2}\pi,$$

$\therefore\quad n\pi+\frac{\pi}{4}<x<n\pi+\frac{3}{4}\pi$. ($n$ 是整数)

从②得 $2n\pi-\frac{\pi}{3}<2x<2n\pi+\frac{\pi}{3}$,

$\therefore\quad n\pi-\frac{\pi}{6}<x<n\pi+\frac{\pi}{6}$. ($n$ 是整数)

上面两个 x 的范围就是不等式的解。

1864. 若 $0<x<\frac{\pi}{2}$, 证明:

(1) $\sin x>x-\frac{1}{4}x^3$;

(2) $1-\frac{1}{2}x^2<\cos x<1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}x^4$.

解　(1) $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

$$=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right).$$

因为　$\operatorname{tg}\frac{x}{2}>\frac{x}{2}$, $1-\sin^2\frac{x}{2}>1-\left(\frac{x}{2}\right)^2$,

所以 $\sin x>2\cdot\frac{x}{2}\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)=x-\frac{1}{4}x^3$.

(2) 在 $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ 中, 因为 $\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}$, 所以

$$\cos x>1-2\left(\frac{x}{2}\right)^2=1-\frac{1}{2}x^2.$$

又 $\sin\frac{x}{2}>\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^3=\frac{x}{2}-\frac{1}{32}x^3>0$,

由此得

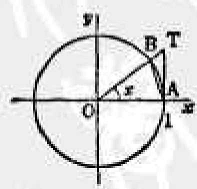
$$\cos x<1-2\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{32}x^3\right)^2$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{512}x^6$$

$$<1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}x^4.$$

1865. 若 $0<x<\frac{\pi}{2}$, 证明 $\sin x<x<\operatorname{tg}x$.

解　设单位圆中 $\angle AOB=x$, 则 $\triangle AOB<$ 扇形 AOB $<\triangle OAT$.



$$\therefore\quad \frac{1}{2}OA\cdot OB\sin x<\frac{1}{2}OA^2x<\frac{1}{2}OA\cdot AT.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x.$$

$$\therefore\quad \sin x<x<\operatorname{tg}x.$$

1866. 已知 $\cos^2 x+2p\sin x+q$ 的最大值是 9, 最小值是 6, 求 p、q 的值.

解　$\cos^2 x+2p\sin x+q$

$$=-\sin^2 x+2p\sin x+q+1$$

$$=-(\sin x-p)^2+p^2+q+1.$$

(1) 如果$p\leq -1$，当$\sin x=-1$时上式的值最大，这时$-2p+q=9$，当$\sin x=1$时上式的值最小，这时$2p+q=6$．从而得$p=-\frac{3}{4}$，与假定$p\leq -1$矛盾，所以这种情况无解．

(2) $p\geq 1$时，和上面的情况相同．

(3) 如果$-1<p\leq 0$，
当$\sin x=p$时有最大值
$$p^2+q+1=9.$$
当$\sin x=1$时有最小值
$$2p+q=6.$$
$$\therefore\quad p=1-\sqrt{3},\ q=4+2\sqrt{3}.$$

(4) 如果$0<p<1$，
当$\sin x=p$时有最大值
$$p^2+q+1=9.$$
当$\sin x=-1$时有最小值
$$-2p+q=6.$$
$$\therefore\quad p=-1+\sqrt{3},\ q=4+2\sqrt{3}.$$

1867．若$A+B+C=\pi$，证明：

(1) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$；

(2) $1<\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$．

解　(1)
$$p_1=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\right).$$
因此，在A一定的情况下，当$B=C$时p_1最大．如果A、B、C中有不相同的角，那么随着使它们逐渐相等，p_1的值就会增加，当$A=B=C=\frac{\pi}{3}$时p_1取得最大值，最大值是$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，所以
$$p_1\leq\frac{1}{8}.$$

(2)
$$p_2=\cos A+\cos B+\cos C$$
$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$
$$=1+2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)$$
$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>1.$$
再利用(1)的结果，即得
$$p_2\leq 1+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}.\quad\therefore\quad 1<p_2\leq\frac{3}{2}.$$

1868．证明在$\frac{a-b}{a+b}$和$\frac{a+b}{a-b}$之间，
$$\frac{a\sin x+b}{a\sin x-b}$$
没有值．这里$a>b>0$．

解　因为$a>b>0$，所以$\frac{a+b}{a-b}>\frac{a-b}{a+b}>0$．设$\frac{a\sin x+b}{a\sin x-b}=y$，因为$\sin x=\frac{b(y+1)}{a(y-1)}$，而$-1\leq\sin x\leq 1$，所以
$$-1\leq\frac{b(y+1)}{a(y-1)}\leq 1. \qquad ①$$

(1) 当$y>1$时，$-1\leq\frac{b(y+1)}{a(y-1)}$成立．从$\frac{b(y+1)}{a(y-1)}\leq 1$得$y\geq\frac{a+b}{a-b}$，因此要使①成立，必须有$y\geq\frac{a+b}{a-b}(>1)$．

(2) 当$y<1$时，用上面同样的方法，得为使①成立，必须有$y\leq\frac{a-b}{a+b}(<1)$．

$y=1$是不可能的．所以y在$\frac{a-b}{a+b}$和$\frac{a+b}{a-b}$之间不会有值．

1869．解不等式
$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x>0.$$

解
$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x$$
$$=2\cos 3x\cos 2x+\cos 3x$$
$$=\cos 3x(2\cos 2x+1)$$
$$=\cos x(4\cos^2 x-3)(4\cos^2 x-1).$$
因此
$$\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\times\cos x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>0.$$
因此
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<-\frac{1}{2}, \qquad ①$$
$$0<\cos x<\frac{1}{2}, \qquad ②$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x. \qquad ③$$

若 n 取整数，则

从①得 $2n\pi+\frac{2}{3}\pi<x<2n\pi+\frac{5}{6}\pi$,

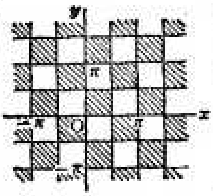
$2n\pi-\frac{5}{6}\pi<x<2n\pi-\frac{2}{3}\pi$;

从②得 $2n\pi+\frac{\pi}{3}<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}$,

$2n\pi-\frac{\pi}{2}<x<2n\pi-\frac{\pi}{3}$;

从③得 $2n\pi-\frac{\pi}{6}<x<2n\pi+\frac{\pi}{6}$.

1870. 用图表示以满足不等式 $\sin^2(x+y)-\sin^2(x-y)\geqq 0$ 的 x、y 为坐标的点的范围.



解　不等式的左边

$=[\sin(x+y)+\sin(x-y)]\times[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$

$=4\sin x\cos y\cos x\sin y$

$=\sin 2x\sin 2y\geqq 0$.

(1) 当 $\sin 2x\geqq 0$, $\sin 2y\geqq 0$ 时

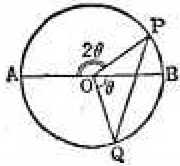
$$\begin{cases} m\pi\leqq x\leqq m\pi+\frac{\pi}{2}, & (m\text{ 是整数}) \\ n\pi\leqq y\leqq n\pi+\frac{\pi}{2}. & (n\text{ 是整数}) \end{cases}$$

(2) 当 $\sin 2x\leqq 0$, $\sin 2y\leqq 0$ 时

$$\begin{cases} m\pi-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq m\pi, & (m\text{ 是整数}) \\ n\pi-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq n\pi. & (n\text{ 是整数}) \end{cases}$$

图象如上图所示.

1871. 有一个圆形的池. 甲、乙两人从一条直径的两端朝同一方向沿池作圆周运动. 如果甲的速度是乙的两倍, 那么到乙绕池一圈为止, 两人的直线距离怎样变化? 用式子和图表示.



解　设圆心是 O, 半径是 a, 一条直径是 AB, 甲从 A 出发, 乙从 B 出发, 一段时间后甲、乙的位置分别是 P、Q, 且设 $\angle BOQ=\theta$, $\angle AOP=2\theta\,(0°\leqq\theta\leqq 360°)$, 由余弦定理得, 两人直线距离 l 的平方是

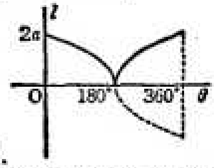
$l^2=PQ^2=OP^2+OQ^2-2OP\cdot OQ\cos\angle POQ$

$=a^2+a^2-2a^2\cos(180°+\theta-2\theta)$

$=2a^2(1+\cos\theta)$

$=4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$.

$\therefore\quad l=2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$



它的图象如右图所示.

1872. 在 x、y 的绝对值都在 3π 以下的范围内, 描出 $\cos x+\cos y=0$ 的图象.

解　$\cos x+\cos y=0$,

$$\therefore\quad 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=0.$$

因为 $-3\pi\leqq x\leqq 3\pi$, $-3\pi\leqq y\leqq 3\pi$, 所以

$$-3\pi\leqq\frac{x+y}{2}\leqq 3\pi,\quad -3\pi\leqq\frac{x-y}{2}\leqq 3\pi.$$

因此, 从 $\cos\frac{x+y}{2}=0$ 得

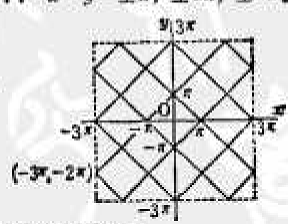
$$\frac{x+y}{2}=\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3}{2}\pi,\ \pm\frac{5}{2}\pi,$$

$$\therefore\quad x+y=\pm\pi,\ \pm 3\pi,\ \pm 5\pi.$$

又, 从 $\cos\frac{x-y}{2}=0$ 得

$$\frac{x-y}{2}=\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3}{2}\pi,\ \pm\frac{5}{2}\pi,$$

$$\therefore\quad x-y=\pm\pi,\ \pm 3\pi,\ \pm 5\pi.$$



因此, 图象如上图所示.

1873. 求满足下列条件的点 (x, y) 的范围, 并用图表示.

$$\sin x+\sin y<\sin\frac{x+y}{2},$$

$$0<x<\pi,\ 0<y<\pi.$$

解　$\sin x+\sin y<\sin\frac{x+y}{2}$,

$$\therefore\quad 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-\sin\frac{x+y}{2}<0.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{x+y}{2}\left(2\cos\frac{x-y}{2}-1\right)<0,$$

因为 $0<x<\pi$, $0<y<\pi$, 所以

$$0<\frac{x+y}{2}<\pi,\quad -\frac{\pi}{2}<\frac{x-y}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

因此

$$\sin\frac{x+y}{2}>0,\quad \therefore\quad \cos\frac{x-y}{2}<\frac{1}{2}.$$

于是 $$\frac{\pi}{3}<\frac{x-y}{2}<\frac{\pi}{2},$$

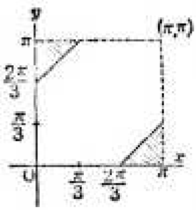
或 $$-\frac{\pi}{2}<\frac{x-y}{2}<-\frac{\pi}{3}.$$

即有

$$x-\pi<y<x-\frac{2\pi}{3}$$

或

$$x+\frac{2\pi}{3}<y<x+\pi.$$



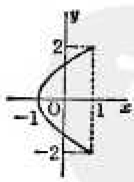
其中 $0<x<\pi$, $0<y<\pi$. 其图示为右图中有斜线的部分，不包括边界。

1874. 在下列各种情况下，当 t 从 $0°$ 变到 $360°$ 时点 (x,y) 画出怎样的曲线，写出它的方程并画略图。

(1) $x=\cos 2t$, $y=2\cos t$;

(2) $x=\sin t$, $y=\cos 2t$;

(3) $x=\cos t+\sin t+1$,
$y=\cos t-\sin t+1$.



解 (1) 因为 $\cos 2t=x$, $\cos t=\frac{y}{2}$, 所以代入 $\cos 2t=2\cos^2 t-1$ 后,

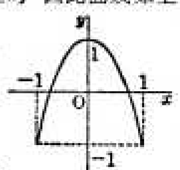
$$x=2\times\frac{y^2}{4}-1,\quad \therefore\quad x=2\times\frac{y^2}{4}-1.$$

其中 $-1\leq x\leq 1$, $-2\leq y\leq 2$, 因此曲线如上图，为抛物线的一部分。

(2) 同理，把已知条件代入

$$\cos 2t=1-2\sin^2 t,$$

有 $$y=1-2x^2,$$



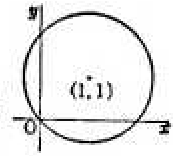
其中 $-1\leq x\leq 1$, $-1\leq y\leq 1$, 因此曲线也是抛物线的一部分。

(3) 把两式变形后再平方，得

$$(x-1)^2=\cos^2 t+\sin^2 t+2\sin t\cos t$$
$$=1+\sin 2t,$$

$$(y-1)^2=\cos^2 t+\sin^2 t-2\sin t\cos t$$
$$=1-\sin 2t.$$

$$\therefore\quad (x-1)^2+(y-1)^2=2.$$



它的图象是以(1, 1)为中心，半径为 $\sqrt{2}$ 的整个圆周。

1875. 当 $0°\leq\theta\leq 360°$ 时，以

$$\begin{cases} x=2^{\sin\theta}+2^{-\sin\theta} \\ y=2^{\sin\theta}-2^{-\sin\theta}, \end{cases}$$

为坐标的点 $P(x, y)$ 给出了怎样的曲线？画出这条曲线。

解 $$x=2^{\sin\theta}+2^{-\sin\theta},\qquad ①$$
$$y=2^{\sin\theta}-2^{-\sin\theta},\qquad ②$$

由①+②,

$$x+y=2\cdot 2^{\sin\theta},\qquad ③$$

①－②

$$x-y=2\cdot 2^{-\sin\theta},\qquad ④$$

③×④

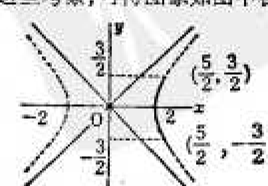
$$x^2-y^2=4.\qquad ⑤$$

因此点 P 在等轴双曲线 $x^2-y^2=4$ 上。

又 $2^{\sin\theta}$ 随 $\sin\theta$ 的增减而增减，$2^{-\sin\theta}$ 的增减则与 $\sin\theta$ 的增减相反,

θ	$0°$　$90°$　$180°$　$270°$　$360°$
$\sin\theta$	$0 \nearrow 1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0$
$2^{\sin\theta}$	$1 \nearrow 2 \searrow 1 \searrow \frac{1}{2} \nearrow 1$
$2^{-\sin\theta}$	$1 \searrow \frac{1}{2} \nearrow 1 \nearrow 2 \searrow 1$
x	2　$2\frac{1}{2}$　2　$2\frac{1}{2}$　2
y	0　$1\frac{1}{2}$　0　$-1\frac{1}{2}$　0

根据这些考察，可得图象如图中粗线所示。



1876. 已知 $\theta=\frac{\pi}{18}$，求

$$x^3+\frac{1}{x^3}-\left(x+\frac{1}{x}-2\cos\theta\right)\times\left[x+\frac{1}{x}-2\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right]\times\left[x+\frac{1}{x}-2\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

的值。

解 设 $x+\frac{1}{x}=X$，则

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=X^3-3X.$$

从而

$$\begin{aligned}原式&=X^3-3X-(X-2\cos\theta)\times\left[X-2\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right]\times\left[X-2\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right]\\&=X^3-3X-X^3+2X^2\left[\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right]\\&\quad-4X\left[\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\cos\theta+\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\&\quad+8\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\\&=\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\\&=\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\\&=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\cos\theta+\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{3}+\cos(2\theta+2\pi)\right]+\frac{1}{2}\left[\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos 2\theta\right]=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right.\\&\quad\left.+2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=-\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{18}\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{4\pi}{3}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{18}\times\frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\left(\frac{\pi}{9}+2\pi\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{18}+\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{18}+\cos\frac{\pi}{6}\right)\\&=\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 原式=X^3-3X-X^3+0-4\left(-\frac{3}{4}\right)X+8\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\sqrt{3}.$$

1877. 已知

$$\sin(\pi x^2)-\sin(\pi y^2)=\cos(\pi x^2)+\cos(\pi y^2),$$

画出点 (x, y) 的图象，其中 $|x|\leq 1$，$|y|\leq 1$。

解 $\sin(\pi x^2)-\sin(\pi y^2)=\cos(\pi x^2)+\cos(\pi y^2)$，

左右两边同时变形，则

$$2\cos\left(\frac{x^2+y^2}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{x^2-y^2}{2}\pi\right)=2\cos\left(\frac{x^2+y^2}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{x^2-y^2}{2}\pi\right).$$

$$\therefore\quad\cos\left(\frac{x^2+y^2}{2}\pi\right)\left[\sin\left(\frac{x^2-y^2}{2}\pi\right)-\cos\left(\frac{x^2-y^2}{2}\pi\right)\right]=0.$$

用公式 $\sin A-\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)$ 再变形，则

$$\cos\left(\frac{x^2+y^2}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{x^2-y^2}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

(1) 当 $\cos\left(\frac{x^2+y^2}{2}\pi\right)=0$ 时，有

$$\frac{x^2+y^2}{2}\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}\quad(n\text{ 为整数})$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=2n+1。\qquad①$$

但是因为$|x|\leq1$, $|y|\leq1$, 则

$$0\leq x^2\leq1,\ 0\leq y^2\leq1.$$

$$\therefore\quad 0\leq x^2+y^2\leq2。\qquad②$$

由①、②得　$0\leq2n+1\leq2$.

因为$2n+1$是奇数，适合上述条件的n只有$n=0$, 这时点(x, y)的图象满足方程

$$x^2+y^2=1\qquad③$$

是一个圆。

(2) 当$\sin\left(\frac{x^2-y^2}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=0$时，有

$$\frac{x^2-y^2}{2}\pi-\frac{\pi}{4}=n\pi,$$

$$\therefore\quad x^2-y^2=2n+\frac{1}{2}.\ (n\text{ 为整数})\qquad④$$

与(1)同样地应有

$$0\leq x^2\leq1,\ 0\leq y^2\leq1.$$

从而 $-1\leq-y^2\leq0$. 因此

$$-1\leq x^2-y^2\leq1.\qquad⑤$$

由④、⑤得

$$-1\leq2n+\frac{1}{2}\leq1,$$

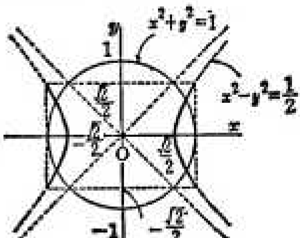
$$\therefore\quad -\frac{3}{2}\leq2n\leq\frac{1}{2}.$$

因为$2n$是偶数，满足上式的n只有$n=0$, 这时点P的图象为双曲线

$$x^2-y^2=\frac{1}{2}\qquad⑥$$

上满足$|x|\leq1$, $|y|\leq1$的部分。

由此，所求图象如下图。



1878. 当α由$0°$变化至$90°$时，以下式中x、y为坐标的点(x, y)构成怎样的图形。

$$\begin{cases}x=2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\\ y=3\sin\alpha\cos\alpha.\end{cases}$$

解
$$x=2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\qquad①$$
$$y=3\sin\alpha\cos\alpha.\qquad②$$

把①变形，

$$x=2\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$$
$$=3\cos^2\alpha-1,$$
$$\therefore\quad \cos^2\alpha=\frac{x+1}{3}.\qquad③$$

把②式两边平方，

$$y^2=9\sin^2\alpha\cos^2\alpha=9\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)$$
$$=9\cos^2\alpha-9\cos^4\alpha.\qquad④$$

把③代入④，则有

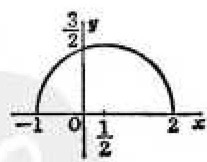
$$y^2=9\left(\frac{x+1}{3}\right)-9\left(\frac{x+1}{3}\right)^2,$$
$$x^2+y^2-x=2,$$
$$\therefore\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2.\qquad⑤$$

但是$0°\leq\alpha\leq90°$, 由此$0°\leq2\alpha\leq180°$,

$$\therefore\quad 0\leq\sin2\alpha\leq1,\qquad⑥$$

且

$$y=\frac{3}{2}\sin2\alpha.\qquad⑦$$



由⑥、⑦,

$$0\leq y\leq\frac{3}{2}.\qquad⑧$$

由③又知　$0\leq\frac{x+1}{3}\leq1$,

$$\therefore\quad -1\leq x\leq2.\qquad⑨$$

由⑥、⑧、⑨知所求的图象为⑤所表示的圆的上半部分。

1879. (1) 画出函数$y=\pi(1-|x|)$的图象，其中π表示圆周率。$(|x|\leq1)$

(2) 画出函数$y=\sin[\pi(1-|x|)]$的图象。

(3) 确定能使$\sin[\pi(1-|x|)]\leq\frac{1}{2}$成立的$x$的范围，其中设$|x|\leq2$.

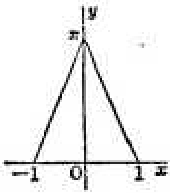
解 (1) 因为给出的方程式可写成

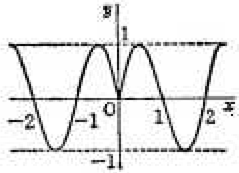
$$y=\begin{cases}\pi(1-x), & 1\geq x\geq0,\\ \pi(1+x). & -1\leq x<0,\end{cases}$$

故图如下所示。

(2) $y=\sin[\pi(1-|x|)]$
$=\sin(\pi-\pi|x|)$
$=\sin\pi|x|$.

故图象如下。





(3) $\sin[\pi(1-|x|)]\leq\frac{1}{2}$,

$\therefore\quad \sin\pi|x|\leq\frac{1}{2}$,

$\therefore\quad |x|\leq\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\leq|x|\leq2$.

1880. 已知三角形 ABC 和三角形 $A'B'C'$ 之间，内角 B 与 B' 相等，边之间有关系

$$aa'=bb'+cc', \qquad ①$$

试照下列程序来研究 A、A' 间存在着怎样的关系。

(1) 把 ① 化成三角形内角的三角函数关系式。

(2) 由(1)中所得式子推导出

$$\sin B+\sin(A+A'+B)=0. \qquad ②$$

(3) 把 ② 变形以求得 A 与 A' 之间的关系式。

解 (1) 用正弦定理，得

$$\sin A\sin A'=\sin^2B+\sin C\sin C'.$$

(2) 因为 $\sin C=\sin(A+B)$,

$\sin C'=\sin(A'+B)$,

所以

$$\sin^2B+\sin(A+B)\sin(A'+B)-\sin A\sin A'=0.$$

$$\sin^2B+\frac{1}{2}[\cos(A+A')-\cos(A+A'+2B)]=0.$$

$$\sin^2B+\sin(A+A'+B)\sin B=0.$$

因为 $\sin B\neq0$，所以

$$\sin B+\sin(A+A'+B)=0.$$

(3) $\sin(A+A'+B)=\sin(-B)$,

$\therefore\quad A+A'+B=n\pi+(-1)^n(-B)$,

由此得 $\qquad A+A'=\pi$.

即 A 和 A' 是互补的角。

1881. 求满足

$$\frac{\cos2x+\cos x-1}{\cos2x}>2,\quad(0<x<2\pi)$$

的角 x 的范围。

解 把 $\frac{\cos2x+\cos x-1}{\cos2x}>2$

移项，通分，有

$$0>\frac{\cos2x-\cos x+1}{\cos2x}=\frac{2\cos^2x-\cos x}{2\cos^2x-1},$$

设 $\cos x=y$，则

$$\frac{y(2y-1)}{(\sqrt{2}y-1)(\sqrt{2}y+1)}<0.$$

设这个不等式左边为 $f(y)$，

y	$-1\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\quad 0\quad \frac{1}{2}\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\quad 1$
$f(y)$	$+\qquad -\ 0\ +\ 0\ -\qquad +$

故满足不等式的 y 的范围是

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<y=\cos x<0$$

和 $$\frac{1}{2}<y=\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4},\\ \frac{5\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{2}.\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{3},\\ \frac{5\pi}{3}<x<\frac{7\pi}{4}.\end{cases}$$

1882. 在曲线 $y=\sin^2x\left(0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ 上取一点 A(A 不为原点)。在 x 轴上取一点 B，使 B 和 A 位于 y 轴同侧，且 $OA=OB$。直线 BA 和 y 轴的交点设为 P。当 A 沿曲线趋近 0 时，点 P 趋近什么位置。

解 在曲线 $y=\sin^2x\left(0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ 上取一不同于原点的点 $A(x,\ \sin^2x)$，在 x 轴上取 $B(a,\ 0)$，由 $OA=OB$ 得

$$\sqrt{x^2+\sin^4x}=a,\quad(a>0,\ x>0)$$

设直线 AB 上的点为 $(X,\ Y)$，则

$$Y=\frac{\sin^2x}{x-a}(X-a).$$

设直线 AB 和 y 轴的交点是 $P(0,\ Y_0)$，

$$Y_0=\frac{a\sin^2x}{a-x}.$$

用 $a=\sqrt{x^2+\sin^4x}$ 代入，

$$Y_0=\frac{\sqrt{x^2+\sin^4x}\cdot\sin^2x}{\sqrt{x^2+\sin^4x}-x}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+\sin^4x}\left(\sqrt{x^2+\sin^4x}+x\right)}{\sin^2x}$$

因为 $0<x\leq\frac{\pi}{2}$, $\sin x>0$.

$$\therefore\quad Y_0=\sqrt{\frac{x^2}{\sin^2 x}+\sin^2 x}\times\left(\sqrt{\frac{x^2}{\sin^2 x}+\sin^2 x}+\frac{x}{\sin x}\right).$$

又因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$, 所以 $\lim\limits_{x\to0}Y_0=2$. 因此 P 无限趋近于点 $(0,2)$.

1883. 设 $f(a)=A\sin a+B\cos a$, 求 A、B, 使对于任意的 a 都有 $\frac{1}{f(a)}=f(-a)$.

解 由 $f(a)f(-a)=1$, 得

$$\begin{aligned}&(A\sin a+B\cos a)(-A\sin a+B\cos a)\\&=B^2\cos^2 a-A^2\sin^2 a\\&=(B^2+A^2)\cos^2 a-A^2=1.\end{aligned}$$

若对任意的 a 上式成立, 则必须有 $B^2+A^2=0$, $-A^2=1$.

$$\therefore\quad \begin{cases}A=i,\\B=+1,\end{cases}\quad\begin{cases}A=i,\\B=-1,\end{cases}\quad\begin{cases}A=-i,\\B=+1,\end{cases}\quad\begin{cases}A=-i,\\B=-1.\end{cases}$$

1884. 已知 $\cos\alpha=k\sin\beta$, $\cos\beta=k\sin\gamma$, $\cos\gamma=k\sin\alpha$, 试用 k 表示 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. 其中 α、β、γ 都是正的锐角.

解 因为 α、β、γ 都是正的锐角, 所以 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ 都是正的, 因此 $k>0$. 由已知条件,

$$\cos\alpha=k\sin\beta,\qquad ①$$

$$\cos\beta=k\sin\gamma,\qquad ②$$

$$\cos\gamma=k\sin\alpha.\qquad ③$$

把 ① 式两边平方, 得

$$\cos^2\alpha=k^2\sin^2\beta=k^2(1-\cos^2\beta).$$

把 ② 式代入,

$$\begin{aligned}&=k^2(1-k^2\sin^2\gamma)=k^2-k^4\sin^2\gamma\\&=k^2-k^4(1-\cos^2\gamma).\end{aligned}$$

再把 ③ 式代入,

$$\begin{aligned}&=k^2-k^4(1-k^2\sin^2\alpha)\\&=k^2-k^4+k^6\sin^2\alpha\\&=k^2-k^4+k^6(1-\cos^2\alpha).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad (1+k^6)\cos^2\alpha=k^2(1-k^2+k^4).$$

$$\therefore\quad \cos^2\alpha=\frac{k^2(1-k^2+k^4)}{1+k^6}=\frac{k^2}{1+k^2},$$

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.\qquad ④$$

由 ①, $\sin\beta=\frac{1}{k}\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$,

因此

$$\begin{aligned}\cos^2\beta&=1-\sin^2\beta\\&=1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2=1-\frac{1}{1+k^2}\\&=\frac{k^2}{1+k^2},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \cos\beta=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

而由 ③,

$$\cos^2\gamma=k^2\sin^2\alpha=k^2(1-\cos^2\alpha),$$

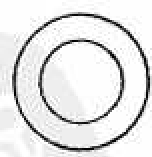
用 ④ 代入,

$$=k^2\left(1-\frac{k^2}{1+k^2}\right)=\frac{k^2}{1+k^2},$$

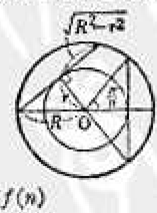
$$\therefore\quad \cos\gamma=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

$$\therefore\quad \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

1885. 有半径分别为 R、$r(R>r)$ 的两个同心圆, 与小圆相切的大圆之弦长为 L. 设大圆的内接正 n 边形、正 $(n+1)$ 边形的边长分别为 $f(n)$, $f(n+1)$. 若 $f(n+1)\leq L\leq f(n)$, 试确定比值 $r:R$ 的范围.



解 $L=2\sqrt{R^2-r^2}$,



$$f(n)=2R\sin\frac{\pi}{n},$$

$$f(n+1)=2R\sin\frac{\pi}{n+1}.$$

因此, 为使 $f(n+1)\leq L\leq f(n)$ 成立, 只需

$$\sin\frac{\pi}{n+1}\leq\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\leq\sin\frac{\pi}{n}.$$

$$\therefore\quad 1-\sin^2\frac{\pi}{n}\leq\frac{r^2}{R^2}\leq1-\sin^2\frac{\pi}{n+1}.$$

由此, 得 $\cos\frac{\pi}{n}\leq\frac{r}{R}\leq\cos\frac{\pi}{n+1}$.

1886. 试由 $\cos\theta=h$, $\operatorname{tg}\theta=k$ 消去 θ, 得出关于 h 和 k 的关系式.

解　因为 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，所以

$$\cos\theta\operatorname{tg}\theta=\sin\theta.$$

把已知值代入，有 $hk=\sin\theta$。结合 $h=\cos\theta$，有

$$h^2k^2+h^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

即 $$h^2(k^2+1)=1.$$

1887. 设三角形 ABC 中 $\angle A=90°$，$AB=AC=2$。过 B、C 作射线 BX、CY 垂直于 BC，且与 A 位于 BC 的同一侧，在 BX、AB、BC、CA、CY 上分别取点 P、Q、R、S、T，且使

$$PQ\parallel BC,\ \frac{\cos\angle BQP}{\cos\angle AQR}=\sqrt{2}.$$

$$\angle BRQ=\angle CRS,\ \frac{\cos\angle CST}{\cos\angle ASR}=\sqrt{2}.$$

设 $BP=x$，$CT=y$，问 x、y 间有什么关系？

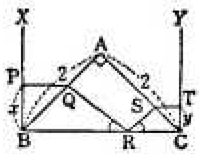
解　因为

$\angle BRQ=\angle CRS$，

$\angle ABR=\angle ACR$，

所以

$\angle AQR=\angle ASR$。



又因为

$$\frac{\cos\angle BQP}{\cos\angle AQR}=\sqrt{2}=\frac{\cos\angle CST}{\cos\angle ASR},$$

得 $$\cos\angle BQP=\cos\angle CST,$$

$$\therefore\ \angle BQP=\angle CST.$$

由 $PQ\parallel BC$ 得 $\angle BPQ=90°$，

$$\angle BQP=\angle ABC=45°,$$

$$\therefore\ \angle CST=45°.$$

因此 $ST\parallel BC$，$\angle CTS=90°$，

由 $$\frac{\cos\angle BQP}{\cos\angle AQR}=\sqrt{2},$$

$$\cos\angle BQP=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

得 $$\cos\angle AQR=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ \angle AQR=60°.$$

从而 $\angle BQR=120°$，$\angle BRQ=15°$。

由正弦定理，

$$\frac{BQ}{\sin 15°}=\frac{BR}{\sin 120°},$$

$$\therefore\ BQ=\frac{BR\sin 15°}{\sin 120°},$$

由 $BP=BQ\cos 45°$，得

$$BP=\frac{BR\sin 45°\sin 15°}{\sin 120°}. \qquad ①$$

因为 $\triangle BPQ\backsim\triangle CTS$，$\triangle BRQ\backsim\triangle CRS$，同理可得

$$CT=\frac{CR\sin 15°\sin 45°}{\sin 120°}. \qquad ②$$

因为

$$\frac{\sin 15°\sin 45°}{\sin 120°}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

$$BR+CR=BC=2\sqrt{2}.$$

把①、②两边相加，

$$BP+CT=2\sqrt{2}\times\frac{3-\sqrt{3}}{6},$$

$$\therefore\ x+y=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}.$$

1888. 设点 $(0,0)$，$(2,a)$，$(2,b)$ 分别为 O、A、B，$\angle AOB=\theta$（其中 $a>b$）。

(1) 试用 a、b 表示 $\operatorname{tg}\theta$；

(2) 求使 $\theta=45°$ 成立的整数 a、b 的值。

解　(1) 设 OA、OB 与 x 轴交成角 α、β，则

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

因为 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a}{2}$，$\operatorname{tg}\beta=\dfrac{b}{2}$，有

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{2(a-b)}{4+ab}.$$

(2) 因 $\theta=45°$，$\operatorname{tg}\theta=1$，所以 $2a-2b=4+ab$，

$$\therefore\ (a+2)(2-b)=8.$$

若 a、b 为整数，且满足条件 $a>b$，应有

$$\begin{cases}a+2=1,\\2-b=8,\end{cases}\quad\begin{cases}a+2=2,\\2-b=4,\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+2=4,\\2-b=2,\end{cases}\quad\begin{cases}a+2=8,\\2-b=1.\end{cases}$$

由此 $$\begin{cases}a=-1,\\b=-6,\end{cases}\quad\begin{cases}a=0,\\b=-2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=2,\\b=0,\end{cases}\quad\begin{cases}a=6,\\b=1.\end{cases}$$

1889. 在三边长为 x，y，$\sqrt{x^2-xy+y^2}$ 的三角形中（$x>y$），求在大小顺序中位于中间的哪个角。

解　因为 $x, y, \sqrt{x^2-xy+y^2}$ 都是正的，平方以后它们的大小关系不变。因为

$$x^2-(x^2-xy+y^2)=xy-y^2$$
$$=y(x-y)>0,$$
$$(x^2-xy+y^2)-y^2=x(x-y)>0,$$

所以要求的角是长为 $\sqrt{x^2-xy+y^2}$ 的边的对角，设为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{x^2+y^2-(x^2-xy+y^2)}{2xy}=\frac{1}{2},$$
$$\therefore\quad \theta=60°.$$

1890. 在三角形 ABC 中，已知 $a=\sqrt{6}$，$b=2\sqrt{3}$，$c=3+\sqrt{3}$，求 A。

解　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

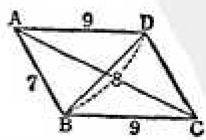
$$=\frac{12+(12+6\sqrt{3})-6}{2\times2\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{18+6\sqrt{3}}{12(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{6\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{12(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\therefore\quad A=30°.$$

1891. 试答下列关于平行四边形 $ABCD$ 的问题。

(1) $AB=7$，$BC=9$，$BD=8$ 时，求 AC。

(2) $AB=3$，$BC=5$，$BD=7$ 时，求 $\angle B$。

解　(1) 在 $\triangle ABD$ 中，



$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\times\cos\angle BAD,$$
$$8^2=7^2+9^2-2\cdot7\cdot9\cos\angle BAD.$$
$$\therefore\quad \cos\angle BAD=\frac{49+81-64}{126}=\frac{11}{21}.$$

又在 $\triangle ABC$ 中，

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC$$
$$=7^2+9^2+2\cdot7\cdot9\cos\angle BAD$$
$$=7^2+9^2+2\cdot7\cdot9\cdot\frac{11}{21}=196=14^2,$$
$$\therefore\quad AC=14.$$

(2) $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A$

$$=AB^2+AD^2+2AB\cdot AD\cos B,$$
$$\therefore\quad \cos B=\frac{7^2-3^2-5^2}{2\cdot3\cdot5}=\frac{1}{2},$$

因为 $0<\angle B<180°$，所以 $\angle B=60°$。

1892. 已知三角形 ABC 中，

$$a:b:c=2:3:4,$$

求 $\cos A:\cos B:\cos C$。

解　用余弦定理，有

$\cos A:\cos B:\cos C$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}:\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}:\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{9+16-4}{3\times4}:\frac{16+4-9}{4\times2}:\frac{4+9-16}{2\times3}$$
$$=\frac{21}{12}:\frac{11}{8}:\frac{-3}{6}=42:33:(-12)$$
$$=14:11:(-4).$$

1893. 满足

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta,\ (0°<\theta<180°)$$

的三个正数 a、b、c，是不是常可构成一个三角形的三条边长。

解　作一个两边长为 a、b，这两边的夹角为 θ 的三角形，根据余弦定理，其第三边 c 应满足

$$c'^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta,\quad \therefore\quad c=c'.$$

由此知上述三角形的三边长为 a, b, c，即满足给出关系式的三个正数 a, b, c 总可构成一个三角形的三边长。

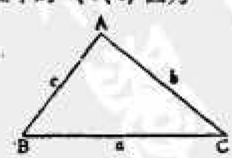
1894. 已知直角三角形 ABC 中有

$$\cos A+8\cos B+\cos C=4,$$

求三边的比。

解　若 $\angle B=90°$，则 $\cos A+\cos C=4$，不合理，故 $\angle B\neq90°$。这样只要考察 $\angle A=90°$ 就行了。设三边如图中的 a、b、c，因为

$$\cos A=0,$$
$$\cos B=\frac{c}{a},$$
$$\cos C=\frac{b}{a},$$



由已知式得　$8\dfrac{c}{a}+\dfrac{b}{a}=4,$

$$\therefore\quad a=\frac{b+8c}{4}. \qquad ①$$

因为是直角三角形，

$$a^2=b^2+c^2, \qquad ②$$

把①代入②，

$$15b^2-16bc-48c^2=0,$$
$$\therefore\quad (3b+4c)(5b-12c)=0,$$

因为 $3b+4c>0$，所以 $b=\dfrac{12}{5}c$，代入①，

$a=\frac{13}{5}c,$

$$\therefore\quad a:b:c=\frac{13}{5}c:\frac{12}{5}c:c=13:12:5.$$

1895. 已知三角形 ABC 中，

$$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6.$$

求比值 $\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$.

解
$$\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}=\frac{a+b}{6}$$
$$=\frac{2(a+b+c)}{15}=\frac{a+b+c}{7.5}$$
$$=\frac{a}{3.5}=\frac{b}{2.5}=\frac{c}{1.5}.$$
$$\therefore\quad \frac{a}{7}=\frac{b}{5}=\frac{c}{3}.$$
$$\therefore\quad \sin A:\sin B:\sin C=7:5:3.$$

又由第二余弦定理，

$\cos A:\cos B:\cos C$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}:\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}:\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{25+9-49}{5\times3}:\frac{9+49-25}{3\times7}:\frac{49+25-9}{7\times5}$$
$$=\frac{-15}{15}:\frac{33}{21}:\frac{65}{35}=(-1):\frac{11}{7}:\frac{13}{7}$$
$$=(-7):11:13.$$

因此

$\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$

$$=2\sin A\cos A:2\sin B\cos B:2\sin C\cos C$$
$$=(-7\times7):5\times11:3\times13$$
$$=(-49):55:39.$$

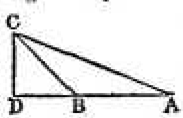
1896. 作直线 DBA 的垂线 CD. 且

$$AB=59,\ \angle CBD=45^\circ,$$
$$\angle CAB=32^\circ50',\ \operatorname{ctg}32^\circ50'=1.5497,$$

求 DC 和 BD.

解 设 $CD=x$，因为 $\angle CBD=45^\circ$，所以 $DB=x$. 从而

$$AD=CD\operatorname{ctg}A=x\operatorname{ctg}32^\circ50',$$



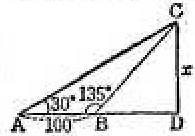
因此

$$AB=x\operatorname{ctg}32^\circ50'-x,$$

又

$$59=1.5497x-x=0.5497x,$$
$$\therefore\quad x=\frac{59}{0.5497}=107.33\cdots.$$

1897. 已知三角形 ABC 中，$A=30^\circ$，$B=135^\circ$，$AB=100\,\mathrm{m}$. 由 C 向 AB 的延长线作垂线，求垂线的长度.



解 设 D 为由 C 向 AB 延长线所作垂线的垂足 $CD=x$. 因为

$$AD=x\operatorname{ctg}A,$$
$$BD=x\operatorname{ctg}\angle CBD,\ AB=AD-BD,$$

所以

$$100=x\operatorname{ctg}30^\circ-x\operatorname{ctg}(180^\circ-135^\circ),$$

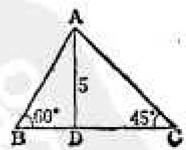
即
$$100=x\cdot\sqrt{3}-x,$$

故
$$x=\frac{100}{\sqrt{3}-1}=50(\sqrt{3}+1)$$
$$=136.6(\mathrm{m}).$$

1898. 在三角形 ABC 中，AD 为 BC 上的高，$AD=5$，$\angle ABD=60^\circ$，$\angle ACD=45^\circ$. 解这个三角形.

解 $\angle A=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$,

$$AC=AD\csc C=5\csc45^\circ$$
$$=5\sqrt{2}=7.07\cdots,$$
$$AB=AD\csc B=5\csc60^\circ$$
$$=5\times\frac{2}{\sqrt{3}}=5.7735\cdots.$$



在 $\triangle ADC$ 中

$$DC=AD=5,$$

在 $\triangle ABD$ 中

$$BD=AB\cdot\cos B$$
$$=5.7735\times\cos60^\circ$$
$$=5.7735\times\frac{1}{2}=2.8868.$$

因此　$BC=5+2.8868=7.8868.$

1899. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，$\operatorname{tg}A=\frac{11}{3}$，$AC=\frac{27}{11}$. 求 AB.

解 $\operatorname{tg}A=\frac{BC}{AC}$，故

$$AC\cdot\operatorname{tg}A=BC,$$

即
$$BC=\frac{27}{11}\times\frac{11}{3}=9,$$

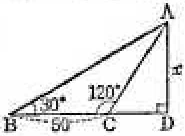
从而

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{\left(\frac{27}{11}\right)^2+9^2}$$
$$=\frac{9}{11}\sqrt{130}.$$

1900. 在三角形 ABC 中 $BC=50$，$B=$

$30°$, $C=120°$. 求 BC 上的高的长度.

解　由 A 向 BC 的延线作垂线,垂足为 D. 在 $\triangle ABD$ 中



$$BD=AD\operatorname{ctg}\angle ABD$$
$$=AD\operatorname{ctg}30°.$$

又在 $\triangle ACD$ 中

$$CD=AD\operatorname{ctg}\angle ACD$$
$$=AD\operatorname{ctg}(180°-120°)=AD\operatorname{ctg}60°.$$

由于 $BC=BD-CD$, 所以

$$50=AD\operatorname{ctg}30°-AD\operatorname{ctg}60°.$$

故 $$AD=\frac{50}{\operatorname{ctg}30°-\operatorname{ctg}60°}.$$

把 $\operatorname{ctg}30°=\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}60°=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 代入, 化简,得

$$AD=25\sqrt{3}\simeq 433.$$

1901. 在三角形 ABC 中 $BC=50$, $B=30°$, $C=120°$, 求这个三角形的面积.

解　由上题知 $AD=25\sqrt{3}$, $BC=50$, 代入面积公式 $\frac{1}{2}BC\times AD$, 有

$$\frac{1}{2}\times 50\times 25\sqrt{3}=25^2\times\sqrt{3}=1082.5.$$

1902. 在三角形 ABC 中, 能不能有 $A=30°$, $b=100$, $a=40$?

解　$\sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{100}{40}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$.

这是不能成立的, 因为任何情况下正弦总不能比 1 大.

1903. 已知

$a=4258.39$, $B=32°12'29.8''$, $C=90°$, 解三角形.

解　由 $b=a\operatorname{tg}B=4258.39\operatorname{tg}32°12'29.8''$, 得

$$\lg b=\lg 4258.39+\lg\operatorname{tg}32°12'29.8''$$
$$=3.6292454+\bar{1}.7992960$$
$$=3.4285414,$$

故 $b=2682.51$. 由

$$c=a\sec B=4258.39\sec 32°12'29.8'',$$

得 $$\lg c=\lg 4258.39+\lg\sec 32°12'29.8''$$
$$=3.6292454+0.0725706$$
$$=3.7018160,$$

故 $$c=5032.87.$$

1904. 解

$b=6384.263$, $B=48°23'55.32''$, $C=90°$ 的直角三角形 ABC.

解

$a=b\operatorname{ctg}B=6384.263\operatorname{ctg}48°23'55.32''$,

因此

$$\lg a=\lg 6384.263+\lg\operatorname{ctg}48°23'55.32''$$
$$=3.8051108+\bar{1}.9483553$$
$$=3.7534661.$$

故 $$a=5668.473.$$

$c=b\csc B=6384.263\csc 48°23'55.32''$,

因此

$$\lg c=\lg 6384.263+\lg\csc 48°23'55.32''$$
$$=3.8051108+0.1262244$$
$$=3.9313352.$$

故 $$c=8537.6.$$

1905. 解 $a=496.738$, $b=305.624$, $C=90°$ 的直角三角形 ABC.

解　$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}$, 因此

$$\lg\operatorname{tg}A=\lg a-\lg b$$
$$=\lg 496.738-\lg 305.624$$
$$=2.6961274-2.4851875$$
$$=0.2109399,$$

故 $$A=58°23'51.33''.$$

从而

$B=90°-58°23'51.33''=31°36'8.67''$.

$c=a\csc A=496.738\csc 58°23'51.33''$,

因此

$$\lg c=\lg 496.738+\lg\csc 58°23'51.33''$$
$$=2.6961274+0.0697109$$
$$=2.7658383.$$

故 $$c=583.228.$$

1906. 已知直角三角形 ABC 中斜边 $c=6953$, $b=3$, 求 B.

给出　$\lg 3.475=0.5409548$,

$\lg 6.953=0.8421722$,

$\lg\sin 44°59'15''=\bar{1}.8493902$, 且当角度有 $1''$ 的变化时对数值变化 0.0000021.

解　$$\sin\left(45°-\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\sin B}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{6953}\right)}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{6950}{6953}}=\sqrt{\frac{3475}{6953}}.$$

故

$$\lg\sin\left(45°-\frac{B}{2}\right)=\lg\sqrt{\frac{3475}{6953}}$$
$$=\frac{1}{2}(\lg 3475-\lg 6953)$$
$$=\bar{1}.8493913.$$

$$\begin{array}{l} \bar{1}.8493913 \\ \underline{\bar{1}.8493902} \\ 0.0000011 \end{array}\qquad 0.0000021:0.0000011=1'':x'',$$

由此 $x=0.5$，故

$$45°-\frac{B}{2}=44°59'15.5'',\ \frac{B}{2}=44.5'',$$
$$B=1'29''.$$

1907. 在直角三角形中
$$a=34828.43,\ B=48°35'27''.$$
试计算 b。当 a 不变，b 增大 20 时，$\angle B$ 增加多少?

解　由 $b=a\operatorname{tg}B$，有

$$\lg b=\lg a+\lg\operatorname{tg}B$$
$$=\lg 34828.43+\lg\operatorname{tg}48°35'27''$$
$$=4.5419339+0.545792$$
$$=4.5965131.$$

故　　$b=39492.36$。

现在，b 增加 20，成为 39512.36。设这时 B 增加了 θ，则

$$\operatorname{tg}(B+\theta)=\frac{39512.36}{34828.43},$$

从而

$$\lg\operatorname{tg}(B+\theta)=\lg 39512.36-\lg 34828.43$$
$$=4.5967330-4.5419339$$
$$=0.0547991.$$

因此　　$B+\theta=48°36'18.8''$,

故 $\theta=48°36'18.8''-48°35'27''=51.8''$。

1908. 直角三角形中直角的平分线把斜边分成长为 4.319、5.238 两部分，求两条直角边的长。

解　设两条直角边的长为 a、b，则因为

$$\frac{a}{4.319}=\frac{b}{5.238},$$

故　　$$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}=\frac{4.319}{5.238},$$

$$\lg\operatorname{tg}A=\lg 4.319-\lg 5.238$$
$$=0.6353832-0.7191655$$
$$=\bar{1}.9162177,$$

从而　　$A=39°30'26''$。

因此
$$B=90°-39°30'26''=50°29'34''.$$

因为　　$a=c\sin A$,

所以

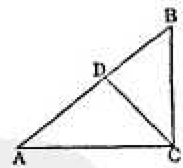
$$a=(4.319+5.238)\sin 39°30'26'',$$
$$\lg a=\lg 9.557+\lg\sin 39°30'26''$$
$$=0.9803216+\bar{1}.8035769$$
$$=0.7838985,$$
$$a=6.07993.$$

又因为　　$b=c\sin B$,

所以

$$b=(4.319+5.238)\sin 50°29'34'',$$
$$\lg b=\lg 9.557+\lg\sin 50°29'34''$$
$$=0.9803216+\bar{1}.8873609$$
$$=0.8676825,$$
$$b=7.37365.$$

1909. 三角形 ABC 的三条高为 20, 15, 12，求它的面积和三条边长。



解　因为三条边和三条高的倒数成比例，所以三条边的比是 $\frac{1}{20}:\frac{1}{15}:\frac{1}{12}$，即成 3:4:5，这是一个直角三角形。设如图，则 $AC=20$，$BC=15$，第三边为

$$\sqrt{20^2+15^2}=25.$$

面积为

$$\frac{1}{2}AC\times BC=\frac{1}{2}\times 20\times 15=150.$$

1910. 已知三角形 ABC 中，
$$b=2,\ B=30°,\ C=135°.$$
解这个三角形。

解　$A=180°-(30°+135°)=15°$。

由正弦定理，

$$\frac{a}{\sin 15°}=\frac{2}{\sin 30°}=\frac{c}{\sin 135°},$$

所以得

$$a=\frac{2\sin 15°}{\sin 30°}=2\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\times 2$$
$$=\sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

$$c=\frac{2\sin 135°}{\sin 30°}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2=2\sqrt{2}.$$

1911. 已知三角形 ABC 中 $a=2$，$c=$

$\sqrt{3}+1$, $A=45°$，解这个三角形。

解　由正弦定理，

$$\frac{2}{\sin 45°}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sin C},$$

$$\therefore\quad \sin C=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin 45°$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

因此 $C=75°$ 或 $C=105°$。

(i) $C=75°$ 时，

$$B=180°-(45°+75°)=60°,$$

从而 $$b=\frac{2\sin 60°}{\sin 45°}=\sqrt{6}.$$

(ii) $C=105°$ 时，

$$B=180°-(45°+105°)=30°,$$

从而 $$b=\frac{2\sin 30°}{\sin 45°}=\sqrt{2}.$$

1912. 已知三角形 ABC 中 $a^2=b^2+bc+c^2$，求 $\angle A$。

解　由公式 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得

$$b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+bc+c^2,$$

两边减去 b^2+c^2，有

$$-2bc\cos A=bc,\ -2\cos A=1,$$

从而 $$\cos A=-\frac{1}{2},$$

即 $$A=120°.$$

1913. 证明

$$\frac{2\operatorname{tg}A-\sin 2A}{2\operatorname{ctg}A-\sin 2A}=\operatorname{tg}^4 A.$$

解

原式左边

$$=\frac{2\operatorname{tg}A\sin A\cos A-2\sin^2 A\cos^2 A}{2\operatorname{ctg}A\sin A\cos A-2\sin^2 A\cos^2 A}$$

$$=\frac{\sin^2 A-\sin^2 A\cos^2 A}{\cos^2 A-\sin^2 A\cos^2 A}$$

$$=\frac{\sin^2 A(1-\cos^2 A)}{\cos^2 A(1-\sin^2 A)}=\frac{\sin^4 A}{\cos^4 A}=\operatorname{tg}^4 A.$$

1914. 证明

$$\frac{\sin^2 A+\cos 2A+\cos^2 A}{\sin 2A}=\operatorname{ctg}A.$$

解　$$原式左边=\frac{1+\cos 2A}{\sin 2A}=\frac{2\cos^2 A}{\sin 2A}$$

$$=\frac{2\cos^2 A}{2\sin A\cos A}=\frac{\cos A}{\sin A}=\operatorname{ctg}A.$$

1915. 证明

$$(1+\sec 2\theta)(1+\sec 4\theta)(1+\sec 8\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta)=\frac{\operatorname{tg}2^n\theta}{\operatorname{tg}\theta}.$$

解　$$1+\sec 2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta},$$

但是因为

$$\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\frac{2\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\operatorname{ctg}\theta,$$

$$\therefore\quad 上式=\operatorname{tg}2\theta\operatorname{ctg}\theta=\frac{\operatorname{tg}2\theta}{\operatorname{tg}\theta}.$$

同样地，有

$$1+\sec 4\theta=\frac{\operatorname{tg}4\theta}{\operatorname{tg}2\theta}.$$

继续下去，可推导得

$$1+\sec 2^n\theta=\frac{\operatorname{tg}2^n\theta}{\operatorname{tg}2^{n-1}\theta}.$$

把这些式子两边分别相乘，便得到所求的结果。

1916. 证明，在三角形 ABC 中，

$$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0.$$

解　$c\sin(A-B)=a\sin A-b\sin B$。

同理有

$$a\sin(B-C)=b\sin B-c\sin C,$$

$$b\sin(C-A)=c\sin C-a\sin A.$$

因此原式左边的和常为 0。

1917. 在 $C=90°$ 的直角三角形 ABC 中，证明

(1) $$c=\frac{s}{\sqrt{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}},$$

其中 s 为三角形的半周长。

(2) 三角形的内切圆半径 r 为

$$r=\sqrt{2}c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

解　(1) 把 $a=c\sin A$, $b=c\cos A$ 代入 $a+b+c=2s$，则有

$$c\sin A+c\cos A+c=2s,$$

$$c=\frac{2s}{\sin A+\cos A+1}.$$

分母 $=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}$

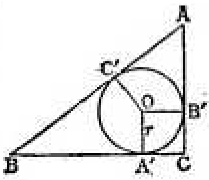
$$=2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)$$

$$=2\sqrt{2}\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{90^\circ-B}{2}+45^\circ\right)$$

$$\therefore\quad c=\frac{s}{\sqrt{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

(2) 如右图，内切圆与三角形三边的切点分别为 A', B', C'，则



$AB'=AC'$,

$BC'=BA'$,

$CA'=CB'=r$.

三角形的周长设为 s，由上述关系得

$$2(AC'+BC'+r)=2s,$$

$$\therefore\quad r=s-(AC'+BC')=s-c.$$

由 (1)，得 $s=\frac{c}{2}(\sin A+\cos A+1)$，

所以

$$r=\frac{c}{2}(\sin A+\cos A-1)$$

$$=\frac{c}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}-2\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=c\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=c\sin\frac{A}{2}\cdot\sqrt{2}\cos\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)$$

$$=\sqrt{2}c\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{90^\circ-B}{2}+45^\circ\right)$$

$$=\sqrt{2}c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

1918．证明，在三角形 ABC 中，

$$\cos(A+B)=-\cos C.$$

解　由公式 $\cos\alpha=-\cos(180^\circ-\alpha)$，知

$$\cos(A+B)=-\cos[180^\circ-(A+B)],$$

但因为 A、B、C 是三角形的三个内角，所以

$$A+B+C=180^\circ,$$

因此　　$180^\circ-(A+B)=C$,

$$\therefore\quad \cos(A+B)=-\cos C.$$

1919．证明，在三角形 ABC 中

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}C.$$

解　因为 A、B、C 是三角形的三个内角，所以

$$A+B+C=180^\circ,$$

故 $\frac{1}{2}(A+B+C)=90^\circ$，即 $\frac{1}{2}(A+B)$ 和 $\frac{1}{2}C$ 是互为余角．因此

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}C.$$

1920．证明，在三角形 ABC 中，

$$\cos(A+B+C)=-1.$$

解　因为 A、B、C 是三角形的内角，所以

$$A+B+C=180^\circ,$$

又因为 $\cos180^\circ=-1$，所以

$$\cos(A+B+C)=-1.$$

1921．证明，在三角形 ABC 中，

$$\mathrm{tg}(A+B)=-\mathrm{tg}C.$$

解　因为 $\mathrm{tg}\,\alpha=-\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)$，所以

$$\mathrm{tg}(A+B)=-\mathrm{tg}[180^\circ-(A+B)],$$

由于 A、B、C 是三角形的内角，所以

$$A+B+C=180^\circ,$$

因此　　$180^\circ-(A+B)=C$,

$$\therefore\quad \mathrm{tg}(A+B)=-\mathrm{tg}C.$$

1922．证明，在三角形 ABC 中，

$\mathrm{tg}\frac{1}{2}(A+B+C)$ 不存在．

解　因为 A、B、C 是三角形的内角，所以

$$A+B+C=180^\circ,$$

从而　　$\frac{1}{2}(A+B+C)=90^\circ$,

因为　　$\mathrm{tg}90^\circ$ 不存在，

所以　　$\mathrm{tg}\frac{1}{2}(A+B+C)$ 不存在．

1923．证明，在三角形 ABC 中，

$$\cos\frac{1}{2}(A+B+C)=0.$$

解　因为 A、B、C 是三角形的内角，所以

$$A+B+C=180^\circ,$$

$$\frac{1}{2}(A+B+C)=90^\circ,$$

因为 $\cos90^\circ=0$，所以

$$\cos\frac{1}{2}(A+B+C)=0.$$

1924．证明，在三角形 ABC 中，

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)=\sin\frac{1}{2}C.$$

解　因为$\frac{1}{2}(A+B)$与$\frac{1}{2}C$互为余角，所以

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)=\sin\frac{1}{2}C.$$

1925. 证明，在三角形ABC中，

$$\cos(A+B-C)=-\cos 2C.$$

解　$\cos(A+B-C)$

$$=-\cos[180°-(A+B-C)].$$

因为$180°=A+B+C$，所以

$$180°-(A+B-C)=2C.$$

$$\therefore\quad \cos(A+B-C)=-\cos 2C.$$

1926. 证明，在三角形ABC中，

$$\sin(A+B+C)=0.$$

解　因为A、B、C是三角形的内角，所以

$$A+B+C=180°,$$

由于$\sin 180°=0$，得

$$\sin(A+B+C)=0.$$

1927. 证明，在三角形ABC中，

$$\sin\frac{1}{2}(A+B+C)=1.$$

解　因为A、B、C是三角形的内角，所以

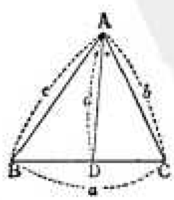
$$A+B+C=180°,$$

从而　$\frac{1}{2}(A+B+C)=90°.$

但是$\sin 90°=1$，因此

$$\sin\frac{1}{2}(A+B+C)=1.$$

1928. 三角形ABC的$\angle A$的平分线为AD，试把AD的长度d用a、b、c表示。



解　由图知

$$\triangle ABD+\triangle ADC=\triangle ABC,$$

所以　$\frac{1}{2}cd\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bd\sin\frac{A}{2}$

$$=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

两边乘以2，左边提取$d\sin\frac{A}{2}$，得

$$(b+c)d\sin\frac{A}{2}=bc\sin A,$$

右边用二倍角公式化简后为$2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$，两边再除以$\sin\frac{A}{2}(>0)$，有

$$(b+c)d=2bc\cos\frac{A}{2}.$$

$$\therefore\quad d=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

$$\therefore\quad d=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc\cdot s(s-a)}.$$

1929. 若三角形ABC中$a\cos A=b\cos B$，则三角形ABC的形状是怎样的?

解　由正弦定理

$$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B.$$

$$\therefore\quad 2R\sin A\cos A=2R\sin B\cos B.$$

$$\sin 2A-\sin 2B=0.$$

$$\therefore\quad \sin(A-B)\cos(A+B)=0.$$

有　$\sin(A-B)=0$

或　$\cos(A+B)=0.$

因为$-\pi<A-B<\pi$，所以当$\sin(A-B)=0$时有

$$A-B=0.$$

因为$0<A+B<\pi$，故当$\cos(A+B)=0$时有$A+B=\frac{\pi}{2}$. 从而有$A=B$或$C=90°$. 即三角形ABC或者是$AC=BC$的等腰三角形，或者是$\angle C=90°$的直角三角形。

别解　已知式中用

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

代入，去分母，并作因式分解，得

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0.$$

因为$a+b>0$，故有$a=b$或$a^2+b^2=c^2$成立。

1930. 已知$A+B+C=180°$,

$$\frac{\sin A}{x}=\frac{\sin B}{y}=\frac{\sin C}{z}.$$

证明　$(y-z)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+(z-x)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$

$$+(x-y)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=0.$$

解　设$\frac{\sin A}{x}=\frac{\sin B}{y}=\frac{\sin C}{z}=\frac{1}{k}$，则

$$x=k\sin A,\ y=k\sin B,\ z=k\sin C.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 左边&=k(\sin B-\sin C)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\\&\quad+k(\sin C-\sin A)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\\&\quad+k(\sin A-\sin B)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\\&=2k\left(\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right.\\&\quad+\cos\frac{C+A}{2}\sin\frac{C-A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\\&\quad\left.+\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)\\&=2k\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right.\\&\quad+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\\&\quad\left.+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)\\&=2k\left(\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}\right.\\&\quad+\sin\frac{C-A}{2}\cos\frac{B}{2}\\&\quad\left.+\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\\&=2k\left(\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}\right.\\&\quad+\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{C+A}{2}\\&\quad\left.+\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}\right)\\&=-k[\cos B-\cos(-C)+\cos C\\&\quad-\cos(-A)+\cos A-\cos(-B)]\\&=0.\end{aligned}$$

1931. 在$C=90°$的直角三角形ABC中，有$c+b=3a$. 试求$a:b$.

解　把$c=3a-b$代入关系式$a^2+b^2=c^2$，则有

$$a^2+b^2=(3a-b)^2,$$

化简，得　$8a^2=6ab$，即　$4a=3b$，

$$\therefore\quad a:b=3:4.$$

1932. 三条边长为

$$m+n,\ m-n,\ \sqrt{2(m^2+n^2)}$$

的三角形中，有一个角的正弦为

$$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1),$$

求其余两个角.

解　设$\sqrt{2(m^2+n^2)}$所对的角为A，则

$$\cos A=\frac{(m+n)^2+(m-n)^2-2(m^2+n^2)}{2(m+n)(m-n)}=0,$$

所以$A=90°$. 设正弦为$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$的角为B，则$B=18°$，从而第三个角C为

$$180°-(90°+18°)=72°.$$

1933. 在三角形ABC中，已知$a=70$，$b=35$，$C=36°52'12''$，求其他各角.（取

$$\lg 3=0.4771213,$$
$$\lg\operatorname{ctg}18°26'6''=0.4771213).$$

解

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)&=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\\&=\frac{70-35}{70+35}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\\&=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}18°26'6''.\end{aligned}$$

所以　$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\lg\operatorname{ctg}18°26'6''-\lg 3=0.$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=1.$$

$$\frac{1}{2}(A-B)=45°.$$

又因为　$\frac{1}{2}(A+B)=71°33'54''$，

所以　$A=116°33'54''$，$B=26°33'54''$.

1934. 在三角形ABC中，已知$a=10$，$b=30$，$\lg\sin A=\bar{1}.5228787$. 求$B$.

解　由正弦定理，得

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a},$$

因此　$\lg\sin B=\lg b+\lg\sin A-\lg a.$

即　$\lg\sin B=\lg 30+\lg\sin A-\lg 10=1.4771213+\bar{1}.5228787-1=0$

从而　　$B=90°.$

1935. 已知三角形ABC中$a=\sqrt{2}$，$b=10$，$\sin A=\frac{1}{4}$，求c.

解　因为$\sin B=\frac{b}{a}\sin A$，所以

$$\sin B=\frac{1}{4}\times\frac{10}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2\sqrt{2}},$$

这里 $\sin B>1$，因此这个三角形不存在。

1936. 一个三角形中两条边长为 3、12，这两条边的夹角为 30°，求与这个三角形等面积的等腰直角三角形的斜边长度。

解

$$三角形的面积=\frac{1}{2}\times3\times12\times\sin30^\circ$$

$$=\frac{36}{4}=9.$$

设所求等腰直角三角形的斜边为 x，则两直角边为 $\frac{x}{\sqrt{2}}$，面积为 $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$ 即 $\frac{x^2}{4}$，于是 $\frac{x^2}{4}=9$，$x^2=36$，得 $x=6$。

1937. 已知三角形 ABC 中 $\sin B=0.25$，$a=5$，$b=2.5$，求 $\angle A$。

解 $\sin A=\frac{a}{b}\sin B=\frac{5}{2.5}\times0.25=\frac{1}{2}$.

故 $A=30^\circ$ 或 $A=150^\circ$。由 $\sin B=0.25$ 得 $B=14^\circ29'$ 或 $165^\circ31'$。当 B 是钝角时 $A=30^\circ$ 或 $A=150^\circ$ 都导致 $A+B>180^\circ$，所以不可能。当 B 是锐角时，$A=30^\circ$ 或 $A=150^\circ$ 都有 $A+B<180^\circ$，因此，这时可以有 $A=30^\circ$，$A=150^\circ$ 两种解。

1938. 设三角形 ABC 中 $A=60^\circ$，$b=c(2+\sqrt{3})$，求 $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$ 和 B、C。

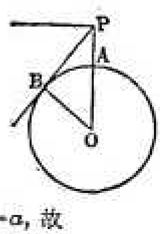
解 $\frac{b}{c}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}$，$\frac{b-c}{b+c}=\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，因此由公式

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

可得
$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}=1.$$

从而 $\frac{1}{2}(B-C)=45^\circ$，因为 $A=60^\circ$，所以 $\frac{1}{2}(B+C)=60^\circ$。因此 $B=105^\circ$，$C=15^\circ$。



1939. 在地球表面上高为 h 的一点看地平线的俯角为 α，求地球的半径。

解 设 AP 高为 h，从 P 看地平线的俯角为 $\angle POB=\alpha$，故

$$\cos\alpha=\frac{OB}{OP}=\frac{r}{r+h}.$$

因此得
$$r=\frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

1940. 等腰三角形的腰长为 2，面积为 1，求底边和底角。

解 设二腰为 b、c，因为

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

$$\therefore\quad 1=\frac{1}{2}\times2\times2\sin A.$$

故 $\sin A=\frac{1}{2}$，从而 $A=30^\circ$ 或 150°。若 $A=30^\circ$，则

$$B=C=90^\circ-\frac{30^\circ}{2}=75^\circ.$$

若 $A=150^\circ$，则

$$B=C=90^\circ-\frac{150^\circ}{2}=15^\circ.$$

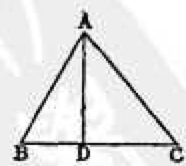
$B=75^\circ$ 时，

$$底边=2c\cos B=2\times2\cos75^\circ$$
$$=\sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

$B=15^\circ$ 时，

$$底边=2c\cos B=2\times2\cos15^\circ$$
$$=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

1941. 已知三角形 ABC 中 $A=75^\circ$，$C=45^\circ$，由 A 向 BC 所作垂线的长为 12m，求三条边的长。



解 因 $C=45^\circ$，$\angle CAD$ 也为 45°，所以 $CD=AD=12\text{m}$。

故 $AC=AD\csc C$
$=12\sqrt{2}\,(\text{m})$。

又因为 $A=75^\circ$，$\angle CAD=45^\circ$，所以 $\angle BAD=30^\circ$。由此，

$$AB=AD\csc60^\circ=12\times\frac{2}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}\,(\text{m}).$$

因为
$$BD=AD\operatorname{tg}\angle BAD$$
$$=12\times\operatorname{tg}30^\circ=\frac{12}{\sqrt{3}}(\text{m}).$$

所以 $BC=12+\frac{12}{\sqrt{3}}=12+4\sqrt{3}\,(\text{m})$。

1942. 已知三角形三边为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，求内角。

解　在公式 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 中用

$$a=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad b=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

代入，则得

$$\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{6+2+2\sqrt{12}}{16}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos A,$$

因此得　$\cos A=\dfrac{1}{2}$，从而　$A=60°$。

同理

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{4}+\frac{6+2+2\sqrt{12}}{16}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos B,$$

因此得　$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而　$B=45°$。

$$\frac{6+2+2\sqrt{12}}{16}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C,$$

因此　　$\cos C=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$，

从而　　　$C=75°$。

1943．三角形的一边为另一边的一半，它们的夹角为 60°，求这个三角形的内角。

解　设 $c=\dfrac{1}{2}b$ 和 $A=60°$，则

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\operatorname{ctg}30°=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以　　$\dfrac{1}{2}(B-C)=30°$，

$\dfrac{1}{2}(B+C)=60°$。

由此得　　$B=90°$，$C=30°$。

1944．已知三角形 ABC 中

$$A=18°,\ a=4,\ b=4+\sqrt{80},$$

解三角形。

解　$\sin B=\dfrac{b}{a}\sin A=\dfrac{4+\sqrt{80}}{4}\sin 18°$

$$=(1+\sqrt{5})\sin 18°$$

$$=\frac{(1+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{4}=1.$$

故 $B=90°$，因此 $C=72°$。

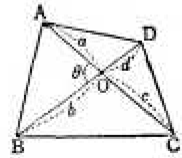
$$c^2=b^2-a^2=(4+\sqrt{80})^2-16$$

$$=80+8\sqrt{80}=16(5+2\sqrt{5}),$$

故　　$c=4\sqrt{5+2\sqrt{5}}$。

1945．设四边形 $ABCD$ 的对角线交角之一为 θ，面积为 S，证明

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\theta.$$



解　设对角线的交点为 O，则

$OA=a$，$OB=b$，

$OC=c$，$OD=d$，

则

$\triangle OAB$ 面积 $=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$，

$\triangle OBC$ 面积 $=\dfrac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta)=\dfrac{1}{2}bc\sin\theta$，

$\triangle OCD$ 面积 $=\dfrac{1}{2}cd\sin\theta$，

$\triangle ODA$ 面积 $=\dfrac{1}{2}da\sin(\pi-\theta)=\dfrac{1}{2}da\sin\theta$。

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}[b(a+c)+d(a+c)]\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BD}\sin\theta.$$

别解　过 A、C 作 BD 的平行线，过 B、D 作 AC 的平行线，构成一个平行四边形，其面积的一半为 S，再用 1947 题的结论。

1946．求下列各种情况下的三角形 ABC 的面积。

(1) $b=5$，$c=4$，$A=60°$；

(2) $c=3$，$a=4$，$B=135°$；

(3) $a=6$，$b=10$，$C=150°$。

解　(1) $S=\frac{1}{2}bc\sin A$

$$=\frac{1}{2}\times5\times4\times\sin60°=5\sqrt{3}.$$

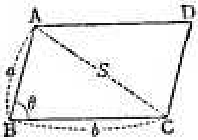
(2) $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin45°$

$=3\sqrt{2}$.

(3) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times10\times\sin150°$

$=15$.

1947. 设平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=a$, $BC=b$, $\angle B=\theta$, 用 a, b, θ 表示面积 S.



解　$S=2\triangle ABC$面积

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot ab\sin\theta$$

$$=ab\sin\theta.$$

1948. 求下列各种情况下三角形 ABC 的面积.

(1) $a=13\,\text{m}$, $b=14\,\text{m}$, $c=15\,\text{m}$;

(2) $a=77\,\text{cm}$, $b=75\,\text{cm}$, $c=68\,\text{cm}$.

解　(1) $s=\frac{1}{2}(13+14+15)=21$,

$$s-a=21-13=8,\ s-b=21-14=7,$$

$$s-c=21-15=6,$$

$$S=\sqrt{21\cdot8\cdot7\cdot6}=\sqrt{2^4\cdot3^2\cdot7^2}$$

$$=2^2\cdot3\cdot7=84(\text{m}^2).$$

(2) 仿照(1)即可, $S=2310(\text{m}^2)$.

1949. 若三角形各边为 3, 5, 6, 求它的内切圆与外接圆半径之比.

解　$r=\frac{S}{s}$, $R=\frac{abc}{4S}$, 所以 $\frac{R}{r}=\frac{sabc}{4S^2}$, 因为 $s=7$, $s-a=4$, $s-b=2$, $s-c=1$, 故 $S=\sqrt{7\cdot4\cdot2}$, 因此

$$\frac{R}{r}=\frac{7\times3\times5\times6}{4\times7\times4\times2}=\frac{45}{16}.$$

1950. 证明,三角形 ABC 中,

$$\sin(A+B)=\sin C.$$

解　由公式 $\sin\alpha=\sin(180°-\alpha)$, 有

$$\sin(A+B)=\sin[180°-(A+B)],$$

因为　$A+B+C=180°$,

所以　$\sin(A+B)=\sin C$.

1951. 若三角形 ABC 中 $b=4$, $c=\sqrt{2}$, $A=45°$. 求另外两角的正弦和余弦.

解　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$=4^2+2-2\times4\times\sqrt{2}\cos45°$$

$$=10.$$

从而 $a=\sqrt{10}$. 由正弦定理,有

$$\sin B=\frac{4\sin45°}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}\times\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\sin C=\frac{\sqrt{2}\sin45°}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

又　$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$=\frac{10+2-16}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{10+16-2}{2\cdot\sqrt{10}\cdot4}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

1952. 证明

$$\sum[\sin^4\alpha\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)]$$

$$=-\prod\sin(\beta+\gamma)\cdot\prod\sin(\beta-\gamma).$$

解　在恒等式 $\sum a^2(b-c)=-\prod(b-c)$ 中,设 $a=\sin^2\alpha$, $b=\sin^2\beta$, $c=\sin^2\gamma$, 则

$$b-c=\sin^2\beta-\sin^2\gamma$$

$$=\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma),$$

$\therefore$　$\sum\sin^4\alpha\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)$

$$=-\prod\sin(\beta+\gamma)\prod\sin(\beta-\gamma).$$

1953. 若 A、B、C 为三角形的三个内角, 证明 $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ 不大于 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

解　$\sin A+\sin B+\sin C$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

因为当三角形为正三角形时上式取得最大值, 所以 $A=B=C=60°$, 最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\therefore\ \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

1954. 证明,三角形 ABC 中,

$$2\operatorname{ctg}A+2\operatorname{ctg}B+2\operatorname{ctg}C$$

$$\geqq\csc A+\csc B+\csc C.$$

解 $\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C-\csc A$

$$=\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}-\frac{1}{\sin A}$$
$$=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}-\frac{1}{\sin A}$$
$$=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}-\frac{1}{\sin A}$$
$$=\frac{\sin^2 A-\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}.$$

仿此，作三个式子的和，得

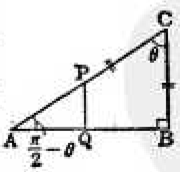
$$(\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C-\csc A)+(\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} A-\csc B)+(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B-\csc C)=\frac{p}{\sin A\sin B\sin C}.$$

其中

$$2p=2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-\sin B\sin C-\sin C\sin A-\sin A\sin B)$$
$$=(\sin A-\sin B)^2+(\sin B-\sin C)^2+(\sin C-\sin A)^2.$$

$\therefore\ p\geqq 0,\ \therefore\ 2\sum\operatorname{ctg} A\geqq\sum\csc A.$

1955. 在长为1的线段 AB 的端点 B 处，作 AB 的垂线，在垂线上任取点 C。在线段 AC 上取一点 P，使 $CB=CP$。设从 P 向 AB 所作垂线的足为 Q。



(1) 设 $\angle ACB=\theta$，试用 θ 表示 PQ 的长度。

(2) 求出能使 PQ 的长度取最大值的 $\cos\theta$。

解 (1) 因为 $\frac{BC}{AB}=\operatorname{ctg}\theta$，$AB=1$，所以

$$BC=\operatorname{ctg}\theta,\quad AC=\frac{AB}{\sin\theta}=\csc\theta.$$

$\therefore\ AP=AC-BC=\csc\theta-\operatorname{ctg}\theta,$

$$PQ=AP\sin\angle PAQ$$
$$=(\csc\theta-\operatorname{ctg}\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta}.$$

(2) 设 $f(\theta)=\frac{\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta}$，则

$$f'(\theta)=[(-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta)\sin\theta-\cos\theta(\cos\theta-\cos^2\theta)]\div\sin^2\theta$$
$$=[-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin^2\theta\cos\theta+\cos^3\theta]\div\sin^2\theta$$
$$=(2\sin^2\theta\cos\theta+\cos^3\theta-1)\div\sin^2\theta$$
$$=\frac{1}{\sin^2\theta}(2\cos\theta-\cos^3\theta-1).$$

设其为0，则

$$2\cos\theta-\cos^3\theta-1=0.$$
$$(\cos\theta-1)(1-\cos\theta-\cos^2\theta)=0.$$

当 $\cos\theta-1=0$ 即 $\sin\theta=0$ 时 $f'(\theta)$ 的分母为0，显然不适合题意。由 $\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$ 得

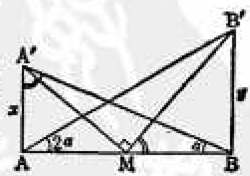
$$\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

其中 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 使 $\cos\theta$ 为负，因此不适合。

当 C 靠近于 B 时，θ 近似于 $\frac{\pi}{2}$。C 远离 B 时，θ 逐渐减小，而 PQ 从0逐渐增大。当 C 趋向无穷远时 P 与 A 重合，PQ 又趋向0。因此，在这个过程中总会有 PQ 取到最大值的地方。即有最大值，故解为

$$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

1956. 在平地上相隔120 m处有甲、乙两塔。从甲塔底部看乙塔顶部的仰角，是从乙塔底部看甲塔顶部的仰角的2倍。而从两塔底连线中点分别看两塔顶部的仰角互为余角。这两座塔的高是多少？



解 设甲、乙两塔为 AA'、BB'，线段 AB 的中点是 M，设 $AA'=x$(m)，$BB'=y$(m)，$\angle A'BA=\alpha$，$\angle B'AB=2\alpha$，则有

$$x=120\operatorname{tg}\alpha,\quad y=120\operatorname{tg}2\alpha. \qquad ①$$

因为 $\angle A'MA+\angle B'MB=90^\circ$。

所以直角三角形 $AA'M$ 与直角三角形 $BB'M$ 是相似的。

$$\therefore\ AA':AM=BM:BB'.$$
$$\therefore\ x:60=60:y,$$

从而

$$xy=60^2. \qquad ②$$

由①、②得

$$120^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha=60^2.$$

$$4\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=1.$$

由此得 $9\operatorname{tg}^2\alpha=1$，因为 $0°<\alpha<90°$，所以

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3},\ \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{3}{4}.$$

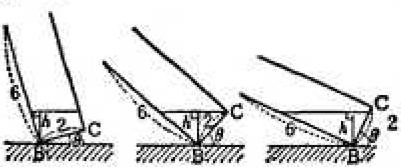
由①，$x=40$，$y=90$。故甲塔高 40 m，乙塔高 90 m。

1957. 把一个一条底边 AB 长 1cm、另一条底边 BC 长 2cm、高为 6cm 的立方体容器放在水平面上，注入深为 $\sqrt{3}$ cm 的水，现在，使 AB 边不动，把容器慢慢地倾斜。

(1) 把水面深度 h 表示成 BC 的倾角 θ 的函数；

(2) 求水面的最大深度和这时的角 θ。

解 (1)



(1)　　(2)　　(3)

(i) $\operatorname{tg}\theta\leq\sqrt{3}\left(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}\right)$ 时，利用水的体积不变，有

$$1\times2\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times1\times2\times2\operatorname{tg}\theta$$
$$+1\times2\sec\theta(h-2\sin\theta).$$
$$\therefore\quad h=2\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta$$
$$=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right).\qquad①$$

（参见图(1)、(2)）。

(ii) $\sqrt{3}<\operatorname{tg}\theta\leq3\sqrt{3}$ 时（见图(3)），

$$1\times2\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times1\times h\csc\theta\times h\sec\theta.$$
$$\therefore\quad h=\sqrt{4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\sqrt{2\sqrt{3}\sin2\theta}.\qquad②$$

(iii) $3\sqrt{3}<\operatorname{tg}\theta$ 时，

$$h=6\cos\theta.\qquad③$$

(2) 计算并考察 $\frac{dh}{d\theta}$ 的符号。

(i) $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ 时，

$$\frac{dh}{d\theta}=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right).$$

(ii) $\sqrt{3}<\operatorname{tg}\theta<3\sqrt{3}$ 时，

$$\frac{dh}{d\theta}=\sqrt{2\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}\,\frac{2\cos2\theta}{\sqrt{\sin2\theta}}<0.$$
$$\left(\because\quad\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}\text{ 时 }\cos2\theta<0\right).$$

(iii) $3\sqrt{3}<\operatorname{tg}\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 时，

$$\frac{dh}{d\theta}=-6\sin\theta<0.$$

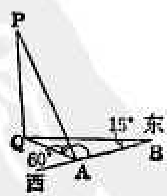
θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		α		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dh}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
h		↗	极大	↘		↘		↘	

最大

表中 $\operatorname{tg}\alpha=3\sqrt{3}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$。

由这张图表知，$\theta=\frac{\pi}{6}$ 时 h 有最大值 2。

1958. 由相隔 25 米的 A、B 两处，看一棵树，这棵树分别是在东 45° 北与西 15° 北的方向，从 A 处看树梢的仰角为 60°，求树的高，设树的根部与观察点在同一平面上。



解 如右图设树为 PQ，$\angle QAB=45°$，$\angle QBA=15°$。则 $\angle AQB=120°$。因为 $AB=25$ m，所以

$$AQ=\frac{25\sin15°}{\sin120°}.$$

因为
$$\sin120°=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin15°=\sin(45°-30°)$$
$$=\sin45°\cos30°-\cos45°\sin30°$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

所以
$$AQ=25\times\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$=25\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}.\qquad①$$

又由于 $\angle PAQ=60°$，所以

$$PQ=AQ\operatorname{tg}60°=AQ\cdot\sqrt{3}. \quad ③$$

把①代入②，则

$$PQ=25\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{3}$$

$$=\frac{25(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}=12.9(\text{m}).$$

1959. 利用三角学中的公式证明，若 $x+y+z=xyz$，则

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$$

$$=\frac{(3x-x^3)(3y-y^3)(3z-z^3)}{(1-3x^2)(1-3y^2)(1-3z^2)}.$$

解 设 $x=\operatorname{tg}A$，$y=\operatorname{tg}B$，$z=\operatorname{tg}C$，则由 $x+y+z=xyz$ 可得 $\operatorname{tg}(A+B+C)=0$ 即 $A+B+C=n\pi$，其中 n 为整数。所以有 $3A+3B+3C=3n\pi$，进而有

$$\operatorname{tg}3A+\operatorname{tg}3B+\operatorname{tg}3C=\operatorname{tg}3A\operatorname{tg}3B\operatorname{tg}3C.$$

但是 $\operatorname{tg}3A=\dfrac{3\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}^3A}{1-3\operatorname{tg}^2A}=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$，

同理，
$$\operatorname{tg}3B=\frac{3y-y^3}{1-3y^2},$$

$$\operatorname{tg}3C=\frac{3z-z^3}{1-3z^2}.$$

代入前面的式子后即获证。

1960. 在垒球比赛中，击球者以与连接本垒及游击手的直线成 15° 的方向打出，球速为游击手最大跑速的四倍，问游击手是否能接着球。

解 设能接着，其地点为 B，游击手跑出地点为 A。本垒为 O，从打出到接着的时间为 t，打球的速度为 v，则

$$\angle AOB=15°,\ OB=vt,\ AB\leq\frac{v}{4}t.$$

设 $\angle OAB=\theta°$，由正弦定理，

$$\frac{vt}{\sin\theta°}=\frac{AB}{\sin 15°},$$

$$\therefore\quad \sin\theta°=\frac{vt}{AB}\sin 15°\geq 4\sin 15°$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{2}>1.$$

故不存在这样的 θ，因此不能接着球。

1961. 以 A 为顶点的等腰直角三角形 ABC 内接于半径为 1 的圆 O，P 为劣弧 AC 上的点，$\angle POA=\theta$。

(1) 试用 θ 表示 PA 的长度。

(2) 当 P 在劣弧 AC 上运动时，求 $PA+PB+PC$ 的最大值。

解 (1) 设 PA 的中点为 M，则

$$PA=2MA$$

$$=2OA\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}.$$

(2) 与(1)同样可得

$$PB=2\sin\frac{90°+\theta}{2},$$

$$PC=2\sin\frac{90°-\theta}{2}.$$

$$\therefore\quad PA+PB+PC$$

$$=2\left(\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{90°+\theta}{2}+\sin\frac{90°-\theta}{2}\right)$$

$$=2\left(\sin\frac{\theta}{2}+2\sin 45°\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\left(\sin\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \quad ①$$

$$=2\cdot\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

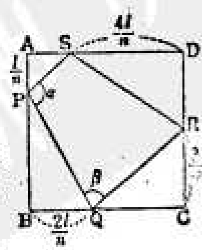
$$=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\alpha\right).$$

其中 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$。因为 $0°<\dfrac{\theta}{2}<45°$，$45°<\alpha<90°$，所以存在着一个 θ 满足 $\dfrac{\theta}{2}+\alpha=90°$。因此 $PA+PB+PC$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$。

1962. 把边长为 l 的正方形各边分成 n 等分，在 AB，BC，CD，DA 上分别有点 P，Q，R，S，且

$$AP=\frac{l}{n},\ BQ=\frac{2l}{n},$$

$$CR=\frac{3l}{n},\ DS=\frac{4l}{n}.$$



回答下列关于四边形 $PQRS$ 的问题（设 n 为大于等于 5 的整数）。

(1) 若 $\angle SPQ=\alpha$，$\angle PQR=\beta$，把 $\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}\beta$ 用 n 表示出来。

(2) 分别求出：(i)使 α 为直角，(ii)使 α 为最小时的 n 值.

(3) 求能使 β 为最小的 n 值.

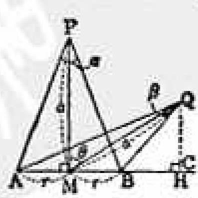
解 (1) 若设 $\angle APS=\alpha_1$, $\angle BPQ=\alpha_2$，则
$$\alpha=180^\circ-(\alpha_1+\alpha_2),$$
$$\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{-(\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2)}{1-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}.$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{AS}{AP}=\frac{\dfrac{(n-4)l}{n}}{\dfrac{l}{n}}=n-4.$$
$$\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{BQ}{PB}=\frac{\dfrac{2l}{n}}{\dfrac{(n-1)l}{n}}=\frac{2}{n-1}.$$
$$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2=(n-4)+\frac{2}{n-1}=\frac{n^2-5n+6}{n-1}.$$
$$1-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2=1-\frac{2(n-4)}{n-1}=\frac{-(n-7)}{n-1}.$$
$$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{-\dfrac{n^2-5n+6}{n-1}}{-\dfrac{(n-7)}{n-1}}=\frac{n^2-5n+6}{n-7}.$$
设 $\angle BQP=\beta_1$, $\angle CQR=\beta_2$，则
$$\operatorname{tg}\beta_1=\frac{n-1}{2},\quad \operatorname{tg}\beta_2=\frac{3}{n-2}.$$
$$\operatorname{tg}\beta=-\operatorname{tg}(\beta_1+\beta_2)=\frac{-(\operatorname{tg}\beta_1+\operatorname{tg}\beta_2)}{1-\operatorname{tg}\beta_1\operatorname{tg}\beta_2}.$$
$$\operatorname{tg}\beta_1+\operatorname{tg}\beta_2=\frac{n-1}{2}+\frac{3}{n-2}=\frac{n^2-3n+8}{2(n-2)},$$
$$1-\operatorname{tg}\beta_1\operatorname{tg}\beta_2=1-\frac{n-1}{2}\cdot\frac{3}{n-2}=\frac{-(n+1)}{2(n-2)}.$$
$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\dfrac{-(n^2-3n+8)}{2(n-2)}}{\dfrac{-(n+1)}{2(n-2)}}=\frac{n^2-3n+8}{n+1}.$$
$$\begin{cases}\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{n^2-5n+6}{n-7},\\[2mm] \operatorname{tg}\beta=\dfrac{n^2-3n+8}{n+1}.\end{cases}$$

(2) 若 $\alpha=90^\circ$，由上式可知 $n=7$. $n\geq 8$ 时 $\operatorname{tg}\alpha>0$，即 α 是锐角，$6\geq n>5$ 时 $\operatorname{tg}\alpha<0$，即 α 为钝角（由题设知 $n\geq 5$）.

因此，α 取最小时应该在 $n\geq 8$ 的范围内，这也就是 $\operatorname{tg}\alpha$ 取最小的时候. 因为
$$\operatorname{tg}\alpha=n+2+\frac{20}{n-7}=n-7+\frac{20}{n-7}+9$$
$$=\left(\sqrt{n-7}-\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{n-7}}\right)^2+9+2\sqrt{20}.$$
所以当 $\sqrt{n-7}=\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{n-7}}$ 即当 $n-7=\sqrt{20}$ 时取到最小.
$$\therefore\quad n=7+4.4\cdots=11.4\cdots,$$
但 n 应取整数
$$n=11 \text{ 时 } \operatorname{tg}\alpha=18.$$
$$n=12 \text{ 时 } \operatorname{tg}\alpha=18.$$
故当 $n=11$ 或 12 时 α 取到最小.

(3) 因为
$$\operatorname{tg}\beta=\frac{(n-2)^2+n+4}{n+1}>0,$$
所以 β 为锐角,
$$\operatorname{tg}\beta=n-4+\frac{12}{n+1}$$
$$=\left(\sqrt{n+1}-\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{n+1}}\right)^2-5+4\sqrt{3}.$$
当 $\sqrt{n+1}=\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{n+1}}$ 时有 $n+1=2\sqrt{3}$ 且 $\operatorname{tg}\beta$ 取最小. 但 $5>2\sqrt{3}$，故当 $n\geq 5$ 时 $\operatorname{tg}\beta$ 是 n 的增函数，从而 β 当 $n=5$ 时取最小.

1963. 在同一平面上，在过 A、B 直线的同一侧有 P、Q 两点. 这两点与 AB 中点 M 的距离都是 a. 设 $PM\perp AB$, $\angle APB=\alpha$, $\angle AQB=\beta$, $\angle PMQ=\theta$, $AM=r$, α 不为直角.



(1) 试用 r、a 表示 $\operatorname{tg}\alpha$.

(2) 证明 $\operatorname{tg}\alpha\cos\theta=\operatorname{tg}\beta$.

解 (1) $\angle APM=\dfrac{1}{2}\angle APB=\dfrac{\alpha}{2}$,

$\because\quad \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{r}{a}\neq 1$（因为$\alpha$不是直角），

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{2r}{a}}{1-\left(\dfrac{r}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{2ar}{a^2-r^2}.$$

(2) 不失普遍性，设Q与B在PM的同一侧。设从Q向AB所作垂线的垂足为H，在AB向B方向的延线上取一点C。

因为　$\angle MQH=\angle PMQ=\theta$，所以

$$HQ=a\cos\theta,\ MH=a\sin\theta,$$

$$\operatorname{tg}\angle QAC=\frac{HQ}{AH}=\frac{a\cos\theta}{a\sin\theta+r},$$

$$\operatorname{tg}\angle QBC=\frac{HQ}{BH}=\frac{a\cos\theta}{a\sin\theta-r},$$

因为$\beta=\angle QBC-\angle QAC$，所以

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\angle QBC-\angle QAC)$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\angle QBC-\operatorname{tg}\angle QAC}{1+\operatorname{tg}\angle QBC\cdot\operatorname{tg}\angle QAC}$$

$$=\frac{\dfrac{a\cos\theta}{a\sin\theta-r}-\dfrac{a\cos\theta}{a\sin\theta+r}}{1+\dfrac{a^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta-r^2}}$$

$$=\frac{2ar\cos\theta}{a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta-r^2}$$

$$=\frac{2ar\cos\theta}{a^2-r^2}=\operatorname{tg}\alpha\cos\theta.$$

1964. 三角形的两边分别是5m、7m，这两边的夹角为60°，求第三边和这个三角形的面积。

解　设第三边为xm。则

$$x^2=5^2+7^2-2\times5\times7\cos60°,$$

$$x^2=25+49-2\times5\times7\times\frac{1}{2}=39.$$

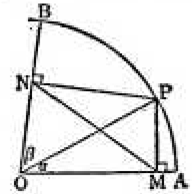
因此$x=\sqrt{39}$(m)，其面积用公式$\dfrac{1}{2}ab\sin C$可算出为

$$\frac{1}{2}\times5\times7\times\sin60°,$$

即等于

$$\frac{1}{2}\times5\times7\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{35}{4}\sqrt{3}\ (\text{m}^2).$$

1965. 在扇形AOB($\angle AOB<180°$)的弧AB上有任意点P，由P向OA、OB所作垂线的垂足为M、N，证明线段MN的长度为常数。



解　设扇形的半径为r，$\angle AOB=\theta$。再设

$$\angle AOP=\alpha,$$
$$\angle BOP=\beta,$$

因为$OP=r$，所以有

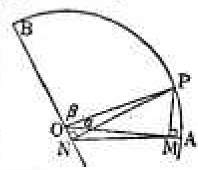
$$\begin{cases}PM=r\sin\alpha,\ OM=r\cos\alpha,\\ PN=r\sin\beta,\ ON=r\cos\beta.\end{cases}\qquad①$$

且$\alpha+\beta=\theta$。又因为四边形$PMON$内接于圆，所以有下式成立：

$$PN\cdot OM+PM\cdot ON=OP\cdot MN.\qquad②$$

把①代入该式，因为$r=OP$，有

$$r\cdot MN=r^2\cos\alpha\cdot\sin\beta+r^2\sin\alpha\cdot\cos\beta$$
$$=r^2\sin(\alpha+\beta)=r^2\sin\theta.$$



故有$MN=r\sin\theta$。因为r为定长，θ为定角，所以MN的长度是确定的。

当$\theta>90°$时，由P作出的垂线的垂足在OA或OB的延长线上。这时可以和前面一样在上图中确定r、α、β，但①成为

$$PN=r\sin(180°-\beta),$$
$$ON=r\cos(180°-\beta),$$

②成为

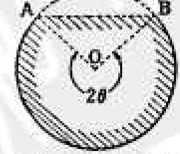
$$PM\cdot ON+OP\cdot MN=PN\cdot OM.$$

故

$$r\cdot MN=PN\cdot OM-PM\cdot ON$$
$$=r^2\cos\alpha\cdot\sin\beta-r^2\sin\alpha(-\cos\beta)$$
$$=r^2\sin\theta.$$

$$\therefore\quad MN=r\sin\theta.$$

所以不论在什么情况下MN的长度都是一定的，即等于$r\sin\theta$。



1966. 用宽为$2a$的金属板弯成断面如右图的落水管槽。曲线的部分是以O为圆心的圆弧，优弧AB所对的圆心角为2θ，把截面积（图中有阴影的部分）S用a和θ表示，其中$0<\theta<\pi$。求能使S取最大时的θ值。

解　设圆O的半径为r，则

$$2\theta r=2a,\quad\therefore\quad r=\frac{a}{\theta}.$$

$$\therefore\quad \triangle OAB\text{ 面积}=\frac{1}{2}r^2|\sin 2\theta|$$

$$=\frac{a^2}{2\theta^2}|\sin 2\theta|.\qquad ①$$

$$\text{扇形 }OAB\text{ 面积}=\frac{1}{2}r\cdot 2\theta r=\frac{a^2}{\theta}.\qquad ②$$

当 2θ 小于 $180°$ 或大于 $180°$ 时，S 为 ② $-$ ① 或 ② $+$ ①. $|\sin 2\theta|$ 也分别为 $\sin 2\theta$ 或 $-\sin 2\theta$，但不管什么情形，都有

$$S=a^2\left(\frac{1}{\theta}-\frac{\sin 2\theta}{2\theta^2}\right),$$

$$S'(\theta)=\frac{dS}{d\theta}=a^2\left(-\frac{1}{\theta^2}-\frac{\cos 2\theta}{\theta^2}+\frac{\sin 2\theta}{\theta^3}\right)$$

$$=\frac{a^2[\sin 2\theta-\theta(1+\cos 2\theta)]}{\theta^3}$$

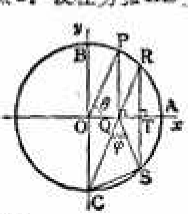
$$=\frac{2a^2\cos\theta(\sin\theta-\theta\cos\theta)}{\theta^3}.$$

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时 $\operatorname{tg}\theta>\theta$，$\cos\theta>0$，所以 $\sin\theta-\theta\cos\theta>0$. 而当 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时，$\cos\theta<0$，$\sin\theta>0$，所以

$$\sin\theta-\theta\cos\theta>0\quad\left(\theta=\frac{\pi}{2}\text{ 时该式也成立}\right).$$

即不管什么情况，都有 $\sin\theta-\theta\cos\theta>0$. 因此 $S'(\theta)=0$ 仅当 $\cos\theta=0$ 即 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时成立. 在 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时 $S'(\theta)>0$，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时 $S'(\theta)<0$，故 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 S 取最大值.

1967. 以原点 O 为圆心、半径为 1 的圆与 x 轴的正向交于点 A，与 y 轴的正向交于点 B，与 y 轴的负向交于点 C. 设在劣弧 AB 上取点 P，从 P 向 x 轴所作垂线的足为 Q. CQ 延长后与圆再相交于点 R，由 R 向 x 轴作垂线延长后与圆再相交于点 S:



(1) 若 $\angle POA=\theta$，试用 $\cos\theta$ 表示 R 的坐标;

(2) 试用 $\cos\theta$ 表示 $\cos^2\angle RQA$ 和 $\sin^2\angle RQA$;

(3) 若 $\angle CQS=\varphi$，试用 $\cos\varphi$ 表示 $\cos\theta$;

(4) 试用 $\cos\varphi$ 表示 $\triangle CQS$ 的面积.

解 (1) 因为有 $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$Q(\cos\theta,\ 0)$，所以有

$$CQ:\quad y=\frac{1}{\cos\theta}x-1.\qquad ①$$

$$\text{圆:}\quad x^2+y^2=1.\qquad ②$$

解 ①、②，得 R 的坐标为

$$\left(\frac{2\cos\theta}{1+\cos^2\theta},\ \frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\right).$$

(2) 设 RS 与 OA 交于 T，则

$$\cos^2\angle RQA=\frac{QT^2}{RQ^2}$$

$$=\frac{QT^2}{RT^2+QT^2},$$

这里

$$QT^2=(OT-OQ)^2$$

$$=\left(\frac{2\cos\theta}{1+\cos^2\theta}-\cos\theta\right)^2$$

$$=\cos^2\theta\left(\frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\right)^2.$$

$$RT^2+QT^2=\left(\frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\right)^2$$

$$+\cos^2\theta\left(\frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\right)^2$$

$$=(1+\cos^2\theta)\left(\frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\right)^2.$$

$$\therefore\quad \cos^2\angle RQA=\frac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta},$$

$$\therefore\quad \sin^2\angle RQA=1-\cos^2\angle RQA$$

$$=\frac{1}{1+\cos^2\theta}.$$

(3)
$$\cos\varphi=\cos(\pi-2\angle RQA)$$

$$=-\cos 2\angle RQA$$

$$=\sin^2\angle RQA-\cos^2\angle RQA$$

$$=\frac{1}{1+\cos^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}.$$

$$\therefore\quad \cos\varphi=\frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}.$$

由此求得 $\cos\theta$ 的正值为

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}.$$

(4) $\triangle CQS=\triangle CRS-\triangle QRS$

$$=\frac{1}{2}(OT\cdot RS-QT\cdot RS)$$

$$=\frac{1}{2}OQ\cdot RS=OQ\cdot RT$$

$$=\cos\theta\frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}$$

$$=\cos\varphi\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}.$$

1968. 证明三角形的某一边，等于另两边分别乘上这两边与第一边所成角的余弦后再相加，即

$$a=c\cos B+b\cos C,\ b=a\cos C+c\cos A,$$
$$c=b\cos A+a\cos B.$$

解　如图(1)，因为

$$BC=BD+DC,\ BD=c\cos B,$$
$$CD=b\cos C.$$

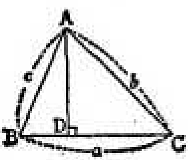
所以　$BC=c\cos B+b\cos C.$

若如图(2)，则 $BC=BD-DC$，因为

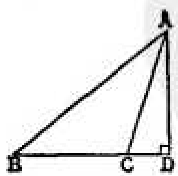
$$BD=AB\cos B=c\cos B,$$
$$DC=AC\cos\angle ACD=-AC\cos\angle ACB$$
$$=-b\cos C,$$

所以　$BC=c\cos B+b\cos C.$

其他同理可得。



(1)



(2)

1969. 证明，在三角形 ABC 中，

(1) $a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C$;

(2) $a\cos(B-C)+b\cos(C-A)+c\cos(A-B)=2(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$;

(3) $\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$;

(4) $\dfrac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}$;

(5) $\dfrac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\dfrac{b}{a}$.

解　(1) $a=b\cos C+c\cos B,$

$$b=c\cos A+a\cos C,$$
$$c=a\cos B+b\cos A.$$

把两边分别相加，得

$$a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C.$$

(2) 原式的左边

$$=2R\sin A\cos(B-C)+2R\sin B\cos(C-A)+2R\sin C\cos(A-B)$$
$$=2R[\sin(B+C)\cos(B-C)+\sin(C+A)\cos(C-A)+\sin(A+B)\cos(A-B)]$$
$$=R(\sin 2B+\sin 2C+\sin 2C+\sin 2A+\sin 2A+\sin 2B)$$
$$=2R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$
$$=2R(2\sin A\cos A+2\sin B\cos B+2\sin C\cos C)$$
$$=2(a\cos A+b\cos B+c\cos C).$$

(3) 原式左边 $=\dfrac{1-2\sin^2 A}{a^2}-\dfrac{1-2\sin^2 B}{b^2}$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{2\sin^2 A}{a^2}+\frac{2\sin^2 B}{b^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}.$$

(4) 由 $(b-c)\cos\dfrac{A}{2}=a\sin\dfrac{B-C}{2}$ 和

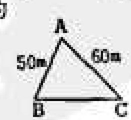
$$(b+c)\sin\frac{A}{2}=a\cos\frac{B-C}{2},$$

得　$\dfrac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}.$

(5) 原式左边

$$=\frac{b\cos C+c\cos B-c\cos B}{a\cos C+c\cos A-c\cos A}$$
$$=\frac{b\cos C}{a\cos C}=\frac{b}{a}.$$

1970. 在两条边分别为 50 m，60 m 的所有三角形中，求出面积最大的一个。



解　设在 $\triangle ABC$ 中有

$$c=50(\text{m}),\ b=60(\text{m}),$$

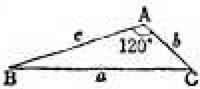
则面积为

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 50\times 60\sin A$$
$$=1500\sin A.$$

故仅当 $\sin A$ 最大时 S 取得最大，即必须是 $A=90°$，$\sin 90°=1$ 时，取得最大面积为 $1500\ m^2$，这时 $a=10\sqrt{61}$ (m)。

1971. 下列方括号中应填入什么有理数？若三角形 ABC 中，(1) $\angle BAC=120°$，(2) $AB>AC$，(3) $BC=\sqrt{21}$，(4) 三角形 ABC 的面积 $=\sqrt{3}$，则 $AB=$[①]，$AC=$[②]，三角形的内切圆半径等于

$$\frac{\sqrt{[③]}([④]-\sqrt{21})}{2}.$$



解　由余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

以及 $a=\sqrt{21}$，$A=120°$，可得

$$21=b^2+c^2+bc, \qquad ①$$

又因为 $\triangle ABC$ 面积 $=\sqrt{3}$，所以

$$\frac{1}{2}bc\sin 120°=\sqrt{3},$$

$$\therefore\quad bc=4. \qquad ②$$

由①、②得，

$$(b+c)^2=25,\quad \therefore\quad b+c=5.$$

$$(b-c)^2=9,\quad \therefore\quad |b-c|=3.$$

因为 $b<c$，得 $b=1$，$c=4$。设内切圆的半径为 r，则

$$r(a+b+c)=2\sqrt{3},$$

$$\therefore\quad r=\frac{2\sqrt{3}}{5+\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{3}(5-\sqrt{21})}{25-21}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(5-\sqrt{21})}{2}.$$

$\therefore$　[①]=4，[②]=1，[③]=3，[④]=5。

1972. 证明，在三角形 ABC 中，

$$a\cos A+b\cos B-c\cos C=2c\cos A\cos B.$$

解　设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则

$$a\cos A+b\cos B-c\cos C$$

$$=k(\sin A\cos A+\sin B\cos B-\sin C\cos C)$$

$$=\frac{1}{2}k(\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C)$$

$$=\frac{1}{2}k(4\cos A\cos B\sin C)$$

$$=2\cos A\cos B(k\sin C)$$

$$=2c\cos A\cos B.$$

1973. 证明在 C 为直角的三角形 ABC 中，

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{a}{b+c}.$$

解　在三角形 ABC 中，

$$\cos A=\frac{b}{c},\quad \sin A=\frac{a}{c}.$$

故

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}}=\frac{a}{b+c}.$$

1974. 三角形的内角 A、B、C 成 3:4:5 时，边 a、b、c 成怎样的比？

解　设 $\frac{A}{3}=\frac{B}{4}=\frac{C}{5}=k$，则

$$A+B+C=3k+4k+5k=12k=180°,$$

由此得 $k=15°$，故

$$A=45°,\ B=60°,\ C=75°.$$

$$\sin 75°=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

由正弦定理，

$$a:b:c=\sin 45°:\sin 60°:\sin 75°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$=2\sqrt{2}:2\sqrt{3}:(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$=2:\sqrt{6}:(1+\sqrt{3}).$$

1975. 三角形 ABC 的三边 a、b、c 间有关系

$$a-2b+c=0,\ 3a+b-2c=0.$$

求 (1) $\sin A:\sin B:\sin C$；(2) $\sin 2A$。

解

$$a-2b+c=0, \qquad ①$$

$$3a+b-2c=0. \qquad ②$$

由①×2+②，得

$$5a-3b=0,\quad \therefore\quad b=\frac{5}{3}a. \qquad ③$$

由①+②×2 得

$$7a-3c=0,\quad \therefore\quad c=\frac{7}{3}a. \qquad ④$$

(1) 由正弦定理及③、④得

$$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$$

$$=a:\frac{5}{3}a:\frac{7}{3}a=3:5:7.$$

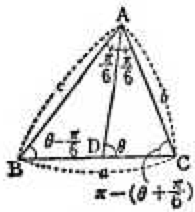
(2) 由余弦定理和(1)得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25+49-9}{2\times5\times7}=\frac{13}{14}.$$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{169}{196}}=\frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$$\therefore\quad \sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\frac{3\sqrt{3}}{14}\times\frac{13}{14}=\frac{39\sqrt{3}}{98}.$$

1976. 设三角形 ABC 的三边为 a、b、c. $\angle A=\frac{\pi}{3}$, $\angle A$ 的平分线与对边交成的角为 θ. 求 $a:b:c$. 其中 $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{2}$, $b<c$.



解　设 $\angle A$ 的平分线与 BC 边交于点 D, $b<c$. 因为 $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{2}>0$, 所以 $\angle ADC=\theta<90°$, $\angle B=\theta-\frac{\pi}{6}$, $\angle C=\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$. 因此,由正弦定理,

$$\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{b}{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{c}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

又因为 $0°<\theta<90°$, $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{2}$, 所以

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{2}{3}},\quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)&=\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\\&=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}},\end{aligned}$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}.$$

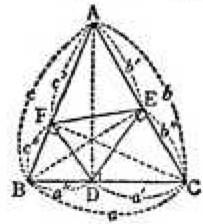
又　$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2\sqrt{3}},$$

所以 $a:b:c=3:(\sqrt{6}-1):(\sqrt{6}+1)$.

1977. 从锐角三角形 ABC 的顶点 A、B、C 向对边作垂线,垂足为 D、E、F.

(1) 当 $EF=\frac{2}{3}BC$ 时,求 $\cos A$.

(2) 若 $EF=\frac{2}{3}BC$, $FD=\frac{2}{7}CA$, 求 $\frac{DE}{AB}$ 的值.



解　用象右图中所设的记号,则

(1) 因为 $\angle BEC=\angle CFB=90°$, 所以四点 B, C, E, F 共圆.

$\therefore \angle AEF=\angle ABC$.

$$\therefore\quad \triangle AEF\backsim\triangle ABC,$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle AEF}{\triangle ABC}=\frac{b'c'}{bc}=\frac{EF^2}{BC^2}.$$

因为在直角三角形 AEB, AFC 中

$$\cos A=\frac{c'}{b}=\frac{b'}{c},$$

且　$\frac{EF}{BC}=\frac{2}{3}$, $\therefore\quad \cos^2 A=\left(\frac{2}{3}\right)^2$,

这里 A 是锐角,

$$\therefore\quad \cos A>0,\quad \therefore\quad \cos A=\frac{2}{3}.$$

(2) 与(1)类似, $\triangle BDF\backsim\triangle BAC$,

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{\triangle BDF}{\triangle BAC}&=\frac{c''a''}{ca}=\frac{a''}{c}\cdot\frac{c''}{a}\\&=\cos^2 B=\frac{FD^2}{CA^2},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \cos B=\frac{FD}{CA}=\frac{2}{7},$$

同理,

$$\frac{DE^2}{AB^2}=\frac{\triangle CDE}{\triangle CAB}=\frac{a'}{b}\cdot\frac{b''}{a}=\cos^2 C.$$

$$\therefore\quad \frac{DE}{AB}=\cos C.$$

又　$\cos A=\frac{2}{3}$, $\cos B=\frac{2}{7}$.　①

$\therefore\quad \sin A=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin B=\frac{3\sqrt{5}}{7}$.　②

注意到 $C=2\pi-(A+B)$, 有

$$\begin{aligned}\cos C&=-\cos(A+B)\\&=\sin A\cdot\sin B-\cos A\cdot\cos B.\end{aligned}$$

把①、②代入,

$$\cos C=\frac{11}{21},\quad \therefore\quad \frac{DE}{AB}=\frac{11}{21}.$$

第六章　方程和不等式

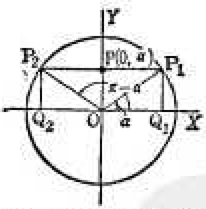
1. 一元方程(一)

1978. 什么叫做三角方程?

解　象 $\sin 3x=\frac{1}{2}$ 或 $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=1$ 这样，含有未知角三角函数的方程叫做三角方程．求这个方程的解，或者证明它没有解的过程，叫做解这个方程．

1979. 解方程：$\sin x=a$.

解　$\sin x=a$ 仅当 $|a|\leq 1$ 时有解，若它的特解是 $x=\alpha$，则一般解是 $x=n\pi+(-1)^n\alpha$，其中 n 是一个任意的整数．



现设以原点为圆心的单位圆，与过 Y 轴上的点 $P(0, a)$ 且平行于 X 轴的直线相交于 P_1、P_2(如右图)．设 $\angle XOP_1=\alpha$，则 $\angle XOP_2=\pi-\alpha$．又设由 P_1、P_2 向 X 轴所作的垂线分别为 P_1Q_1，P_2Q_2，那么

$$\sin\alpha=P_1Q_1=OP=a,$$

$$\sin(\pi-\alpha)=P_2Q_2=OP=a.$$

因此 α 和 $\pi-\alpha$ 都是 $\sin x=a$ 的解．从而可得，对于任意整数 n，$2n\pi+\alpha$ 和 $2n\pi+\pi-\alpha$ 都是它的解．把这两个式子综合起来，成为

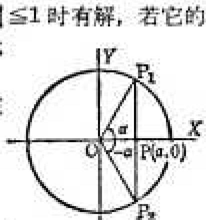
$$n\pi+(-1)^n\alpha.$$

由此可得，这个方程的一般解是

$$x=n\pi+(-1)^n\alpha.$$

1980. 解方程：$\cos x=a$.

解　$\cos x=a$ 仅当 $|a|\leq 1$ 时有解，若它的特解是 $x=\alpha$，一般解就是 $x=2n\pi\pm\alpha$.



和前一题相类似，在右图中

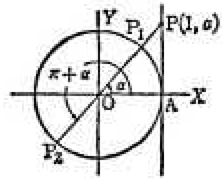
$$\cos\alpha=\cos(-\alpha)$$
$$=OP=a.$$

所以 α 和 $-\alpha$ 都是 $\cos x=a$ 的解．从而可得它的一般解是

$$x=2n\pi\pm\alpha.$$

1981. 解方程：$\operatorname{tg}x=a$.

解　对于任意数值 a，$\operatorname{tg}x=a$ 的解都存在．若它的特解是 $x=\alpha$，则一般解是 $x=n\pi+\alpha$．这可以证明如下：设单位圆和 X 轴的正半轴相交于点 A，在过 A 点的切线上取一点 $P(1, a)$，设 OP 和圆相交于 P_1、P_2，因为



$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=AP=a,$$

所以 α 和 $\pi+\alpha$ 都是 $\operatorname{tg}x=a$ 的解．从而得到 $2n\pi+\alpha$ 和 $2n\pi+(\pi+\alpha)$ 都是它的解．综合起来，就得到这个方程的一般解是

$$x=n\pi+\alpha.$$

1982. 求满足下列各方程的角 θ，其中设 $0°\leq\theta\leq 360°$：

(1) $\sin\theta=\frac{1}{2}$；(2) $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(3) $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{3}$.

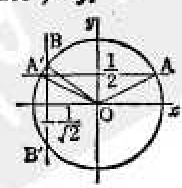
解　过直角坐标系的原点 O，作射线和 x 轴的正半轴成角 θ，在射线上取 $OP=1$ 得点 P．设点 P 的坐标为 (x, y)，则

$$\sin\theta=y,\ \cos\theta=x.$$

又这条射线与直线 $x=1$ 的交点设是 $(1, y)$，则

$$\operatorname{tg}\theta=y,\ \operatorname{tg}(\theta+180°)=y.$$

(1) 画一个以原点为中心，半径为 1 的圆．过 y 轴上的点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 作 x 轴的平行线，和圆 O 交于 A、A'，因为 A、A' 的纵坐标都是 $\frac{1}{2}$，$OA=OA'=1$，所以 $\angle xOA$、$\angle xOA'$ 就是所求的角．



$\therefore\quad \theta=30°,\ 150°.$

(2) 过 x 轴上的点 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 作 y 轴的平行线，设和圆 O 的交点是 B、B'，则 $\angle xOB$, $\angle xOB'$ 就是所求的角。

$\therefore\quad \theta=135°,\ 225°.$

(3) 在直线 $x=1$ 上取纵坐标 $y=\sqrt{3}$ 的点 P，则 $\angle xOP$ 就是要求的角之一，所以

$$\theta=60°,\ 240°.$$

1983. 已知

$$\operatorname{tg}^2 45°-\cos^2 60°=x\sin 45°\cos 45°\operatorname{tg} 60°,$$

求 x 的值。

解　因为 $\operatorname{tg}45°=1$, $\cos 60°=\frac{1}{2}$,

$$\sin 45°=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}$，所以所要求解的方程就化成为

$$1-\frac{1}{4}=\frac{x\sqrt{3}}{2},$$

从而得出：$\qquad x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

1984. 当 a、b 不相等时，方程

$$\sec^2\theta=\frac{4ab}{(a+b)^2}$$

有没有解？

解　当 a、b 不相等时，显然 $2ab$ 比 a^2+b^2 小。所以 $4ab$ 比 a^2+b^2+2ab 小，即 $4ab$ 小于 $(a+b)^2$。由此可得，$\frac{4ab}{(a+b)^2}$ 比 1 小。但因为一个角的正割值的绝对值恒大于等于 1，所以任何角都不能满足上述方程。即当 a、b 不相等时，这个方程无解。

1985. 已知 $a\sec A-c\operatorname{tg}A=d$,

$$b\sec A+d\operatorname{tg}A=c,$$

证明　$\qquad a^2+b^2=c^2+d^2.$

解　由给出的两个方程，得

$a\sec A=c\operatorname{tg}A+d$, $b\sec A=c-d\operatorname{tg}A$.

两边平方后分别相加，得

$$(a^2+b^2)\sec^2 A=(c^2+d^2)\operatorname{tg}^2 A+(c^2+d^2),$$

$$(a^2+b^2)\sec^2 A=(c^2+d^2)(\operatorname{tg}^2 A+1).$$

因为 $\sec^2 A=\operatorname{tg}^2 A+1$, $\sec^2 A>0$，所以

$$a^2+b^2=c^2+d^2.$$

1986. 当

$$2\operatorname{tg}\alpha+3\sin\beta=7, \tag{①}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-6\sin\beta=1 \tag{②}$$

成立时，求 $\sin\alpha$ 和 $\sin\beta$ 的值。

解　①×2+②，得

$$5\operatorname{tg}\alpha=15,\quad\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha=3.$$

代入 ②，得

$$3-6\sin\beta=1,$$

由此可得，$\qquad \sin\beta=\frac{1}{3}.$

又因为 $\operatorname{tg}\alpha=3$，所以

$$\sin\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{1+9}}=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

1987. 已知 $\sin A=m\sin B$, $\cos A=n\cos B$ $(m^2\neq n^2)$，求 $\operatorname{tg}A$ 和 $\operatorname{tg}B$ 的值。

解　由已知的两个方程，得

$$\sin^2 A+\cos^2 A=m^2\sin^2 B+n^2\cos^2 B,$$

即 $$1=m^2\sin^2 B+n^2\cos^2 B. \tag{①}$$

从而得到

$$1=m^2-m^2\cos^2 B+n^2\cos^2 B.$$

所以 $$(m^2-n^2)\cos^2 B=m^2-1. \tag{②}$$

由 ①，得

$$1=m^2\sin^2 B+n^2-n^2\sin^2 B,$$

即 $$(m^2-n^2)\sin^2 B=1-n^2.$$

上式用 ② 的两边分别相除，得

$$\frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}=\frac{1-n^2}{m^2-1}.$$

即 $$\operatorname{tg}B=\pm\sqrt{\frac{1-n^2}{m^2-1}}. \tag{③}$$

又由已知等式，得

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{m\sin B}{n\cos B},\quad 即\quad \operatorname{tg}A=\frac{m}{n}\operatorname{tg}B.$$

由 ③ 可知，

$$\operatorname{tg}A=\pm\frac{m}{n}\sqrt{\frac{1-n^2}{m^2-1}}.$$

1988. 由

$$\sec A\csc(90°-A)-x\operatorname{ctg}(90°-A)=1,$$

求 x。

解　由已知等式，得

$$\sec^2 A-x\operatorname{tg}A=1,$$

即 $$1+\operatorname{tg}^2 A-x\operatorname{tg}A=1,$$

$$\operatorname{tg}^2 A-x\operatorname{tg}A=0.$$

当 $\operatorname{tg}A\neq 0$ 时，$x=\operatorname{tg}A$；当 $\operatorname{tg}A=0$ 时，x 可以是任意实数。

1989. 若 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 是方程 $2x^2+px-1=0$ 的两个根，

(1) 求 p 的值;

(2) 在 $0°\leqq\theta\leqq180°$ 时 θ 为什么值?

解 (1) 由根和系数的关系可知,

$$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{p}{2}, \quad ①$$

$$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}. \quad ②$$

据上式可知,

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$$

$$=1+2\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

$$\therefore\quad p=-2(\sin\theta+\cos\theta)=0.$$

(2) 由 $\sin\theta+\cos\theta=0$, 得 $\cos\theta=-\sin\theta$. 代入②, 得

$$-\sin^2\theta=-\frac{1}{2}, \quad \therefore\quad \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

当 $0°\leqq\theta\leqq180°$ 时, 因为 $\sin\theta\geqq0$, 所以

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

这时, $\cos\theta<0$, 由此可知, $\theta=135°$.

1990. 求适合 $\dfrac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}=2\cos2\theta$ 的不大于 $180°$ 的正角 θ.

解 把 $\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=2\cos2\theta$ 去分母, 得

$$\cos\theta-\sin\theta=2\cos2\theta\cos\theta+2\cos2\theta\sin\theta.$$

$$\therefore\quad \cos\theta-\sin\theta$$

$$=\cos3\theta+\cos\theta+\sin3\theta-\sin\theta.$$

从而得到

$$\cos3\theta+\sin3\theta=0. \quad \therefore\quad \operatorname{tg}3\theta=-1.$$

因为 $0°<3\theta<540°$, 所以

$$3\theta=135°,\ 315°,\ 495°.$$

$$\therefore\quad \theta=45°,\ 105°,\ 165°.$$

这些值都不使给出的方程里的分母等于0, 即它们都是要求的角.

1991. 求能使方程

$$x^2+2x+2\cos\theta=0$$

有实根的 θ 的范围, 设 $0°\leqq\theta\leqq180°$.

解 给出的方程有实根的条件是

$$1-2\cos\theta\geqq0. \quad \therefore\quad \cos\theta\leqq\frac{1}{2}.$$

在 $0°\leqq\theta\leqq180°$ 的范围内, 得

$$60°\leqq\theta\leqq180°.$$

1992. 已知 $p\operatorname{ctg}A=\sqrt{q^2-p^2}$, 求 $\sin A$ 的值.

解 把 $p\operatorname{ctg}A=\sqrt{q^2-p^2}$ 的两边平方, 得

$$p^2\operatorname{ctg}^2A=q^2-p^2.$$

移项, 得 $\quad p^2(1+\operatorname{ctg}^2A)=q^2.$

即 $\quad p^2\csc^2A=q^2\quad$ 或 $\quad p^2=q^2\sin^2A.$

从而得出: $\quad \sin A=\pm\dfrac{p}{q}.$

1993. 证明

$$\operatorname{tg}(90°-A)+\operatorname{ctg}(90°-A)$$

$$=\csc A\csc(90°-A).$$

解 $\operatorname{tg}(90°-A)+\operatorname{ctg}(90°-A)$

$$=\operatorname{ctg}A+\operatorname{tg}A=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$=\frac{\cos^2A+\sin^2A}{\sin A\cos A}=\frac{1}{\sin A\cos A}$$

$$=\csc A\sec A=\csc A\csc(90°-A).$$

因此, 欲证之式成立.

1994. 试由 $\sin\alpha=m\sin\beta$, $\operatorname{tg}\alpha=n\operatorname{tg}\beta$, 证明

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{m^2-1}{n^2-1}}.$$

解 由给出的条件, 得

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{m\sin\beta}{n\operatorname{tg}\beta}, \quad 即\quad \cos\alpha=\frac{m}{n}\cos\beta.$$

亦即 $\quad n\cos\alpha=m\cos\beta.$

把这个式子和第一个已知条件式的两边平方后分别相加, 得

$$\sin^2\alpha+n^2\cos^2\alpha=m^2.$$

由此可得,

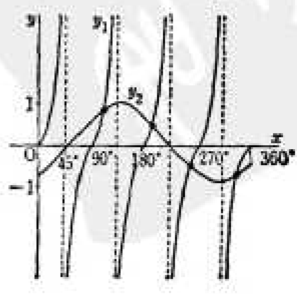
$$1-\cos^2\alpha+n^2\cos^2\alpha=m^2,$$

即 $\quad (n^2-1)\cos^2\alpha=m^2-1.$

从而得出:

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{m^2-1}{n^2-1}}.$$

1995. 在 $0°$ 到 $360°$ 之间, 满足



$$\operatorname{tg}(180^\circ-2x)=\sin(45^\circ-x)$$

的x的值有几个？试用图象求解。

解　把已知等式变形，得

$$-\operatorname{tg}2x=-\sin(x-45^\circ).$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}2x=\sin(x-45^\circ).$$

满足这个方程的x的值，就是两条曲线

$$y_1=\operatorname{tg}2x,\ y_2=\sin(x-45^\circ)$$

的交点的横坐标．所以，在$0^\circ\leq x\leq 360^\circ$的范围内满足这个方程的$x$的值有四个。

1996．已知$\sec\theta=\frac{13}{5}$，求

$$\frac{2\sin\theta-3\cos\theta}{4\sin\theta-9\cos\theta}$$

的值。

解　分下面两种情况进行讨论：

(1) θ是第一象限的角时，

$$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{5}{13},$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}.$$

$$\therefore\quad \frac{2\sin\theta-3\cos\theta}{4\sin\theta-9\cos\theta}=\frac{2\times\frac{12}{13}-3\times\frac{5}{13}}{4\times\frac{12}{13}-9\times\frac{5}{13}}=3.$$

(2) θ是第四象限的角时，

$$\cos\theta=\frac{5}{13},\ \sin\theta=-\frac{12}{13}.$$

$$\therefore\quad \frac{2\sin\theta-3\cos\theta}{4\sin\theta-9\cos\theta}=\frac{-2\times\frac{12}{13}-3\times\frac{5}{13}}{-4\times\frac{12}{13}-9\times\frac{5}{13}}=\frac{13}{31}.$$

1997．当

$$\sin x+\sin y+\sin z=\sin(x+y+z)$$

时，x、y、z需有什么限制？其中x、y、z是大于0°、小于或等于360°的角。

解　把

$$(\sin x+\sin y)-[\sin(x+y+z)-\sin z]=0$$

的左边化成积的形式，得

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y+2z}{2}=0.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y+2z}{2}\right)=0.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x+z}{2}\sin\frac{y+z}{2}=0.$$

从而得出：

$$\sin\frac{x+y}{2}=0,\ \sin\frac{x+z}{2}=0,\ \sin\frac{y+z}{2}=0$$

中至少要有一个成立．

因为$0^\circ<x\leq 360^\circ$，$0^\circ<y\leq 360^\circ$，所以

$$0^\circ<\frac{x+y}{2}\leq 360^\circ.$$

由此可得，$\sin\frac{x+y}{2}=0$成立时需有$\frac{x+y}{2}=180^\circ$或$\frac{x+y}{2}=360^\circ$．

$$\therefore\quad x+y=360^\circ\quad 或\quad x=y=360^\circ.$$

这就是说，x、y、z中至少有两个角等于360°，或者$x+y=360^\circ$，$y+z=360^\circ$，$z+x=360^\circ$中有一个成立．

1998．在三角形ABC中，已知角A，边a上的高h，以及这条高把$\angle A$的对边a分成两部分的差d，试解出这个三角形。

解　设高为AD，则

$$\operatorname{tg}\angle BAD=\frac{BD}{h},\ \operatorname{tg}\angle CAD=\frac{CD}{h}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}A=\frac{h(BD+CD)}{h^2-BD\cdot CD}.\qquad ①$$

$$BD-CD=d.\qquad ②$$

由①、②可确定BD、CD，并进而得到a．由于知道了A、h、a，就可由$ah=bc\sin A$求出bc．这就可以归结为已知一边a，其他两边的积bc和一个角A，求解三角形ABC的问题了。

1999．要使在$0<x<\frac{\pi}{2}$的范围内有x适合于

$$\sin 3x+a\sin 2x=0,$$

a必须满足什么条件？

解　用倍角公式把给出式子的左边变形，得

$$3\sin x-4\sin^3x+2a\sin x\cos x=0,$$

$$\sin x(3-4\sin^2x+2a\cos x)=0,$$

$$\sin x(4\cos^2x+2a\cos x-1)=0.$$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x\neq0$. 从而得到

$$4\cos^2 x+2a\cos x-1=0.$$

若设 $\cos x=t$, $0<t<1$, 就得

$$4t^2+2at-1=0. \quad ①$$

① 是 t 的二次方程，它的判别式 D 为

$$\frac{D}{4}=a^2+4>0.$$

所以方程 ① 总有两个不同的实根. 因为这两根的积为 $-\frac{1}{4}$, 所以一个根为正，一个根为负.

设 ① 的左边为 $f(t)$, 则

$$f(0)=-1<0.$$

所以正根在 $0<t<1$ 范围内的条件是

$$f(1)>0, \quad 即 \quad 4+2a-1>0.$$

$$\therefore \quad a>-\frac{3}{2}.$$

2000. 解下列各方程:

(1) $\sin(3x-20^\circ)+\cos(x+50^\circ)=0$;

(2) $2\sqrt{2}\sin x\cos x=\sin x+\cos x$.

解 (1) $\sin(3x-20^\circ)+\cos(x+50^\circ)=0$,

$\sin(3x-20^\circ)+\sin(x+50^\circ+90^\circ)=0$.

把左边变形成积的形式，得

$$2\sin(2x+60^\circ)\cos(x-80^\circ)=0.$$

由 $\sin(2x+60^\circ)=0$, 得

$$2x+60^\circ=n\cdot180^\circ.$$

$\therefore \quad x=-30^\circ+n\cdot90^\circ$, ($n$ 是整数).

由 $\cos(x-80^\circ)=0$, 得

$$x-80^\circ=90^\circ+n\cdot180^\circ.$$

$\therefore \quad x=170^\circ+n\cdot180^\circ$, ($n$ 是整数).

(2) $2\sqrt{2}\sin x\cos x=\sin x+\cos x$,

$$2\sin x\cos x-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=0,$$

$$\sin 2x-\sin(x+45^\circ)=0.$$

把左边变形成积的形式，得

$$2\cos\frac{3x+45^\circ}{2}\sin\frac{x-45^\circ}{2}=0.$$

由 $\cos\frac{3x+45^\circ}{2}=0$, 得

$$\frac{3x+45^\circ}{2}=90^\circ+n\cdot180^\circ.$$

$\therefore \quad x=45^\circ+n\cdot120^\circ$, ($n$ 是整数).

由 $\sin\frac{x-45^\circ}{2}=0$, 得

$$\frac{x-45^\circ}{2}=n\cdot180^\circ.$$

$\therefore \quad x=45^\circ+n\cdot360^\circ$, ($n$ 是整数).

综合上述两解，得

$x=45^\circ+n\cdot120^\circ$, ($n$ 是整数).

2001. 求满足 $\cos^2\theta=1$ 的所有 θ 的值.

解 由原方程，得 $\cos\theta=\pm1$.

从而得到 $\cos\theta=+1$ 和 $\cos\theta=-1$.

当 $\cos\theta=+1$ 时，$\theta=2n\pi$; 当 $\cos\theta=-1$ 时，$\theta=(2n+1)\pi$.

把这两个 θ 的值综合起来，得

$$\theta=n\pi, \ (n 是整数).$$

2002. 已知 x 的二次方程

$$(x-1)^2+(2x-1)\operatorname{tg}\alpha=0,$$

其中 α 在 $-90^\circ<\alpha<90^\circ$ 的范围内，试答下列各题:

(1) α 在什么范围内时，上述方程有实根?

(2) 求上述方程的两个实根.

(3) α 在什么范围内时，上述方程有同号的实根?

(4) 设上述方程的根为 x_1、x_2, 证明 $\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)$ 的值与 α 的值无关.

解 (1) 原方程可变形成为

$$x^2-2(1-\operatorname{tg}\alpha)x+1-\operatorname{tg}\alpha=0. \quad ①$$

它有实根的条件是

$$(1-\operatorname{tg}\alpha)^2-(1-\operatorname{tg}\alpha)\geq0.$$

把左边变形，得

$$(1-\operatorname{tg}\alpha)(1-\operatorname{tg}\alpha-1)\geq0,$$

$$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha-1)\geq0.$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\alpha\geq1 \quad 或 \quad \operatorname{tg}\alpha\leq0.$$

在 $-90^\circ<\alpha<90^\circ$ 的范围内，应有

$$-90^\circ<\alpha\leq0^\circ \quad 或 \quad 45^\circ\leq\alpha<90^\circ. \quad ②$$

(2) 由 ① 式，得

$$x=1-\operatorname{tg}\alpha\pm\sqrt{(1-\operatorname{tg}\alpha)^2-(1-\operatorname{tg}\alpha)}$$
$$=1-\operatorname{tg}\alpha\pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}.$$

(3) 设 ① 的两根为 x_1、x_2, 则

$$x_1x_2=1-\operatorname{tg}\alpha>0.$$

$\therefore \quad \operatorname{tg}\alpha<1. \quad \therefore \quad -90^\circ<\alpha<45^\circ.$

由这个式子和 ②, 得 $-90^\circ<\alpha\leq0^\circ$.

(4) 由 $x_1+x_2=2(1-\operatorname{tg}\alpha)$, $x_1x_2=1-\operatorname{tg}\alpha$, 得

$$\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)=x_1x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}$$

$$=1-\operatorname{tg}\alpha-(1-\operatorname{tg}\alpha)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

这就是说，$\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)$ 的值与 α 的值无关.

2003. 求 θ 值，使得下列两个二次方程

$$x^2+x\cos\theta+\sin\theta=0,$$
$$x^2+x\sin\theta+\cos\theta=0$$

至少有一个相同的实根。设 θ 取值范围为

$$0^\circ\leqq\theta\leqq360^\circ.$$

解

$$x^2+x\cos\theta+\sin\theta=0, \quad ①$$
$$x^2+x\sin\theta+\cos\theta=0. \quad ②$$

(i) 当 ①、② 有两个相同的根时，应有

$$\cos\theta=\sin\theta, \quad ③$$

要使方程有实根，必须使

$$\cos^2\theta-4\sin\theta\geqq0. \quad ④$$

由 ③、④，得

$$\sin^2\theta-4\sin\theta\geqq0,$$
$$\sin\theta(\sin\theta-4)\geqq0.$$
$$\therefore\quad \sin\theta\leqq0. \quad ⑤$$

由 ③、⑤ 可得，在 $0^\circ\leqq\theta\leqq360^\circ$ 的范围内，

$$\theta=225^\circ.$$

(ii) 当 ①、② 只有一个相同的根时，设这个根是 α，则

$$\alpha^2+\alpha\cos\theta+\sin\theta=0, \quad ①'$$
$$\alpha^2+\alpha\sin\theta+\cos\theta=0. \quad ②'$$

①′－②′，得

$$\alpha(\cos\theta-\sin\theta)-(\cos\theta-\sin\theta)=0,$$
$$(\cos\theta-\sin\theta)(\alpha-1)=0.$$

因为这时 $\cos\theta\neq\sin\theta$，所以，就得 $\alpha=1$. 代入 ①′，得

$$1+\cos\theta+\sin\theta=0,$$
$$\therefore\quad \cos\theta+\sin\theta=-1.$$

变形后可得

$$\sin(\theta+45^\circ)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为 $0^\circ\leqq\theta\leqq360^\circ$，所以

$$45^\circ\leqq\theta+45^\circ\leqq405^\circ.$$
$$\therefore\quad \theta+45^\circ=225^\circ \quad 或 \quad 315^\circ.$$
$$\therefore\quad \theta=180^\circ \quad 或 \quad 270^\circ.$$

2004. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{17}{13}$，求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值。

解 把

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{17}{13} \quad ①$$

的两边平方，得

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{289}{169},$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\times\frac{289-169}{169}=\frac{60}{169}. \quad ②$$

由 ①、② 可知，$\sin\theta$、$\cos\theta$ 的值是下列二次方程的根：

$$t^2-\frac{17}{13}t+\frac{60}{169}=0,$$
$$\left(t-\frac{12}{13}\right)\left(t-\frac{5}{13}\right)=0.$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\sin\theta=\dfrac{12}{13},\\ \cos\theta=\dfrac{5}{13};\end{cases}\quad \begin{cases}\sin\theta=\dfrac{5}{13},\\ \cos\theta=\dfrac{12}{13}.\end{cases}$$

2005. 试由 $\operatorname{tg}\theta+3\operatorname{ctg}\theta=4$，计算出 $\sin\theta$ 的值。

解 由给出的式子，得 $\operatorname{tg}\theta+\dfrac{3}{\operatorname{tg}\theta}=4$.

$$\therefore\quad \operatorname{tg}^2\theta+3=4\operatorname{tg}\theta.$$
$$\therefore\quad \operatorname{tg}^2\theta-4\operatorname{tg}\theta+3=0.$$

从而得出：

$$\operatorname{tg}\theta=3 \quad 或 \quad \operatorname{tg}\theta=1.$$

当 $\operatorname{tg}\theta=3$ 时，$\sin\theta=\pm\dfrac{3}{10}\sqrt{10}$;

当 $\operatorname{tg}\theta=1$ 时，$\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2006. 若 $\sin x=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$，$m>n>0$，求 $\cos x$ 和 $\operatorname{tg}x$ 的值。

解 因为 $\sin x>0$，所以 x 是第一象限或第二象限的角。

$$\therefore\quad \cos x=\pm\sqrt{1-\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2}$$
$$=\pm\frac{2mn}{m^2+n^2};$$
$$\operatorname{tg}x=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\cdot\left(\pm\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)$$
$$=\pm\frac{m^2-n^2}{2mn}.$$

2007. 若 $-180^\circ<x<180^\circ$，求使下列各方程成立的 x 的值：

(1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;　(2) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(3) $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$;　(4) $\operatorname{ctg}x=-\sqrt{3}$;

(5) $\cos x=-\frac{1}{2}$.

解 (1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore\ x=45°, 135°$.

(2) $x=150°,\ -150°$.

(3) $x=60°,\ -120°$.

(4) $x=150°,\ -30°$.

(5) $x=120°,\ -120°$.

2008. 若 $0°<x<180°$, 求满足下列三个等式的 a、b、x 的值:

$$a+b=1,\ a\sin x+b\cos x=1,$$
$$a\sin^2x+b\cos^2x=1.$$

解 已知 $a+b=1$, ①

$$a\sin x+b\cos x=1, \quad ②$$
$$a\sin^2x+b\cos^2x=1. \quad ③$$

由①, 得 $b=1-a$.

代入②、③, 得

$$a(\sin x-\cos x)=1-\cos x, \quad ④$$
$$a(\sin^2x-\cos^2x)=1-\cos^2x. \quad ⑤$$

由⑤, 得

$$a(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)$$
$$=(1-\cos x)(1+\cos x).$$

把④代入上式, 得

$$(1-\cos x)(\sin x+\cos x)$$
$$=(1-\cos x)(1+\cos x).$$

由 $0°<x<180°$, 得 $1-\cos x\neq0$.

$$\therefore\ \sin x+\cos x=1+\cos x.$$

从而得出: $\sin x=1$, $x=90°$.

代入②, 得 $a=1$. 再由①得 $b=0$. 所以答案是:

$$a=1,\ b=0,\ x=90°.$$

2009. 不用加法定理, 求出常数 a 的范围, 使得方程

$$\sin x+\cos x+a=0$$

有解.

解 设 $\cos x=X$, $\sin x=Y$, 则 ①

$$X+Y+a=0, \quad ②$$
$$X^2+Y^2=1. \quad ③$$

若存在满足②、③的实数解 (X, Y), 则必定存在满足①的 x 的值.

由②, 得 $Y=-(X+a)$.

代入③并作整理, 得

$$2X^2+2aX+(a^2-1)=0. \quad ④$$

这个方程若有实数解 X, 则由②可知, Y 也是实数。因此, 所求的条件是

$$a^2-2(a^2-1)\geq0.$$
$$\therefore\ -\sqrt{2}\leq a\leq\sqrt{2}.$$

2010. 解下列各方程, 其中

$$0°\leq x<360°.$$

(1) $2\cos^2x+3\sin x=3$;

(2) $\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\operatorname{ctg}x=\sqrt{3}-1$;

(3) $3(\sec^2x+\operatorname{ctg}^2x)=13$.

解 (1) $2(1-\sin^2x)+3\sin x=3$,

$$2\sin^2x-3\sin x+1=0.$$
$$\therefore\ (\sin x-1)(2\sin x-1)=0,$$

从而得出:

$$\sin x=1, \quad 或 \quad \sin x=\frac{1}{2}.$$

在 $0°\leq x<360°$ 的范围内:

由 $\sin x=1$, 得 $x=90°$;

由 $\sin x=\frac{1}{2}$, 得 $x=30°$, $150°$.

(2) $\operatorname{tg}x-\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}x}=\sqrt{3}-1$,

$$\operatorname{tg}^2x-(\sqrt{3}-1)\operatorname{tg}x-\sqrt{3}=0,$$
$$(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})(\operatorname{tg}x+1)=0.$$

由 $\operatorname{tg}x-\sqrt{3}=0$, 得 $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$.

$$\therefore\ x=60°+n\cdot180° \quad (n 是整数). \quad ①$$

由 $\operatorname{tg}x+1=0$, 得 $\operatorname{tg}x=-1$.

$$\therefore\ x=135°+n\cdot180° \quad (n 是整数). \quad ②$$

由①、②可知, 在 $0°\leq x<360°$ 的范围内,

$$x=60°,\ 135°,\ 240°,\ 315°.$$

(3) 把 $3(1+\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x)=13$ 的两边同乘以 tg^2x, 得

$$3\operatorname{tg}^4x-10\operatorname{tg}^2x+3=0,$$
$$(3\operatorname{tg}^2x-1)(\operatorname{tg}^2x-3)=0.$$

由 $3\operatorname{tg}^2x-1=0$, 得 $\operatorname{tg}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\therefore\ x=\pm30°+n\cdot180°$$
$$(n 是整数). \quad ①$$

由 $\operatorname{tg}^2x-3=0$, 得 $\operatorname{tg}x=\pm\sqrt{3}$.

$$\therefore\ x=\pm60°+n\cdot180° \quad (n 是整数). \quad ②$$

由①、②可知, 在 $0°\leq x<360°$ 的范围内,

$x=30°, 60°, 120°, 150°, 210°,$
$240°, 300°, 330°.$

2011. 确定 a 的取值范围,要使方程

$$\sin^2 x+\cos x+a=0 \quad (0\leq x\leq 2\pi)$$

有解. 又当 $a=1$ 时解这个方程.

解 $-\sin^2 x-\cos x=a$ 有解的充分必要条件是 a 在函数

$$y=-\sin^2 x-\cos x$$

的值域内. 因为

$$y=\cos^2 x-\cos x-1=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4},$$

其中 $-1\leq\cos x\leq 1$, 所以, 当 $\cos x=\frac{1}{2}$ 时, y 取到最小值 $-\frac{5}{4}$; 当 $\cos x=-1$ 时, y 取到最大值 1. 因此所求的 a 的范围是

$$-\frac{5}{4}\leq a\leq 1.$$

当 y 取 1 时, 必有 $\cos x=-1$. 因此 $a=1$ 时解这个方程得 $x=\pi$.

2012. 解方程

$$(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg} x.$$

解 $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, 所以

$$(1-\operatorname{tg} x)\left(1+\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)=1+\operatorname{tg} x,$$

$$(1-\operatorname{tg} x)\frac{(1+\operatorname{tg} x)^2}{1+\operatorname{tg}^2 x}-(1+\operatorname{tg} x)=0,$$

$$(1+\operatorname{tg} x)\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}-1\right)=0,$$

$$(\operatorname{tg} x+1)(\cos 2x-1)=0.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg} x=-1, \text{ 或 } \cos 2x=1.$$

由 $\operatorname{tg} x=-1$, 得 $x=n\pi-\frac{\pi}{4}$;

由 $\cos 2x=1$, 得 $2x=2n\pi$, 即 $x=n\pi$. 其中 n 都是整数.

2013. 解方程:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=4.$$

解 把左边变形,得

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=4.$$

通分,得

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=4.$$

应用倍角公式,得

$$2\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\frac{1}{2}, \text{ 即 } \cos 2x=\frac{1}{2}.$$

它的一般解是

$$2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}. \quad \therefore\quad x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

2014. 设 x 的二次方程

$$x^2-4x\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos 4\theta=0$$

有重根,确定 θ 的值.

解 给出的方程有重根的条件是

$$4\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos 4\theta=0.$$

应用倍角公式,把方程变形成为

$$2\left[1-\cos 2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]-2\cos 4\theta=0.$$

即 $$1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)-\cos 4\theta=0,$$

$$1-\sin 2\theta-(1-2\sin^2 2\theta)=0.$$

$$\therefore\quad \sin 2\theta(2\sin 2\theta-1)=0.$$

由 $\sin 2\theta=0$, 得

$$2\theta=n\pi. \quad \therefore\quad \theta=\frac{n\pi}{2}.$$

由 $2\sin 2\theta-1=0$, 得 $\sin 2\theta=\frac{1}{2}$.

$$\therefore\quad 2\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}.$$

2015. 设 x、y 为一般角, 怎样的 x、y 才能使 $\sin(x+y)=\sin x+\sin y$ 成立.

解 把给出的式子变形,得

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=0,$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)=0,$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\left(-2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)=0,$$

$$\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=0.$$

因此,原式成立的条件是

$$\frac{x+y}{2}=n\pi \quad 或 \quad \frac{x}{2}=n\pi$$

或 $$\frac{y}{2}=n\pi.$$

就是 $x+y=2n\pi$, $x=2n\pi$, $y=2n\pi$ 中任何一个成立即可. 其中 n 是整数.

2016. $\operatorname{tg}(x-y)=\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y$ 是否恒成立?

如果该式不恒成立, 那么当 x、y 取什么值时才能成立?

试在 $0°\leq x\leq 360°$、$0°\leq y\leq 360°$ 时回答上述问题.

解 这个式子不恒成立.

把原式变形,得

$$\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}-(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y)=0,$$

$$\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}[1-(1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)]=0,$$

$$\frac{(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y)\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=0.$$

这个式子成立的条件是下列三者之一:

(i) $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=0$, 即 $x=y$ 或 $|x-y|=180°, 360°$.

(ii) $\operatorname{tg}x=0$, 即 $x=0°, 180°, 360°$.

(iii) $\operatorname{tg}y=0$, 即 $y=0°, 180°, 360°$.

2017. 求满足

$$\sin 2x+\sin 2y=\sin(x+y)$$

的 x、y 之间的关系. 并画出在 $0\leq x\leq 2\pi$, $0\leq y\leq 2\pi$ 范围内这个关系的图象.

解 把给出的式子变形,得

$$2\sin(x+y)\cos(x-y)-\sin(x+y)=0,$$

$$\sin(x+y)[2\cos(x-y)-1]=0.$$

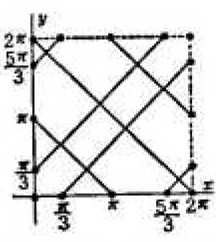
由 $\sin(x+y)=0$, 得

$$x+y=m\pi. \quad ①$$

由 $2\cos(x-y)-1=0$, 得

$$\cos(x-y)=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad x-y=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}. \quad ②$$



由①、②可得, 在 $0\leq x\leq 2\pi$, $0\leq y\leq 2\pi$ 的范围内, x、y 所满足的关系的图象如上图, 其中 · 是属于图象的点.

2018. 画出

$$\sin^2 2x+\cos^2 y=1$$

在 $0\leq x\leq 2\pi$, $0\leq y\leq 2\pi$ 范围内的图象.

解 应用倍角公式,把给出的方程变形成

$$\frac{1}{2}(1-\cos 4x)+\frac{1}{2}(1+\cos 2y)=1,$$

$$\cos 4x-\cos 2y=0.$$

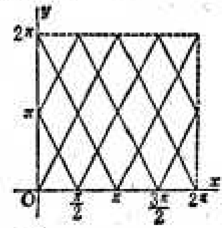
$$\therefore\quad -2\sin(2x+y)\sin(2x-y)=0.$$

由 $\sin(2x+y)=0$, 得

$$2x+y=m\pi. \quad ①$$

由 $\sin(2x-y)=0$, 得

$$2x-y=n\pi. \quad ②$$



由①、②可得,在 $0\leq x\leq 2\pi$, $0\leq y\leq 2\pi$ 范围内的图象如上图所示.

2019. 求满足 $\cos x=\cos 2x$ 的 $\cos x$ 的值. 又求在 $0°<x<180°$ 范围内满足上式的 x 的值.

解 应用倍角公式,得

$$\cos x-(2\cos^2 x-1)=0,$$

$$2\cos^2 x-\cos x-1=0.$$

把左边分解因式,得

$$(2\cos x+1)(\cos x-1)=0.$$

$$\therefore\quad \cos x=-\frac{1}{2} \quad 或 \quad \cos x=1.$$

在 $0°<x<180°$ 的范围内, 满足上式的 x 值为 $x=120°$.

2020. 求使

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2-(\sin\theta-\cos\theta)^2=1$$

成立的锐角 θ 的值.

解 把原式变形,得

$$4\sin\theta\cos\theta=1, \quad 2\sin 2\theta=1.$$

$$\therefore\quad \sin 2\theta=\frac{1}{2}.$$

因此,在 $0°<\theta<90°$ 的范围内,得

$$2\theta=30°, \quad 2\theta=150°.$$

$$\therefore\quad \theta=15°, \quad \theta=75°.$$

2021. 化简下列各式:

(1) $\sin[n\pi+(-1)^n\alpha]$;

(2) $\cos(2n\pi\pm\alpha)$;

(3) $\operatorname{tg}(n\pi+\alpha)$.

解 (1) n 为偶数即 $n=2m$ 时,

$$原式=\sin(2m\pi+\alpha)=\sin\alpha,$$

而当 n 为奇数即 $n=2m+1$ 时,

$$原式=\sin[(2m+1)\pi-\alpha]=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha.$$

所以对任意整数 n

$$\sin[n\pi+(-1)^n\alpha]=\sin\alpha.$$

(2) 因为 $\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数,所以

$$原式=\cos(\pm\alpha)=\cos\alpha.$$

(3) 因为 $\operatorname{tg}x$ 是以 π 为周期的周期函数,所以

$$原式=\operatorname{tg}\alpha.$$

2022. 求满足

$$\sin 2x+\sin x=2\sin^2 x+\cos x$$

的锐角 x.

解 把原式变形,得

$$2\sin x\cos x-2\sin^2 x+\sin x-\cos x=0,$$
$$2\sin x(\cos x-\sin x)-(\cos x-\sin x)=0,$$
$$(\cos x-\sin x)(2\sin x-1)=0.$$
$$\therefore\quad \cos x=\sin x,\ 或\quad \sin x=\frac{1}{2}.$$

因为 x 是锐角,由 $\cos x=\sin x$ 可得 $x=45°$,由 $\sin x=\frac{1}{2}$ 可得 $x=30°$.

2023. 解下列各方程:

(1) $4\cos^3 x-2\cos^2 x-2\cos x+1=0$;

(2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x+(\sqrt{3}-1)\operatorname{tg}x-1=0$;

(3) $3\sec^4 x+8=10\sec^2 x$.

解 (1) $2\cos^2 x(2\cos x-1)-(2\cos x-1)=0.$

$$(2\cos x-1)(2\cos^2 x-1)=0.$$
$$(2\cos x-1)(\sqrt{2}\cos x+1)(\sqrt{2}\cos x-1)=0.$$
$$\therefore\quad \cos x=\frac{1}{2}\quad 或\quad \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

或 $$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

满足上述方程的一个特解分别是

$$x=\frac{\pi}{3},\ x=\frac{3\pi}{4},\ x=\frac{\pi}{4}.$$

所以原方程的一般解是

$$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3},\ x=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4},$$
$$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

把后面两式综合起来,得

$$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3},\ x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

(2) 把左边分解因式,得

$$(\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}x+1)=0.$$
$$\therefore\quad \operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \operatorname{tg}x=-1.$$

满足上述方程的一个特解分别是 $x=\frac{\pi}{6}$, $x=-\frac{\pi}{4}$,所以原方程的一般解是

$$x=n\pi+\frac{\pi}{6},\ x=n\pi-\frac{\pi}{4}.$$

(3) $3\sec^4 x-10\sec^2 x+8=0,$

$$(3\sec^2 x-4)(\sec^2 x-2)=0.$$
$$\therefore\quad \sec x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\ \sec x=\pm\sqrt{2}.$$
$$\therefore\quad \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

满足上述方程的一个特解分别是

$$x=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{5\pi}{6},\ x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{3\pi}{4}.$$

因而原方程的一般解是

$$x=n\pi\pm\frac{\pi}{6},\ x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

2024. 若 θ 是锐角,

$$x=2\cos\theta-\cos 2\theta-1,$$
$$y=2\sin\theta-\sin 2\theta,$$

求使 $x^2+y^2=1$ 成立的 θ 的值.

解 $x=2\cos\theta-(2\cos^2\theta-1)-1$

$$=2\cos\theta(1-\cos\theta),$$
$$y=2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta$$
$$=2\sin\theta(1-\cos\theta).$$

把它们代入 $x^2+y^2=1$,得

$$4\cos^2\theta(1-\cos\theta)^2+4\sin^2\theta(1-\cos\theta)^2=1.$$

变形并分解因式后,得

$$[2(1-\cos\theta)+1][2(1-\cos\theta)-1]=0,$$
$$(3-2\cos\theta)(1-2\cos\theta)=0.$$

因为 $3-2\cos\theta\neq0$,所以 $\cos\theta=\frac{1}{2}$.

$\therefore\quad \theta=60°$.

2025. 为使方程

$$\csc^2 x=\frac{4ab}{(a+b)^2}$$

有解，a、b应满足什么条件？并在这种条件下求方程的解。

解 原方程有解的条件是

$$\frac{4ab}{(a+b)^2}\geqq 1,$$

即 $$4ab-(a+b)^2\geqq 0,$$

$$-(a-b)^2\geqq 0.\quad\therefore\quad a=b.$$

这时，方程可化成为

$$\csc^2 x=\frac{4a^2}{4a^2}=1,$$

$$(\sin x+1)(\sin x-1)=0.$$

$$\therefore\quad \sin x=\pm 1.$$

所以，原方程的一般解是

$$x=2n\pi+\frac{\pi}{2},\ x=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad x=n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

2026. 若a是实数，证明不存在满足方程

$$\sin x=a+\frac{1}{a}$$

的x的值。

解 $a>0$时，因为$a\cdot\dfrac{1}{a}=1$，所以，当$a=\dfrac{1}{a}=1$时$a+\dfrac{1}{a}$取得最小值2．又$a<0$时，可设$a=-a'(a'>0)$，再作同样的讨论，得$a'+\dfrac{1}{a'}$的最小值为2，即$a+\dfrac{1}{a}$的最大值为-2．从而得到

$$a+\frac{1}{a}\leqq -2\quad 或\quad 2\leqq a+\frac{1}{a}.$$

显然可知，适合原方程的x的值是不存在的．

2027. 求适合于下列各方程的x的值，其中取$0°<x<360°$：

(1) $\sin x+\cos x=1$;

(2) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$;

(3) $\cos 2x=\cos x+\sin x$.

解 (1) $\sqrt{2}\sin(x+45°)=1$,

$$\sin(x+45°)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

在$45°<x+45°<405°$时，它的解为

$$x+45°=135°,\quad\therefore\quad x=90°.$$

(2) $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x\right)=1$.

因为$\sin 30°=\dfrac{1}{2}$，$\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$2(\cos 30°\cos x+\sin 30°\sin x)=1.$$

由加法定理，得

$$\cos(x-30°)=\frac{1}{2}.$$

在$-30°<x-30°<330°$时，它的解为

$$x-30°=60°,\ 300°,$$

$$\therefore\quad x=90°,\ 330°.$$

(3) 应用两倍角公式，得

$$\cos^2 x-\sin^2 x-(\cos x+\sin x)=0.$$

把左边分解因式，得

$$(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x-1)=0.$$

$$\therefore\quad \cos x+\sin x=0.$$

或 $$\cos x-\sin x=1.$$

(i) 方程$\cos x+\sin x=0$可变形成为

$$\sqrt{2}\cos(x-45°)=0.$$

$$\therefore\quad x-45°=90°,\ 270°.$$

$$\therefore\quad x=135°,\ 315°.$$

(ii) 方程$\cos x-\sin x=1$可变形成为

$$\sqrt{2}\cos(x+45°)=1,$$

$$\cos(x+45°)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore\quad x+45°=315°.\quad\therefore\quad x=270°.$$

2028. 解方程：

$$\cos 4x+\sin 3x-\cos 2x+\sin x=\frac{1}{2},$$

其中$0°\leqq x\leqq 180°$.

解 应用和差化积公式，把原方程化成为

$$-2\sin 3x\sin x+\sin 3x+\sin x-\frac{1}{2}=0,$$

$$\sin 3x(1-2\sin x)-\frac{1}{2}(1-2\sin x)=0,$$

$$(1-2\sin x)\left(\sin 3x-\frac{1}{2}\right)=0.$$

由$1-2\sin x=0$，得

$$\sin x=\frac{1}{2},\quad\therefore\quad x=30°,\ 150°.$$

由$\sin 3x-\dfrac{1}{2}=0$，得

$3x=30°, 150°, 390°, 510°.$

$\therefore\quad x=10°, 50°, 130°, 170°.$

2029. 解下列各方程:

(1) $\sin^2 x-2\cos x+\frac{1}{4}=0$;

(2) $2\sin^2 x-5\cos x-4=0$;

(3) $2\sqrt{2}\cos^2 x-(2-\sqrt{2})\cos x-1=0.$

解 (1) 把 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ 代入原方程,得

$$1-\cos^2 x-2\cos x+\frac{1}{4}=0.$$

即 $\quad 4\cos^2 x+8\cos x-5=0.$

$\therefore\quad (2\cos x-1)(2\cos x+5)=0.$

因为式中 $2\cos x+5\neq 0$, 所以

$$2\cos x-1=0.\quad \therefore\quad \cos x=\frac{1}{2}.$$

所以方程的一般解是

$$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

(2) 原方程就是

$$2(1-\cos^2 x)-5\cos x-4=0,$$
$$2\cos^2 x+5\cos x+2=0,$$
$$(2\cos x+1)(\cos x+2)=0.$$

因为 $\cos x+2\neq 0$, 所以

$$2\cos x+1=0,\quad \therefore\quad \cos x=-\frac{1}{2}.$$

所以方程的一般解是

$$x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}.$$

(3) 把左边分解因式后,得

$$(2\cos x+1)(\sqrt{2}\cos x-1)=0.$$

$$\therefore\quad \cos x=-\frac{1}{2},\ \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以原方程的一般解是

$$x=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi,\ x=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

2030. 解下列各方程:

(1) $\sin 2x=\cos x$;

(2) $\sin 3x=\cos 2x$.

解 (1) 若把方程中的函数都变形为正弦函数,则

$$\sin 2x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

所以,原方程的一般解是

$$2x=n\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

当 n 是偶数,即 $n=2m$ 时,

$$2x=2m\pi+\frac{\pi}{2}-x,$$

$$\therefore\quad x=\frac{2m\pi}{3}+\frac{\pi}{6}.$$

当 n 是奇数,即 $n=2m+1$ 时,

$$2x=(2m+1)\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\therefore\quad x=2m\pi+\frac{\pi}{2}.$$

(2) 原方程就是

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\cos 2x.$$

它的一般解是

$$\frac{\pi}{2}-3x=2n\pi\pm 2x,$$

$$\therefore\quad x=-\frac{2n\pi}{5}+\frac{\pi}{10},\ x=-2n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

令 $-n=m$, 则它的一般解是

$$x=\frac{2m\pi}{5}+\frac{\pi}{10},\ x=2m\pi+\frac{\pi}{2}.$$

2031. 在 $0\leq x<2\pi$ 的范围内,求满足

$$\cos 2x=\cos x(\sin x+|\sin x|)$$

的 x 的值.

解 在 $0\leq x\leq\pi$ 时因为 $\sin x\geq 0$, 所以

$$\cos 2x=\cos x(\sin x+\sin x),$$
$$\cos 2x=2\sin x\cos x.$$
$$\therefore\quad \sin 2x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right).$$

因此,在 $0\leq x\leq\pi$ 的范围内,得

$$2x=\frac{\pi}{2}-2x,\ 2x=2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-2x\right).$$

$$\therefore\quad x=\frac{\pi}{8},\ x=\frac{5\pi}{8}.$$

在 $\pi<x<2\pi$ 时,因为 $\sin x<0$, 所以

$$\cos 2x=\cos x[\sin x+(-\sin x)].$$
$$\therefore\quad \cos 2x=0.$$

从而得出:

$$2x=2\pi+\frac{\pi}{2},\ 2x=4\pi-\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{5\pi}{4},\ x=\frac{7\pi}{4}.$$

2032. 解下列各方程:

(1) $\sin 6x-2\sin 4x+\sin 2x=0$;

(2) $\cos 3x+\cos 2x+\cos x=0$。

解 (1) 由和差化积公式,得

$$2\sin 4x\cos 2x-2\sin 4x=0.$$

即 $$2\sin 4x(\cos 2x-1)=0.$$

由 $\sin 4x=0$,得

$$4x=n\pi,\quad \therefore\quad x=\frac{n\pi}{4}. \qquad ①$$

由 $\cos 2x=1$,得

$$2x=2n\pi,\quad \therefore\quad x=n\pi. \qquad ②$$

因为②包含在①之中,所以所求方程的一般解就是

$$x=\frac{n\pi}{4}.$$

(2) 由和差化积公式,得

$$\cos 3x+\cos x=2\cos 2x\cos x.$$

所以原方程可化为

$$2\cos 2x\cos x+\cos 2x=0,$$

$$\cos 2x(2\cos x+1)=0.$$

由 $\cos 2x=0$,得

$$2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2},\quad \therefore\quad x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

由 $2\cos x+1=0$,即 $\cos x=-\frac{1}{2}$,得

$$x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}.$$

2033. 解下列各方程:

(1) $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$;

(2) $\cos x\cos 3x=\cos 5x\cos 7x$。

解 (1) 因为

$$\cos x-\cos 2x=-2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{-x}{2},$$

$$\sin 3x=2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2},$$

所以原方程可变形成为

$$-2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{-x}{2}-2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}=0,$$

$$2\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)=0.$$

由 $\sin\frac{3x}{2}=0$,得

$$\frac{3x}{2}=n\pi,\quad \therefore\quad x=\frac{2n\pi}{3}.$$

由 $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=0$,得

$$\sin\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{2}\right).$$

$$\therefore\quad \frac{x}{2}=n\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{2}\right).$$

当 $n=2m$ 时,得

$$\frac{x}{2}=2m\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{2},$$

$$\therefore\quad x=m\pi+\frac{\pi}{4}.$$

当 $n=2m+1$ 时,得

$$\frac{x}{2}=(2m+1)\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{3x}{2},$$

$$-x=2m\pi+\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad x=2m'\pi-\frac{\pi}{2}.$$

(2) 由积化和差公式,原方程可变形成为

$$\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)=\frac{1}{2}(\cos 12x+\cos 2x),$$

$$\cos 4x=\cos 12x.$$

$$\therefore\quad 4x=2n\pi\pm 12x.$$

上式中取正号时,得

$$-8x=2n\pi,\quad \therefore\quad x=-\frac{n\pi}{4}.$$

取负号时,得

$$16x=2n\pi,\quad \therefore\quad x=\frac{n\pi}{8}.$$

但 $-\frac{n}{4}$ 包含在 $\frac{n}{8}$ 之中,所以原方程的一般解是

$$x=\frac{n\pi}{8}.$$

2034. 解方程:

$$3\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=5\csc x.$$

解 原方程就是

$$3\cdot\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{5}{\sin x}=0,$$

$$\frac{1}{\sin x\cos x}(3\sin^2 x+\cos^2 x-5\cos x)=0.$$

$$\therefore\quad 3(1-\cos^2 x)+\cos^2 x-5\cos x=0,$$

$$2\cos^2 x+5\cos x-3=0.$$

把左边分解因式,得

$$(2\cos x-1)(\cos x+3)=0.$$

因为 $\cos x+3\neq 0$,所以

$$\cos x=\frac{1}{2}.\quad \therefore\quad x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

2035. 解下列各方程:

(1) $\sin^3 x+\cos^3 x=0$;

(2) $\sin^2 2x-\sin^2 x=\sin^2\dfrac{\pi}{6}$.

解 (1) 把左边分解因式,得

$$(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=0,$$

$$(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=0.$$

解方程 $\sin x+\cos x=0$, 得

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

所以 $x+\dfrac{\pi}{4}=n\pi$, $\therefore$ $x=n\pi-\dfrac{\pi}{4}$.

因为 $\sin 2x\neq 2$, 所以后一个因式

$$\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

不会等于0.

(2) 把左边第一项化成角 x 的函数, 并用 $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ 代入后得

$$(2\sin x\cos x)^2-\sin^2 x-\frac{1}{4}=0,$$

$$4\sin^2 x(1-\sin^2 x)-\sin^2 x-\frac{1}{4}=0,$$

$$16\sin^4 x-12\sin^2 x+1=0.$$

这是一个关于 $\sin^2 x$ 的二次方程. 所以

$$\sin^2 x=\frac{6\pm\sqrt{36-16}}{16}=\frac{6\pm 2\sqrt{5}}{16}.$$

$$\therefore\quad \sin x=\pm\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

或 $$\sin x=\pm\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

(i) 由 $\sin x=\pm\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, 得

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{10},$$

$$x=n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{10}\right).$$

当 $n=2m$ 时, 得

$$x=2m\pi+\frac{\pi}{10},\quad x=2m\pi-\frac{\pi}{10}.$$

当 $n=2m+1$ 时, 得

$$x=(2m+1)\pi-\frac{\pi}{10},$$

$$x=(2m+1)\pi+\frac{\pi}{10}.$$

这四个解可综合成为

$$x=n\pi\pm\frac{\pi}{10}.$$

(ii) 同理, 由 $\sin x=\pm\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$, 可得

$$x=n\pi\pm\frac{3\pi}{10}.$$

2036. 解方程:

$$\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x+\frac{1}{6}(1-\cos x)^3+\frac{1}{2}\sin^2 x(1-\cos x)=0.$$

解 把给出的方程中第一项 $\sin^2 x$, 用 $1-\cos^2 x$ 即 $(1-\cos x)(1+\cos x)$ 代替,就得

$$\frac{1}{3}(1-\cos x)(1+\cos x)\cos x+\frac{1}{6}(1-\cos x)^3+\frac{1}{2}\sin^2 x(1-\cos x)=0.$$

即

$$(1-\cos x)\left[\frac{1}{3}(1+\cos x)\cos x+\frac{1}{6}(1-\cos x)^2+\frac{1}{2}\sin^2 x\right]=0,$$

$$(1-\cos x)\left[\frac{1+3(\cos^2 x+\sin^2 x)}{6}\right]=0,$$

$$\frac{2}{3}(1-\cos x)=0,$$

$$1-\cos x=0.$$

$$\therefore\quad \cos x=1.$$

从而得出 $\quad x=2n\pi.$

2037. 如果圆的内接正多边形面积与边数相同的外切正多边形面积的比为3:4, 求这两个正多边形的边数.

解 设 n 为边数, R 为圆的半径. 根据题意,得

$$\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}:nR^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}=3:4.$$

从而得出: $$\frac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}=\frac{3}{4}.$$

$$\therefore\quad \cos^2\frac{\pi}{n}=\frac{3}{4}.$$

$$\cos\frac{\pi}{n}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{6}\quad 或\quad \frac{5}{6}\pi.$$

因为 n 是正整数,所以 $n=6$。

2038. 已知方程

$$x^2+px+q=0 \qquad ①$$

的根是 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\beta$,且都是 p、q 的函数,求

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta) \qquad ②$$

的值.

解 方程 ① 的两根的和是 $-p$,即

$$p=-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta).$$

又两根的积是 q,即 $q=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$。

把 p、q 的值代入 ②,得

$$\begin{aligned}&\sin^2(\alpha+\beta)\\&\quad-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\\&\quad+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos^2(\alpha+\beta)\\&=\sin^2(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\\&\quad-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\\&\quad+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\\&=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\left[\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\right.\\&\quad\left.\times(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\right]\\&\quad+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.\end{aligned}$$

因为

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

所以方括号内的式子等于 0.

由此可得,　原式 $=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=q$.

2039. 试用 $\operatorname{tg}\alpha$ 表示 $\sin 3\alpha$,并回答有几个解.

解　$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

若设 $\operatorname{tg}\alpha=t$,则 $\sin\alpha=\dfrac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}$. 代入上式,得

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha&=\frac{3t}{\pm\sqrt{1+t^2}}-\frac{4t^3}{\pm(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\\&=\pm\frac{3t-t^3}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}.\end{aligned}$$

由此可知,$\sin 3\alpha$ 用 $\operatorname{tg}\alpha$ 表示可有两个解.

现从另一角度分析:容易知道用 $\operatorname{tg}\alpha$ 表示 $\sin\alpha$ 时有两解,而 $\sin 3\alpha$ 用 $\sin\alpha$ 表示时只有一解,因此,$\sin 3\alpha$ 用 $\operatorname{tg}\alpha$ 表示时有两解.

2040. 已知 $\lg 24=1.3802112$, $\lg 4.8989=0.6900986$, $\lg 4.8990=0.6901074$,求 $24^{\frac{1}{2}}$ 至第 6 位小数.

解　$\lg 24^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\lg 24=0.6901056$.

$$\begin{array}{rl}&0.6901074\\-)&0.6900986\\\hline&0.0000088\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{rl}&0.6901056\\-)&0.6900986\\\hline&0.0000070\end{array}$$

$$0.0000088:0.0000070=0.0001:x$$

$$\therefore\quad x=0.000079.$$

由此可知

$$\lg 4.898979=0.6901056.$$

所以　$24^{\frac{1}{2}}=4.898979$.

2041. 如果 $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{ctg}\theta)=\operatorname{ctg}(\pi\operatorname{tg}\theta)$,证明

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{4}(2n+1)\pm\frac{1}{4}\sqrt{4n^2+4n-15}.$$

其中 n 是满足 $n\geqq 2$ 或 $n\leqq -3$ 的整数.

解　$\operatorname{tg}(\pi\operatorname{ctg}\theta)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\pi\operatorname{tg}\theta\right)$.

它的所有解都含在下式里,

$$\pi\operatorname{ctg}\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}-\pi\operatorname{tg}\theta.$$

即　$\operatorname{tg}^2\theta-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\theta+1=0$.

解这个二次方程就得到 $\operatorname{tg}\theta$ 的值. 要使 $\operatorname{tg}\theta$ 的值为实数,必须使

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-4=n^2+n-\frac{15}{4}\geqq 0.$$

取这个不等式的整数解,得 $n\geqq 2$, $n\leqq -3$, 且 n 为整数.

2042. 解方程 $x+y=a$ 和 $\sin x\sin y=b$.

解　由第二个方程,得

$$\cos(x-y)-\cos(x+y)=2b.$$

由第一个方程,得

$$\cos(x-y)=2b+\cos a.$$

由此可解得 $(x-y)$ 的值. 再与第一个方程组成方程组,从而解得 x、y 的值.

2043. 解方程 $x+y=a$ 和

$$\sin x+\sin y=b.$$

解　由给出的第二个方程,得

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b.$$

即 $$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{b}{2\sin\frac{a}{2}}.$$

由此可得 $\frac{x-y}{2}$ 的值．设这个值为 θ，因为 $\frac{x+y}{2}=\frac{a}{2}$，所以 $x=\frac{a}{2}+\theta$，$y=\frac{a}{2}-\theta$。

2044． 解方程
$$2\sin^2\theta+\sin^2 2\theta=2.$$

解 由给出的方程，得
$$\sin^2 2\theta=2\cos^2\theta,$$
$$4\sin^2\theta\cos^2\theta=2\cos^2\theta.$$
由此可得 $$\cos^2\theta=0$$
或 $$\sin^2\theta=\frac{1}{2}.$$
即 $\cos\theta=0$ 或 $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $$\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$
或 $$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

2045． 求适合于方程
$$4\sin^2\theta-2(\sqrt{3}+1)\sin\theta+\sqrt{3}=0$$
的 θ 值，其中，取 $0°<\theta<90°$.

解 把方程的左边分解因式，得
$$(2\sin\theta-1)(2\sin\theta-\sqrt{3})=0.$$
所以 $$2\sin\theta-1=0$$
或 $$2\sin\theta-\sqrt{3}=0.$$
从而得出 $$\sin\theta=\frac{1}{2}$$
或 $$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
所以 $\theta=30°$ 或 $\theta=60°$.

2046． 设 $a^2+b^2\geqq c^2>0$，适合于方程 $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ 的两个 θ 值为 α 和 β，求下列各式的值：

(1) $4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}$； (2) $\sin\alpha+\sin\beta$；

(3) $\sin\alpha\sin\beta$.

解 因为
$$\frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
所以，若设 σ 为一适当的定角后可得
$$\sin(\theta+\sigma)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$
因为 $a^2+b^2\geqq c^2$，所以满足这个式子的 θ 值有两个，即 α、β。

由方程组：
$$\begin{cases}a\cos\theta+b\sin\theta=c,\\ \cos^2\theta+\sin^2\theta=1,\end{cases}\qquad ①$$
消去 $\sin\theta$ 后可得到一个关于 $\cos\theta$ 的二次方程，它的两个根就是 $\cos\alpha$、$\cos\beta$．由根和系数的关系，得
$$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{2ca}{a^2+b^2},$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}.$$
用这两个关系可得：

(1) $$4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}=(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)$$
$$=1+(\cos\alpha+\cos\beta)+\cos\alpha\cos\beta$$
$$=1+\frac{2ca+(c^2-b^2)}{a^2+b^2}=\frac{(c+a)^2}{a^2+b^2}.$$

(2) 把 $a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$ 与 $a\cos\beta+b\sin\beta=c$ 的两边分别相加，得
$$a(\cos\alpha+\cos\beta)+b(\sin\alpha+\sin\beta)=2c.$$
因此 $$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{2bc}{a^2+b^2}.$$

(3) 由方程组 ①，消去 $\cos\theta$ 后可得到一个关于 $\sin\theta$ 的二次方程．由根和系数的关系，得
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{c^2-a^2}{a^2+b^2}.$$

2047． 由方程 $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ 与
$$a\cos\varphi+b\sin\varphi=c,$$
求 $a:b:c$．设其中 $\theta+\varphi\neq m\pi$，$\theta-\varphi\neq n\pi$，m、n 为整数。

解 由原方程，得
$$a\cos\theta+b\sin\theta-c=0,$$
$$a\cos\varphi+b\sin\varphi-c=0.$$
所以
$$\frac{a}{\sin\varphi-\sin\theta}=\frac{b}{\cos\theta-\cos\varphi}$$
$$=\frac{c}{\sin\varphi\cos\theta-\cos\varphi\sin\theta}.$$
即
$$\frac{a}{2\cos\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}=\frac{b}{2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}$$
$$=\frac{c}{\sin(\varphi-\theta)}.$$

在各个分母中约去 $2\sin\frac{\varphi-\theta}{2}$ 后，得

$$\frac{a}{\cos\frac{\theta+\varphi}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{\theta-\varphi}{2}}.$$

$$\therefore\quad a:b:c=\cos\frac{\theta+\varphi}{2}:\sin\frac{\theta+\varphi}{2}:\cos\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

2048. 如果 A、B、C 是适合于等式 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=1$ 的三个正锐角，证明 $A+B+C>90°$。

解 $\sin^2(A+B)$

$$\begin{aligned}&=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)^2\\&=\sin^2A\cos^2B+\cos^2A\sin^2B\\&\quad+2\sin A\cos A\sin B\cos B\\&=\sin^2A(1-\sin^2B)\\&\quad+\sin^2B(1-\sin^2A)\\&\quad+2\sin A\cos A\sin B\cos B\\&=\sin^2A+\sin^2B\\&\quad+2\sin A\sin B(\cos A\cos B\\&\quad-\sin A\sin B)\\&=\sin^2A+\sin^2B\\&\quad+2\sin A\sin B\cos(A+B).\qquad ①\end{aligned}$$

$$\sin^2A+\sin^2B=1-\sin^2C=\cos^2C.\qquad ②$$

当 $A+B\geqq 90°$ 时，显然可得 $A+B+C>90°$。当 $0°<A+B<90°$ 时，由 ①，得

$$\sin^2(A+B)>\sin^2A+\sin^2B.$$

由 ②，得 $\sin^2(A+B)>\cos^2C$，

即 $\sin^2(A+B)>\sin^2(90°-C)$。

因为 $0°\leqq A+B<90°$，$0°<C<90°$，即 $0°<90°-C<90°$，

所以 $A+B>90°-C$。

由此可得 $A+B+C>90°$。

2049. 如果 A、B、C 是适合于等式

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1$$

的三个锐角，证明 $A+B+C<180°$。

解 当 A、B、C 为三个锐角且适合于

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1$$

时，则

$$\begin{aligned}\cos^2A&=1-\cos^2C-\cos^2B\\&=\sin^2C-\cos^2B\\&=-\cos(C-B)\cos(C+B).\qquad ①\end{aligned}$$

而 $\cos(B+C)=-\cos(180°-B-C)$。

$$\therefore\quad \cos^2(B+C)=\cos^2(180°-B-C).\qquad ②$$

又

$$\begin{aligned}&\cos^2(B+C)+\cos(B-C)\cos(B+C)\\&=\cos(B+C)[\cos(B+C)+\cos(B-C)]\\&=2\cos B\cos C\cos(B+C).\qquad ③\end{aligned}$$

因为 $B+C>|B-C|$，由 ① 可得

$$\cos(C-B)>0,\quad \cos(C+B)<0,$$

所以，由 ③ 可知

$$\cos^2(B+C)+\cos(B-C)\cos(B+C)<0.$$

$$\therefore\quad \cos(B-C)>-\cos(B+C).$$

当 $180°-B-C\geqq 90°$ 时，$B+C\leqq 90°$，由此可得，$A+B+C<180°$。当 $180°-B-C<90°$ 时，由 ①、② 可知

$$\cos^2A>\cos^2(B+C),$$

即 $\cos^2A>\cos^2(180°-B-C)$。

$$\therefore\quad A<180°-B-C.$$

$$\therefore\quad A+B+C<180°.$$

2050. 如果 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\theta\cos\theta'}{\sin\theta'+\cos\theta}$，证明 $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ 有一个值是 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right)$。

解 由倍角关系，得

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}.$$

所以 $$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\theta\cos\theta'}{\sin\theta'+\cos\theta},$$

$$2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(\sin\theta'+\cos\theta)=\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)\sin\theta\cos\theta'.$$

所以

$$\sin\theta\cos\theta'\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(\sin\theta'+\cos\theta)=\sin\theta\cos\theta'.$$

解这个关于 $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ 的二次方程，得

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{-(\sin\theta'+\cos\theta)\pm(1+\sin\theta'\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta'}.$$

取加号时，得

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{(1-\sin\theta')(1-\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta'}.$$

该式右边的因式

$$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{1-\sin\theta'}{\cos\theta'}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)}$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right),$$

因此　$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right).$

2051. 如果 $\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}$，证明

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right),$$

或　$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right).$

解　由题意可知，

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}.$$

解这个关于 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ 的二次方程，得

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\pm(1\mp\cos\alpha)(1\mp\sin\beta)}{\sin\alpha\cos\beta},$$

当取上面的符号时，得

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right),$$

而取下面的符号时，得

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right).$$

2052. 如果 $\operatorname{tg}^2x+\sec 2x=\frac{10-7\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$，证明 $\cos 2x=\frac{-5-4\sqrt{3}}{23}$.

解　$\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+\frac{1}{\cos 2x}=\frac{10-7\sqrt{3}}{\sqrt{3}},$

即

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x}=\frac{(10-7\sqrt{3})\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos^2 2x(24-10\sqrt{3})$$
$$-\cos 2x(10\sqrt{3}-15)=3.\qquad ①$$

解这个关于 $\cos 2x$ 的二次方程，得到 $\cos 2x$ 的值。但由于 $7\sqrt{3}>10$，故

$$\operatorname{tg}^2x+\sec 2x<0,$$

从而得到 $\sec 2x<0$ 即 $\cos 2x<0$，所以应取①的负根，得

$$\cos 2x=\frac{-5-4\sqrt{3}}{23}.$$

2053. 叙述已知 $\operatorname{tg}\alpha$ 时计算 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$ 的方法。

解　$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}-4\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{4}}{1-6\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}+\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}}.$

为了简便起见，设 $\operatorname{tg}\alpha=p$、$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}=x$，然后再化简，得四次方程

$$px^4+4x^3-6px^2-4x+p=0.$$

这是一个倒数方程，可如下解出：

把方程的两边都除以 x^2，得

$$p\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x-\frac{1}{x}\right)-6p=0.$$

设 $x-\frac{1}{x}=y$，得

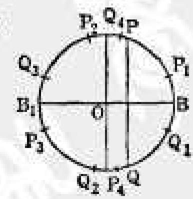
$$p(y^2+2)+4y-6p=0,$$

即　$py^2+4y-4p=0.$

解这个方程可得到两个 y 值。把这两个值分别代入 $x-\frac{1}{x}=y$ 后可各得两个 x 值。因此共得四个 x 值，即四个 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$ 的值。

2054. 若已知 $\cos\alpha$，计算 $\sin\frac{\alpha}{4}$ 时可得几个值。试用图形说明，并用方程的根给出这些值。

解　设 $\cos\alpha$ 给定时，直线 $x=\cos\alpha$ 和单位圆 O 相交于 P、Q 两点，则 OP、OQ 都是给定 $\cos\alpha$ 值的角 α 的终边。设



$$\alpha=\theta+2n\pi,$$
$$(-\pi\leqq\theta\leqq\pi),$$

则　$\frac{\alpha}{4}=\frac{\theta}{4}+\frac{n\pi}{2}.$

若设 $n=4m,\ 4m+1,\ 4m+2,\ 4m+3$，则如图所示，可得到与 P 对应的 P_1、P_2、P_3、P_4，与 Q 对应的 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4，共八点。与 P（或 Q）对应的依次两点所表示的角度的差是

$$\left[\frac{\theta}{4}+\frac{(n+1)\pi}{2}\right]-\left(\frac{\theta}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

点 $P_1, \cdots, Q_1, \cdots$ 的纵坐标都是 $\sin\frac{\alpha}{4}$，设为 x。由倍角(半角)关系可知，它所满足的方程是

$$\cos\alpha+1=2(1-2x^2)^2.$$

若设 $\lambda=\pm\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$，则

$$x=\pm\sqrt{\frac{1-\lambda}{4}}=\pm\frac{\sqrt{1-\lambda}}{2}.$$

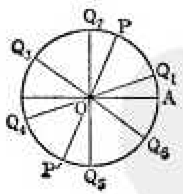
2055. 叙述已知 $\operatorname{tg}\alpha$ 时计算 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$ 的方法。

解 由 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}-\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{3}}{1-3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}}$，得

$$\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{3}-3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}-3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}+\operatorname{tg}\alpha=0.$$

由这个三次方程可解得 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$ 的值。

注 由单位圆上也容易看出 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$ 的值可有三个，就是



$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$，$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$，

$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$。

若设

$$\alpha=\theta+2n\pi, \quad ①$$

和
$$\alpha=(\theta+\pi)+2n\pi \quad ②$$

是给出同样 $\operatorname{tg}\alpha$ 值的两个动半径位置。在

$$\frac{\alpha}{3}=\frac{\theta}{3}+\frac{2n\pi}{3}, \quad \frac{\alpha}{3}=\frac{\theta+\pi}{3}+\frac{2n\pi}{3}$$

中设 $n=3m, 3m+1, 3m+2$，就得到能给出 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$ 三个值的三条动径，也就是前面说到的 $\frac{\alpha}{3}$，$\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$，$\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$。把这三条动径反向延长，就得到另三条动径，但这三条动径仍给出三个同样大小的 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$ 值。可参见附图。

2056. 在已知 $\operatorname{tg}\alpha$ 求 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 时，设 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 的两个值是 t_1、t_2，试应用方程和单位圆分别证明 $t_1t_2=-1$。

解
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

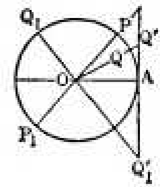
为了简便起见，设 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t$，$\operatorname{tg}\alpha=T$，则

$$T=\frac{2t}{1-t^2} \quad 或 \quad t^2T+2t-T=0.$$

由根和系数的关系可知，

$$t_1t_2=-1.$$

现用过单位圆 O 上点 A 的切线与动半径的交点来考察正切的值。把动半径 OP 与切线的交点和 A 之间的距离作为 $\operatorname{tg}\alpha$，但给出这个值的动半径可以是 OP，也可以是 OP_1。现设 OP 表示的角是 $\alpha=\theta+2n\pi$，OP_1 表示的角是



$$\alpha=(\theta+\pi)+2n\pi,$$

$$\therefore\quad \frac{\alpha}{2}=\frac{\theta}{2}+n\pi \quad 或 \quad \frac{\theta+\pi}{2}+n\pi.$$

它们的差为 $\frac{\pi}{2}$，即图中的 OQ 与 OQ_1 这两条终边交成直角。因为 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 为 AQ'、AQ'_1，AQ'、AQ'_1 分处 OA 两侧，若只考虑绝对值，则 $AQ'_1\cdot AQ'=OA^2=1$。

若考虑方向，则

$$\overrightarrow{AQ'_1}\cdot\overrightarrow{AQ'}=-1.$$

2057. 已知 $\operatorname{tg}(2\alpha-3\beta)=\operatorname{ctg}(3\alpha-2\beta)$，$\operatorname{tg}(2\alpha+3\beta)=\operatorname{ctg}(3\alpha+2\beta)$，证明 α、β 都是 $\frac{\pi}{10}$ 的整数倍。

解 由 $\operatorname{tg}(2\alpha-3\beta)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha+2\beta\right)$ 和

$$\operatorname{tg}(2\alpha+3\beta)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha-2\beta\right),$$

可得
$$2\alpha-3\beta=m\pi+\frac{\pi}{2}-3\alpha+2\beta,$$

$$2\alpha+3\beta=n\pi+\frac{\pi}{2}-3\alpha-2\beta,$$

其中 m、n 都是整数，由这两个式子可解得

$$\alpha=(m+n+1)\frac{\pi}{10}, \quad \beta=(n-m)\frac{\pi}{10}.$$

由此可得，α、β 都是 $\frac{\pi}{10}$ 的整数倍。

2058. 已知

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma=\sin(\alpha+\gamma)\cos\beta,$$

证明 $\beta-\gamma$ 是 π 的整数倍，或若 α 是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍.

解　由已知等式，得

$$(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\cos\gamma$$
$$=(\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma)\cos\beta,$$
$$\cos\alpha(\sin\beta\cos\gamma-\sin\gamma\cos\beta)=0.$$

即　$$\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)=0.$$

若 $\cos\alpha=0$，α 是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍；若

$$\sin(\beta-\gamma)=0,$$

$\beta-\gamma$ 是 π 的整数倍.

2059. 若 $\operatorname{tg}A=\operatorname{ctg}3A$，求 A 的值.

解　$$\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}(90^\circ-3A).$$

$$\therefore\quad A=n\cdot180^\circ+90^\circ-3A.$$

从而得出

$$4A=n\cdot180^\circ+90^\circ=(2n+1)\cdot90^\circ,$$

所以　$$A=(2n+1)\cdot22.5^\circ.$$

2060. 求 790° 与 880° 之间适合 $\operatorname{tg}2\theta=\sqrt{3}$ 的 θ 值.

解　因为适合 $\operatorname{tg}2\theta=\sqrt{3}$ 的 2θ 的最小正角为 60°，所以，2θ 的一般值是

$$180^\circ n+60^\circ.$$

假设 θ 是在 790° 与 880° 之间的角，则 2θ 一定是在 1580° 与 1760° 之间的角，即

$$1580^\circ<180^\circ n+60^\circ<1760^\circ.$$

$$8\frac{4}{9}<n<9\frac{4}{9}.$$

$$\therefore\quad n=9.$$

因此 2θ 的值是 $60^\circ+180^\circ\times9=1680^\circ$，$\theta$ 是 840°.

2061. 解方程：$\sin\theta+\cos\theta=1$.

解　把 $\sin\theta+\cos\theta=1$ 改写成

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

即　$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore\quad \theta+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4},$$

或　$$\theta+\frac{\pi}{4}=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\quad \theta=2k\pi,$$

或　$$\theta=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2},\quad (k\text{ 是整数}).$$

2062. 解方程：$\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1$.

解　把原方程的各项都乘以 $\frac{1}{2}$，得

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{6}\sin\theta=\cos\frac{\pi}{3},$$

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}.$$

所以　$$\theta-\frac{\pi}{6}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

$$\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}\quad\text{或}\quad\theta=2n\pi-\frac{\pi}{6}.$$

2063. 由方程 $\cos\theta-\sin\theta=\cos\alpha-\sin\alpha$ 中求出 θ 的值.

解　把原方程作如下变形

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha,$$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\theta+\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right),$$

从而得出

$$\theta=(8n-1)\frac{\pi}{4}\pm\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

2064. 解方程：

$$\cos2\theta-\cos120^\circ=\cos\theta-\cos60^\circ.$$

解　$\cos120^\circ=-\frac{1}{2}$，$\cos60^\circ=\frac{1}{2}$，所以原方程就是

$$\cos2\theta+\frac{1}{2}=\cos\theta-\frac{1}{2},$$

用 $2\cos^2\theta-1$ 代替 $\cos2\theta$，并化简，得

$$2\cos^2\theta-\cos\theta=0.$$

从而得出：

$$\cos\theta=0,\quad\text{或}\quad\cos\theta=\frac{1}{2}.$$

由 $\cos\theta=0$，得

$$\theta=(2n+1)\cdot90^\circ,$$

由 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，得

$\theta=2n\cdot180°\pm60°=(6n\pm1)\cdot60°$。

2065. 求适合于方程

$$\cos 2A=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos A+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1$$

的 A 的值。

解 由原方程,得

$$2\cos^2 A-1$$

$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos A+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1,$$

$$(2\cos A-\sqrt{3})(\sqrt{2}\cos A+1)=0.$$

从而得出 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

或 $\cos A=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\therefore\quad A=2n\pi\pm\frac{\pi}{6},$$

或 $A=2n\pi\pm\frac{3}{4}\pi$.

2066. 求适合于方程

$$\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta-\frac{7}{4}=0$$

的 θ 的值,其中 $0°<\theta<90°$。

解 把方程左边的 $\sin^2\theta$ 用 $1-\cos^2\theta$ 代替,得

$$1-\cos^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta-\frac{7}{4}=0,$$

$$4\cos^2\theta-4\sqrt{3}\cos\theta+3=0.$$

即 $(2\cos\theta-\sqrt{3})^2=0$.

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \therefore\quad \theta=30°.$$

2067. 解方程: $4\sin^2\theta+\sin^2 2\theta=3$.

解 由给出的方程,得

$$4\sin^2\theta-2=1-\sin^2 2\theta,$$

$$-2(1-2\sin^2\theta)=1-\sin^2 2\theta,$$

从而得到 $-2\cos 2\theta=\cos^2 2\theta$.

所以 $\cos 2\theta=0$, 或 $\cos 2\theta=-2$.

$\cos 2\theta=-2$ 不适合。

由 $\cos 2\theta=0$, 得

$$2\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}\quad 即\quad \theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

2068. 解方程: $\sec^2\theta+3\csc^2\theta=8$.

解 由给出的方程,得

$$\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{3}{\sin^2\theta}=8,$$

$$\sin^2\theta+3\cos^2\theta=8\cos^2\theta\sin^2\theta,$$

$$1+2\cos^2\theta=2\sin^2 2\theta.$$

用 $\cos 2\theta+1$ 代替 $2\cos^2\theta$, 用 $1-\cos^2 2\theta$ 代替 $\sin^2 2\theta$, 上面这个方程可化简成为

$$2\cos^2 2\theta+\cos 2\theta=0.$$

所以 $\cos 2\theta=0$, ①

或 $2\cos 2\theta+1=0$. ②

由 ①, 得 $2\theta=(2n+1)\cdot90°$,

即 $\theta=(2n+1)\cdot45°$.

由 ②, 得 $\cos 2\theta=-\frac{1}{2}$.

从而得到 $2\theta=2n\cdot180°\pm120°$,

$$\theta=n\cdot180°\pm60°=(3n\pm1)60°.$$

2069. 解方程: $\csc\theta-4\sin\theta=2$.

解 $\frac{1}{\sin\theta}-4\sin\theta=2$,

即 $\frac{1}{\sin\theta}(1-4\sin^2\theta-2\sin\theta)=0$,

$$\frac{1}{\sin\theta}(1-2\sin\theta+\sin^2\theta-5\sin^2\theta)=0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta}[(1-\sin\theta)^2-(\sqrt{5}\sin\theta)^2]=0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta}(1-\sin\theta-\sqrt{5}\sin\theta)$$

$$\times(1-\sin\theta+\sqrt{5}\sin\theta)=0.$$

由 $1-\sin\theta-\sqrt{5}\sin\theta=0$,

得 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

由 $1-\sin\theta+\sqrt{5}\sin\theta=0$,

得 $\sin\theta=\frac{1}{1-\sqrt{5}}=-\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$.

满足 $\sin\theta=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ 的一个 θ 值是 $18°$, 所以一般解是

$$n\cdot180°+(-1)^n\cdot18°.$$

满足 $\sin\theta=-\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ 的一个 θ 值是 $-54°$, 所以一般解是

$$n\cdot180°-(-1)^n\cdot54°.$$

2070. 解方程: $\sin 5\theta=16\sin^5\theta$.

解 因为

$$\sin 5\theta=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta,$$

所以原方程可变形成为

$$-20\sin^3\theta+5\sin\theta=0,$$

$$\sin\theta(4\sin^2\theta-1)=0.$$

所以 $\sin\theta=0$，　或　$\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$.

从而得到　　$\theta=n\cdot180°$

或　　$\theta=n\cdot180°\pm30°$.

2071. 求适合于方程 $5\sin x=\cos 2x+2$ 的 x 的值.

解　由给出的方程,得

$$5\sin x=1-2\sin^2x+2,$$

$$2\sin^2x+5\sin x-3=0,$$

$$(2\sin x-1)(\sin x+3)=0.$$

由 $\sin x=\frac{1}{2}$，得 $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. 而 $\sin x+3=0$ 不能成立.

2072. 解方程:

$$\sin 7\theta+\sin 5\theta-\cos 2\theta=1.$$

解　由给出的方程,得

$$\sin 7\theta+\sin 5\theta=1+\cos 2\theta,$$

$$2\sin 6\theta\cos\theta=2\cos^2\theta.$$

所以 $\cos\theta=0$，或　$\sin 6\theta=\cos\theta$.

由 $\cos\theta=0$，得

$$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}.$$

由 $\sin 6\theta=\cos\theta$ 得

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-6\theta\right)=\cos\theta,$$

$$\theta=2n\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-6\theta\right).$$

所以　　$7\theta=(4n+1)\frac{\pi}{2}$,

或　　$-5\theta=(4n-1)\frac{\pi}{2}$.

即　　$\theta=(4n+1)\frac{\pi}{14}$

或　　$\theta=-(4n-1)\frac{\pi}{10}$.

2073. 解方程:

$$4\sin\theta\cos\theta+1+2(\sin\theta+\cos\theta)=0.$$

解　$4\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta+2\cos\theta+1=0$.

即　$2\sin\theta(2\cos\theta+1)+(2\cos\theta+1)=0$,

$$(2\cos\theta+1)(2\sin\theta+1)=0.$$

从而得出:　$\cos\theta=-\frac{1}{2}$,　　①

或　　$\sin\theta=-\frac{1}{2}$.　　②

由 ①，得

$$\theta=n\cdot360°\pm120°=(3n\pm1)\cdot120°.$$

由 ②，得

$$\theta=n\cdot180°-(-1)^n\cdot30°$$

$$=[6n-(-1)^n]\cdot30°.$$

2074. 解方程:

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\sin 4\theta=0.$$

解　由给出的方程,得

$$(\sin\theta+\sin 2\theta)+(\sin 3\theta+\sin 4\theta)=0,$$

即　$2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{7\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$,

$$2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{3\theta}{2}+\sin\frac{7\theta}{2}\right)=0,$$

$$2\cos\frac{\theta}{2}\cdot2\sin\frac{5\theta}{2}\cos\theta=0.$$

所以

$$\cos\frac{\theta}{2}=0,\quad \sin\frac{5\theta}{2}=0,\quad \cos\theta=0.$$

由 $\cos\frac{\theta}{2}=0$，得 $\theta=(2n+1)\pi$.

由 $\sin\frac{5\theta}{2}=0$，得 $\theta=\frac{2n\pi}{5}$.

由 $\cos\theta=0$，得 $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$.

2075. 由方程 $1+\sin^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$，求 $\mathrm{tg}\,\theta$ 的值.

解　　$1+\sin^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$.

即　$\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$,

$$2\sin^2\theta+\cos^2\theta-3\sin\theta\cos\theta=0.$$

两边都除以 $\cos^2\theta$，得

$$2\,\mathrm{tg}^2\theta+1-3\,\mathrm{tg}\,\theta=0.$$

即　　$(2\,\mathrm{tg}\,\theta-1)(\mathrm{tg}\,\theta-1)=0$.

所以 $\mathrm{tg}\,\theta=\frac{1}{2}$ 或 $\mathrm{tg}\,\theta=1$.

2076. 由方程 $8\sin\theta=4+\cos\theta$ 求 $\sin\theta$ 的值.

解　　$8\sin\theta=4+\cos\theta$.

即　　$(8\sin\theta-4)^2=\cos^2\theta$,

$$64\sin^2\theta-64\sin\theta+16=1-\sin^2\theta,$$

$$65\sin^2\theta-64\sin\theta+15=0,$$

$$(5\sin\theta-3)(13\sin\theta-5)=0.$$

从而得出

$$\sin\theta=\frac{3}{5}\quad 或\quad \sin\theta=\frac{5}{13}.$$

2077. 解方程:

$$\cos^3\theta\sin 3\theta+\sin^3\theta\cos 3\theta=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

解 由给出的方程，得

$$\cos^3\theta(3\sin\theta-4\sin^3\theta)$$

$$+\sin^3\theta(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=\frac{3\sqrt{3}}{8},$$

$$3\cos^3\theta\sin\theta-3\sin^3\theta\cos\theta=\frac{3\sqrt{3}}{8},$$

$$\sin 2\theta\cos 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\sin 4\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

从而得出 $4\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$,

$$\theta=\frac{n\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{12}.$$

2078. 解方程:

$$\cos^3\theta\sin 3\theta+\sin^3\theta\cos 3\theta=\frac{3}{4}.$$

解 由上题可知

$$\sin 4\theta=1.$$

所以 $4\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$,

$$\theta=\frac{n\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{8}.$$

2079. 解方程:

$$\sin\theta-\cos\theta=4\cos^2\theta\sin\theta.$$

解 由原方程，得

$$\sin\theta-\cos\theta=4(1-\sin^2\theta)\sin\theta,$$

$$\sin\theta-\cos\theta=4\sin\theta-4\sin^3\theta.$$

所以 $-\cos\theta=\sin 3\theta$.

从而得出

$$\cos(3\theta+90^\circ)=\cos\theta.$$

$$3\theta+90^\circ=n\cdot 360^\circ\pm\theta.$$

由此可得 $\theta=n\cdot 180^\circ-45^\circ$,

即 $\theta=(4n-1)\cdot 45^\circ$,

或 $\theta=n\cdot 90^\circ-22.5^\circ$,

即 $\theta=(4n-1)\cdot 22.5^\circ$.

2080. 解方程:

$$\sec^2\frac{x}{2}+\csc^2\frac{x}{2}=16\operatorname{ctg}x.$$

解 原方程可变形成为

$$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{16\cos x}{\sin x},$$

$$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=\frac{16\cos x\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x},$$

$$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=8\cos x\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2},$$

$$1=4\cos x\sin x,$$

$$1=2\sin 2x.$$

从而得出 $\sin 2x=\frac{1}{2}$.

$$\therefore\quad 2x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6},$$

$$x=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}.$$

2081. 解方程:

$$2\sin^3\theta+3\cos^2\theta+\sin\theta=3.$$

解 由原方程，得

$$2\sin^3\theta+\sin\theta=3\sin^2\theta,$$

$$\sin\theta(2\sin^2\theta+1-3\sin\theta)=0.$$

由此可得 $\sin\theta=0$,

或 $2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$.

由 $\sin\theta=0$, 得 $\theta=n\pi$.

由 $2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$, 得

$$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-1)=0.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{1}{2},\ 或\ \sin\theta=1.$$

所以 $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$

或 $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$.

2082. 解方程:

$$2\cos\theta\cos 3\theta+1=0.$$

解 由原方程，得

$$\cos 4\theta+\cos 2\theta+1=0,$$

$$2\cos^2 2\theta+\cos 2\theta=0,$$

$$\cos 2\theta(2\cos 2\theta+1)=0.$$

所以 $\cos 2\theta=0$, 或 $\cos 2\theta=-\frac{1}{2}$.

由 $\cos 2\theta=0$, 得 $2\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$.

从而得出 $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

由 $\cos 2\theta=-\frac{1}{2}$, 得 $2\theta=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$.

从而得出 $\theta=n\pi\pm\frac{1}{3}\pi$.

2083. 若 α 不等于 π 的整数倍，解关于 θ 的方程：

$$\sin(\theta+\alpha)+\cos(\theta+\alpha)=\sin(\theta-\alpha)+\cos(\theta-\alpha).$$

解 原方程就是

$$\sin(\theta+\alpha)-\sin(\theta-\alpha)=\cos(\theta-\alpha)-\cos(\theta+\alpha).$$

即 $\quad 2\sin\alpha\cos\theta=2\sin\theta\sin\alpha.$

因为 $\alpha\neq k\pi$（k 是整数），所以 $\sin\alpha\neq0$．从而得出

$$\cos\theta=\sin\theta,$$
$$\operatorname{tg}\theta=1.$$

所以 $\quad \theta=n\pi+\dfrac{\pi}{4}.$

2084. 解方程：$\sin^2x+\cos2x=\cos x.$

解 由给出的方程，得

$$\sin^2x+2\cos^2x-1=\cos x.$$

化简后得 $\quad \cos^2x=\cos x.$

从而得出 $\quad \cos x=0,$

或 $\quad \cos x=1.$

由 $\cos x=0$，得

$$x=(2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

由 $\cos x=1$，得 $x=2n\pi.$

2085. 解方程：$\operatorname{tg}(A+B)=\sqrt{3}$，

$\operatorname{tg}(A-B)=1.$

解 由 $\operatorname{tg}(A+B)=\sqrt{3}$，得

$$A+B=m\cdot180^\circ+60^\circ. \quad ①$$

由 $\operatorname{tg}(A-B)=1$，得

$$A-B=n\cdot180^\circ+45^\circ. \quad ②$$

由①、②，得

$$A=\frac{m+n}{2}\cdot180^\circ+52.5^\circ,$$

$$B=\frac{m-n}{2}\cdot180^\circ+7.5^\circ.$$

2086. 解方程：

$$x+y=90^\circ,\ \sin x+\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解 因为 $x+y=90^\circ$，所以

$$\cos y=\sin x.$$

代入第二个方程，得

$$2\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}.\quad \therefore\quad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

所以 $\quad x=n\pi+(-1)^n\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4},$

$$y=2n\pi\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

2087. 设

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha-1,$$
$$y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha+2.$$

试用 X、Y 表示出 x、y 的二次式

$$8x^2+4xy+5y^2+8x-16y-16.$$

其中设 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$，$0^\circ<\alpha<90^\circ$．

解 把已知条件代入已知二次式，并化简，得

$$\begin{aligned}
&8x^2+4xy+5y^2+8x-16y-16\\
&=8(X\cos\alpha-Y\sin\alpha-1)^2\\
&\quad+4(X\cos\alpha-Y\sin\alpha-1)\\
&\quad\times(X\sin\alpha+Y\cos\alpha+2)\\
&\quad+5(X\sin\alpha+Y\cos\alpha+2)^2\\
&\quad+8(X\cos\alpha-Y\sin\alpha-1)\\
&\quad-16(X\sin\alpha+Y\cos\alpha+2)-16\\
&=(5\sin^2\alpha+8\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha)X^2\\
&\quad+(8\sin^2\alpha+5\cos^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha)Y^2\\
&\quad+(-4\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha\\
&\quad-6\sin\alpha\cos\alpha)XY-36\\
&=\cos^2\alpha[(5\operatorname{tg}^2\alpha+4\operatorname{tg}\alpha+8)X^2\\
&\quad+(8\operatorname{tg}^2\alpha-4\operatorname{tg}\alpha+5)Y^2\\
&\quad+(-4\operatorname{tg}^2\alpha-6\operatorname{tg}\alpha+4)XY]-36.
\end{aligned}$$

当 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$ 时，

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{\sec^2\alpha}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}.$$

代入上式，得

$$\begin{aligned}
&8x^2+4xy+5y^2+8x-16y-16\\
&=\frac{4}{5}\left[\left(\frac{5}{4}+2+8\right)X^2+(2-2+5)Y^2\right.\\
&\quad\left.+(-1-3+4)XY\right]-36\\
&=9X^2+4Y^2-36.
\end{aligned}$$

2088. 已知 $\dfrac{\sin\theta}{x}=\dfrac{\cos\theta}{y}$，

$$\frac{\sin^2\theta}{y^2}+\frac{\cos^2\theta}{x^2}=\frac{6}{x^2+y^2},$$

试给出求 θ 的公式.

解 由 $\operatorname{tg}\theta=\frac{x}{y}$, 得 $\sin^2\theta=\frac{x^2}{x^2+y^2}$ 和

$$\cos^2\theta=\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

把它们代入第二个已知的方程, 得

$$\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{6}{x^2+y^2},$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=6.$$

该式可看成是 $\frac{x^2}{y^2}$ 的二次方程. 解这个方程, 得

$$\frac{x^2}{y^2}=3\pm2\sqrt{2}=(\sqrt{2}\pm1)^2.$$

从而得出

$$\operatorname{tg}\theta=\pm(\sqrt{2}+1), \quad ①$$

或 $$\operatorname{tg}\theta=\pm(\sqrt{2}-1). \quad ②$$

由 ①, 得 $\theta=n\pi\pm\frac{3\pi}{8}$.

由 ②, 得 $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{8}$.

2089. 解方程:

$$2(\sin2\theta+\sin2\varphi)=1=2\sin(\theta+\varphi).$$

解 原方程就是:

$$\begin{cases}4\sin(\theta+\varphi)\cos(\theta-\varphi)=1,\\2\sin(\theta+\varphi)=1.\end{cases}$$

所以 $$\begin{cases}\sin(\theta+\varphi)=\frac{1}{2},\\\cos(\theta-\varphi)=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases}\theta+\varphi=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6},\\\theta-\varphi=2m\pi\pm\frac{\pi}{3}.\end{cases}$$

解这个方程组, 可求出 θ 和 φ 的值.

2090. 解方程:

$$2\cos x\cos y=1,\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2.$$

解 由给出的第二个方程, 得

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=2.$$

由它和第一个方程, 得

$$\sin(x+y)=1.$$

所以 $$x+y=2m\pi+\frac{\pi}{2},$$

即 $$y=2m\pi+\frac{\pi}{2}-x.$$

把 y 的值代入第一个方程, 得

$$2\cos x\sin x=1,$$

即 $$\sin2x=1.$$

所以 $$2x=2n\pi+\frac{\pi}{2},$$

即 $$x=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

所以 $$y=(2m-n)\pi+\frac{\pi}{4}.$$

2091. 解方程: $x+y=a$ 和 $\frac{\sin x}{\sin y}=b$.

解 由给出的第二个方程, 得

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{b-1}{b+1},$$

即 $$\frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}=\frac{b-1}{b+1}.$$

所以 $$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{b-1}{b+1}\operatorname{tg}\frac{a}{2}.$$

由此可以求得 $\frac{x-y}{2}$ 的值. 再由这个值和第一个方程求得 x 和 y 的值.

2092. 若

$$x=\gamma\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha),\ y=\gamma\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha),$$

证明 $x^2-2xy\cos\alpha+y^2=\gamma^2\sin^2\alpha$.

解 $$x=\gamma\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$y=\gamma\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

由此可得 $$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{x+y}{2\gamma\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{y-x}{2\gamma\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

把这两个式子的两边分别平方, 然后相加, 得

$$1=\frac{1}{4\gamma^2}\times\frac{(x+y)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+(y-x)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

所以

$$4\gamma^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$=(x+y)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+(y-x)^2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

即

$$\gamma^2\sin^2\alpha=x^2+y^2-2xy\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=x^2+y^2-2xy\cos\alpha.$$

2093. 由 $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+x)$，求 $\operatorname{tg}x$ 的值，若要使 $\operatorname{tg}x$ 是实数，则 $\operatorname{tg}\beta$ 必须不在 $(\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha)^2$ 和 $(\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha)^2$ 之间．试加以证明．

解　$$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(x+\alpha),$$
$$\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{tg}\beta(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\alpha)}{(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha)}.$$

即　$$\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha)=\operatorname{tg}\beta(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\alpha),$$
$$\operatorname{tg}^2x\operatorname{tg}\alpha+(\operatorname{tg}\beta-1)\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=0.$$

要使 $\operatorname{tg}x$ 的值是实数，必须使

$$(\operatorname{tg}\beta-1)^2-4\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta\geqq0.$$
$$\therefore\quad\operatorname{tg}^2\beta-2(2\operatorname{tg}^2\alpha+1)\operatorname{tg}\beta+1\geqq0.$$

即

$$[\operatorname{tg}\beta-(\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha)^2][\operatorname{tg}\beta-(\operatorname{tg}\alpha-\sec\alpha)^2]\geqq0.$$

由此可得，$\operatorname{tg}\beta$ 必须不在 $(\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha)^2$ 和 $(\operatorname{tg}\alpha-\sec\alpha)^2$ 之间．

2094. 若 $A+B+C=180°$，

$$y\sin^2A+x\sin^2B=z\sin^2B+y\sin^2C=x\sin^2C+z\sin^2A,$$

证明 $x:y:z=\sin2A:\sin2B:\sin2C$．

解　设

$$h=y\sin^2A+x\sin^2B=z\sin^2B+y\sin^2C=x\sin^2C+z\sin^2A.$$

即　$$x\sin^2B+y\sin^2A=h,$$
$$y\sin^2C+z\sin^2B=h,$$
$$x\sin^2C+z\sin^2A=h,$$

由此可得

$$x:y:z=\sin^2A(\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A):\sin^2B(\sin^2A-\sin^2B+\sin^2C):\sin^2C(\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C).\quad①$$

由公式[11]、[12]，得

$$\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A$$
$$=\sin^2B+(\sin C+\sin A)(\sin C-\sin A)$$
$$=\sin^2B+\sin B\sin(C-A)$$
$$=\sin B[\sin B+\sin(C-A)]$$
$$=2\sin B\sin C\cos A.$$

同理可得，

$$\sin^2A-\sin^2B+\sin^2C=2\sin A\sin C\cos B,$$
$$\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=2\sin A\sin B\cos C.$$

代入①式，就可以得到所要证明的结论．

2095. 已知 $\sin A$，求 $\frac{A}{3}$ 的值．

解　由公式，得

$$\sin A=3\sin\frac{A}{3}-4\sin^3\frac{A}{3}.$$

设　$$\sin A=a,\quad\sin\frac{A}{3}=x,$$

于是就把问题变成解三次方程

$$4x^3-3x+a=0.$$

另外，对于 $\sin A$，$\sin\frac{A}{3}$ 等于

$$\sin\frac{1}{3}[n\pi+(-1)^nA].$$

现把 n 取作 $3m$、$3m+1$ 和 $3m-1$ 来进行考察．

首先，设 $n=3m$，于是

$$\sin\frac{1}{3}[n\pi+(-1)^nA]=\sin\left[m\pi+(-1)^n\frac{A}{3}\right]=\sin\frac{A}{3}.$$

下面，设 $n=3m+1$，于是

$$\sin\frac{1}{3}[n\pi+(-1)^nA]=\sin\left[m\pi+\frac{\pi+(-1)^nA}{3}\right]$$
$$=\sin\frac{\pi-A}{3},\ \text{或}\ \sin\frac{4\pi+A}{3}.$$

最后，设 $n=3m-1$，于是

$$\sin\frac{1}{3}[n\pi+(-1)^nA]=\sin\left[m\pi+\frac{-\pi+(-1)^nA}{3}\right]$$
$$=\sin\frac{-\pi-A}{3},\ \text{或}\ \sin\frac{2\pi+A}{3}.$$

这里　$$\sin\frac{2\pi+A}{3}=\sin\frac{\pi-A}{3},$$
$$\sin\frac{-\pi-A}{3}=\sin\frac{4\pi+A}{3}.$$

所以，所得的结果是

$$\sin\frac{A}{3},\ \sin\frac{\pi-A}{3},\ \sin\frac{4\pi+A}{3}$$

三个值.

2096. 由方程

$$\sec\alpha\cos(x+y)=1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y,$$
$$\sec\beta\cos(x-y)=1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y,$$

求 $\cos(x-y)$ 和 $\cos(x+y)$ 的值.

解 两个已知方程可分别变形成为

$$\sec\alpha\cos x\cos y\cos(x+y)=\cos(x-y),\quad ①$$
$$\sec\beta\cos x\cos y\cos(x-y)=\cos(x+y).\quad ②$$

由 ①、②, 得

$$\cos x\cos y=\pm\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}.\quad ③$$

解由 ①、③ 组成的方程组. 下面分两种情况进行讨论.

(1) 当 ③ 中取正号时, 代入 ①, 得

$$\sec\alpha\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}(\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}-\sin x\sin y)$$
$$=\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}+\sin x\sin y.$$

$$\therefore\quad (1+\sec\alpha\sqrt{\cos\alpha\cos\beta})\sin x\sin y$$
$$=\cos\beta-\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}.$$

$$\therefore\quad \sin x\sin y=\frac{\cos\alpha(\cos\beta-\sqrt{\cos\alpha\cos\beta})}{\cos\alpha+\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

$$\because\quad \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$

$$\therefore\quad \cos(x+y)=\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\cos\alpha(\cos\beta-\sqrt{\cos\alpha\cos\beta})}{\cos\alpha+\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}}$$
$$=\frac{2\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}}{\cos\alpha+\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

同理可得

$$\cos(x-y)=\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

因为这是在实数范围内计算, 所以一般要分 $\cos\alpha>0$、$\cos\beta>0$ 和 $\cos\alpha<0$、$\cos\beta<0$ 两种情况进行. 这里如果取两者都是正的, 那么

$$\cos(x+y)=\frac{2\cos\alpha\sqrt{\cos\beta}}{\sqrt{\cos\alpha}+\sqrt{\cos\beta}},$$

$$\cos(x-y)=\frac{2\cos\beta\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{\cos\alpha}+\sqrt{\cos\beta}}.$$

(2) 当 ③ 中取负号时,

$$\sin x\sin y=\frac{\cos\alpha(\cos\beta+\sqrt{\cos\alpha\cos\beta})}{\cos\alpha-\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

用与 (1) 里同样的方法, 可以求得

$$\cos(x+y)=\frac{-2\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}}{\cos\alpha-\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}},$$

$$\cos(x-y)=\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha-\sqrt{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

与 (1) 相同, 这时也要分 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 都是正的和都是负的两种情况来计算.

(公式[11])

2097. 若

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sqrt{1-c^2\sin^2\theta},$$
$$\cos\varphi=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi},$$

证明 $\cos\theta+\cos\varphi=\dfrac{2\cos\alpha\cos\beta}{1-c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$

和 $1+\cos\theta\cos\varphi=\dfrac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{1-c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

并求出 $\sin\theta\sin\varphi$ 和 $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ 的值.

解 由第一个方程, 得

$$(\cos\theta-\cos\alpha\cos\beta)^2$$
$$=\sin^2\alpha\sin^2\beta(1-c^2\sin^2\theta).$$

用 $1-\cos^2\theta$ 代换 $\sin^2\theta$, 得

$$\cos^2\theta(1-c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)$$
$$-2\cos\theta\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$$
$$-(1-c^2)\sin^2\alpha\sin^2\beta=0.$$

由第二个方程得到关于 $\cos\varphi$ 的二次方程, 而这个方程的各项系数和常数项与方程 ① 完全相同, 由此可知, $\cos\theta$ 是这个二次方程的一个根, 而 $\cos\varphi$ 是它的另一个根. 因此

$$\cos\theta+\cos\varphi=\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{1-c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta},$$

$$\cos\theta\cos\varphi=\frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta-(1-c^2)\sin^2\alpha\sin^2\beta}{1-c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

$$1+\cos\theta\cos\varphi=\frac{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta}{1-c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$
$$=\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{1-c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

从而得出:

$$\sin^2\theta\sin^2\varphi=(1-\cos^2\theta)(1-\cos^2\varphi)$$
$$=(1+\cos\theta\cos\varphi)^2-(\cos\theta+\cos\varphi)^2$$
$$=\frac{(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)^2}{(1-c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)^2},$$

所以

$$\sin\theta\sin\varphi=\pm\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{1-c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$$
$$=\frac{1-(\cos\theta+\cos\varphi)+\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta\sin\varphi}$$
$$=\frac{(\cos\alpha-\cos\beta)^2}{\pm(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)}$$
$$=\pm\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}.$$

2098. 解方程:

$$2\sin^2\theta=3\cos\theta.$$

解　由给出的方程,得

$$1-\cos^2\theta=\frac{3}{2}\cos\theta,$$

$$\cos^2\theta+\frac{3}{2}\cos\theta-1=0.$$

解这个二次方程,得

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\quad 或\quad \cos\theta=-2.$$

这里因为 $\cos\theta$ 的绝对值不能大于1,所以只有前面一个 $\cos\theta$ 的值是适合的。

由 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, 得 $\theta=\frac{\pi}{3}$. 一般地

$$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

2099. 若 $2\sin(A+30^\circ)=\cos A$, 求 A 的值.

解　$2\sin(A+30^\circ)$
$$=2\sin A\cos 30^\circ+2\cos A\sin 30^\circ$$
$$=\sqrt{3}\sin A+\cos A.$$

所以,给出的方程可以化为

$$\sqrt{3}\sin A=0.\quad\therefore\quad \sin A=0.$$

从而得出　　$A=n\pi.$

2100. 解方程:

$$\sin\theta+\sin\varphi=1,\quad \cos\theta+\cos\varphi=1.$$

解　由给出的两个方程,得

$$\sin\theta=1-\sin\varphi,\quad \cos\theta=1-\cos\varphi.$$

由此可得

$$(1-\sin\varphi)^2+(1-\cos\varphi)^2=1,$$

即　　$\sin\varphi+\cos\varphi=1.$

所以　　$\varphi=2n\pi$

或　　$\varphi=2n\pi+\frac{\pi}{2}.$

$$\theta=2m\pi+\frac{\pi}{2}\quad 或\quad \theta=2m\pi.$$

2101. 和 α 具有相同的余弦值的角都包含在公式 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+(-1)^n\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ 中,试加以证明.

解　设 θ 是和 α 具有相同的余弦值的角,即

$$\cos\theta=\cos\alpha.$$

于是　　$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$

所以 $\theta-\frac{\pi}{2}=n\pi+(-1)^n\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$

即 $\theta=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+(-1)^n\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$

这就是说,所有 θ 的值都包含在上面这个式子中.

2102. 和 α 具有相同的正弦值的角都包含在公式 $\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 中,试加以证明.

解　设 θ 是和 α 具有相同的正弦值的角,即

$$\sin\theta=\sin\alpha.$$

于是　　$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$

所以　$\theta-\frac{\pi}{2}=2n\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$

即　$\theta=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$

这就是说,所有 θ 的值都包含在上面这个式子中.

2103. 解方程:

$$\sin 7x-\sin x=\sin 3x.$$

解　由给出的方程,得

$$2\sin 3x\cos 4x=\sin 3x,$$

即　　$\sin 3x(2\cos 4x-1)=0.$

由此可得　　$\sin 3x=0,$

或　　$\cos 4x=\frac{1}{2}.$

由 $\sin 3x=0$, 得 $3x=n\pi$. 即

$$x=\frac{n\pi}{3}.$$

由 $\cos 4x=\frac{1}{2}$，得

$$4x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}. \quad 即 \quad x=\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12}.$$

2104. 解方程:

$$-\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1.$$

解 把原方程的各项都乘以 $-\frac{1}{2}$，得

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=-\frac{1}{2},$$

$$\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{2\pi}{3}.$$

即 $$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}.$$

所以 $$\theta+\frac{\pi}{6}=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3},$$

$$\theta=2n\pi-\frac{\pi}{6}\pm\frac{2\pi}{3}.$$

2105. 解方程:

$$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}.$$

解 因为 $\operatorname{ctg}30^\circ=\sqrt{3}$，所以所给的方程就是

$$\operatorname{ctg}30^\circ\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}.$$

即 $$\frac{\cos 30^\circ\sin\theta-\cos\theta\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ}=\sqrt{2},$$

$$\sin(\theta-30^\circ)=\sqrt{2}\sin 30^\circ,$$

$$\sin(\theta-30^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以

$$\theta-30^\circ=n\cdot180^\circ+(-1)^n\cdot45^\circ.$$

即 $$\theta=n\cdot180^\circ+(-1)^n\cdot45^\circ+30^\circ$$
$$=(6n+1)\cdot30^\circ+(-1)^n\cdot45^\circ.$$

2106. 解方程:

$$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{2}.$$

解 由给出的方程，得

$$\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

即 $$\sin 30^\circ\cos\theta+\cos 30^\circ\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin(30^\circ+\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

所以 $$30^\circ+\theta=n\cdot180^\circ+(-1)^n\cdot45^\circ,$$

$$\theta=n\cdot180^\circ+(-1)^n\cdot45^\circ-30^\circ$$
$$=(6n-1)\cdot30^\circ+(-1)^n\cdot45^\circ.$$

2107. 解方程:

$$\cos 2\theta=\cos\theta+\sin\theta.$$

解 由给出的方程，得

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos\theta+\sin\theta,$$

$$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=\cos\theta+\sin\theta.$$

所以 $$\cos\theta+\sin\theta=0, \quad ①$$

或 $$\cos\theta-\sin\theta=1. \quad ②$$

由①，得 $$\operatorname{tg}\theta=-1,$$

$$\therefore \quad \theta=n\pi-\frac{\pi}{4}.$$

由②，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4},$$

即 $$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}.$$

所以 $$\theta+\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore \quad \theta=2n\pi \quad 或 \quad \theta=2n\pi-\frac{\pi}{2}.$$

2108. 解方程:

$$\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}.$$

解 给出的方程可化成为

$$\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}=1,$$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

所以 $$\theta+\frac{\pi}{4}=2n\pi.$$

即 $$\theta=\frac{1}{4}(8n-1)\pi.$$

2109. 解方程:

$$(2+\sqrt{3})\cos\theta=1-\sin\theta.$$

解 因为

$$2+\sqrt{3}=\operatorname{tg}75^\circ,$$

所以原方程可变形成为

$$\operatorname{tg}75^\circ\cos\theta=1-\sin\theta,$$

$$\operatorname{tg}75^\circ\cos\theta+\sin\theta=1,$$

$$\sin 75^\circ\cos\theta+\sin\theta\cos 75^\circ=\cos 75^\circ,$$

$$\sin(\theta+75^\circ)=\sin 15^\circ.$$

所以 $$\theta+75^\circ=n\cdot180^\circ+(-1)^n\cdot15^\circ.$$

即　$\theta=n\cdot180^\circ+(-1)^n\cdot15^\circ-75^\circ$

$=[(12n-5)+(-1)^n]15^\circ$.

2110. 解方程:

$$\cos2\theta=(\sqrt{2}+1)\left(\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

解　把给出的方程变形,得

$$2\cos^2\theta-1=\sqrt{2}\cos\theta-1+\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$2\cos^2\theta-\cos\theta-\sqrt{2}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}=0,$$

$$\cos\theta(2\cos\theta-1)-\frac{1}{\sqrt{2}}(2\cos\theta-1)=0,$$

$$(2\cos\theta-1)\left(\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0.$$

由此可得

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\text{ 或 }\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, 得

$$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3},$$

由 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 得

$$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

2111. 解方程:

$$\cos2\theta-\cos4\theta=\sin\theta.$$

解　由给出的方程,得

$$2\sin3\theta\sin\theta=\sin\theta.$$

由此可得

$$\sin\theta=0,\text{ 或 }\sin3\theta=\frac{1}{2}.$$

由 $\sin\theta=0$, 得

$$\theta=n\pi.$$

由 $\sin3\theta=\frac{1}{2}$, 得

$$3\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

即　$$\theta=\frac{n}{3}\pi+(-1)^n\frac{\pi}{18}.$$

2112. 解方程:

$$\cos\theta-\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta=0.$$

解　由给出的方程,得

$$\cos\theta(1-\cos2\theta)+\sin2\theta=0,$$

$$2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+1)=0.$$

由此可得　$\sin\theta=0$,

或　$\cos\theta=0$, 或　$\sin\theta=-1$.

如果 $\sin\theta=0$, 那么

$$\theta=n\pi;$$

如果 $\cos\theta=0$, 那么

$$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2};$$

如果 $\sin\theta=-1$, 那么

$$\theta=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{2}.$$

2113. 解方程:

$$\sin^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0.$$

解　由给出的方程,得

$$1-\cos^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0,$$

$$\cos^2\theta+2\cos\theta=\frac{5}{4}.$$

解这个二次方程,得

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\quad\text{或}\quad\cos\theta=-\frac{5}{2}.$$

因为后面一个 $\cos\theta$ 的值不适合,所以原方程的一般解是

$$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

2114. 解方程:

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=2\sin2\theta.$$

解　由给出的方程,得

$$1+\sin2\theta=2\sin2\theta,$$

即　$$\sin2\theta=1.$$

所以　$$2\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}.$$

即　$$\theta=\frac{n}{2}\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}.$$

2115. 解方程:

$$\sec\theta-\cos\theta=0.$$

解　$$\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=0,$$

$$\frac{1}{\cos\theta}(1-\cos^2\theta)=0.$$

从而得出:　$\sin^2\theta=0$.

$\therefore\quad\sin\theta=0.$

所以　$\theta=n\pi.$

2116. 解方程:

$$\csc\theta-\sin\theta=0.$$

解 $$\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta=0.$$

即 $$1-\sin^2\theta=0,$$
$$\cos^2\theta=0.$$

由此可得 $$\cos\theta=0.$$

所以 $$\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

2117. 解方程:

$$\sin^2 2\theta-\sin^2\theta=\frac{1}{2}\sin 3\theta.$$

解 由给出的方程,得

$$\sin 3\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin 3\theta,$$

所以 $\sin 3\theta=0$, 或 $\sin\theta=\frac{1}{2}$.

由 $\sin 3\theta=0$, 得

$$3\theta=n\pi,$$

所以 $$\theta=\frac{n}{3}\pi.$$

由 $\sin\theta=\frac{1}{2}$, 得

$$\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

2118. 解方程:

$$2\sin\theta\sin 3\theta-\sin^2 2\theta=0.$$

解 由给出的方程,得

$$2\sin^2 2\theta-2\sin^2\theta-\sin^2 2\theta=0,$$
$$\sin^2 2\theta-2\sin^2\theta=0,$$
$$4\sin^2\theta\cos^2\theta-2\sin^2\theta=0.$$

从而得出

$$\sin^2\theta=0, \text{ 或 } \cos^2\theta=\frac{1}{2}.$$

即 $\sin\theta=0$, 或 $\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

由 $\sin\theta=0$, 得 $\theta=n\pi$.

由 $\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, 得

$$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{4},$$

和 $\theta=2n\pi\pm\pi\pm\frac{\pi}{4}=(2n\pm1)\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

把它们综合成一个式子就是

$$\theta=[4n\pm(-1)^n]\frac{\pi}{4}.$$

2119. 解方程:

$$\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta=0.$$

解 $$\sin\theta+\sin 5\theta+\sin 3\theta=0,$$
$$2\sin 3\theta\cos 2\theta+\sin 3\theta=0.$$

由此可得 $$\sin 3\theta=0,$$

或 $$2\cos 2\theta+1=0.$$

由 $\sin 3\theta=0$, 得

$$3\theta=n\pi,$$

所以 $$\theta=\frac{n\pi}{3}. \quad ①$$

由 $2\cos 2\theta+1=0$, 得

$$\cos 2\theta=-\frac{1}{2}.$$

所以 $$2\theta=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}.$$

即 $$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{3}. \quad ②$$

① 和 ② 就是所要求的答案, 把它们综合成一个式子, 就是 $\theta=\frac{n\pi}{3}$.

2120. 解方程:

$$\sin 2\theta-\cos 2\theta-\sin\theta+\cos\theta=0.$$

解

$$(\sin 2\theta-\sin\theta)+(\cos\theta-\cos 2\theta)=0,$$
$$2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}=0.$$

从而得出 $$\sin\frac{\theta}{2}=0,$$

或 $$\cos\frac{3\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}=0.$$

由 $\sin\frac{\theta}{2}=0$, 得

$$\frac{\theta}{2}=n\pi, \text{ 即 } \theta=2n\pi.$$

由 $\cos\frac{3\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}=0$, 得

$$\operatorname{tg}\frac{3\theta}{2}=-1.$$

所以 $$\frac{3\theta}{2}=n\pi-\frac{\pi}{4}.$$

即 $$\theta=(4n-1)\frac{\pi}{6}.$$

2121. 求适合于下列各方程的 θ 的最小正值:

(1) $3\csc^2\theta-8\operatorname{ctg}^2\theta+2=0$;

(2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$;

(3) $\operatorname{tg}^2\theta+\operatorname{ctg}^2\theta=2(\sec\theta\csc\theta-1)$.

解　(1) 由给出的方程，得

$$3+3\operatorname{ctg}^2\theta-8\operatorname{ctg}^2\theta+2=0.$$

即　$\operatorname{ctg}^2\theta=1$, $\operatorname{ctg}\theta=\pm1$.

所以　$\theta=\frac{\pi}{4}$.

(2) 由所给的方程，得

$$\frac{1+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\theta}=\frac{3(1-\operatorname{tg}\theta)}{1+\operatorname{tg}\theta}.$$

即

$$\left(\frac{1+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\theta}\right)^2=3,\quad \frac{1+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\theta}=\pm\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\pm\sqrt{3}-1}{\pm\sqrt{3}+1}=2\pm\sqrt{3}.$$

因为　$\operatorname{tg}15^\circ=2-\sqrt{3}$,

$\operatorname{tg}75^\circ=2+\sqrt{3}$,

所以　$\theta=15^\circ$.

(3) 由所给的方程，得

$$\operatorname{tg}^2\theta+\operatorname{ctg}^2\theta+2\operatorname{tg}\theta\operatorname{ctg}\theta=\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}.$$

即　$(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta)^2=\frac{4}{\sin2\theta}$,

$$\frac{4}{\sin^2 2\theta}=\frac{4}{\sin2\theta},$$

$$\sin^2 2\theta-\sin2\theta=0,$$

$$\sin2\theta(\sin2\theta-1)=0.$$

从而得出　$\sin2\theta=0$,

或　$\sin2\theta=1$.

可是 $\sin2\theta=0$ 不适合题意.

所以，由 $\sin2\theta=1$，得 $2\theta=90^\circ$，即

$$\theta=45^\circ.$$

2122. 求适合于

$$\sin(A-40^\circ)=\sin(A+80^\circ)$$

的 A 的一个值.

解　所谓求适合于

$$\sin(A-40^\circ)=\sin(A+80^\circ)$$

的 A 的一个值，通常指的是求 A 的正的锐角.

由此可得

$$(A-40^\circ)+(A+80^\circ)=180^\circ.$$

即　$2A=140^\circ$，$A=70^\circ$.

2123. 已知 $\cos2A+\cos A=0$，求 A 的值. 这里 A 是 0° 到 360° 之间的角.

解　由给出的方程，得

$$2\cos^2A-1+\cos A=0.$$

即　$(2\cos A-1)(\cos A+1)=0$.

由此可得

$$\cos A=\frac{1}{2},\ \text{或}\quad \cos A=-1.$$

所以　$A=n\cdot360^\circ\pm60^\circ$,

或　$A=(2n+1)180^\circ$.

因为 A 在 0° 到 360° 之间，所以取 $n=0$，得 $A=60^\circ$，$A=180^\circ$，取 $n=1$，得 $A=300^\circ$.

2124. 求适合于方程 $x+y=90^\circ$ 和

$$\sin(3x-y)=\frac{1}{2}$$

的所有小于 180° 的角 x 和角 y.

解　由给出的第二个方程，得

$$3x-y=n\cdot180^\circ+(-1)^n\cdot30^\circ.$$

又已知　$x+y=90^\circ$,

所以　$4x=(2n+1)\cdot90^\circ+(-1)^n\cdot30^\circ$.

若取 $n=0$，则 $x=30^\circ$，从而得出 $y=60^\circ$；

若取 $n=1$，则 $x=60^\circ$，从而得出 $y=30^\circ$；

若取 $n=2$，则 $x=120^\circ$，从而得出

$y=-30^\circ$；

若取 $n=3$，则 $x=150^\circ$，从而得出

$y=-60^\circ$；

若取 $n=-1$，则 $x=-30^\circ$，从而得出

$y=120^\circ$；

若取 $n=-2$，则 $x=-60^\circ$，从而得出

$y=150^\circ$.

2125. 解下列各方程:

(1) $2\sin x\operatorname{tg}x+1=\operatorname{tg}x+2\sin x$;

(2) $a\sin2x=b\operatorname{tg}x$.

解　(1) 由给出的方程，得

$$2\sin x(\operatorname{tg}x-1)-(\operatorname{tg}x-1)=0.$$

即　$(\operatorname{tg}x-1)(2\sin x-1)=0$.

所以　$\operatorname{tg}x-1=0$,　①

或　$2\sin x-1=0$.　②

由①，得　$\operatorname{tg}x=1$.

$$\therefore\quad x=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

由②，得　$\sin x=\frac{1}{2}$.

$$\therefore\quad x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

(2) 由给出的方程，得

$$2a\sin x\cos x=\frac{b\sin x}{\cos x},$$

$$\sin x(2a\cos^2 x-b)=0.$$

所以　$$\sin x=0,$$

或　$$\cos^2 x=\frac{b}{2a}.$$

由第一个方程，得

$$x=n\pi.$$

由第二个方程，得

$$\cos x=\pm\sqrt{\frac{b}{2a}}.$$

$$\therefore\quad x=2n\pi\pm\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{b}{2a}}\right).$$

2126. 求适合于方程 $\cos x=0$ 的角 x，并写出这些角中最小的三个正角.

解　对于 $\cos x=0$ 来说，适合于这个式子的 $360°$ 以内的正角是 $90°$ 和 $270°$. 因此，适合于这个式子的 x 的一般值是绝对值为 $90°$ 的奇数倍的角. 设 n 是任意的整数，则

$$x=(2n+1)\cdot 90°.$$

上式中取 $n=0$, $n=1$, $n=2$, 则得到最小的三个正角是 $90°$, $270°$, $450°$.

2127. 求适合于方程 $\sin x=0$ 的所有的角 x.

解　在 $0°$ 到 $360°$ 的范围内，适合于 $\sin x=0$ 的 x 的值是 $0°$ 和 $180°$. 因此，适合于这个式子的 x 的一般值是

$$n\cdot 360°+0° \quad 和 \quad n\cdot 360°+180°,$$

即　$$n\cdot 360° \quad 和 \quad (2n+1)\cdot 180°.$$

这两个值可以用一个式子 $m\cdot 180°$ 来表示.

2128. 证明下列各式:

(1) $\frac{1}{2}\cos 40°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40°=\sin 70°$;

(2) $\sin 105°+\cos 105°=\cos 45°$;

(3) $\sin 95°-\sin 25°-\sin 35°=0$;

(4) $\sin 50°+\sin 10°-\cos 20°=0$.

解　(1)

$$\begin{aligned}左边&=\sin 30°\cos 40°+\cos 30°\sin 40°\\&=\sin(30°+40°)=\sin 70°.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}左边&=\sin(60°+45°)+\cos(60°+45°)\\&=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°\\&\quad+\cos 60°\cos 45°-\sin 60°\sin 45°\\&=2\cos 60°\cos 45°\\&=2\times\frac{1}{2}\cos 45°=\cos 45°.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}左边&=\cos 5°-2\sin 30°\cos 5°\\&=\cos 5°-\cos 5°=0.\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}左边&=2\sin 30°\cos 20°-\cos 20°\\&=\cos 20°-\cos 20°=0.\end{aligned}$$

2129. 求适合于下列各等式的所有的角 θ:

(1) $2\sin^2\theta+2\sqrt{2}\sin\theta-1=0$;

(2) $2\sin 4\theta\sin 3\theta=\sin 4\theta$;

(3) $\sin(\theta+30°)=\sin(90°-\theta)$.

解　(1) 由给出的方程，得

$$4\sin^2\theta+4\sqrt{2}\sin\theta=2.$$

两边分别加上 2，再开平方，得

$$2\sin\theta+\sqrt{2}=\pm 2.$$

所以　$$\sin\theta=\frac{-\sqrt{2}\pm 2}{2}.$$

对于上式右边的“±”号，如果取“−”号，则 $\sin\theta$ 的绝对值大于 1，所以只能取“+”号，即得

$$\sin\theta=\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

设适合于这个式子的 θ 的主值是 α，则所求 θ 的一般值是 $n\pi+(-1)^n\alpha$，这里

$$\alpha=\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

(2) 由给出的方程，得

$$\sin 4\theta(2\sin 3\theta-1)=0.$$

所以　$$\sin 4\theta=0,$$

或　$$\sin 3\theta=\frac{1}{2}.$$

由此可得　$$4\theta=n\cdot 180°,$$

或　$$3\theta=n\cdot 180°+(-1)^n\cdot 30°,$$

即　$$\theta=n\cdot 45°,$$

或　$$\theta=n\cdot 60°+(-1)^n\cdot 10°.$$

(3) 由给出的方程，得

$$\cos(\theta-60°)=\cos\theta.$$

所以　$$\theta-60°=n\cdot 360°\pm\theta,$$

$$2\theta=n\cdot 360°+60°.$$

即　$$\theta=n\cdot 180°+30°.$$

2130. 求适合于

$$\frac{\operatorname{ctg}(90°-A)\csc^2(180°-A)\operatorname{ctg}^3 A}{\csc^2 A\sin^2(270°+A)}=2$$

的 A 的值，设 A 是 $90°$ 以内的角.

解 由给出的方程，得

$$\frac{\operatorname{tg} A\csc^2 A\operatorname{ctg}^3 A}{\csc^2 A\cos^2 A}=2,$$

$$\frac{\operatorname{ctg}^2 A}{\cos^2 A}=2,\quad \frac{1}{\sin^2 A}=2.$$

即 $$\sin A=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因为 A 是 $90°$ 以内的角，所以

$$\sin A=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由此可得 $$A=45°.$$

2131. 求适合于方程 $\operatorname{ctg} x=2\cos x$ 的锐角 x。

解 由给出的方程，得

$$\frac{\cos x}{\sin x}=2\cos x.$$

即 $$\cos x\left(\frac{1}{\sin x}-2\right)=0.$$

所以 $\cos x=0$ 或 $\frac{1}{\sin x}-2=0$.

由第一个方程得不到小于 $90°$ 的 x 的值．由第二个方程得到

$$\sin x=\frac{1}{2}.\quad\therefore\quad x=30°.$$

2132. 设 θ 是小于 $360°$ 的正角，解下列各方程：

(1) $\csc^2\theta+\operatorname{ctg}^2\theta=3$;

(2) $6\operatorname{tg}\theta-5\sqrt{3}\sec\theta+12\operatorname{ctg}\theta=0$.

解 (1) $\csc^2\theta+\operatorname{ctg}^2\theta=3$.

即 $$1+\operatorname{ctg}^2\theta+\operatorname{ctg}^2\theta=3,$$

$$\operatorname{ctg}^2\theta=1.$$

所以 $$\operatorname{ctg}\theta=\pm1.$$

由此可得

$\theta=45°$，或 $135°$，或 $225°$，或 $315°$.

(2) 由给出的方程，得

$$\frac{6\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{5\sqrt{3}}{\cos\theta}+\frac{12\cos\theta}{\sin\theta}=0,$$

$$6\sin^2\theta-5\sqrt{3}\sin\theta+12\cos^2\theta=0,$$

$$12-5\sqrt{3}\sin\theta-6\sin^2\theta=0,$$

$$6\sin^2\theta+5\sqrt{3}\sin\theta-12=0,$$

$$(2\sqrt{3}\sin\theta-3)(\sqrt{3}\sin\theta+4)=0.$$

这里第二个因式不可能等于 0．因为如果它等于 0，那么 $\sin\theta$ 的绝对值就要大于 1．

所以 $$2\sqrt{3}\sin\theta-3=0,$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

从而得出

$$\theta=60°\quad\text{或}\quad\theta=120°.$$

2133. 若 $\operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}$，求 $a\cos 2\theta+b\sin 2\theta$ 的值。

解

$$\begin{aligned}&a\cos 2\theta+b\sin 2\theta\\&=a(1-2\sin^2\theta)+a\operatorname{tg}\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\\&=a-2a\sin^2\theta+2a\sin^2\theta=a.\end{aligned}$$

2134. 若 $\cos\theta=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$，证明

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

解 $$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}&=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\\&=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\beta+\cos\alpha}\\&=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\beta+\cos\alpha}\\&=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.\end{aligned}$$

2135. 若 $m\cos A+n\sin A=m$，证明

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

解 $$m\cos A+n\sin A=m.$$

即 $$n\sin A=m(1-\cos A),$$

$$n^2(1-\cos^2 A)=m^2(1-\cos A)^2,$$

$$n^2(1+\cos A)=m^2(1-\cos A).$$

$$\therefore\quad\cos A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}.$$

所以

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

2136. 当 x 为何值时，等式

$$\sec\theta=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

成立。

解 $\sec\theta$ 的绝对值总是不小于 1．又

$$2x^2\geqq1-1,$$

即 $$1+x^2\geqq1-x^2.$$

因为 $1+x^2$ 总是正的，所以当 x 取 0 以外的值时 $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 的绝对值小于1．因此，等式只

有在 $x=0$ 时才成立.

2137. 证明 $\sec^2\theta=\dfrac{4xy}{(x+y)^2}$ 仅当 $x=y$ 时成立.

解

$$\sec^2\theta=\frac{4xy}{(x+y)^2}=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)^2}.$$

又 $\sec^2\theta\geqq1$, 而 $\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)^2}$ 在 $x-y\neq0$ 时, 它的值小于1. 所以只当 $x-y=0$ 时等式才成立.

2138. 若 $2\cos^2\theta-7\cos\theta+3=0$, 证明 $\cos\theta$ 的值仅有一个.

解　$2\cos^2\theta-7\cos\theta+3=0$.

即　$(2\cos\theta-1)(\cos\theta-3)=0$.

因为　$\cos\theta\leqq1$,

所以　$\cos\theta-3\neq0$.

由此可得　$2\cos\theta-1=0$,

$$\cos\theta=\frac{1}{2}.$$

这就是说, $\cos\theta$ 的值只有一个, 它就是 $\frac{1}{2}$.

2139. 由 $8\cos^2\theta-8\cos\theta+1=0$, 求 $\cos\theta$ 的值.

解　$8\cos^2\theta-8\cos\theta+1=0$,

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{8\pm\sqrt{64-32}}{16}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}.$$

2140. 求适合于方程

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

的 θ 的弧度.

解　由给出的方程, 得

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right).$$

即 $\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin2\theta=3\left(\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin2\theta\right)$,

$$4\sin2\theta=2,$$

$$\sin2\theta=\frac{1}{2}.$$

所以　$2\theta=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}$.

即　$\theta=\dfrac{n\pi}{2}+(-1)^n\dfrac{\pi}{12}$.

2141. 求适合于下列各方程的角 x:

(1) $\operatorname{tg}\theta^\circ=0$;　(2) $\operatorname{tg}2\theta=\operatorname{tg}\theta$.

解　(1) $\operatorname{tg}\theta^\circ=0$.

所以　$\theta^\circ=n\cdot180^\circ+0^\circ=n\cdot180^\circ$.

(2) $\operatorname{tg}2\theta=\operatorname{tg}\theta$.

所以　$2\theta=n\pi+\theta$.

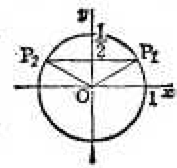
即　$\theta=n\pi$.

2142. 讨论适合于 $\cos\theta\cos\phi+1=0$ 的 θ 和 ϕ 的值.

解　$\cos\theta\cos\phi=-1$.

对于所有的角 θ, $|\cos\theta|\leqq1$, 所以 $\cos\theta$ 和 $\cos\phi$ 的绝对值都是1, 并且其中一个是正的, 一个是负的. 因而, 如果一个角是0或 π 的偶数倍, 那么另一个角就必须是 π 的奇数倍.

2143. 解方程: $2\cos^2x+7\sin x-5=0$. (这里 $0^\circ\leqq x<360^\circ$)



解　设 $\sin x=t$ ($0^\circ\leqq x<360^\circ$), 则

$$-1\leqq t\leqq1.$$

所以, 给出的方程可变形成为

$$2(1-t^2)+7t-5=0.$$

$$\therefore\quad 2t^2-7t+3=0,$$

$$(2t-1)(t-3)=0.$$

从而解得适合于 $-1\leqq t\leqq1$ 的根是 $t=\dfrac{1}{2}$. 因此

$$\sin x=\frac{1}{2}.$$

在 $0^\circ\leqq x<360^\circ$ 的范围内, 满足上式的 x 的值是

$$x=30^\circ,\quad x=150^\circ.$$

2144. 设抛物线 $y=x^2-2x\sec\theta+1$, 试解答下列各个问题:

(1) 设抛物线和 x 轴的交点是 P、Q, 原点是 O, OP^2 和 OQ^2 的差是 $\dfrac{8}{3}$, 求锐角 θ 的值.

(2) 用含 θ 的式子表示抛物线的顶点 A.

(3) 若 θ 在 $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ 的范围内变化, 作出顶点 A 所描出的图象.

解　设 P、Q 的横坐标为 α、β. 因为它们是二次方程 $x^2-2x\sec\theta+1=0$ 的两个根, 所以从根和系数的关系, 可以得到

$$\alpha+\beta=2\sec\theta,\quad \alpha\beta=1.$$

(由根的判别式, 得 $\sec^2\theta-1\geqq0$, 所以 α、β

都是实数.)

$$\because \quad |OQ^2-OP^2|=|\beta^2-\alpha^2|$$
$$=|(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)|$$
$$=\sqrt{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta}\,|\beta+\alpha|$$
$$=\sqrt{4\sec^2\theta-4}\,|2\sec\theta|,$$
$$\therefore \quad \sqrt{4\sec^2\theta-4}\,|2\sec\theta|=\frac{8}{3}.$$

两边分别平方,化简后得

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{4}{9}.$$
$$\therefore \quad 4\sin^4\theta-17\sin^2\theta+4=0.$$
$$\therefore \quad (4\sin^2\theta-1)(\sin^2\theta-4)=0.$$

因为 $\sin^2\theta\leqq1$, 所以

$$4\sin^2\theta-1=0, \quad 即 \quad \sin^2\theta=\frac{1}{4}.$$
$$\therefore \quad \sin\theta=\pm\frac{1}{2}.$$

因为 θ 是锐角,所以

$$\theta=\frac{\pi}{6}.$$

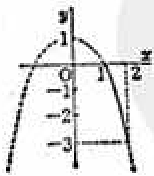
(2) 抛物线的方程可以写成

$$y=(x-\sec\theta)^2+1-\sec^2\theta.$$

所以它的顶点的坐标是 $(\sec\theta,\ 1-\sec^2\theta)$.

(3) 设 $x=\sec\theta$, $y=1-\sec^2\theta$, 则

$$y=1-x^2.$$



这里, 因为 $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$, 所以

$$\frac{1}{2}\leqslant\cos\theta\leqq1.$$
$$\therefore \quad 1\leqq\sec\theta\leqq2, \quad 即 \quad 1\leqq x\leqq2.$$

在 $1\leqq x\leqq2$ 的范围内作图象, 得到上图的实线部分.

2145. 在两个二次方程

$$x^2+2x\cos\theta+\sin^2\theta=0, \qquad ①$$
$$x^2+2px+q=0 \qquad ②$$

中, 把方程 ① 的两个根分别乘上 k 后, 就都是方程 ② 的根, 试解答下列各个问题: (这里, k 是正的定值, $0\leqq\theta\leqq2\pi$.)

(1) 分别用 θ 表示 p、q;

(2) 若方程 ① 具有实根, 确定 θ 值的范围;

(3) 设抛物线 $y=x^2+2px+q$ 的顶点坐标是 (u,v), 用图象表示, 当 θ 值在 (2) 规定的范围内变化时, u 和 v 之间的关系.

解 (1) 设 ① 的两个根分别是 α、β, 则 ② 的两个根分别是 $k\alpha$、$k\beta$. 由根和系数的关系,得

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-2\cos\theta,\\ \alpha\beta=\sin^2\theta;\end{cases} \quad \begin{cases}k\alpha+k\beta=-2p,\\ k^2\alpha\beta=q.\end{cases}$$
$$\therefore \quad \begin{cases}-2p=k(\alpha+\beta)=-2k\cos\theta,\\ q=k^2\alpha\beta=k^2\sin^2\theta.\end{cases}$$
$$\therefore \quad p=k\cos\theta, \quad q=k^2\sin^2\theta.$$

(2) ① 具有实根的条件是

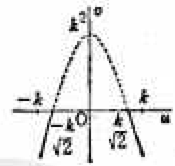
$$\cos^2\theta-\sin^2\theta\geqq0, \quad \cos^2\theta\geqq\sin^2\theta.$$
$$\therefore \quad |\cos\theta|\geqq|\sin\theta|. \qquad ③$$

在 $0\leqq\theta\leqq2\pi$ 的范围内, 适合于 ③ 的 θ 值的范围是

$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{5\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4}\leqq\theta\leqq2\pi.$$

(3) 这里,

$$y=x^2+2px+q$$
$$=(x+p)^2+q-p^2.$$



所以, 抛物线的顶点的坐标是

$$\begin{cases}u=-p,\\ v=q-p^2.\end{cases}$$

把 (1) 中的 $p=k\cos\theta$, $q=k^2\sin^2\theta$ 代入上面两式,得

$$\begin{cases}u=-k\cos\theta, & ④\\ v=k^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=k^2(1-2\cos^2\theta). & ⑤\end{cases}$$

由 ④, 得 $\quad \cos\theta=-\dfrac{u}{k}.$

代入 ⑤, 得 $\quad v=k^2-2u^2.$

根据 (2) 的结果和 ④ 式, θ 和 u 的关系如下表所示.

θ	$0,\ \cdots,\ \frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi,\ \cdots,\ \pi,\ \cdots,\ \frac{5}{4}\pi$
u	$-k,\ \cdots,\ -\frac{\sqrt{2}k}{2}$	$\frac{\sqrt{2}k}{2},\ \cdots,\ k,\ \cdots,\ \frac{\sqrt{2}k}{2}$
θ	$\frac{7}{4}\pi,\ \cdots,\ 2\pi$	
u	$-\frac{\sqrt{2}k}{2},\ \cdots,\ -k$	

由此可得,如上图的实线部分所示的,就是 u 和 v 之间关系的图象.

2146. 求适合于方程 $\cos m\theta=\sin n\theta$ 的 θ 的值.

解 (1) $\cos m\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-n\theta\right)$,

$$\therefore\quad m\theta=2k\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-n\theta\right).$$

这里, k 是 0 或任意的整数. 移项, 得

$$(m+n)\theta=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

或

$$(m-n)\theta=\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi.$$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-m\theta\right)=\sin n\theta$.

$$\therefore\quad \frac{\pi}{2}-m\theta=p\pi+(-1)^{p}n\theta,$$

这里 p 是 0 或任意的整数.

$$\therefore\quad [m+(-1)^{p}n]\theta=\left(\frac{1}{2}-p\right)\pi.$$

2147. 求适合于方程 $\cos^2\theta=\cos^2\alpha$ 的 θ 的一般值.

解 由 $\cos^2\theta=\cos^2\alpha$, 得

$$\cos\theta=\pm\cos\alpha.$$

上式的右边取"+"号时, 得到 $\theta=\alpha$, 这时, 原方程的一般解是 $\theta=2n\pi\pm\alpha$; 取"−"号时, 得到 $\theta=\pi-\alpha$, 这时, 原方程的一般解是 $\theta=2n\pi\pm(\pi-\alpha)$. 这两个式子可以综合成一个式子, 即

$$\theta=m\pi\pm\alpha.$$

2148. 若 $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}4x=0$, 证明 $5x=n\pi$, 或 $2x=(2m+1)\pi$, 或 $8\cos 2x=1\pm\sqrt{17}$.

解 已知等式就是

$$(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}4x)+(\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}3x)=0,$$

$$\frac{\sin 5x}{\cos x\cos 4x}+\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}=0.$$

所以 $\sin 5x=0$,

或 $$\frac{1}{\cos x\cos 4x}+\frac{1}{\cos 2x\cos 3x}=0.$$

由前面一个方程, 得

$$5x=n\pi.$$

后面一个方程可变形成为

$$\cos 2x\cos 3x+\cos x\cos 4x=0,$$

$$\cos 2x(4\cos^3x-3\cos x)+\cos x\cos 4x=0.$$

所以 $\cos x=0$,

或 $$\cos 2x(4\cos^2x-3)+\cos 4x=0.$$

由前面一个方程, 得

$$2x=(2m+1)\pi.$$

后面一个方程可变形成为

$$\cos 2x(2+2\cos 2x-3)+2\cos^2 2x-1=0,$$

$$4\cos^2 2x-\cos 2x-1=0.$$

解这个二次方程, 得

$$8\cos 2x=1\pm\sqrt{17}.$$

2149. 解方程:

$$2\sin 2\theta-4\sin(\theta+30°)+\sqrt{3}=0.$$

解 把各项都除以 2, 并把 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 换成 $\sin 60°$, 得

$$\sin 2\theta-2\sin(\theta+30°)+\sin 60°=0,$$

$$2\sin(\theta+30°)\cos(\theta-30°)-2\sin(\theta+30°)=0.$$

由此可得

$$\sin(\theta+30°)=0, \quad ①$$

或 $$\cos(\theta-30°)=1. \quad ②$$

由 ①, 得 $\theta+30°=n\cdot180°$.

从而得出

$$\theta=(6n-1)\cdot30°.$$

由 ②, 得 $\theta-30°=n\cdot360°$.

从而得出 $\theta=(12n+1)\cdot30°$.

2150. 解方程:

$$4\sin\theta\cos\theta+1-2(\sin\theta+\cos\theta)=0.$$

解 把左边分解因式, 得

$$(2\cos\theta-1)(2\sin\theta-1)=0.$$

所以 $$\cos\theta=\frac{1}{2}, \quad ①$$

或 $$\sin\theta=\frac{1}{2}. \quad ②$$

由 ①, 得

$$\theta=n\cdot360°\pm60°=(6n\pm1)\cdot60°;$$

由 ②, 得

$$\theta=n\cdot180°+(-1)^n\cdot30°=[6n+(-1)^n]\cdot30°.$$

2151. 求方程 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的一般解.

解 在 $-\pi\leq\theta<\pi$ 的范围内, 满足所给方程的 θ 值是

$$\theta=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}.$$

所以, 原方程的一般解是

$$\theta=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

2152. 求满足方程 $\sin^2\theta=\sin^2\alpha$ 的 θ 的一般值.

解　由给出的方程,得

$$\sin\theta=\pm\sin\alpha.$$

(i) 当 $\sin\theta=\sin\alpha$ 时, $\sin\theta-\sin\alpha=0$,

即　$$2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0.$$

$$\therefore\quad \cos\frac{\theta+\alpha}{2}=0\quad 或\quad \sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{\theta+\alpha}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

或　$$\frac{\theta-\alpha}{2}=n\pi.$$

由此可得　$\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$.

(ii) 当 $\sin\theta=-\sin\alpha$ 时,用同样的方法得

$$\theta=n\pi-(-1)^n\alpha.$$

把(i)、(ii)的结果综合起来,得到所要求的 θ 值是

$$\theta=n\pi\pm\alpha.$$

2153. 求满足方程 $\csc^2\theta=\frac{4}{3}$ 的 θ 的一般值.

解　因为 $\csc^2\theta=\frac{4}{3}$, 所以

$$\sin^2\theta=\frac{3}{4}=\sin^2\frac{\pi}{3}.$$

因此, θ 的一般值是

$$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

2154. 求满足方程 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ 的 θ 的一般值.

解　在 $-\pi\leqq\theta<\pi$ 的范围内, 满足 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ 的 θ 值是

$$\theta=\pm\frac{2\pi}{3}.$$

因此, θ 的一般值是

$$\theta=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}.$$

2155. 求满足方程 $\cos\theta=1$ 的 θ 的一般值.

解　在 $-\pi\leqq\theta<\pi$ 的范围内,满足 $\cos\theta=1$ 的 θ 值是:

$$\theta=0.$$

因此,所要求的 θ 的一般值是

$$\theta=2n\pi.$$

2156. 求满足方程 $\sec^2\theta=2$ 的 θ 的一般值.

解　因为 $\sec^2\theta=2$, 所以

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}=\cos^2\frac{\pi}{4}.$$

因此,所要求的 θ 的一般值是

$$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

2157. 求同时满足 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ 和 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 这两个方程的 θ 的一般值.

解　(i) 在 $-\pi\leqq\theta<\pi$ 的范围内, 满足 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ 的 θ 值是:

$$\theta=-\frac{5\pi}{6},\quad \theta=-\frac{\pi}{6}.$$

所以, θ 的一般值是

$$\theta=\left(2n-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}\right)\pi.$$

(ii) 用同样的方法,得到满足

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

的 θ 的一般值是

$$\theta=\left(2n\pm\frac{5}{6}\right)\pi.$$

根据(i)、(ii), 得到所要求的 θ 的一般值是:

$$\theta=\left(2n-\frac{5}{6}\right)\pi.$$

2158. 求满足方程 $\operatorname{tg}\theta=1$ 的 θ 的所有值.

解

$$\operatorname{tg}\theta=1,$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=1.$$

$$\therefore\quad \sin\theta-\cos\theta=0,$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

$$\therefore\quad \theta-\frac{\pi}{4}=n\pi,$$

$$\theta=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

2159. 求满足方程 $\operatorname{ctg}4\theta=\operatorname{ctg}\theta$ 的 θ 的

值.

解 由给出的方程,得

$$\frac{\cos 4\theta}{\sin 4\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=0,$$

$$\frac{\sin\theta\cos 4\theta-\cos\theta\sin 4\theta}{\sin\theta\sin 4\theta}=0,$$

$$\frac{-\sin 3\theta}{\sin\theta\sin 4\theta}=0.$$

$$\therefore\quad \sin 3\theta=0.\quad \therefore\quad 3\theta=n\pi.$$

即 $$\theta=\frac{n\pi}{3}.$$

2160. 求满足方程 $\operatorname{tg}^2\theta=\frac{1}{3}$ 的 θ 的一般值.

解 由给出的方程,得

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{3}\sin\theta\mp\cos\theta=0,$$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\theta\mp\frac{1}{2}\cdot\cos\theta\right)=0$$

$$2\sin\left(\theta\mp\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

$$\therefore\quad \theta\mp\frac{\pi}{6}=n\pi.$$

所以 $$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

2161. 证明

$$\cos nA\cos(n+2)A-\cos^2(n+1)A+\sin^2A=0.$$

解 $\cos nA\cos(n+2)A$

$$=\frac{1}{2}\cos 2(n+1)A+\frac{1}{2}\cos 2A$$

$$=\left[\cos^2(n+1)A-\frac{1}{2}\right]+\left(\frac{1}{2}-\sin^2A\right)$$

$$=\cos^2(n+1)A-\sin^2A.$$

所以

$$\cos nA\cos(n+2)A-\cos^2(n+1)A+\sin^2A=0.$$

2162. 当角 A 变化时,求 $4\cos^2A+\sec^2A$ 的最小值.并求出这时 A 的值.

解 因为 $\cos^2A\geq 0$, $\sec^2A\geq 1$,

$$\cos^2A\sec^2A=1,$$

所以

$$4\cos^2A+\sec^2A=\sqrt{(4\cos^2A-\sec^2A)^2+4\times4\cos^2A\sec^2A},$$

由此可得,原式在

$$4\cos^2A=\sec^2A$$

时取得最小值,这个最小值是4.这时

$$\cos^2A=\frac{1}{2}.$$

因此 $$A=\left(n\pm\frac{1}{4}\right)\pi.$$

2. 一元方程(二)

2163. 求适合于方程 $\cos^2\theta=1$ 的 θ 的所有值.

解 由给出的方程,得

$$\cos\theta=\pm 1.$$

由 $\cos\theta=1$,得

$$\theta=2n\pi;$$

由 $\cos\theta=-1$,得

$$\theta=(2n+1)\pi.$$

综合这两个 θ 的值,得

$$\theta=n\pi.$$

2164. 解下列各方程:

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$;

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$;

(3) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$.

解 (1) 由给出的方程,得

$$\frac{\pi}{3}-2x=2m\pi+x+\frac{\pi}{5} \qquad ①$$

或 $$\frac{\pi}{3}-2x=2m\pi+\pi-x-\frac{\pi}{5}. \qquad ②$$

由①,得 $x=\frac{2(-15m+1)\pi}{45}$.

由②,得 $x=\frac{(-30m-7)\pi}{15}$.

设 $-m$ 为 n,则

$$x=\frac{2(15n+1)\pi}{45}\quad 或\quad x=\frac{(30n-7)\pi}{15}.$$

(2) 由给出的方程,得

$$\frac{\pi}{4}+x=2n\pi\pm\left(\frac{\pi}{3}-2x\right),$$

由此可得 $$x=\frac{\pi}{3}\left(2n+\frac{1}{12}\right),$$

或 $$x=\frac{\pi}{12}(7-24n).$$

(3) 由给出的方程，得
$$n\pi+x-\frac{\pi}{3}=2x+\frac{\pi}{5}.$$
由此可得 $x=\frac{\pi}{15}(15n-8)$.

2165. 设 $0°<x<360°$，解方程：
$$\sec x=\sec 2x.$$

解 因为 $$\sec x=\sec 2x,$$
所以 $$\cos x=\cos 2x,$$
$$\cos x=2\cos^2 x-1.$$
$$\therefore\quad 2\cos^2 x-\cos x-1=0.$$
$$\therefore\quad (\cos x-1)(2\cos x+1)=0.$$
由此可得 $$\cos x=1,$$
或 $$\cos x=-\frac{1}{2}.$$
因为 $0°<x<360°$，所以方程 $\cos x=1$ 没有解.

在上述范围内解方程 $\cos x=-\frac{1}{2}$，得
$$x=120° \quad 或 \quad x=240°.$$

2166. 在下面各题的 $\boxed{}$ 里填充：

(1) 当二次方程 $x^2+4x+2=0$ 的两个根是 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\beta$ 时，$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ 的值是 $\boxed{}$.

(2) 当 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=A\sin(x+\alpha)$ 时，$A=\boxed{}$，$\alpha=\boxed{}$. 这里，设 $A>0$，$0\leqq\alpha\leqq 2\pi$.

解 (1) 由根和系数的关系，得
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-4,\quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=2.$$
$$\therefore\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=4.$$
所以，$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ 的值是 4.

(2) $\because$ $$\sin x+\sqrt{3}\cos x$$
$$=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$
$$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$$
$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$
$$\therefore\quad 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=A\sin(x+\alpha).$$
因为 $A>0$，$0\leqq\alpha\leqq 2\pi$，所以
$$A=2,\ \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

2167. 若 $0\leqq\theta\leqq\pi$，求满足不等式 $\operatorname{tg}\theta<-\sqrt{3}$ 的 θ 值的范围.

解 当 $\operatorname{tg}\theta=-\sqrt{3}$，$0\leqq\theta\leqq\pi$ 时，$\theta=\frac{2\pi}{3}$. 在 $0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ 的范围内 $\operatorname{tg}\theta$ 的值是非负的，并且在 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqq\pi$ 的范围内是单调递增的，因此，当 $0\leqq\theta\leqq\pi$ 时，满足不等式 $\operatorname{tg}\theta<-\sqrt{3}$ 的 θ 值的范围是
$$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}.$$

2168. 解下列各方程，设 $0\leqq x\leqq\pi$：

(1) $\sin 3x+\cos 3x=\sin x+\cos x$;

(2) $4\sin x\cos^2 x=\sin x+\cos x$.

解 (1) 由给出的方程，得
$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$
$$\therefore\quad 3x+\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^n\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$
由此可得，适合于 $0\leqq x\leqq\pi$ 的解是
$$x=0,\ \frac{\pi}{8},\ \pi,\ \frac{5\pi}{8}.$$

(2) $$4\sin x-4\sin^3 x=\sin x+\cos x.$$
$$\therefore\quad 3\sin x-4\sin^3 x=\cos x.$$
$$\therefore\quad \sin 3x=\cos x,$$
$$\sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$
$$\therefore\quad 3x=n\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$
由此可得，适合于 $0\leqq x\leqq\pi$ 的解是
$$x=\frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{8}\pi.$$

2169. 确定使方程
$$x^2-2(\sin A+\cos A)x+(3-2\sin A\cos A)=0$$
具有实根的 A 的大小，并求出这时方程的根.

解 $$x^2-2(\sin A+\cos A)x+(3-2\sin A\cos A)=0. \qquad ①$$
设方程 ① 的根的判别式是 D，要使 ① 具有实根，必须使 $D\geqq 0$. 即
$$(\sin A+\cos A)^2-3+2\sin A\cos A\geqq 0.$$
$$\therefore\quad \sin^2 A+\cos^2 A+4\sin A\cos A-3\geqq 0,$$
$$2(2\sin A\cos A-1)\geqq 0,$$

$$2(\sin 2A-1)\geqq 0. \qquad ②$$

因为$|\sin 2A|\leqq 1$，所以由②，得

$$\sin 2A=1. \quad \therefore \quad 2A=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \quad A=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{4}.$$

$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

当A取上面这些值时，②的等号成立。由此可知，方程①具有重根，它的根是

$$x=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right). \qquad ③$$

当n是偶数(即$n=2m$)时，$A=m\pi+\frac{\pi}{4}$，这时，③就是

$$x=\sqrt{2}\sin\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\sqrt{2}, (m\text{ 是偶数});\\ -\sqrt{2}, (m\text{ 是奇数}).\end{cases}$$

当n是奇数(即$n=2m'+1$)时，

$$A=\frac{(2m'+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{4}.$$

这时，③就是

$$x=\sqrt{2}\sin\left(m'\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\sqrt{2}, (m'\text{ 是偶数});\\ -\sqrt{2}, (m'\text{ 是奇数}).\end{cases}$$

综上所述，可知方程的实根是重根$\sqrt{2}$或重根$-\sqrt{2}$。

2170. 解答下列各题：

(1) 若$p+q=1$，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，证明$-1\leqq p\cos x+q\sin x\leqq 1$。对于怎样的$p$、$q$和$x$的值，等号成立？

(2) 若$-\pi\leqq x\leqq\pi$，解方程

$$\sin^2 x\cos 2x+\cos^2 x\sin 2x=-1.$$

解 (1) 因为$p+q=1$，所以

$$1-(p\cos x+q\sin x)=p(1-\cos x)+q(1-\sin x).$$

由已知条件$p\geqq 0$，$q\geqq 0$和

$$1\geqq\cos x, \quad 1\geqq\sin x,$$

得 $$p(1-\cos x)+q(1-\sin x)\geqq 0.$$

$$\therefore \quad 1\geqq p\cos x+q\sin x.$$

在$p=0$，$1=\sin x$或$q=0$，$1=\cos x$，即

$$\begin{cases}p=0, \ q=1, \ x=2n\pi+\frac{\pi}{2},\\ \text{或 } p=1, \ q=0, \ x=2n\pi\end{cases}$$

的情况下等式成立。(这里n是整数)

用和上面完全相同的方法，得

$$1+(p\cos x+q\sin x)=p(1+\cos x)+q(1+\sin x).$$

容易知道，

$$p(1+\cos x)+q(1+\sin x)\geqq 0.$$

$$\therefore \quad p\cos x+q\sin x\geqq -1.$$

在$p=0$，$1+\sin x=0$或$q=0$，$1+\cos x=0$，即

$$\begin{cases}p=0, q=1, x=2n\pi-\frac{\pi}{2},\\ \text{或 } p=1, q=0, x=(2n+1)\pi\end{cases}$$

的情况下等式成立。(这里n是整数)

(2) $\sin^2 x\cos 2x+\cos^2 x\sin 2x=-1.$

设 $\sin^2 x=p$，$\cos^2 x=q$，

于是 $p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$p+q=1$。

$$\therefore \quad p\cos 2x+q\sin 2x=-1.$$

从(1)的结果可以知道，上式成立的条件应是

$$p=\sin^2 x=0, \quad 1+\sin 2x=0, \qquad ①$$

或 $$q=\cos^2 x=0, \quad 1+\cos 2x=0. \qquad ②$$

但当$\sin x=0$时，$\sin 2x=0$，所以①并不成立。在②的情况下，满足$\cos x=0$，$\cos 2x=-1$，且在$-\pi$到π的范围内的x是

$$x=\pm\frac{\pi}{2}.$$

2171. 在三角形ABC中，证明下列各式：

(1) 当$\sin 2B+\sin 2C=\sin 2A$时，B或C是直角；

(2) 当$\sqrt{bc\sin B\sin C}=\dfrac{b^2\sin B+c^2\sin C}{b+c}$时，$B=C$；

(3) 当$\sin\phi=\dfrac{2\sqrt{ab}\cos\frac{C}{2}}{a+b}$时，

$$c=(a+b)\cos\phi;$$

(4) 如果$\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=1$，那么三角形$ABC$是直角三角形；

(5) 当a、b、c成等差数列时，$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$、$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$、$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$也成等差数列。

解 (1) 由$\sin 2B+\sin 2C=\sin 2A$，得

$$\sin 2B+\sin 2C-\sin 2A=0.$$

即 $$4\sin A\cos B\cos C=0.$$

因为 $\sin A\neq 0$，所以

$$\cos B=0 \quad 或 \quad \cos C=0.$$

由此可得

$$B=90^\circ \quad 或 \quad C=90^\circ.$$

(2) $\sqrt{bc\sin B\sin C}=\dfrac{b^2\sin C+c^2\sin B}{b+c}$,

$$\frac{b^2\sin C+c^2\sin B}{b+c}=\frac{b^2\sin B+c^2\sin C}{b+c}.$$

所以

$$b^2\sin C+c^2\sin B=b^2\sin B+c^2\sin C,$$

$$\therefore\quad \sin B=\sin C.$$

因为 $B+C<180^\circ$，所以

$$B=C.$$

(3) 设 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，则

$$\begin{aligned}\sin\phi&=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\cos\frac{C}{2}\\&=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\\&=\frac{2}{a+b}\times\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4}}\\&=\sqrt{\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)^2}}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \cos\phi=\sqrt{1-\sin^2\phi}=\sqrt{1-\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)^2}}=\frac{c}{a+b}.$$

$$c=(a+b)\cos\phi.$$

(4) $\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=1$,

即
$$\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}=1.$$

所以 $\sin B\sin C=\cos B\cos C$,

$$\cos B\cos C-\sin B\sin C=0,$$

$$\cos(B+C)=0.$$

因此 $B+C=90^\circ$，从而得出 $A=90^\circ$。也就是说，$\triangle ABC$ 是直角三角形。

(5) 因为 a、b、c 是等差数列，所以

$$a+c=2b.$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}&=\frac{s-a}{r}+\frac{s-c}{r}\\&=\frac{2s-(a+c)}{r}=\frac{2s-2b}{r}\\&=\frac{2(s-b)}{r}=2\operatorname{ctg}\frac{B}{2}.\end{aligned}$$

这就是说，$\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$ 成等差数列。

2172. 在三角形 ABC 中，证明下列各式：

(1) 当 $b\cos A=a\cos B$ 时，$a=b$;

(2) 当 $a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3b}{2}$ 时，

$$a+b+c=3b;$$

(3) 当 $a=2b$, $A=3B$ 时，$C=60^\circ$;

(4) 当 $C=60^\circ$ 时，$a+b=2c\cos\dfrac{A-B}{2}$;

(5) 如果 $\sin C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$，那么

$$C=90^\circ.$$

解 (1) 因为

$$b\cos A=a\cos B,$$

所以
$$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin A}{\sin B}.$$

即
$$\cos A\sin B-\sin A\cos B=0,$$

$$\sin(B-A)=0.$$

因为 A、B 是三角形 ABC 的内角，所以 $B-A=0$，即 $A=B$。因而得到

$$a=b.$$

(2)
$$\begin{aligned}&a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}\\&=a\,\frac{s(s-c)}{ab}+c\,\frac{s(s-a)}{bc}\\&=\frac{s(s-c)+s(s-a)}{b}\\&=\frac{s(2s-c-a)}{b}=\frac{(a+b+c)b}{2b}\\&=\frac{a+b+c}{2}.\end{aligned}$$

所以
$$\frac{a+b+c}{2}=\frac{3b}{2},$$

即
$$a+b+c=3b.$$

(3) 因为 $\dfrac{a}{b}=2$，所以 $\dfrac{\sin A}{\sin B}=2$。

即
$$\frac{\sin 3B}{\sin B}=2,$$

$$\frac{3\sin B-4\sin^3 B}{\sin B}=2,$$

$$4\sin^2 B=1.\quad\therefore\quad \sin B=\frac{1}{2}.$$

从而得出　　$B=30°$.

所以　　$C=180°-4B=60°$.

别解　由 $\dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}$，得

$\dfrac{b}{3b}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}=\operatorname{tg}B$.　$\therefore$　$\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}=3\operatorname{tg}B$.

即　　$\operatorname{ctg}(90°-2B)=3\operatorname{tg}B$,

$$\operatorname{tg}2B=3\operatorname{tg}B,$$

$$\frac{2\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}^2B}=3\operatorname{tg}B,$$

$$3\operatorname{tg}^2B=1.\quad\therefore\quad \operatorname{tg}B=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

由此可得

$$B=30°,\quad\therefore\quad C=60°.$$

(4) $a+b=\dfrac{c\sin A}{\sin C}+\dfrac{c\sin B}{\sin C}$

$$=\frac{c(\sin A+\sin B)}{\sin C}$$

$$=\frac{2c\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$$

$$=\frac{c\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}=\frac{c\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin 30°}$$

$$=2c\cos\frac{A-B}{2}.$$

(5) $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$

$$=\frac{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

$$\therefore\quad \sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

即　　$2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$.

$$\therefore\quad \sin\frac{C}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由此可得　　$\dfrac{C}{2}=45°$.

从而得出　　$C=90°$.

2173．设 $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$，求满足方程

$$\cos 2x+2\cos^2x=0$$

的 x 的值。

解　　$\cos 2x+2\cos^2x=0$,

$$1-2\sin^2x+2(1-\sin^2x)=0,$$

$$1-2\sin^2x+2-2\sin^2x=0,$$

$$4\sin^2x=3.$$

$$\therefore\quad \sin^2x=\frac{3}{4}.$$

$$\therefore\quad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\pi}{3}.\quad\left(\because\quad 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

2174．求满足方程 $\sin 2\theta=0$ 的 $0°$ 到 $180°$ 之间的角 θ。

解　由 $\sin 2\theta=0$，得

$$2\sin\theta\cos\theta=0.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=0\quad 或\quad \cos\theta=0.$$

由 $\sin\theta=0$，得

$$\theta=0°\quad 或\quad \theta=180°.$$

由 $\cos\theta=0$，得

$$\theta=90°.$$

在 $0°<\theta<180°$ 的条件下，满足方程 $\sin 2\theta=0$ 的角 θ 只有

$$\theta=90°.$$

2175．求适合于方程 $2\cos^2\theta=\cos\theta$ 的 $0°$ 到 $180°$ 之间的角 θ。

解　解原方程得到

$$\theta=(4n\pm1)\cdot90°,$$

或　　$\theta=(4n\pm1)\cdot45°$.

所以，取 $n=0$，$n=1$ 时，可得到在 $0°$ 和 $180°$ 之间的 θ 值是 $45°$，$90°$，$135°$。

2176．求适合于方程

$$\operatorname{tg}^2\theta-(\sqrt{3}+1)\operatorname{tg}\theta+\sqrt{3}=0$$

的 θ 的值．这里，$0°<\theta<90°$。

解　由所给的方程，得

$$(\operatorname{tg}\theta-1)(\operatorname{tg}\theta-\sqrt{3})=0.$$

所以　$\operatorname{tg}\theta=1$　或　$\operatorname{tg}\theta=\sqrt{3}$.

从而得出

$$\theta=45°\quad 或\quad \theta=60°.$$

2177．解下列各方程：

(1) $\operatorname{ctg}^2\theta-1=\csc\theta$;

(2) $\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{tg}\theta=\sec\theta+\csc\theta$;

(3) $\dfrac{\operatorname{tg}x}{\cos 2x}+\dfrac{\sec x}{\csc x}=1$;

(4) $\sec x\csc x-\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$。

解　(1) 由给出的方程，得

$$\csc^2\theta-2=\csc\theta。$$

即　$(\csc\theta+1)(\csc\theta-2)=0$。

从而得出

$$\csc\theta=-1\quad 或\quad \csc\theta=2。$$

所以　$\theta=n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$$=n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2},$$

或　$\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$。

(2) 由给出的方程，得

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta},$$

去分母，得

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\sin\theta+\cos\theta。$$

即

$$(\sin\theta+\cos\theta)(\cos\theta-\sin\theta-1)=0。$$

所以　$\sin\theta+\cos\theta=0$，　①

或　$\cos\theta-\sin\theta-1=0$。　②

由①，得　$\cos\theta=-\sin\theta$，

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)。$$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{2}+\theta=2n\pi\pm\theta,$$

$$2\theta=2n\pi-\frac{\pi}{2},$$

即　$\theta=n\pi-\frac{\pi}{4}$。

由②，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

即　$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$。

$$\therefore\quad \theta+\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}。$$

即　$\theta=2n\pi$　或　$\theta=2n\pi-\frac{\pi}{2}$。

把上面所得的 θ 值代入原方程，只有 $n\pi-\frac{\pi}{4}$ 是适合的；其他值都将导致产生不合理的结论：$\infty-\infty=1$。把这些不适合的值舍弃，就得到所要求的 θ 值是 $n\pi-\frac{\pi}{4}$。

(3) 由给出的方程，得

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos 2x}+\operatorname{tg} x=1,$$

$$\frac{\operatorname{tg} x(1+\cos 2x)}{\cos 2x}=1,$$

$$\frac{2\operatorname{tg} x\cos^2 x}{\cos 2x}=1,$$

$$\frac{2\sin x\cos x}{\cos 2x}=1,$$

$$\operatorname{tg} 2x=1。$$

所以　$2x=n\cdot 180^\circ+45^\circ$。

从而得出

$$x=\frac{1}{2}(n\cdot 180^\circ+45^\circ)。$$

(4) 由给出的方程，得

$$\frac{1}{\cos x\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\sqrt{3},$$

$$\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} x=\sqrt{3}。$$

所以　$x=n\cdot 180^\circ+60^\circ$。

2178. 解下列各方程：

(1) $2\cos A-2\sec A=3$；

(2) $2\cos x+2\sqrt{2}=3\sec x$；

(3) $\sec\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\sec\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2\sec\theta$；

(4) $3\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta=5\csc\theta$。

解　(1) 由给出的方程，得

$$2\cos A-\frac{2}{\cos A}=3。$$

去分母，得

$$2\cos^2 A-3\cos A-2=0。$$

即　$(2\cos A+1)(\cos A-2)=0$。

因为 $\cos A-2$ 决不会等于0，所以

$$2\cos A+1=0,$$

$$\cos A=-\frac{1}{2}。$$

$$\therefore\quad A=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3},$$

即　$A=\left(n\pm\frac{1}{3}\right)2\pi$。

A 的这个值不会使 $\cos A$ 等于0，所以它是所要求的解。

(2) 由给出的方程，得

$$2\cos x+2\sqrt{2}=\frac{3}{\cos x}。$$

因为 $\cos x \neq 0$ 是显然的，所以去分母得

$$2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\cos x - 3 = 0.$$

$$\therefore\quad \cos x = \frac{-\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}}{2},$$

即 $\quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$，或 $\quad -\frac{3\sqrt{2}}{2}$。

因为 $-\frac{3\sqrt{2}}{2} < -1$，而 $\cos x$ 的值不能小于 -1，必须舍弃，所以

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore\quad x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

(3) 由给出的方程，得

$$\cos\theta\left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).$$

即 $\quad 2\cos^2\theta\cos\frac{\pi}{6} = \cos 2\theta + \frac{1}{2},$

$$\sqrt{3}\cos^2\theta = 2\cos^2\theta - \frac{1}{2}.$$

所以 $\quad \cos^2\theta = \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$

即 $\quad \cos^2\theta > 1.$

因为 $\cos\theta$ 的绝对值不大于 1，所以原方程无解。

(4) 由给出的方程，得

$$\frac{3\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{5}{\sin\theta}.$$

去分母，得

$$3\sin^2\theta + \cos^2\theta = 5\cos\theta.$$

即 $\quad 3(1-\cos^2\theta) + \cos^2\theta = 5\cos\theta,$

$$2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 3 = 0,$$

$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 3) = 0.$$

因为 $\cos\theta + 3$ 决不会等于 0，所以

$$2\cos\theta - 1 = 0,\quad \cos\theta = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

θ 的这个值不会使 $\cos\theta\sin\theta$ 等于 0，所以它是原方程的解。

2179. 解下列各方程:

(1) $\cos 3\theta + 8\cos^3\theta = 0$;

(2) $\cos 3\theta = \cos 2\theta$;

(3) $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$。

解 (1) 由给出的方程，得

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 8\cos^3\theta = 0.$$

即 $\quad 12\cos^3\theta - 3\cos\theta = 0,$

$$\cos\theta(4\cos^2\theta - 1) = 0.$$

由此可得 $\quad \cos\theta = 0,$ ①

或 $\quad 4\cos^2\theta - 1 = 0.$ ②

由 ①，得 $\quad \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}.$

由 ②，得 $\quad \cos\theta = \pm\frac{1}{2},$

所以 $\quad \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3},$

或 $\quad \theta = 2n\pi \pm \frac{2}{3}\pi.$

综上所述可知，所要求的 θ 的值是

$$2n\pi \pm \frac{\pi}{3},\ 2n\pi \pm \frac{\pi}{2},\ 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}.$$

(2) $\cos 3\theta = \cos 2\theta,$

$$\cos 2\theta - \cos 3\theta = 0,$$

$$2\sin\frac{5\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 0.$$

即 $\quad \sin\frac{5\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 0.$

从而得出 $\quad \sin\frac{5\theta}{2} = 0,$

或 $\quad \sin\frac{\theta}{2} = 0.$

所以 $\quad \frac{5\theta}{2} = n\cdot 180^\circ,$

或 $\quad \frac{\theta}{2} = n\cdot 180^\circ.$

即 $\quad \theta = \frac{2n}{5}\cdot 180^\circ,$

或 $\quad \theta = n\cdot 360^\circ.$

所以，答案是 $\theta = n\cdot 72^\circ$。

(3) 由给出的方程，得

$$2\cos 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta = 0.$$

即 $\quad \cos 2\theta(2\cos\theta + 1) = 0.$

所以 $\quad \cos 2\theta = 0,$

或 $\quad \cos\theta = -\frac{1}{2}.$

从而得出 $\quad \theta = n\cdot 180^\circ \pm 45^\circ,$

或 $\quad \theta = n\cdot 360^\circ \pm 120^\circ.$

2180. 解下列各方程:

(1) $\cos 2x+\cos x=0$;

(2) $\cos x=\cos 2x$;

(3) $\cos 1'-\cos 59°59'=\cos x$;

(4) $2\cos^3\theta=\cos\theta$.

解 (1) 由给出的方程,得

$$2\cos^2 x-1+\cos x=0.$$

即 $(\cos x+1)(2\cos x-1)=0$.

所以 $\cos x=-1$,

或 $\cos x=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore\ x=(2n+1)\pi$ 或 $x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$.

(2) $\cos x=\cos 2x$,

由此可得 $n\cdot 360°\pm x=2x$.

即 $x=n\cdot 360°$ 或 $x=n\cdot 120°$.

(3) 由给出的方程,得

$$2\sin 30°\sin 29°59'=\cos x,$$

即 $\sin 29°59'=\cos x$,

$$\cos x=\cos(90°-29°59'),$$

$$\cos x=\cos 60°1'.$$

所以 $x=n\cdot 360°\pm 60°1'$.

(4) $2\cos^3\theta=\cos\theta$,

$$\cos\theta(2\cos^2\theta-1)=0,$$

$$\cos\theta\cos 2\theta=0.$$

所以 $\cos\theta=0$ 或 $\cos 2\theta=0$.

从而得出

$$\theta=n\cdot 360°\pm 90°=(4n\pm 1)\cdot 90°,$$

或 $2\theta=(4n\pm 1)\cdot 90°$, $\theta=(4n\pm 1)\cdot 45°$.

2181. 证明下列各式:

(1) $\sec^2(\alpha+45°)-\csc^2(\alpha+45°)=4\operatorname{tg}2\alpha\sec 2\alpha$;

(2) $\sin^2(A+45°)+\sin^2(A-45°)=1$;

(3) $\cos^2 A-\cos A\cos(60°+A)+\sin^2(30°-A)=\dfrac{3}{4}$;

(4) $\sin^2 A+\sin^2(120°+A)+\sin^2(120°-A)=\dfrac{3}{2}$.

解 (1)

$$\begin{aligned}\text{左边}&=1+\operatorname{tg}^2(\alpha+45°)-1-\operatorname{ctg}^2(\alpha+45°)\\&=\operatorname{tg}^2(\alpha+45°)-\operatorname{tg}^2(45°-\alpha)\\&=[\operatorname{tg}(\alpha+45°)-\operatorname{tg}(45°-\alpha)]\\&\quad\cdot[\operatorname{tg}(\alpha+45°)+\operatorname{tg}(45°-\alpha)]\\&=2\operatorname{tg}2\alpha\cdot 2\sec 2\alpha=4\operatorname{tg}2\alpha\sec 2\alpha.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\cos^2(45°-A)+\sin^2(A-45°)\\&=\cos^2(A-45°)+\sin^2(A-45°)\\&=1.\end{aligned}$$

别解

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{1}{2}[1-\cos(2A+90°)\\&\quad+1-\cos(2A-90°)]\\&=\frac{1}{2}[2+\sin 2A-\sin 2A]\\&=1.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{1}{2}[2\cos^2 A-\cos(60°+2A)\\&\quad-\cos 60°+1-\cos(60°-2A)]\\&=\frac{1}{2}\Big(1+\cos 2A\\&\quad-2\cos 60°\cos 2A-\frac{1}{2}+1\Big)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\cos 2A-2\times\frac{1}{2}\cos 2A\right)\\&=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{1}{2}[1-\cos 2A+1\\&\quad-\cos(240°+2A)+1\\&\quad-\cos(240°-2A)]\\&=\frac{1}{2}[3-\cos 2A-\cos(240°+2A)\\&\quad-\cos(240°-2A)]\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[\cos 2A\\&\quad+\cos(120°-2A)\\&\quad+\cos(120°+2A)]\\&=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

别解

$$\begin{aligned}\text{左边}&=-2\sin A\,[\sin(120°+A)-\sin(120°\\&\quad-A)]+2\sin(120°+A)\sin(120°-A)\\&=-2\sin A\cdot 2\cos 120°\sin A\\&\quad+2(\sin^2 120°-\sin^2 A)\\&=-2\sin^2 A\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\&\quad+2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\sin^2 A=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

2182. 证明下列各式:

(1) $\operatorname{tg}(\theta-45°)+\operatorname{ctg}(\theta+45°)=0$;

(2) $\operatorname{tg}(45°+\alpha)\operatorname{tg}(45°-\alpha)=1$;

(3) $\operatorname{tg}(45°+\theta)\operatorname{tg}(135°+\theta)=-1$;

(4) $\sec(45°+\alpha)\sec(45°-\alpha)=2\sec 2\alpha$;

(5) $2[\sin(30°+x)+\cos(60°+x)]^2-[\cos(45°-x)-\sin(45°-x)]^2=2\cos 2x$.

解 (1) $左边=\dfrac{\operatorname{tg}\theta-1}{1+\operatorname{tg}\theta}+\dfrac{\operatorname{ctg}\theta-1}{\operatorname{ctg}\theta+1}=\dfrac{\operatorname{tg}\theta-1}{1+\operatorname{tg}\theta}+\dfrac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}=0$.

别解

$$左边=\operatorname{tg}(\theta-45°)+\operatorname{tg}(90°-\theta-45°)=\operatorname{tg}(\theta-45°)+\operatorname{tg}(45°-\theta)=\operatorname{tg}(\theta-45°)-\operatorname{tg}(\theta-45°)=0.$$

(2) $左边=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=1$.

别解

$$左边=\operatorname{tg}(45°+\alpha)\operatorname{ctg}(90°-45°+\alpha)=1.$$

(3) $$左边=\frac{\operatorname{tg}45°+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}\theta}\cdot\frac{\operatorname{tg}135°+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}135°\operatorname{tg}\theta}=\frac{1+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\theta}\cdot\frac{-1+\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}=-\frac{1-\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\theta}=-1.$$

(4) $$左边=\frac{1}{\cos(45°+\alpha)}\cdot\frac{1}{\cos(45°-\alpha)}=\frac{1}{\frac{1}{2}(\cos 90°+\cos 2\alpha)}=\frac{2}{\cos 2\alpha}=2\sec 2\alpha.$$

(5)

$$左边=2[\sin(30°+x)+\sin(30°-x)]^2-[\sin(45°+x)-\sin(45°-x)]^2=2(2\sin 30°\cos x)^2-(2\cos 45°\sin x)^2=2\cos^2 x-2\sin^2 x=2\cos 2x.$$

2183. 证明下列各式:

(1) $2\cos(A+60°)=\cos A-\sqrt{3}\sin A$;

(2) $\sin(150°+A)+\sin(150°-A)=\cos A$;

(3) $\cos(30°-A)+\cos(30°+A)=\sqrt{3}\cos A$;

(4) $\sin(60°+A)-\cos(30°+A)=\sin A$;

(5) $\sin(\alpha+45°)\sin(\alpha-45°)=-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha$.

解 (1)

$$左边=2\cos A\cos 60°-2\sin A\sin 60°=\cos A-\sqrt{3}\sin A.$$

(2) $左边=2\sin 150°\cos A=\cos A$.

(3) $左边=2\cos 30°\cos A=\sqrt{3}\cos A$.

(4) $左边=\sin(60°+A)-\sin(60°-A)=2\cos 60°\sin A=\sin A$.

(5) $$左边=-\cos(45°-\alpha)\sin(45°-\alpha)=-\frac{1}{2}\sin(90°-2\alpha)=-\frac{1}{2}\cos 2\alpha.$$

2184. 解方程:

$$4\sin\theta\cos\theta+1+2(\sin\theta+\cos\theta)=0.$$

解 由给出的方程,得

$$4\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta+2\cos\theta+1=0,$$

即 $2\sin\theta(2\cos\theta+1)+(2\cos\theta+1)=0$,

所以 $(2\cos\theta+1)(2\sin\theta+1)=0$.

从而得出 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$,

或 $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$.

所以

$$\theta=n\cdot 360°\pm 120°=(3n\pm 1)\cdot 120°,$$

或 $\theta=n\cdot 180°-(-1)^n\cdot 30°=[6n-(-1)^n]\cdot 30°$.

2185. 解方程:

$$\cos 4x+\cos 2x+\cos x=0.$$

解 由给出的方程,得

$$2\cos 3x\cos x+\cos x=0.$$

所以 $\cos x=0$,

或 $\cos 3x=-\dfrac{1}{2}$.

由 $\cos x=0$, 得

$$x=n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

由 $\cos 3x=-\dfrac{1}{2}$, 得

$$3x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore\quad x=\frac{2n\pi}{3}\pm\frac{2\pi}{9}.$$

2186. 解方程:

$$\cos x+\cos 7x=\cos 4x.$$

解　由给出的方程，得

$$2\cos 3x\cos 4x=\cos 4x.$$

所以　$\cos 4x=0$　或　$\cos 3x=\frac{1}{2}$.

如果 $\cos 4x=0$, 那么

$$4x=(2n+1)\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad x=(2n+1)\frac{\pi}{8}.$$

如果 $\cos 3x=\frac{1}{2}$, 那么

$$3x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore\quad x=(6n\pm1)\frac{\pi}{9}.$$

2187. 解方程: $\sin 2\theta=\cos\theta$.

解　由给出的方程，得

$$2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta.$$

所以　$\cos\theta=0$　或　$\sin\theta=\frac{1}{2}$.

$$\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}\quad\text{或}\quad\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

2188. 解方程:

$$\cos\theta-\cos 2\theta=\sin 3\theta.$$

解　由给出的方程，得

$$2\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},$$

所以　$\sin\frac{3\theta}{2}=0$,

或　$\sin\frac{\theta}{2}=\cos\frac{3\theta}{2}$.

如果 $\sin\frac{3\theta}{2}=0$, 那么

$$\frac{3\theta}{2}=n\pi,$$

$$\therefore\quad\theta=\frac{2n\pi}{3}.$$

如果 $\sin\frac{\theta}{2}=\cos\frac{3\theta}{2}$, 那么

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\cos\frac{3\theta}{2},$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}=2n\pi\pm\frac{3\theta}{2},$$

$$\therefore\quad\theta=(1-4n)\frac{\pi}{4}\quad\text{或}\quad\theta=(4n-1)\frac{\pi}{2}.$$

2189. 解方程:

$$\sin^2 2\theta-\sin^2\theta=\sin^2\frac{\pi}{6}.$$

解　原方程就是

$$\sin^2 2\theta-\sin^2\theta=\frac{1}{4},$$

$$4\sin^2\theta\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{1}{4},$$

$$4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta=\frac{1}{4},$$

$$4\sin^4\theta-3\sin^2\theta+\frac{1}{4}=0.$$

解这个二次方程，得

$$\sin^2\theta=\frac{3\pm\sqrt{5}}{8}.$$

上式右边取“+”号时，得

$$\sin^2\theta=\sin^2\frac{3\pi}{10}.\quad\therefore\quad\theta=n\pi\pm\frac{3\pi}{10};$$

上式右边取“−”号时，得

$$\sin^2\theta=\sin^2\frac{\pi}{10}.\quad\therefore\quad\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{10}.$$

2190. 解方程: $\csc\theta=\csc\frac{\theta}{2}$.

解　由给出的方程，得

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\theta,$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

所以　$\sin\frac{\theta}{2}=0$　或　$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$.

由 $\sin\frac{\theta}{2}=0$, 得 $\frac{\theta}{2}=n\pi$.

$$\therefore\quad\theta=2n\pi.$$

由 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$, 得 $\frac{\theta}{2}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

$$\therefore\quad\theta=4n\pi\pm\frac{2}{3}\pi.$$

2191. 解方程:

$$\cos\theta\cos 3\theta=\cos 5\theta\cos 7\theta.$$

解　由给出的方程，得

$$\cos 4\theta+\cos 2\theta=\cos 12\theta+\cos 2\theta.$$

$$\therefore\quad \cos 4\theta=\cos 12\theta,$$

$$\cos 4\theta=4\cos^3 4\theta-3\cos 4\theta,$$

$$\cos 4\theta(\cos^2 4\theta-1)=0.$$

所以　$\cos 4\theta=0$　或　$\cos 4\theta=\pm 1$.

由 $\cos 4\theta=0$，得 $4\theta=\frac{\pi}{2}(2n+1)$.

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{8}(2n+1).$$

由 $\cos 4\theta=\pm 1$，得 $4\theta=n\pi$.

$$\therefore\quad \theta=\frac{n\pi}{4}.$$

2192. 由方程 $4\sin x\sin(x-\alpha)=2\cos\alpha-1$，求 x 的值.

解　由给出的方程，得

$$2[\cos\alpha-\cos(2x-\alpha)]=2\cos\alpha-1,$$

$$\cos(2x-\alpha)=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad 2x-\alpha=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}.$$

2193. 由方程

$$\sin\alpha+\sin(x-\alpha)+\sin(2x+\alpha)$$
$$=\sin(x+\alpha)+\sin(2x-\alpha),$$

求 x 的值.

解　原方程就是

$$\sin\alpha=\sin(x+\alpha)-\sin(x-\alpha)$$
$$+\sin(2x-\alpha)-\sin(2x+\alpha),$$

$$\sin\alpha=2\sin\alpha\cos x-2\sin\alpha\cos 2x.$$

这里，$\sin\alpha$ 不等于 0，用它分别除两边，得

$$1=2\cos x-2\cos 2x,$$

$$1=2\cos x-2(2\cos^2 x-1),$$

$$4\cos^2 x-2\cos x-1=0.$$

解这个二次方程，得

$$\cos x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

上式中取"+"号时，得

$$\cos x=\cos\frac{\pi}{5}.\quad \therefore\quad x=2n\pi\pm\frac{\pi}{5}.$$

上式中取"−"号时，得

$$\cos x=\cos\frac{3\pi}{5}.\quad \therefore\quad x=2n\pi\pm\frac{3\pi}{5}.$$

注　$\sin\alpha=0$ 时，所给的方程是恒等式.

2194. 解方程：

$$\cos\left(x+\frac{3}{2}\right)\alpha+\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)\alpha=\sin\alpha.$$

解　由给出的方程，得

$$2\cos(x+1)\alpha\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha,$$

$$2\cos(x+1)\alpha\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

这里，$\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$，用它分别除两边，得

$$\cos(x+1)\alpha=\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos(x+1)\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\therefore\quad (x+1)\alpha=2n\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

这里，$\alpha\neq 0$，从而得出

$$x=\frac{2n\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha}{\alpha}.$$

注　如果 $\cos\frac{\alpha}{2}=0$，那么所给的方程是恒等式．又，如果 $\alpha=0$，那么所给的方程对于一切 x 值都不成立.

2195. 解方程：

$$\cos n\theta+\cos(n-2)\theta=\cos\theta.$$

解　由给出的方程，得

$$2\cos(n-1)\theta\cos\theta=\cos\theta.$$

所以

$$\cos\theta=0\quad 或\quad \cos(n-1)\theta=\frac{1}{2}.$$

若 $\cos\theta=0$，则

$$\theta=(2m+1)\frac{\pi}{2}.$$

若 $\cos(n-1)\theta=\frac{1}{2}$，则

$$(n-1)\theta=2m\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{2m\pi}{n-1}\pm\frac{\pi}{3(n-1)}.$$

2196. 把方程

$$\cos^2\theta-\cos^2\alpha=2\cos^3\theta(\cos\theta-\cos\alpha)$$
$$-2\sin^3\theta(\sin\theta-\sin\alpha)$$

化成最简单的形式，然后解这方程.

解　由给出的方程，得

$$\cos^2\theta-\cos^2\alpha$$
$$=\frac{\cos 3\theta+3\cos\theta}{2}(\cos\theta-\cos\alpha)$$
$$-\frac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{2}(\sin\theta-\sin\alpha).$$

$\therefore$ $$2(\cos^2\theta-\cos^2\alpha)$$
$$=\cos 3\theta\cos\theta+\sin 3\theta\sin\theta$$
$$-\cos 3\theta\cos\alpha-\sin 3\theta\sin\alpha$$
$$+3\cos^2\theta-3\sin^2\theta$$
$$-3\cos\theta\cos\alpha+3\sin\theta\sin\alpha.$$

所以

$$\cos(3\theta-\theta)-\cos(3\theta-\alpha)-3\cos(\theta+\alpha)$$
$$=3\sin^2\theta-\cos^2\theta-2\cos^2\alpha,$$
$$\cos 2\theta-\cos(3\theta-\alpha)-3\cos(\theta+\alpha)$$
$$=3-4\cos^2\theta-2\cos^2\alpha,$$
$$\cos 2\theta-\cos(3\theta-\alpha)-3\cos(\theta+\alpha)$$
$$=3-2(1+\cos 2\theta)-(1+\cos 2\alpha),$$
$$\cos 2\theta-\cos(3\theta-\alpha)-3\cos(\theta+\alpha)$$
$$=-2\cos 2\theta-\cos 2\alpha.$$

$\therefore$ $$3\cos 2\theta-3\cos(\theta+\alpha)-\cos(3\theta-\alpha)$$
$$+\cos 2\alpha=0.$$

即 $$3\sin\frac{3\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\theta}{2}$$
$$+\sin\frac{3\theta+\alpha}{2}\sin\frac{3\theta-3\alpha}{2}=0,$$
$$\sin\frac{3\theta+\alpha}{2}\left[\sin\frac{3(\theta-\alpha)}{2}-3\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\right]$$
$$=0.$$
$$\therefore\quad 4\sin\frac{3\theta+\alpha}{2}\sin^3\frac{\theta-\alpha}{2}=0.$$

由此可得 $$\sin\frac{3\theta+\alpha}{2}=0,$$

或 $$\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0.$$

由第一个方程，得

$$\frac{3\theta+\alpha}{2}=n\pi.$$

所以 $$\theta=\frac{(2n\pi-\alpha)}{3}.$$

由第二个方程，得

$$\frac{\theta-\alpha}{2}=n\pi.$$

所以 $$\theta=2n\pi+\alpha.$$

2197. 解方程：$\sin\theta\sin 3\theta=\dfrac{1}{2}$.

解 $$\sin\theta\sin 3\theta=\frac{1}{2},$$
$$\sin\theta(3\sin\theta-4\sin^3\theta)=\frac{1}{2},$$
$$4\sin^4\theta-3\sin^2\theta+\frac{1}{2}=0.$$

解这个双二次方程，得

$$\sin^2\theta=\frac{3\pm1}{8}.$$

所以 $$\sin^2\theta=\frac{1}{2}\quad 或\quad \sin^2\theta=\frac{1}{4}.$$

若 $\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}$，则 $\sin^2\theta=\sin^2\dfrac{\pi}{4}$．从而得出

$$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

若 $\sin^2\theta=\dfrac{1}{4}$，则 $\sin^2\theta=\sin^2\dfrac{\pi}{6}$．从而得出

$$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

2198. 解方程：$4\sin^2\theta+\sin^2 2\theta=3$.

解 由给出的方程，得

$$4\sin^2\theta+4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)=3,$$
$$4\sin^4\theta-8\sin^2\theta+3=0.$$

解这个双二次方程，得

$$\sin^2\theta=\frac{3}{2}\quad 或\quad \sin^2\theta=\frac{1}{2}.$$

但 $\sin^2\theta=\dfrac{3}{2}$ 不适合，所以 $\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}$.

即 $$\sin^2\theta=\sin^2\frac{\pi}{4}.$$
$$\therefore\quad \theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

2199. 解方程：

$$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)(1+\sin\theta)=1+\cos 2\theta.$$

解 由给出的方程，得

$$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)(1+\sin\theta)=2\cos^2\theta,$$
$$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)(1+\sin\theta)$$
$$=2(1-\sin^2\theta).$$

所以 $$1+\sin\theta=0,$$

或 $$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=1-\sin\theta.$$

若 $1+\sin\theta=0$，则 $\sin\theta=-1$.

$$\therefore\quad \theta=n\pi+(-1)^n\frac{3\pi}{2}.$$

即 $$\theta=(4n+3)\frac{\pi}{2}.$$

若 $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=1-\sin\theta$，则

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)=1-\sin\theta,$$

$$2\sin\theta=1-\cos\theta,$$

$$4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

所以 $\sin\frac{\theta}{2}=0$ 或 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=2$。

若 $\sin\frac{\theta}{2}=0$，则 $\frac{\theta}{2}=n\pi$，

$$\therefore\quad \theta=2n\pi.$$

若 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=2$，则 $\frac{\theta}{2}=n\pi+\alpha$，

$$\therefore\quad \theta=2n\pi+2\alpha.$$

这里，设 α 是适合于 $\operatorname{tg}\alpha=2$ 的角。

2200. 解方程：

$$\sin 9\theta+\sin 5\theta+2\sin^2\theta=1.$$

解 由给出的方程，得

$$2\sin 7\theta\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta,$$

$$2\sin 7\theta\cos 2\theta=\cos 2\theta.$$

所以 $\cos 2\theta=0$，或 $\sin 7\theta=\frac{1}{2}$。

若 $\cos 2\theta=0$，则 $2\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$。

$$\therefore\quad \theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4};$$

若 $\sin 7\theta=\frac{1}{2}$，则 $7\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$。

$$\therefore\quad \theta=\frac{n\pi}{7}+(-1)^n\frac{\pi}{42}.$$

2201. 解方程：$\sec 4\theta-\sec 2\theta=2$。

解 原方程可变形为

$$\cos 2\theta-\cos 4\theta=2\cos 2\theta\cos 4\theta.$$

即 $$\cos 2\theta-\cos 4\theta=\cos 6\theta+\cos 2\theta.$$

$$\therefore\quad \cos 6\theta=-\cos 4\theta,$$

$$\cos 6\theta=\cos(180^\circ-4\theta).$$

$$\therefore\quad 6\theta=n\cdot 360^\circ\pm(180^\circ-4\theta).$$

$$\therefore\quad \theta=n\cdot 36^\circ+18^\circ.$$

或 $$\theta=n\cdot 180^\circ-90^\circ.$$

2202. 解方程：

$$\sin\frac{(n+1)\theta}{2}+\sin\frac{(n-1)\theta}{2}=\sin\theta.$$

解 由给出的方程，得

$$2\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

所以

$$\cos\frac{\theta}{2}=0\quad 或\quad \sin\frac{n\theta}{2}=\sin\frac{\theta}{2}.$$

由第一个方程，得

$$\frac{\theta}{2}=(2m+1)\frac{\pi}{2}.$$

由第二个方程，得

$$\frac{n\theta}{2}=m\pi+(-1)^m\frac{\theta}{2}.$$

这里，m 是零或正、负整数。

2203. 解方程：$\sin 3\theta=8\sin^3\theta$。

解 由给出的方程，得

$$3\sin\theta-4\sin^3\theta=8\sin^3\theta.$$

$$\therefore\quad 3\sin\theta=12\sin^3\theta.$$

由此可得 $$\sin\theta=0,$$

或 $$\sin^2\theta=\frac{1}{4}.$$

由第一个方程，得

$$\theta=n\pi.$$

由第二个方程，得

$$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

2204. 解方程：

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x.$$

解 由给出的方程，得

$$2\sin x\cos x(1+2\cos x)$$
$$=\cos x(1+2\cos x).$$

由此可得

$$2\sin x-1=0,\quad 或\quad \cos x=0,$$

或 $$1+2\cos x=0.$$

由 $2\sin x-1=0$，得

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

由 $\cos x=0$，得

$$x=n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

由 $1+2\cos x=0$，得

$$x=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi.$$

2205. 解方程：

$$\cos 3\theta+\sin 3\theta=\cos\theta+\sin\theta.$$

解　给出的方程可变形为

$$\frac{\cos 3\theta}{\sqrt{2}}+\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{2}}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\left(3\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right).$$

所以　$3\theta-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right).$

即　　$\theta=n\pi$　或　$\theta=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}.$

2206. 解方程：$\sin 3\theta=\sin\theta\cos 2\theta.$

解　由给出的方程，得

$$\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta=\sin\theta\cos 2\theta.$$

$$\therefore\quad \cos\theta\sin 2\theta=0,$$

$$2\sin\theta\cos^2\theta=0.$$

由此可得　　$\sin\theta=0,$

或　　$\cos^2\theta=0,$　即　$\cos\theta=0.$

若 $\sin\theta=0$，则

$$\theta=n\pi.$$

若 $\cos\theta=0$，则

$$\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

$\theta=n\pi$ 和 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 可以综合成一个式子，即

$$\theta=\frac{n\pi}{2}.$$

2207. 解方程：

$$\operatorname{ctg}15^\circ\cos\theta+\sin\theta=1.$$

解　由给出的方程，得

$$\cos 15^\circ\cos\theta+\sin 15^\circ\sin\theta=\sin 15^\circ.$$

即　　$\cos(\theta-15^\circ)=\cos 75^\circ.$

所以　$\theta-15^\circ=n\cdot 360^\circ\pm 75^\circ.$

$\therefore\quad \theta=n\cdot 360^\circ+90^\circ,$

或　　$\theta=n\cdot 360^\circ-60^\circ,$

即　　$\theta=(4n+1)\cdot 90^\circ,$

或　　$\theta=(6n-1)\cdot 60^\circ$

2208　解方程：

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{2}{3}.$$

解　由给出的方程，得

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{2}{3}.$$

所以　　$1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{2}{3},$

$$\sin 2x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

查表求出使 $\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 的角 α，于是

$$2x=n\pi\pm\alpha.$$

所以　　$x=\frac{n}{2}\pi\pm\frac{\alpha}{2}.$

注　$\alpha=0.9553157$（弧度）$=54^\circ44'8''.$

2209　解方程：

$$a\sin x+b\cos x=c.$$

解　把原方程的两边同除以 a，得

$$\sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a}.$$

求出使 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$ 的角 φ，于是

$$\sin x+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x=\frac{c}{a}.$$

所以　　$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{a}\cos\varphi.$

因为这个式子的右边是已知量，所以由它可以求出 $x+\varphi$，从而就可以求出 x 的值。

2210. 解方程：$a\operatorname{tg}x+b\operatorname{ctg}x=c.$

解　由原方程，得

$$\frac{a\sin x}{\cos x}+\frac{b\cos x}{\sin x}=c.$$

所以　$a\sin^2 x+b\cos^2 x=c\sin x\cos x,$

$$a(1-\cos 2x)+b(1+\cos 2x)=c\sin 2x,$$

$$c\sin 2x+(a-b)\cos 2x=a+b.$$

接着就可以象上题那样进行解答。

2211. 解方程：

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d.$$

解　由给出的方程，得

$$a(1-\cos 2x)+b\sin 2x+c(1+\cos 2x)=2d,$$

$$b\sin 2x+(c-a)\cos 2x=2d-a-c.$$

这样就把问题归结到可用第 2210 题的解法来解。

2212. 解方程：

$$\cos 9\theta=\cos 5\theta-\cos\theta.$$

解　由给出的方程，得

$$(\cos 9\theta+\cos\theta)-\cos 5\theta=0.$$

即　　$2\cos 5\theta\cos 4\theta-\cos 5\theta=0,$

$$\cos 5\theta(2\cos 4\theta-1)=0.$$

所以　$\cos 5\theta=0$　或　$\cos 4\theta=\frac{1}{2}.$

由 $\cos 5\theta=0$, 得

$$5\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

即 $$\theta=(2n+1)\frac{\pi}{10}.$$

由 $\cos 4\theta=\frac{1}{2}$, 得

$$4\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

即 $$\theta=(6n\pm1)\frac{\pi}{12}.$$

2213. 解方程:

$$3\sec^4\theta+8=10\sec^2\theta.$$

解 由给出的方程,得

$$3\sec^4\theta-10\sec^2\theta+8=0.$$

所以 $\sec^2\theta=2$ 或 $\sec^2\theta=\frac{4}{3}$.

即

$$\sec\theta=\pm\sqrt{2} \quad 或 \quad \sec\theta=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

从而得出 $$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4},$$

或 $$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

2214. 求适合于方程

$$0.4235\sin x+0.1516\cos x=0.3818$$

的角 x。

解 由给出的方程,得

$$\sin x+\frac{1516}{4235}\cos x=\frac{3818}{4235}.$$

设 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1516}{4235}$, 于是

$$\begin{aligned}\lg\operatorname{tg}\varphi&=\lg 1516-\lg 4235\\&=3.18070-3.62685\\&=9.55385-10\\&=\bar{1}.55385.\end{aligned}$$

由此得出 $\varphi=19°41'45''$。把这个值代入上面的方程,得

$$\sin x+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x=\frac{3818}{4235},$$

即 $$\sin(x+\varphi)=\frac{3818\cos\varphi}{4235}.$$

所以

$$\lg\sin(x+\varphi)=\lg 3818+\lg\cos\varphi-\lg 4235,$$

$$\begin{aligned}&\lg\sin(x+19°41'45'')\\&=\lg 3818+\lg\cos 19°41'45''-\lg 4235\\&=3.58184+(9.97382-10)-3.62685\\&=9.92881-10=\bar{1}.92881.\end{aligned}$$

从而得出 $x+19°41'45''$ 的一个值是 $58°5'$。因此,一般地

$$x+19°41'45''=n\cdot180°+(-1)^n58°5',$$

$$x=n\cdot180°+(-1)^n58°5'-19°41'45''.$$

2215. 由方程

$$\sec\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sec\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\sqrt{2},$$

求 x 的值。

解 由给出的方程,得

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}+\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=2\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\frac{\sqrt{2}}{\cos x-\sin x}+\frac{\sqrt{2}}{\cos x+\sin x}\\&=2\sqrt{2},\\&\cos x=\cos^2x-\sin^2x,\\&\cos x=2\cos^2x-1,\\&2\cos^2x-\cos x-1=0.\end{aligned}$$

所以 $\cos x=1$ 或 $\cos x=-\frac{1}{2}$.

从而得

$$x=2n\pi \quad 或 \quad x=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi.$$

2216. 解方程: $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\operatorname{tg}\theta=2$.

解 由给出的方程,得

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2,$$

所以 $$\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}=2,$$

即 $\frac{1}{\cos\theta}=2$. $\therefore$ $\cos\theta=\frac{1}{2}$.

从而得出 $$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

2217. 解方程: $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta=2$.

解 $$\operatorname{tg}\theta+\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}=2,$$

所以 $$\operatorname{tg}^2\theta-2\operatorname{tg}\theta+1=0,$$

$$(\operatorname{tg}\theta-1)^2=0.$$

由此可得 $\operatorname{tg}\theta=1$,

$$\therefore\quad \theta=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

2218 解方程: $\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{tg}\theta=2$.

解
$$\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}-\operatorname{tg}\theta=2,$$
$$\operatorname{tg}^2\theta+2\operatorname{tg}\theta=1,$$
$$\operatorname{tg}^2\theta+2\operatorname{tg}\theta+1=2.$$
$$\therefore\quad \operatorname{tg}\theta+1=\pm\sqrt{2},$$
即
$$\operatorname{tg}\theta=\pm\sqrt{2}-1.$$
因为
$$\operatorname{tg}22.5^\circ=\sqrt{2}-1,$$
$$\operatorname{tg}112.5^\circ=-\sqrt{2}-1,$$
所以
$$\theta=n\cdot180^\circ+22.5^\circ,$$
或
$$\theta=n\cdot180^\circ+112.5^\circ.$$

2219. 解方程:

$$\cos3\theta+\cos5\theta+\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta=0.$$

解　由给出的方程,得

$$2\cos4\theta\cos\theta+\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta=0.$$

由此得出:
$$\cos\theta=0.\qquad ①$$
或
$$\cos4\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta).\qquad ②$$

由①,得　$\theta=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}.$

由②,得

$$\cos4\theta=\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right),$$
$$4\theta=2n\pi\pm\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right),$$

即　$\theta=\dfrac{2n\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$　或　$\theta=\dfrac{2n\pi}{5}-\dfrac{3\pi}{20}.$

2220. 解下列各方程:

(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{5}\right);$

(2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right);$

(3) $\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(2x+\dfrac{\pi}{5}\right).$

解　(1) 由给出的方程,得

$$\frac{\pi}{3}-2x=2m\pi+x+\frac{\pi}{5},\qquad ①$$
或
$$\frac{\pi}{3}-2x=2m\pi+\pi-x-\frac{\pi}{5}.\qquad ②$$

由①,得　$x=\dfrac{2(-15m+1)\pi}{45}.$

由②,得　$x=\dfrac{(-30m-7)\pi}{15}.$

设 $-m$ 为 n,于是得

$$x=\frac{2(15n+1)\pi}{45}\quad 或\quad x=\frac{(30n-7)\pi}{15}.$$

(2) 由给出的方程,得

$$\frac{\pi}{4}+x=2n\pi\pm\left(\frac{\pi}{3}-2x\right).$$
$$\therefore\quad x=\left(2n+\frac{1}{12}\right)\frac{\pi}{3},$$
或
$$x=(7-24n)\frac{\pi}{12}.$$

(3) 由所给的方程,得

$$n\pi+x-\frac{\pi}{3}=2x+\frac{\pi}{5}.$$
所以
$$x=(15n-8)\frac{\pi}{15}.$$

2221. 解方程: $\csc\theta+\operatorname{ctg}\theta=\sqrt{3}.$

解　由给出的方程,得

$$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\sqrt{3}.$$
即
$$\frac{1}{\sin\theta}(1+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)=0,$$
$$\frac{1}{\sin\theta}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)=0,$$
$$\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\right)=0.$$

由此可得

$$\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}=0,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$
所以
$$\frac{\theta}{2}=n\cdot180^\circ+30^\circ,$$
$$\theta=n\cdot360^\circ+60^\circ.$$

2222. 解方程: $\csc\theta-\operatorname{ctg}\theta=1.$

解　由给出的方程,得

$$\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=1.$$
$$\therefore\quad \frac{1}{\sin\theta}(1-\cos\theta-\sin\theta)=0,$$
$$\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)=0,$$

$$\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)=0.$$

由此可得 $\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}=0$,

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=1.$$

所以 $\frac{\theta}{2}=n\cdot 180°+45°$.

$$\theta=n\cdot 360°+90°.$$

2223. 解方程: $\sec\theta+\operatorname{tg}\theta=\sqrt{3}$.

解　由给出的方程,得

$$\sec\theta=\operatorname{tg}60°-\operatorname{tg}\theta.$$

$$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin(60°-\theta)}{\cos 60°\cos\theta},$$

$$\sin(60°-\theta)=\cos 60°,$$

$$\sin(\theta-60°)=\sin(-30°).$$

$\therefore$　$\theta-60°=n\cdot 180°+(-1)^n\cdot(-30°)$,

$$\theta=n\cdot 180°+60°-(-1)^n\cdot 30°.$$

其中使 $\cos\theta$ 为 0 的值不是原方程的根,除去这些值,则

$$\theta=n\cdot 360°+30°.$$

2224. 解方程:

$$\operatorname{tg}3\theta-\operatorname{tg}\theta=2\cos\theta\sec 3\theta.$$

解　由给出的方程,得

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 3\theta\cos\theta}=\frac{2\cos\theta}{\cos 3\theta}.$$

所以 $\frac{\sin 2\theta-2\cos^2\theta}{\cos 3\theta\cos\theta}=0$.

$$\sin 2\theta-2\cos^2\theta=0.$$

$$2\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)=0.$$

这里 $\cos\theta\neq 0$, 所以

$$\sin\theta=\cos\theta.$$

$$\therefore\quad \theta=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

因为上式不使方程的分母 $\cos 3\theta$、$\cos\theta$ 为 0, 所以它是所要求的根.

2225. 解方程:

$$3\operatorname{tg}(\theta-15°)=\operatorname{tg}(\theta+15°).$$

解　由给出的方程,得

$$\frac{3\sin(\theta-15°)}{\cos(\theta-15°)}=\frac{\sin(\theta+15°)}{\cos(\theta+15°)}.$$

由此可得

$$3\sin(\theta-15°)\cos(\theta+15°)$$
$$=\sin(\theta+15°)\cos(\theta-15°),$$

$$3\sin 2\theta-3\sin 30°=\sin 2\theta+\sin 30°,$$

$$2\sin 2\theta=4\sin 30°.$$

$$\sin 2\theta=1.$$

$$2\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2},\quad 即\quad \theta=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

2226. 解方程:

$$\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{tg}\theta=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha.$$

解　$\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{tg}\theta=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$,

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}-\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}-\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\theta=\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\theta.$$

所以

$$(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\theta)(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta+1)=0.$$

由此可得　$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\alpha$,

或　$\operatorname{tg}\theta=-\operatorname{ctg}\alpha$,

即　$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

所以　$\theta=n\pi+\alpha$,

或　$\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha$.

综合上面两式,得

$$\theta=\frac{n\pi}{2}+\alpha.$$

2227. 解方程:

$$2+4\operatorname{tg}^2\theta=5\operatorname{tg}\theta\sec\theta.$$

解　由给出的方程,得

$$2+\frac{4\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{5\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

即　$\frac{2\cos^2\theta+4\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{5\sin\theta}{\cos^2\theta}$,

$$2+2\sin^2\theta-5\sin\theta=0,$$

$$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)=0.$$

因为 $\sin\theta-2\neq 0$, 所以 $2\sin\theta-1=0$, 即

$$\sin\theta=\frac{1}{2}.$$

从而得出 $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

2228. 解方程:

$$\operatorname{ctg}2\theta-\operatorname{ctg}\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

解　由给出的方程,得

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad \frac{-\sin\theta}{\sin 2\theta\sin\theta}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\sin 2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以　$2\theta=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{3}$.

即　$\theta=\frac{n\pi}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

2229. 解方程:

$$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}(\theta-45°)=2.$$

解　由给出的方程,得

$$\operatorname{tg}\theta+\frac{\operatorname{tg}\theta-1}{1+\operatorname{tg}\theta}=2.$$

化简,得　$\operatorname{tg}^2\theta-3=0$.

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\theta=\pm\sqrt{3}.$$

所以

$$\theta=n\cdot180°\pm60°=(3n\pm1)\cdot60°.$$

2230. 解方程:

$$6\operatorname{ctg}^2\theta=1+4\cos^2\theta.$$

解　由给出的方程,得

$$\frac{6\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=1+4\cos^2\theta.$$

$$\therefore\quad 6\cos^2\theta-\sin^2\theta-4\cos^2\theta\sin^2\theta=0,$$

$$4\cos^4\theta+3\cos^2\theta-1=0.$$

所以

$$\cos^2\theta=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{8}=\frac{-3\pm5}{8}.$$

舍去 $\cos^2\theta=-1$, 得

$$\cos^2\theta=\frac{1}{4}.\quad \therefore\quad \cos\theta=\pm\frac{1}{2}.$$

所以

$$\theta=n\cdot180°\pm60°=(3n\pm1)\cdot60°.$$

2231. 解方程:

$$\operatorname{tg}2\theta=8\cos^2\theta-\operatorname{ctg}\theta.$$

解　由给出的方程,得

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=8\cos^2\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

由此可得　$\cos\theta=0$,　①

或　$\frac{2\sin\theta}{\cos 2\theta}=8\cos\theta-\frac{1}{\sin\theta}$.　②

由①,得　$\theta=(2n+1)\cdot90°$.　③

由②,得

$$2\sin^2\theta-4\sin 2\theta\cos 2\theta+(1-2\sin^2\theta)=0,$$

$$2\sin 4\theta-1=0,\quad \therefore\quad \sin 4\theta=\frac{1}{2}.$$

由此可得

$$4\theta=n\cdot180°+(-1)^n\cdot30°.$$

$$\therefore\quad \theta=[6n+(-1)^n]\cdot7.5°.$$　④

③和④就是所要求的解。

2232. 解方程:

$$\operatorname{tg}(45°+\theta)=1+\sin 2\theta.$$

解　原方程的左边$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$.

右边的1用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta$ 置换,则

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=(\sin\theta+\cos\theta)^2.$$

由此可得　$\sin\theta+\cos\theta=0$,　①

或　$\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}=\sin\theta+\cos\theta$,

$$1=\cos^2\theta-\sin^2\theta,$$

$$1=\cos 2\theta.$$　②

由①,得

$$\cos\theta=\cos(90°+\theta).$$

$$\therefore\quad 90°+\theta=n\cdot360°-\theta.$$

从而得出　$\theta=n\cdot180°-45°$.　③

由②,得　$2\theta=n\cdot360°$,

从而得出　$\theta=n\cdot180°$.　④

③和④就是所要求的解。

2233. 解方程: $\operatorname{tg}\theta+\sec 2\theta=1$.

解　由给出的方程,得

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos 2\theta}=1.$$

所以

$$\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta-\cos\theta\cos 2\theta=0,$$

$$\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta-\cos\theta(1-2\sin^2\theta)=0,$$

$$\sin\theta\cos 2\theta+2\cos\theta\sin^2\theta=0.$$

所以　$\sin\theta=0$,　①

或　$\cos 2\theta=-\sin 2\theta$,

即　$\operatorname{tg}2\theta=-1$.　②

由①,得　$\theta=n\cdot180°$.

由②,得　$2\theta=n\cdot180°-45°$,

即　$\theta=n\cdot90°-22.5°$.

2234. 解方程: $\operatorname{tg}5\theta=\operatorname{tg}\theta$.

解　由给出的方程就可以得到

$$5\theta=n\cdot180°+\theta.$$

从而得出

$$4\theta=n\cdot180°,\quad \theta=n\cdot45°.$$

2235. 解方程:

$$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}2\theta+\operatorname{tg}3\theta=0.$$

解　$(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}2\theta)+\operatorname{tg}3\theta=0$,

$$\frac{\sin 3\theta}{\cos\theta\cos 2\theta}+\frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}=0.$$

所以 $\sin 3\theta=0$, ①

或 $\dfrac{1}{\cos\theta\cos 2\theta}+\dfrac{1}{\cos 3\theta}=0$. ②

由①,得 $3\theta=n\cdot 180°$. 从而得出

$$\theta=n\cdot 60°.$$

由②,得

$$\cos 3\theta+\cos\theta\cos 2\theta=0,$$

$$\cos\theta\cos 2\theta-\sin\theta\sin 2\theta+\cos\theta\cos 2\theta=0,$$

$$2\cos\theta\cos 2\theta=\sin\theta\sin 2\theta.$$

所以 $\cos\theta=0$, ③

或 $\cos 2\theta=\sin^2\theta$. ④

③不适合,因为它使原方程的分母 $\cos\theta$ 为 0.

由④,得 $1-2\sin^2\theta=\sin^2\theta$,

$$3\sin^2\theta=1,\ \sin\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

由此可得 $\theta=n\cdot 180°\pm\alpha$,

这里,α 是使正弦的值为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 的角,即

$$\alpha=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2236. 解方程:

$$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}2\theta+\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}2\theta=\sqrt{3}.$$

解 由给出的方程,得

$$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}2\theta=\sqrt{3}(1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}2\theta).$$

从而得出

$$\frac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}2\theta}{1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}2\theta}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}3\theta=\sqrt{3}.$$

所以 $3\theta=n\cdot 180°+60°$,

$$\theta=n\cdot 60°+20°.$$

2237. 解方程:

$$(4-\sqrt{3})(\sec\theta+\csc\theta)=4(\sin\theta\operatorname{tg}\theta+\cos\theta\operatorname{ctg}\theta).$$

解 由给出的方程,得

$$(4-\sqrt{3})\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\right)=4\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right),$$

$$(4-\sqrt{3})(\sin\theta+\cos\theta)=4(\sin^3\theta+\cos^3\theta),$$

$$(4-\sqrt{3})(\sin\theta+\cos\theta)=4(\sin\theta+\cos\theta)\times(\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta).$$

所以 $\sin\theta+\cos\theta=0$,

或 $4-\sqrt{3}=4(1-\sin\theta\cos\theta)$.

由 $\sin\theta+\cos\theta=0$,得

$$\sin\theta=-\cos\theta.$$

所以 $\operatorname{tg}\theta=-1$, $\theta=n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$.

由 $4-\sqrt{3}=4(1-\sin\theta\cos\theta)$,得

$$\sqrt{3}=4\sin\theta\cos\theta,\ \sin 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以 $2\theta=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{3}$,

$$\theta=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

2238. 解方程:

$$\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{tg}\theta=\cos\theta+\sin\theta.$$

解 由给出的方程,得

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\cos\theta+\sin\theta,$$

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\sin\theta\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta).$$

所以 $\cos\theta+\sin\theta=0$,

或 $\cos\theta-\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$.

若 $\sin\theta+\cos\theta=0$,则 $\sin\theta=-\cos\theta$.

即 $\operatorname{tg}\theta=-1$, $\therefore\ \theta=n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$.

若 $\cos\theta-\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$,把它的两边平方后得

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

所以 $1-\sin 2\theta=\dfrac{\sin^2 2\theta}{4}$.

解这个二次方程,得

$$\sin 2\theta=-2\pm 2\sqrt{2}.$$

上式右边取"+"号时,所得 θ 的值适合于方程,取"−"号时,无解.因为取"−"号时,$\sin 2\theta$ 的绝对值大于 1.

2239. 解方程:

$$\operatorname{tg}\theta+2\operatorname{ctg}2\theta=\sin\theta\left(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right).$$

解 由给出的方程,得

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\sin\theta\left(1+\frac{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}}\right),$$

$$\frac{\sin^2\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\sin\theta\cdot\frac{\cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}},$$

$$\frac{\sin^2\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

$$\sin^2\theta+\cos 2\theta=\sin^2\theta,$$

$$\cos 2\theta=0.$$

所以 $$2\theta=n\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$\theta=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=(2n+1)\frac{\pi}{4}.$$

2240. 求使方程 $\sin^2x+\cos x+a=0$ 有解的 a 的范围．若 $a=1$，解这个方程．

解 $$1-\cos^2x+\cos x+a=0,$$

$$\cos^2x-\cos x-(a+1)=0.$$

$$D=1+4(a+1).$$

所以 $$1+4(a+1)\geqslant 0.$$

$$\therefore\quad a\geqslant-\frac{5}{4}.$$

设 $\cos x=t$，则

$$f(t)=t^2-t-(a+1)=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\left(a+\frac{5}{4}\right).$$

由此可知，$f(t)$ 在 $t=\frac{1}{2}$ 时取得最小值．因此，为了使它至少具有一个 $|t|\leqq 1$ 的根，必须使 $f(-1)\geqq 0$．

$$\therefore\quad 1-a\geqq 0.\quad\therefore\quad -\frac{5}{4}\leqq a\leqq 1.$$

当 $a=1$ 时，

$$\cos^2x-\cos x-2=0.$$

因为 $\cos x\neq 2$，所以

$$\cos x=-1.\quad\therefore\quad x=(2n+1)\pi.$$

2241. 解方程:

$$(1-\operatorname{tg}\theta)(1+\sin 2\theta)=1+\operatorname{tg}\theta.$$

解　由给出的方程，得

$$\left(1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

$$(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos\theta+\sin\theta.$$

所以 $$\cos\theta+\sin\theta=0,$$

或 $$(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)=1.$$

若 $\cos\theta+\sin\theta=0$，则 $\sin\theta=-\cos\theta$．

即 $$\operatorname{tg}\theta=-1.\quad\therefore\quad \theta=n\pi+\frac{3\pi}{4}.$$

若 $(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)=1$，则

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta=1.$$

即 $$\cos 2\theta=1.$$

$$\therefore\quad 2\theta=2n\pi,\quad \theta=n\pi.$$

2242. 解方程:

$$\operatorname{tg}(\alpha+x)\operatorname{tg}(\alpha-x)=\frac{1-2\cos 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha}.$$

解　由给出的方程，得

$$\frac{\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)}{\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)}=\frac{1-2\cos 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha},$$

$$\frac{\sin^2\alpha-\sin^2x}{\cos^2\alpha-\sin^2x}=\frac{1-2\cos 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha},$$

$$4\cos 2\alpha\sin^2x=\sin^2\alpha(1+2\cos 2\alpha)-\cos^2\alpha(1-2\cos 2\alpha),$$

$$4\cos 2\alpha\sin^2x=-\cos 2\alpha+2\cos 2\alpha,$$

$$4\cos 2\alpha\sin^2x=\cos 2\alpha.$$

所以 $$\sin^2x=\frac{1}{4},\quad \sin x=\pm\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

2243. 由方程 $\operatorname{tg}x+ab\operatorname{ctg}x=a+b$，求 $\operatorname{tg}x$ 的值，并求出 x 的值．

解　由给出的方程，得

$$\operatorname{tg}x+\frac{ab}{\operatorname{tg}x}=a+b,$$

$$\operatorname{tg}^2x-(a+b)\operatorname{tg}x+ab=0.$$

解这个二次方程，得

$$\operatorname{tg}x=a\quad 或\quad \operatorname{tg}x=b.$$

由此可得 $$x=n\pi+\operatorname{arc\,tg}a,$$

或 $$x=n\pi+\operatorname{arc\,tg}b.$$

2244. 由方程 $\operatorname{tg}3\theta+\operatorname{tg}2\theta+\operatorname{tg}\theta=0$，求 $\operatorname{tg}\theta$ 的值，并求出 θ 的值．

解　由给出的方程，得

$$\frac{3\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}^3\theta}{1-3\operatorname{tg}^2\theta}+\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}+\operatorname{tg}\theta=0.$$

所以 $$\operatorname{tg}\theta=0,$$

或 $$\frac{3-\operatorname{tg}^2\theta}{1-3\operatorname{tg}^2\theta}+\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2\theta}+1=0.$$

由后面一个方程，得

$$(3-\operatorname{tg}^2\theta)(1-\operatorname{tg}^2\theta)+2(1-3\operatorname{tg}^2\theta)+(1-\operatorname{tg}^2\theta)(1-3\operatorname{tg}^2\theta)=0,$$

$$4\operatorname{tg}^4\theta-14\operatorname{tg}^2\theta+6=0.$$

解这个双二次方程，得

$$\operatorname{tg}^2\theta=3\quad 或\quad \operatorname{tg}^2\theta=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\operatorname{tg}\theta=\pm\sqrt{3} \quad 或 \quad \operatorname{tg}\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由 $\operatorname{tg}\theta=0$, 得

$$\theta=n\pi.$$

由 $\operatorname{tg}\theta=\pm\sqrt{3}$, 得

$$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

由 $\operatorname{tg}\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, 得

$$\theta=n\pi\pm\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2245. 解方程: $\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x=2$.

解 由给出的方程,得

$$\operatorname{tg}^2x+\frac{1}{\operatorname{tg}^2x}=2,$$

$$\operatorname{tg}^4x+1-2\operatorname{tg}^2x=0.$$

由此可得 $\operatorname{tg}^2x=1$.

所以 $\operatorname{tg}x=\pm1$.

$$\therefore \quad x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

2246. 若某角的余弦和它的正切的比是3:2, 求这个角的一般值.

解 若所要求的角用 θ 表示,则

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{tg}\theta}=\frac{3}{2}.$$

$$\therefore \quad \cos^2\theta=\frac{3}{2}\sin\theta,$$

$$1-\sin^2\theta=\frac{3}{2}\sin\theta.$$

解这个二次方程,得

$$\sin\theta=\frac{1}{2} \quad 或 \quad \sin\theta=-2.$$

因为 $\sin\theta=-2$ 不合适,所以把它舍去. 于是

$$\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

2247. 求适合于方程

$$\operatorname{tg}^2\theta-(\sqrt{3}+1)\operatorname{tg}\theta+\sqrt{3}=0$$

的 θ 的值. 这里 $0°<\theta<90°$.

解 由给出的方程,得

$$(\operatorname{tg}\theta-1)(\operatorname{tg}\theta-\sqrt{3})=0.$$

所以 $\operatorname{tg}\theta=1$ 或 $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{3}$.

从而得出 $\theta=45°$,

或 $\theta=60°$.

2248. 把 30° 的角分成两个角, 使其中一个角的正弦等于另一个角的正弦的三倍.

解 设一个角是 α,则另一个角是 $30°-\alpha$.

$$\therefore \quad 3\sin\alpha=\sin(30°-\alpha).$$

从而得出

$$3\sin\alpha=\sin30°\cos\alpha-\cos30°\sin\alpha,$$

$$3\sin\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

所以 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{6+\sqrt{3}}$.

这就是说,只要使 α 的正切是 $\frac{1}{6+\sqrt{3}}$ 就可以了.

2249. 在 0° 和 180° 之间, 求适合于方程 $2\cos^2x+3\sin x=3$ 的 x 的所有值.

解 由给出的方程,得

$$2-2\sin^2x+3\sin x=3,$$

$$2\sin^2x-3\sin x+1=0,$$

$$(2\sin x-1)(\sin x-1)=0.$$

所以 $\sin x=\frac{1}{2}$ 或 $\sin x=1$.

由 $\sin x=\frac{1}{2}$, 得

$$x=30°,\ 150°.$$

由 $\sin x=1$, 得

$$x=90°.$$

因此,所给方程的根是 30°, 90° 和 150°.

2250. 在 0° 和 180° 之间,求适合于方程 $2\sin^2x+\sin^22x=2$ 的 x 的值.

解 由给出的方程,得

$$\sin^22x=2-2\sin^2x,$$

$$\sin^22x=2\cos^2x,$$

$$4\sin^2x\cos^2x=2\cos^2x.$$

从而得出 $\cos^2x=0$,

或 $\sin^2x=\frac{1}{2}$.

由 $\cos^2x=0$, 得

$$x=90°.$$

由 $\sin^2x=\frac{1}{2}$, 得

$$\sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore \quad x=45°,\ 135°.$$

因此，所要求的角是 45°、90° 和 135°。

2251. 求适合于方程

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\left(\frac{8\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

的 θ 的最小正角.

解 ∵ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$$

$$=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$$

$$=\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}=\frac{2}{\cos 2\theta},$$

$$\therefore\quad \frac{2}{\cos 2\theta}=\left(\frac{8\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\cos 2\theta}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos^2 2\theta=\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}},$$

$$2\cos^2 2\theta-1=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-1,$$

$$\cos 4\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 4\theta=\cos\frac{\pi}{4}.$$

所以　　$4\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$,

从而得出 θ 的最小正角是 $\theta=\frac{\pi}{16}$.

2252. 已知

$$\sin^2(n+1)\theta=\sin^2 n\theta+\sin^2(n-1)\theta,$$

且其中 $(n+1)\theta$, $n\theta$, $(n-1)\theta$ 是三角形的三个内角，求 n 的整数值.

解 由给出的方程，得

$$\sin^2(n+1)\theta-\sin^2(n-1)\theta=\sin^2 n\theta,$$

$$\sin 2n\theta\sin 2\theta=\sin^2 n\theta.$$

因为 $(n+1)\theta$, $(n-1)\theta$, $n\theta$ 是三角形的三个内角，所以

$$(n+1)\theta+(n-1)\theta+n\theta=\pi,$$

$$3n\theta=\pi,\ n\theta=\frac{\pi}{3}.$$

因此　　$\sin 2\theta\sin\frac{2\pi}{3}=\sin^2\frac{\pi}{3}$,

$$\sin 2\theta=\sin\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad 2\theta=m\pi+(-1)^m\frac{\pi}{3}.$$

由此可得　　$2\theta=\frac{\pi}{3}$

或　　$2\theta=\frac{2\pi}{3}$.

当 $\theta=\frac{\pi}{3}$时，$n\theta=\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，从而得出 $n=1$. 但这时所给的角中有一个变成 0，所以不适合。

当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$n=2$. 这就是所要求的整数值.

2253. 解方程：$\operatorname{ctg}\theta=2\cos\theta$.

解 由给出的方程，得

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta.$$

由此可得　　$\cos\theta=0$,

或　　$\frac{1}{\sin\theta}=2$.

若 $\cos\theta=0$，则

$$\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

若 $\frac{1}{\sin\theta}=2$，则

$$\sin\theta=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

2254. 解下列各方程：

(1) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$;

(2) $(\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x)^2(2-\sqrt{3})=4(2+\sqrt{3})$.

解 (1) $\operatorname{tg}x+\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=2$,

$$\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x)+(\operatorname{tg}x+1)=2(1-\operatorname{tg}x),$$

$$\operatorname{tg}^2x-4\operatorname{tg}x+1=0,$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}x=2\pm\sqrt{3}.$$

因为适合于上面两个方程的一个特解分别

是 $x=\frac{5\pi}{12}$、$x=\frac{\pi}{12}$，所以方程的一般解是

$$x=n\pi+\frac{\pi}{12},\ x=n\pi+\frac{5\pi}{12}.$$

(2) $(\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x)^2=\frac{4(2+\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}}$,

$$(\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x)^2=[2(2+\sqrt{3})]^2,$$

$$\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x=\pm2(2+\sqrt{3}),$$

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\pm2(2+\sqrt{3}),$$

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\pm(2+\sqrt{3}).$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}2x=\pm\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\pm(2-\sqrt{3}).$$

因为适合于上式的一个特解是 $2x=\pm\frac{\pi}{12}$，所以方程的一般解是

$$2x=n\pi\pm\frac{\pi}{12}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{24}.$$

2255. 解方程：$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}3x=2\operatorname{tg}2x$.

解　原方程可变形为

$$\operatorname{tg}x+\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x}-\frac{4\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=0,$$

$$\operatorname{tg}x\left(1+\frac{3-\operatorname{tg}^2x}{1-3\operatorname{tg}^2x}-\frac{4}{1-\operatorname{tg}^2x}\right)=0.$$

(i) 由 $\operatorname{tg}x=0$，得 $x=n\pi$.

(ii) 把第二个因式去分母并整理后得

$$4\operatorname{tg}^4x+4\operatorname{tg}^2x=0,$$

$$4\operatorname{tg}^2x(\operatorname{tg}^2x+1)=0.$$

因为 $\operatorname{tg}^2x+1\neq0$，所以

$$\operatorname{tg}x=0.$$

由此可以得到和 (i) 同样的结果．因此所要求的一般解是

$$x=n\pi.$$

2256. 解方程：

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

解

$$\because\quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$$

$$=\sin\frac{2\pi}{3}\cos x+\cos\frac{2\pi}{3}\sin x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos x-\sin x),$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos x+\sin x),$$

把它们代入原方程，得

$$\frac{2}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}+\frac{2}{\sqrt{3}\cos x+\sin x}=\frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{4\sqrt{3}\cos x}{3\cos^2x-\sin^2x}=\frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$3\cos^2x-\sin^2x=3\cos x,$$

$$4\cos^2x-3\cos x-1=0,$$

$$(\cos x-1)(4\cos x+1)=0.$$

$$\therefore\quad \cos x=1\quad 或\quad \cos x=-\frac{1}{4}.$$

由 $\cos x=1$，得

$$x=2n\pi.\qquad ①$$

设适合 $\cos x=-\frac{1}{4}$ 的最小的正角是

$$x=\alpha\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right),$$

则一般解是

$$x=2n\pi\pm\alpha.\qquad ②$$

因为①、②都不使原方程的分母为 0，所以所要求的解是

$$x=2n\pi,\ x=2n\pi\pm\alpha\left(\alpha=\arccos-\frac{1}{4}\right).$$

2257. (1) 求满足方程

$$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{3}\ (0^\circ\leq\theta\leq180^\circ)$$

的 θ 的值．

(2) 确定在 $0^\circ\leq\theta\leq45^\circ$ 的范围内，使方程 $\cos\theta+\sqrt{a}\sin\theta=\sqrt{a}$ 有解的正数 a 的范围．

解　(1) 当 $0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$ 时，$\sin\theta\geq0$，所以

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

于是，所给的方程可变形为

$$\cos\theta+\sqrt{3(1-\cos^2\theta)}=\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{3(1-\cos^2\theta)}=\sqrt{3}-\cos\theta.$$

因为两边都不是负的，所以平方后得

$$3(1-\cos^2\theta)=3-2\sqrt{3}\cos\theta+\cos^2\theta.$$

$$4\cos^2\theta-2\sqrt{3}\cos\theta=0,$$
$$2\cos\theta(2\cos\theta-\sqrt{3})=0.$$
$$\therefore\quad \cos\theta=0,\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
$$\therefore\quad \theta=90^\circ,\ \theta=30^\circ.$$

(2) 当 $0^\circ\leqq\theta\leqq45^\circ$ 时, $\cos\theta>0$, 所以
$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}.$$
于是,可把所给的方程变形为
$$\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{a}\,(1-\sin\theta).$$
因为两边都是正的,所以
$$1-\sin^2\theta=a(1-\sin\theta)^2,$$
$$(1-\sin\theta)[(1+\sin\theta)-a(1-\sin\theta)]=0,$$
$$(1-\sin\theta)[(a+1)\sin\theta-(a-1)]=0.$$
当 $0^\circ\leqq\theta\leqq45^\circ$ 时,因为 $\sin\theta\neq1$, 所以
$$\sin\theta=\frac{a-1}{a+1}.$$
因此, 所给的方程在 $0^\circ\leqq\theta\leqq45^\circ$, 即在 $0\leqq\sin\theta\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的范围内有解的条件是
$$0\leqq\frac{a-1}{a+1}\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$
适合于上式的正数 a 的范围是
$$1\leqq a\leqq\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$
即 $$1\leqq a\leqq3+2\sqrt{2}.$$

注 对于(1)中的方程,如利用加法定理进行变形,则得
$$2\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=\sqrt{3},$$
$$2(\cos\theta\cos60^\circ+\sin\theta\sin60^\circ)=\sqrt{3},$$
$$\cos(\theta-60^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
因此,在 $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ 的范围内
$$\theta-60^\circ=\pm30^\circ,$$
$$\therefore\quad \theta=90^\circ,\ \theta=30^\circ.$$

2258. (1) 把 $\cos\theta-\sin\theta$ 化成
$$a\cos(\theta+\alpha)$$
的形式.

(2) 求 $45^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ 时 $\sin\theta-\cos\theta$ 的变化范围.

(3) 当 $45^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ 时, 求满足关系式 $\sin\theta-\cos\theta=x-\frac{1}{x}$ 的 x 的范围.

解 (1) $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos(\theta+45^\circ)$.

(2) 由(1),得
$$\sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{2}\cos(\theta+45^\circ).\qquad ①$$
当 $45^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ 时,
$$90^\circ\leqq\theta+45^\circ\leqq135^\circ.$$
$$\therefore\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\cos(\theta+45^\circ)\leqq0.$$
因此,由 ①, 得
$$1\geqq\sin\theta-\cos\theta\geqq0.\qquad ②$$
(3) $$\sin\theta-\cos\theta=x-\frac{1}{x},$$
由 ②, 得
$$0\leqq\sin\theta-\cos\theta,$$
$$\sin\theta-\cos\theta\leqq1.$$
$$\therefore\quad \frac{x^2-1}{x}\geqq0,\ \frac{x^2-x-1}{x}\leqq0.$$
由第一个不等式,得
$$\frac{1}{x}(x+1)(x-1)\geqq0.$$
$$\therefore\quad x\geqq1,\ -1\leqq x<0.\qquad ③$$
由第二个不等式,得
$$\frac{1}{x}\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\leqq0.$$
$$\therefore\quad 0<x\leqq\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$
$$x\leqq\frac{1-\sqrt{5}}{2}.\qquad ④$$
因此,由 ③、④,得到所要求的 x 的范围是
$$1\leqq x\leqq\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ -1\leqq x\leqq\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

2259. 在 $x=0$, $x=1$ 和 $x=-1$ 这几种情况下,根据 $\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin2\alpha}{x+\cos2\alpha}$, 用 α 表示所给的角 θ.

解 $x=0$ 时, $\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}$.

即 $$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}2\alpha.$$
$$\therefore\quad \theta=n\pi+2\alpha.$$
$x=1$ 时, $\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}$.

即 $$\operatorname{tg}\theta=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha},$$
$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\alpha.$$
$$\therefore\quad \theta=n\pi+\alpha.$$

$x=-1$ 时，

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin 2\alpha}{-1+\cos 2\alpha}.$$

即 $$\operatorname{tg}\theta=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{-2\sin^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\theta=-\operatorname{ctg}\alpha,\ \operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

$$\therefore\quad \theta=n\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha=(2n+1)\frac{\pi}{2}+\alpha.$$

2260． 若

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1,$$

用 α, β 表示 γ.

解　把给出的式子看成是关于 $\cos\gamma$ 的二次方程，则

$$\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1=0.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \cos\gamma&=\cos\alpha\cos\beta\pm\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1)}\\&=\cos\alpha\cos\beta\pm\sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}\\&=\cos\alpha\cos\beta\pm\sqrt{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\\&=\cos\alpha\cos\beta\pm\sin\alpha\sin\beta\\&=\cos(\alpha\mp\beta).\end{aligned}$$

因此 $$\cos\gamma=\cos(\alpha+\beta),$$

或 $$\cos\gamma=\cos(\alpha-\beta).$$

$$\therefore\quad \gamma=2n\pi\pm(\alpha+\beta),$$

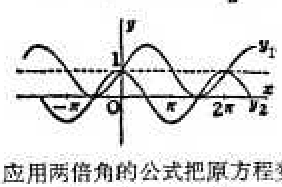
或 $$\gamma=2n\pi\pm(\alpha-\beta).$$

2261． (1) 根据图象，求出使 $\sin x+1=\cos x$ 的 x 的值.

(2) 把 $\sin x+1=\cos x$ 化成积的形式，然后求出使 $\sin x+1=\cos x$ 成立的 x 的值.

解　(1) 求 $y_1=\sin x+1$ 和 $y_2=\cos x$ 的图象交点的横坐标，得

$$x=2n\pi,\ x=2n\pi-\frac{\pi}{2}.$$



(2) 应用两倍角的公式把原方程变形，得

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}=0,$$

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=0.$$

由 $\sin\frac{x}{2}=0$，得

$$\frac{x}{2}=n\pi,\ \therefore\quad x=2n\pi.$$

由 $\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=0$，得

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

$$\therefore\quad \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=n\pi.$$

$$\therefore\quad x=2n\pi-\frac{\pi}{2}=(4n-1)\frac{\pi}{2}.$$

2262． 已知等腰三角形 ABC 的底边 a 和顶角 A，求它的内心和外心之间的距离.

解　设内心是 I，内切圆的半径是 r，外心是 O，外接圆的半径是 R. 从 A 向 BC 引垂线，得垂足 D. 因为三角形 ABC 是等腰三角形，所以 I、O 都在直线 AD 上. 并且，因为

$$B=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},\ \frac{B}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4},$$

所以 $$AD=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right),$$

$$r=ID=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right).$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad AI&=AD-ID\\&=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)-\frac{a}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right).\end{aligned}$$

又 $$R=AO=\frac{a}{2\sin A}.$$

并且当 $A<\frac{\pi}{3}$ 时，由于 $B>A$，$AI>AO$，所以

$$\begin{aligned}IO&=AI-AO\\&=\left[\frac{a}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)-\frac{a}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right)\right]-\frac{a}{2\sin A}=\frac{a}{2}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right)-\frac{1}{\sin A}\right].\end{aligned}$$

当 $A>\frac{\pi}{3}$ 时，由于 $B<A$，$AI<AO$，所以

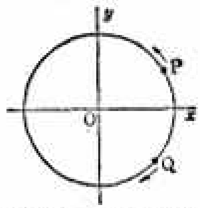
$$IO=AO-AI$$
$$=\frac{a}{2\sin A}-\left[\frac{a}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)-\frac{a}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right)\right]$$
$$=\frac{a}{2}\left[\frac{1}{\sin A}+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\right].$$

2263. 在半径是 1 m 的圆上，有两点 P、Q 朝着相反的方向作匀速运动，一秒钟里 P 转三周，Q 转 6 周。

(1) 求 P、Q 从相遇到再次相遇所间隔的时间。

(2) 怎样表示 P、Q 从相遇起经过 t 秒钟后三角形 OPQ 的面积?

(3) P、Q之间的距离等于半径这种情况，多少时间发生一次?



解　(1) 取圆心 O 为原点，P、Q 初次相遇的点为 x 轴的正方向和圆的交点，则 t 秒钟后点 P、Q 的坐标分别是

$$P:\ \begin{cases} x=\cos 6\pi t, \\ y=\sin 6\pi t; \end{cases}$$

$$Q:\ \begin{cases} x=\cos(-12\pi t)=\cos 12\pi t, \\ y=\sin(-12\pi t)=-\sin 12\pi t. \end{cases}$$

因此，P、Q 从相遇到再次相遇所间隔的时间是满足方程组

$$\begin{cases} \cos 6\pi t=\cos 12\pi t, & ① \\ \sin 6\pi t=-\sin 12\pi t & ② \end{cases}$$

的 t 的最小值。

由 ①，得　$6\pi t=2n\pi\pm 12\pi t$.

$$\therefore\quad t=\frac{n}{9},\quad t=-\frac{n}{3}.$$

$$\therefore\quad t=0,\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{3},\ \cdots$$

同样，由 ②，得

$$6\pi t=n\pi-(-1)^n 12\pi t.$$

$$\therefore\quad t=\frac{n}{6+(-1)^n 12}.$$

$$\therefore\quad t=0,\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{6},\ \cdots$$

因此所要求的时间是 $\frac{1}{9}$ 秒。

(2) 从相遇起经过 t 秒钟后，P、Q 所构成的圆心角是

$$\angle POQ=6\pi t+12\pi t=18\pi t.$$

因此　$S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}|\sin 18\pi t|$.

(3) 先求 P、Q 的距离等于圆半径的时刻，得

$$(\cos 6\pi t-\cos 12\pi t)^2+(\sin 6\pi t+\sin 12\pi t)^2=1^2,$$
$$(\cos^2 6\pi t+\sin^2 6\pi t)+(\cos^2 12\pi t+\sin^2 12\pi t)-2(\cos 6\pi t\cos 12\pi t-\sin 6\pi t\sin 12\pi t)=1,$$
$$2-2\cos 18\pi t=1.$$
$$\therefore\quad \cos 18\pi t=\frac{1}{2}.$$

由此可得　$18\pi t=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

$$\therefore\quad t=\frac{1}{18}\left(2n\pm\frac{1}{3}\right).\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

因此，所要求的时间间隔 T 是

$$T=\frac{1}{18}\left[2(n+1)-\frac{1}{3}\right]-\frac{1}{18}\left[2n+\frac{1}{3}\right]=\frac{2}{27},$$

$$T=\frac{1}{18}\left(2n+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{18}\left(2n-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}.$$

因此，P、Q 之间的距离等于圆半径这种情况，交替间隔 $\frac{2}{27}$ 秒和 $\frac{1}{27}$ 秒发生一次。

2264. 解下列各方程:

(1) $3(\sec^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)=13$;

(2) $\sin 2x-\sin x=0$.

解　(1) 把给出的方程用 $\sin x$ 和 $\cos x$ 来表示，得

$$3\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=13,$$

$$16\cos^4 x-16\cos^2 x+3=0.$$

这里，设 $\cos x=X$，则

$$16X^4-16X^2+3=0.$$

$$\therefore\quad (4X^2-3)(4X^2-1)=0.$$

$\therefore\quad (2X-\sqrt{3})(2X+\sqrt{3})$
$\times(2X-1)(2X+1)=0.$

$\therefore\quad \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 或 $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

或 $\cos x=\frac{1}{2}$, 或 $\cos x=-\frac{1}{2}$.

$x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$, 或 $x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

(这里 n 是整数)

(2) 把给出的方程变形,得

$\sin x(2\cos x-1)=0.$

$\therefore\quad \sin x=0$ 或 $\cos x=\frac{1}{2}$,

$x=n\pi$ 或 $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

(这里 n 是整数)

2265. 若 $\sin A-\cos A=0$, 求 $\csc A$ 的值.

解 $\sin A-\cos A=0.$

所以 $\frac{\cos A}{\sin A}=1$, 即 $\operatorname{ctg}A=1$.

$\csc A=\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2A}=\pm\sqrt{2}$.

别解 $\sin A-\cos A=0$,

所以 $\sin A=\cos A$,

即 $\sin^2A=\cos^2A$, $\sin^2A=1-\sin^2A$.

$\therefore\quad 2\sin^2A=1,$

$\sin^2A=\frac{1}{2},$

$\sin A=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$

所以 $\csc A=\frac{1}{\sin A}=\pm\sqrt{2}$.

3. 方程组

2266. 解下列方程组(这里设 x、y 是正的锐角):

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(x+y)=\sqrt{3}, & ①\\ \operatorname{tg}(x-y)=1. & ②\end{cases}$$

解 由①,得

$x+y=60°,$ ③

由②,得

$x-y=45°.$ ④

③+④,得

$2x=105°,\ \therefore\ x=52°30'.$

③−④,得

$2y=15°,\ \therefore y=7°30'.$

2267. 求适合于下列方程组的 x、y 的值,这里设 x、y 是正的锐角.

$$\begin{cases}\sin(x-y)=\frac{1}{2}, & ①\\ \cos(x+y)=\frac{1}{2}. & ②\end{cases}$$

解 由①,得

$x-y=30°,$ ③

由②,得 $x+y=60°.$ ④

③+④,得

$2x=90°,\ \therefore\ x=45°.$

④−③,得

$2y=30°,\ \therefore\ y=15°.$

2268. 解方程组:

$$\begin{cases}\sin(x+y)=\sin x-\sin y,\\ \cos(x+y)=\cos x-\cos y.\end{cases}$$

$(|x|<\pi,\ |y|<\pi)$

解

$$\begin{cases}\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin x-\sin y,\\ \cos x\cos y-\sin x\sin y=\cos x-\cos y.\end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases}(1+\cos x)\sin y+\sin x\cos y=\sin x, & ①\\ -\sin x\sin y+(1+\cos x)\cos y=\cos x. & ②\end{cases}$$

关于 $\sin y$、$\cos y$ 解上面这个方程组. 由①×$(1+\cos x)$−②×$\sin x$, 得

$[(1+\cos x)^2+\sin^2 x]\sin y$
$=\sin x(1+\cos x)-\sin x\cos x.$

所以 $2(1+\cos x)\sin y=\sin x.$ ③

同理可得

$2(1+\cos x)\cos y=1+\cos x.$ ④

利用 $\sin^2y+\cos^2y=1$ 消去 y. 由 ③^2+④^2, 得

$4(1+\cos x)^2=\sin^2x+(1+\cos x)^2.$

$\therefore\quad (\cos x+1)(2\cos x+1)=0,$

$\cos x=-1$ 或 $\cos x=-\frac{1}{2}$.

适合 $|x|<\pi$ 的 x 的值是

$x=\pm\frac{2\pi}{3}.$

由③、④可得, $x=\frac{2\pi}{3}$ 时,

$\cos y=\frac{1}{2},\ \sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$x=-\frac{2}{3}\pi$ 时，

$$\cos y=\frac{1}{2},\ \sin y=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因为 $|y|<\pi$，所以

$$y=\pm\frac{\pi}{3}.$$

把这些值代入原方程组，原方程组成立．所以

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}\pi, \\ y=\frac{\pi}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{2}{3}\pi, \\ y=-\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

别解　由 $\sin(x+y)=\sin x-\sin y$，得

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

由此导得 x、y 的一次关系，然后把它代入第二个方程再解．

2269． 解方程组：

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=1, \\ \cos x+\cos y=\sqrt{3}. \end{cases}$$

解　$$\begin{cases} \sin x+\sin y=1, & ① \\ \cos x+\cos y=\sqrt{3}. & ② \end{cases}$$

把 ①、② 的两边分别平方，然后两边分别相加，得

$$\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 y+\cos^2 y$$
$$+2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)=4,$$
$$2+2\cos(x-y)=4,$$
$$\cos(x-y)=1.$$
$$\therefore\quad x-y=2k\pi.\ (k\text{ 是整数})$$
$$\therefore\quad x=y+2k\pi. \qquad ③$$

代入 ①、②，得

$$2\sin y=1,\ 2\cos y=\sqrt{3}.$$
$$\therefore\quad \sin y=\frac{1}{2},\ \cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因此　　$y=2n\pi+\frac{\pi}{6}$．（n 是整数）

代入 ③，得

$$x=2m\pi+\frac{\pi}{6}.\ (m\text{ 是整数})$$

因此

$$\begin{cases} x=2m\pi+\frac{\pi}{6}, \\ y=2n\pi+\frac{\pi}{6}. \end{cases} \quad (m,\ n\text{ 是整数})$$

2270． 在三角形 ABC 中，求

$$\sin(180^\circ-A)=\sqrt{2}\cos(B-90^\circ),$$

且 $\sqrt{3}\cos A=-\sqrt{2}\cos(180^\circ+B)$ 时的 A、B、C 的值．

解　$\sin(180^\circ-A)=\sqrt{2}\cos(B-90^\circ)$，

所以　　$\sin A=\sqrt{2}\sin B$．　　①

又，由 $\sqrt{3}\cos A=-\sqrt{2}\cos(180^\circ+B)$，得

$$\sqrt{3}\cos A=\sqrt{2}\cos B. \qquad ②$$

把 ①、② 的两边分别平方，然后两边分别相加，得

$$\sin^2 A+3\cos^2 A=2.$$

所以　$2\cos^2 A=1,\ \cos A=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

因此　　$A=45^\circ$　或　$A=135^\circ$．

$A=45^\circ$ 时，由 ① 得到 $B=30^\circ$，从而得出 $C=105^\circ$；$A=135^\circ$ 时，由 ① 得到 $B=30^\circ$，从而得出 $C=15^\circ$．

2271． 解方程组：

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=1, & ① \\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^2 y=\frac{10}{3}. & ② \end{cases}$$

解　②＋①×2，得

$$(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)^2=\frac{16}{3}.$$
$$\therefore\quad \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

因此，原方程组可以分解成下列两个方程组来考虑．

$$\text{(i)}\ \begin{cases} \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{4}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=1; \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\ \begin{cases} \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=-\frac{4}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=1. \end{cases}$$

由 (i) 得，$\operatorname{tg}x$、$\operatorname{tg}y$ 是下面这个两次方程的两个根，即

$$t^2-\frac{4}{\sqrt{3}}t+1=0,$$
$$\sqrt{3}t^2-4t+\sqrt{3}=0,$$

$$(\sqrt{3}\,t-1)\,(t-\sqrt{3})=0.$$

$$\therefore\quad t=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad t=\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\\ \operatorname{tg} y=\sqrt{3};\end{cases}\quad \begin{cases}\operatorname{tg} x=\sqrt{3},\\ \operatorname{tg} y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\end{cases}$$

因此，方程组(i)的一般解是

$$\begin{cases}x=m\pi+\dfrac{\pi}{6},\\ y=n\pi+\dfrac{\pi}{3};\end{cases}\quad \begin{cases}x=m\pi+\dfrac{\pi}{3},\\ y=n\pi+\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$$

(m, n 是整数)

同理，由(ii)可以得到：

$$\begin{cases}x=m\pi-\dfrac{\pi}{6},\\ y=n\pi-\dfrac{\pi}{3};\end{cases}\quad \begin{cases}x=m\pi-\dfrac{\pi}{3},\\ y=n\pi-\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$$

(m, n 是整数)

2272. 解方程组：

$$\begin{cases}2\cos x\cos y=1, & ①\\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2. & ②\end{cases}$$

解 由②，得

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=2,$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=2.$$

代入①，得

$$\sin(x+y)=1,$$

$$\therefore\quad x+y=2n\pi+\frac{\pi}{2}.\quad (n\text{ 是整数})$$

$$\therefore\quad y=2n\pi+\frac{\pi}{2}-x. \qquad ③$$

代入①，得

$$2\cos x\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=1,$$

$$2\sin x\cos x=1,\ \sin 2x=1.$$

$$\therefore\quad 2x=2m\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad x=m\pi+\frac{\pi}{4}.\quad (m\text{ 是整数})$$

代入③，得

$$y=2n\pi+\frac{\pi}{2}-\left(m\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=(2n-m)\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$=n'\pi+\frac{\pi}{4}.\quad (n'\text{ 是整数})$$

2273. 解方程组：

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=1, & ①\\ \cos x+\cos y=1. & ②\end{cases}$$

解 $①^2+②^2$，得

$$\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 y+\cos^2 y$$
$$+2(\sin x\sin y+\cos x\cos y)=2,$$

即
$$2+2\cos(x-y)=2,$$
$$\cos(x-y)=0.$$

$$\therefore\quad x-y=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}.\quad (n\text{ 是整数}) \qquad ③$$

①－②，得

$$(\sin x+\sin y)-(\cos x+\cos y)=0,$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$-2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=0,$$

$$2\cos\frac{x-y}{2}\left(\sin\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)=0.$$

根据③，得 $\cos\dfrac{x-y}{2}\neq 0$，所以

$$\sin\frac{x+y}{2}=\cos\frac{x+y}{2},$$

即
$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=1.$$

因此

$$\frac{x+y}{2}=m\pi+\frac{\pi}{4},\quad (m\text{ 是整数})$$

$$\therefore\quad x+y=2m\pi+\frac{\pi}{2}. \qquad ④$$

③＋④，得

$$2x=2(m+n)\pi+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad x=(m+n)\pi+\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}\right).$$

这里 $m+n$ 一定是偶数，所以

$$\begin{cases}x=2m\pi,\\ y=2n\pi+\dfrac{\pi}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}x=2m\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ y=2n\pi.\end{cases}$$

2274. 解方程组：

$$\begin{cases}\sin x=\sqrt{2}\sin y, & ①\\ \sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}\cos y. & ②\end{cases}$$

解 $①^2+②^2$，得

$$\sin^2 x+3\cos^2 x=2(\sin^2 y+\cos^2 y),$$

$$\sin^2 x+3(1-\sin^2 x)-2=0,$$
$$2\sin^2 x-1=0.$$
$$\therefore\quad \sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad ③$$

适合于 ③ 的一般解是

$$x=m\pi+(-1)^m\frac{\pi}{4},\ x=m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{4}.$$
$$\therefore\quad x=m\pi\pm\frac{\pi}{4}.\ (m\text{ 是整数})$$

又,把 ③ 代入 ①,得

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\sin y.\quad \therefore\quad \sin y=\pm\frac{1}{2}.$$

适合于它的一般解是

$$y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6},$$
$$y=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$
$$\therefore\quad y=n\pi\pm\frac{\pi}{6}.\ (n\text{ 是整数})$$

综合起来,得到方程组的一般解是:

$$\begin{cases}x=m\pi+\frac{\pi}{4},\\ y=n\pi+\frac{\pi}{6};\end{cases}\quad \begin{cases}x=m\pi-\frac{\pi}{4},\\ y=n\pi-\frac{\pi}{6}.\end{cases}$$

这里,m、n 或者都是偶数,或者都是奇数.

2275. 对于方程组

$$\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 y=\frac{1}{2}, & ①\\ \cos x\cos y=\frac{3}{4}, & ②\end{cases}$$

(1) 在 0° 到 360° 之间,求它的解.

(2) 求它的一般解.

解 (1) 由 ①,得

$$1-\cos^2 x+1-\cos^2 y=\frac{1}{2}.$$
$$\therefore\quad \cos^2 x+\cos^2 y=\frac{3}{2}. \qquad ③$$

③－②×2,得

$$(\cos x-\cos y)^2=0,$$
$$\therefore\quad \cos x=\cos y.$$

代入 ②,得

$$\cos^2 x=\frac{3}{4}.\quad \therefore\quad \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad ④$$

因此,在 $0°\leq x\leq 360°$ 的范围内

$$x=30°,\ 150°,\ 210°,\ 330°.$$

$$\begin{cases}x=30°\text{ 时},\quad y=30°,\ 330°;\\ x=150°\text{ 时},\ y=150°,\ 210°;\\ x=210°\text{ 时},\ y=210°,\ 150°;\\ x=330°\text{ 时},\ y=330°,\ 30°.\end{cases}$$

(2) 用同样的方法,由 ④,得

$$x=2m\pi\pm\frac{\pi}{6},\quad x=2m\pi\pm\frac{5\pi}{6}.$$

把它们综合成一个式子,得

$$x=m\pi\pm\frac{\pi}{6}.\ (m\text{ 是整数})$$

从而得出

$$y=n\pi\pm\frac{\pi}{6}.\ (n\text{ 是整数})$$

因此,方程组的一般解是

$$\begin{cases}x=m\pi+\frac{\pi}{6},\\ y=n\pi\pm\frac{\pi}{6};\end{cases}\quad \begin{cases}x=m\pi-\frac{\pi}{6},\\ y=n\pi\pm\frac{\pi}{6}.\end{cases}$$

这里,m 是偶数或奇数的时候,n 也分别是偶数或奇数.

4. 不等式

A. 证明题(绝对不等式)

2276. 若 $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, 证明

$$-1\leq ac+bd\leq 1.$$

解 由 $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ 可以知道,使

$$a=\cos\alpha,\ b=\sin\alpha,\ c=\cos\beta,\ d=\sin\beta$$

的 α、β 是存在的. 所以

$$ac+bd=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\cos(\alpha-\beta).$$

由 $-1\leq\cos(\alpha-\beta)\leq 1$, 可以得到

$$-1\leq ac+bd\leq 1.$$

注 要牢记有些问题,象上面这样利用三角函数来解很简单,提请读者注意广泛应用.

2277. 什么是绝对不等式,什么是条件不等式?

解 绝对不等式——在含有三角函数的不等式中,那些对于字母所能取的一切实数值都成立的不等式,叫做绝对不等式.

条件不等式——在含有三角函数的不等式中,那些根据字母所取的值有时成立、有时不成立的不等式,叫做条件不等式. 求适合于条件不等式的未知数的范围,叫做解不等式.

2278. 在锐角三角形中，证明不等式 $\sin^2 A+\sin^2 B>\sin^2 C$ 成立.

解 在三角形 ABC 中，当角 C 是锐角时，则

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0,$$

$$\therefore \quad a^2+b^2>c^2.$$

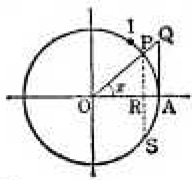
根据正弦定理，得

$$\sin^2 A+\sin^2 B>\sin^2 C.$$

2279. 若 $0<x<1$，证明

$$x<\operatorname{tg} x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

解 图中，设 $OA=1$，$\widehat{AP}=x$，$PR\perp OA$，$QA\perp OA$. 于是



$AQ=\operatorname{tg} x$,

$RP=\sin x$.

而

扇形 OAP 的面积 $<\triangle OAQ$ 的面积，

$$\therefore \quad \frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

$$\therefore \quad x<\operatorname{tg} x. \qquad ①$$

设 S 是 P 关于 OA 的对称点，于是

$$SP<\widehat{SAP}, \quad \therefore \quad RP<\widehat{AP}.$$

因此 $\sin x<x$.

因为 $\sin x>0$，所以 $\sin^2 x<x^2$.

$$\therefore \quad \cos^2 x>1-x^2.$$

又因为 $1-x^2>0$，$\cos x>0$，所以

$$\cos x>\sqrt{1-x^2}.$$

而
$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}, \qquad ②$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg} x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

由①、②，得

$$x<\operatorname{tg} x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

注 $0<x<1$ 时，$\operatorname{tg} x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 和 $\sin x<x$ 有着同解的关系.

由 $\operatorname{tg} x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，得

$$\operatorname{ctg} x>\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

而
$$\frac{1}{\sin^2 x}=\operatorname{ctg}^2 x+1,$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sin^2 x}>\frac{1-x^2}{x^2}+1.$$

$$\therefore \quad \sin^2 x<x^2. \quad \therefore \quad \sin x<x.$$

2280. 证明下列各不等式：

(1) $\sin^2 x+\sin^2 y\geqq 2(\sin x+\sin y-1)$;

(2) $a^2\operatorname{tg}^2 x+b^2\operatorname{ctg}^2 x\geqq 2ab$;

(3) $\sin^2 x+\sin^2 y+1\geqq\sin x+\sin y+\sin x\sin y$.

解 (1)

$$\because \quad \sin^2 x+\sin^2 y-2(\sin x+\sin y-1)=(\sin x-1)^2+(\sin y-1)^2,$$

$$\therefore \quad \sin^2 x+\sin^2 y-2(\sin x+\sin y-1)\geqq 0.$$

$$\therefore \quad \sin^2 x+\sin^2 y\geqq 2(\sin x+\sin y-1).$$

(2)
$$\because \quad a^2\operatorname{tg}^2 x+b^2\operatorname{ctg}^2 x-2ab=(a\operatorname{tg} x-b\operatorname{ctg} x)^2,$$

$$\therefore \quad a^2\operatorname{tg}^2 x+b^2\operatorname{ctg}^2 x-2ab\geqq 0.$$

$$\therefore \quad a^2\operatorname{tg}^2 x+b^2\operatorname{ctg}^2 x\geqq 2ab.$$

(3)
$$\begin{aligned}\because \quad &\sin^2 x+\sin^2 y+1-(\sin x+\sin y+\sin x\sin y)\\ &=(\sin^2 x-2\sin x\sin y+\sin^2 y)+(1-\sin x-\sin y+\sin x\sin y)\\ &=(\sin x-\sin y)^2+(1-\sin x)(1-\sin y).\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sin^2 x+\sin^2 y+1-(\sin x+\sin y+\sin x\sin y)\geqq 0.$$

$$\therefore \quad \sin^2 x+\sin^2 y+1\geqq\sin x+\sin y+\sin x\sin y.$$

2281. 证明下列各不等式：

(1) $\cos^2 A+\cos^2 B\geqq\cos 2A+\cos 2B$.

(2) 若 A、B 是正的锐角，证明
$$\sin A+\sin B>\sin(A+B).$$

(3) 若 A、B、C 是正的锐角，证明
$$\sin A+\sin B+\sin C>\sin(A+B+C).$$

解 (1)

$$\begin{aligned}\because \quad &\cos^2 A+\cos^2 B-(\cos 2A+\cos 2B)\\ &=\cos^2 A+\cos^2 B-(2\cos^2 A-1+2\cos^2 B-1)\\ &=1-\cos^2 A+1-\cos^2 B\\ &=\sin^2 A+\sin^2 B,\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \cos^2 A+\cos^2 B-(\cos 2A+\cos 2B)\geqq 0.$$

$\therefore\quad \cos^2 A+\cos^2 B\geq\cos 2A+\cos 2B.$

(2)

$$\sin A+\sin B-\sin(A+B)$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{-B}{2}\right)$$
$$=4\sin\frac{A+B}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right).$$

因为 $\frac{A+B}{2}$、$\frac{A}{2}$、$\frac{B}{2}$ 都是正的锐角，所以它们的正弦都是正值，从而得出这些角的正弦的积是正的.

$$\therefore\quad \sin A+\sin B>\sin(A+B).$$

(3)

$$\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)$$
$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}.$$

因为 $\frac{A+B}{2}$，$\frac{B+C}{2}$，$\frac{C+A}{2}$ 都是正的锐角，所以它们的正弦都是正值，从而得出这些正弦的积是正的.

$$\therefore\quad \sin A+\sin B+\sin C>\sin(A+B+C).$$

别解 (2) 因为 A、B 是正的锐角，所以 $\sin A$、$\sin B$ 都是正的，且

$$0<\cos A<1,\quad 0<\cos B<1,$$
$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$
$$\therefore\quad \sin(A+B)<\sin A+\sin B.$$

(3) $\because\quad \sin(A+B+C)$
$$=\sin A\cos(B+C)+\cos A\sin(B+C)$$
$$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C,$$
$$\therefore\quad \sin(A+B+C)<\sin A+\sin B+\sin C.$$

注 把(2)、(3)推而广之，一般地说，下面的不等式是成立的．即当 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 都是正的锐角时，

$$\sin A_1+\sin A_2+\cdots+\sin A_n>\sin(A_1+A_2+\cdots+A_n).$$

这可用数学归纳法加以证明.

2282. 若三角形的三个角的比是 1:2:7，证明最大边和最小边的比是

$$(\sqrt{5}+1):(\sqrt{5}-1).$$

解 在三角形 ABC 中，设

$$\frac{A}{1}=\frac{B}{2}=\frac{C}{7}=k,$$

则 $$A+B+C=k+2k+7k=10k.$$
$$\therefore\quad 10k=180^\circ.$$

由此可得 $k=18^\circ$. 因此

$$A=18^\circ,\ B=36^\circ,\ C=126^\circ.$$

因此，最大的边是 c，最小的边是 a.

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin 126^\circ}{\sin 18^\circ}=\frac{\cos 36^\circ}{\sin 18^\circ}$$
$$=\frac{1-2\sin^2 18^\circ}{\sin 18^\circ}=\frac{1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}.$$

2283. 若三角形的三个角成等差数列，证明最大边和最小边的和不大于第三边的两倍.

解 在三角形 ABC 中，因为 A, B, C 成等差数列，所以

$$A+C=2B.$$
$$\therefore\quad \sin A+\sin C-2\sin B$$
$$=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}-2\sin B$$
$$=2\sin\frac{2B}{2}\cos\frac{A-C}{2}-2\sin B$$
$$=2\sin B\left(\cos\frac{A-C}{2}-1\right).$$
$$\therefore\quad \sin A+\sin C-2\sin B\leq 0.$$

即 $$\sin A+\sin C\leq 2\sin B,$$
$$a+c\leq 2b.$$

这里，等号限于当 $A=C$，从而得出 $A=B=C$ 时成立.

2284. 若 α、k 是定值，θ 是任意的角，证明

$$[\cos(\alpha+\theta)+k\cos\theta]^2\leq 1+2k\cos\alpha+k^2.$$

解

$\because\quad [\cos(\alpha+\theta)+k\cos\theta]^2$
$-(1+2k\cos\alpha+k^2)$
$=k[2\cos(\alpha+\theta)\cos\theta-2\cos\alpha]$
$-k^2(1-\cos^2\theta)$
$-[1-\cos^2(\alpha+\theta)]$
$=k\{[\cos(\alpha+2\theta)+\cos\alpha]-2\cos\alpha\}$
$-k^2\sin^2\theta-\sin^2(\alpha+\theta)$
$=k[\cos(\alpha+2\theta)-\cos\alpha]$
$-k^2\sin^2\theta-\sin^2(\alpha+\theta)$
$=-2k\sin(\alpha+\theta)\sin\theta$
$-k^2\sin^2\theta-\sin^2(\alpha+\theta)$
$=-[k\sin\theta+\sin(\alpha+\theta)]^2$,

$\therefore\quad [\cos(\alpha+\theta)+k\cos\theta]^2$
$-(1+2k\cos\alpha+k^2)\leq 0$.

$\therefore\quad [\cos(\alpha+\theta)+k\cos\theta]^2$
$\leq 1+2k\cos\alpha+k^2$.

2285. 对于 $y=a\cos x+b\sin x+c$ (a、b、c 是常数),解答下列问题:

(1) 对于 x 的一切值, 求使 y 为定值的条件;

(2) 对于 x 的一切值, 求使 y 恒大于零的条件.

解 (1) 若 y 取定值,则特别地, 设 $x=0$、$\frac{\pi}{2}$、π, 则 y 所得的值是相等的. 即

$$a+c=b+c=-a+c.$$

$$\therefore\quad a=b=0.$$

反过来,这时 $y=c$ (定值).

(2) $a^2+b^2\neq 0$ 时,满足

$$\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

的 θ 值是确定的. 因为

$$y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)+c,$$

所以,由 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$ 的最小值是

$$-\sqrt{a^2+b^2}$$

可以知道, y 恒大于零的条件是

$$c>\sqrt{a^2+b^2}.$$

当 $a^2+b^2=0$ 时, $a=b=0$, 从而得出 $y=c$, 所以这时 y 恒大于零的条件是 $c>0$.

因此,不管哪种情况,所要求的条件是

$$c>\sqrt{a^2+b^2}.$$

2286. 设 A、B、C 是常数,且 A、B 都不是 0, 证明函数 $f(x)=A\cos x+B\sin x+C$ $(0\leq x<2\pi)$ 对于三个不同的 x 的值, 取得相同的值是不可能的.

解 设 $\cos x=X$, $\sin x=Y$, 则在 XY 平面内,点 $(X、Y)$ 在单位圆 $X^2+Y^2=1$ 上. 如果对于三个不同的 $x(0\leq x<2\pi)$, $f(x)$ 取得相同的值 D, 那么单位圆上的不同的三点, 就要都在直线 $AX+BY+(C-D)=0$ 上, 这是不合理的. 因此, 对于三个不同的 x 的值, $f(x)$ 不可能取得相同的值.

2287. 若 $p>0$, $q>0$, $p+q=1$ 时,

$$p\cos ax+q\cos bx=1$$

对于 x 的两个值 u、v 成立, 证明这时 $a=b=0$. 这里设 $\frac{v}{u}$ 是无理数.

解 因为 $p+q=1$, 所以所给的等式可改写成

$$p\cos ax+q\cos bx=p+q.$$

$$\therefore\quad p(1-\cos ax)+q(1-\cos bx)=0.\quad ①$$

因为 $p>0$, $q>0$, 且

$$1-\cos ax\geq 0,\ 1-\cos bx\geq 0,$$

所以要使 ① 式成立, 必须使

$$1-\cos ax=0,\ 1-\cos bx=0.$$

如果对于 x 的两个值 u、v 上面两式成立, 那么

$$\cos au=1,\ \cos bu=1;$$

$$\cos av=1,\ \cos bv=1.$$

因此 au、bu、av、bv 都是 2π 的整数倍.

$au=2m\pi$, $av=2n\pi$. (m, n 是自然数) ②

因为 $\frac{v}{u}$ 是无理数, 所以 $u\neq 0$, $v\neq 0$. 这时, 如果 $a\neq 0$, 那么由 ② 得

$$\frac{v}{u}=\frac{n}{m}\text{(有理数)}.$$

这是不可能的. 这说明假定不正确. 因此这时 $a=0$.

同样 $b=0$. $\therefore\ a=b=0$.

2288. 证明函数 $\frac{2\sin x+1}{2\sin x-1}$ 不取 3 和 $\frac{1}{3}$ 之间的值.

解 设所给的函数为 y, 则

$$y=\frac{2}{2\sin x-1}+1.$$

由 $-1\leq\sin x\leq 1$, 得

$$-3\leq 2\sin x-1\leq 1.$$

当 $2\sin x-1=0$ 时，y 没有值。

当 $-3\leq 2\sin x-1<0$ 时，

$$\frac{1}{2\sin x-1}\leq -\frac{1}{3}.$$

从而得出 $y\leq -\frac{2}{3}+1,\ y\leq \frac{1}{3}.$

当 $0<2\sin x-1\leq 1$ 时，得

$$\frac{1}{2\sin x-1}\geq 1.$$

从而得出 $y\geq 3.$

因此，y 不取 3 和 $\frac{1}{3}$ 之间的值。

2289. 在锐角三角形 ABC 中，证明

$$2<\sin A+\sin B+\sin C<3.$$

解 由 $\cos 2A=1-2\sin^2 A$，得

$$\sin^2 A=\frac{1}{2}(1-\cos 2A).$$

同样，对于 $\sin^2 B$、$\sin^2 C$ 也可得到相应的式子。因此

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C).$$

又

$$\begin{aligned}&\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\\&=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1\\&=2\cos C[-\cos(A-B)+\cos C]-1\\&=2\cos C[-\cos(A-B)-\cos(A+B)]-1\\&=-4\cos A\cos B\cos C-1,\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C. \quad ①$$

因为 $0<\sin A<1$，$0<\sin B<1$，$0<\sin C<1$，所以

$$\sin A+\sin B+\sin C<3. \quad ②$$

$$\sin A+\sin B+\sin C>\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C,$$

所以，由 ① 可得

$$\sin A+\sin B+\sin C>2+2\cos A\cos B\cos C.$$

因为 A、B、C 是锐角，所以

$$\cos A\cos B\cos C>0.$$

$$\therefore\ \sin A+\sin B+\sin C>2. \quad ③$$

由 ②、③，得

$$2<\sin A+\sin B+\sin C<3.$$

注 由 $\sin A+\sin B+\sin C>2$，应用正弦定理可得 $a+b+c>4R$，从而得出 $2R<s$。$\left(R\text{ 是外接圆半径},\ s=\frac{a+b+c}{2}\right)$

2290. 若 x、y、z 都是正的，且 $x+y+z=\pi$，证明 $\frac{1}{3}(\cos x+\cos y+\cos z)\leq\frac{1}{2}$。

又，在什么情况下等号成立？

解

$$\begin{aligned}&\cos x+\cos y+\cos z\\&=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\&\quad+1-2\sin^2\frac{z}{2}.\end{aligned} \quad ①$$

由 $x>0$，$y>0$，$z>0$，且 $x+y+z=\pi$，得

$$0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\ 0<z<\pi.$$

从而得出 $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}$，

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{x-y}{2}<\frac{\pi}{2},\quad 0<\frac{z}{2}<\frac{\pi}{2}. \quad ②$$

$$\therefore\ \cos\frac{x+y}{2}=\sin\frac{z}{2},$$

$$0<\cos\frac{x-y}{2}\leq 1. \quad ③$$

因此 $2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\leq 2\sin\frac{z}{2}. \quad ④$

由 ①、④，得

$$\cos x+\cos y+\cos z\leq 2\sin\frac{z}{2}+1-2\sin^2\frac{z}{2},$$

$$\cos x+\cos y+\cos z\leq -2\left(\sin\frac{z}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2},$$

$$\therefore\ \cos x+\cos y+\cos z\leq\frac{3}{2}. \quad ⑤$$

因此，$\frac{1}{3}(\cos x+\cos y+\cos z)\leq\frac{1}{2}$。

等号成立是在 ④ 的等号和 ⑤ 的等号成立的时候，即是

$$\cos\frac{x-y}{2}=1,\quad \sin\frac{z}{2}=\frac{1}{2}$$

的时候。这时由条件 ② 得

$$\frac{x-y}{2}=0,\quad \frac{z}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore\ x=y=z=\frac{\pi}{3}.$$

2291. 若 $0<x<\frac{\pi}{2}$，证明 $1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1$.

解 在 $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ 中，因为 $0<x<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}$.

$$\therefore\quad \cos x>1-2\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

即
$$\cos x>1-\frac{x^2}{2}.$$

又，很明显，$\cos x<1$. 因此

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1.$$

注 利用三角函数的导函数，也可以象下面这样证明它.

设 $f(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$，于是

$$f'(x)=-\sin x+x,$$

因为 $f(0)=0$，且 $x>0$ 时 $f'(x)>0$.

$$\therefore\quad f(x)>f(0),\quad 即\quad f(x)>0.$$

2292. 对于所有的实数 x，证明

$$|\cos x|+|\cos 2x|\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

又，等号在什么时候成立?

解
$$y=|\cos x|+|\cos 2x|$$
$$=|\cos x|+|2\cos^2 x-1|.$$

设 $|\cos x|=t$，则

$$0\leqq t\leqq 1,\ y=t+|2t^2-1|.$$

当 $0\leqq t\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$2t^2-1\leqq 0$.

从而得出

$$y=-(2t^2-1)+t=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}.$$

这个函数的图象是以 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{9}{8}\right)$ 为顶点的向上凸的抛物线，$t=0$ 时，$y=1$，$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(<1)$. 因此，在 $0\leqq t\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的范围内，$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时 y 取得最小值 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

当 $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq t\leqq 1$ 时，$2t^2-1\geqq 0$.

从而得出

$$y=2t^2-1+t=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}.$$

这个函数在所考虑的 t 的范围内是增函数，因此在 $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，它的值最小，最小值是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

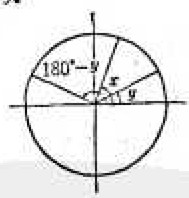
因此，在 $0\leqq t\leqq 1$ 的范围内，$y\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$，即

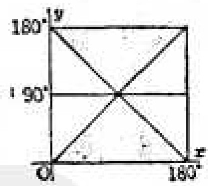
$$|\cos x|+|\cos 2x|\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

等号在 $|\cos x|=\frac{1}{\sqrt{2}}$，即 $x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 时成立.

2293. 若 $0°\leqq x\leqq 180°$，$0°\leqq y\leqq 180°$. 用图象表示满足 $\sin x\geqq\sin y$ 的点 (x, y) 的范围.

解 固定 y，考虑 x 的变化范围. 当 $0°\leqq y\leqq 90°$ 时，$y\leqq x\leqq 180°-y$. 当 $90°\leqq y\leqq 180°$ 时，$180°-y\leqq x\leqq y$. 因此，可以得到下面右图中的阴影部分，边界是属于范围内的.





B. 条件不等式

含有变元的三角函数的不等式叫做三角不等式. 满足不等式的角的范围叫这个三角不等式的解. 求出不等式的全部解叫解不等式.

当不等式可借助单位圆给出图示时，解起来就非常容易.

2294. 解下列各不等式，这里设

$$0°\leqq x\leqq 360°.$$

(1) $|\sin x|\leqq\frac{1}{2}$;　(2) $\cos^4 x>\sin^4 x$;

(3) $2\sin x\geqq\frac{1}{\sin x}$.

解 (1) 因为 $|\sin x|\leqq\frac{1}{2}$，即 $-\frac{1}{2}\leqq\sin x\leqq\frac{1}{2}$，所以

$$0°\leqq x\leqq 30°,\ 150°\leqq x\leqq 210°,$$
$$330°\leqq x\leqq 360°.$$

(2) 把所给的式子变形，得

$$\cos^4 x-\sin^4 x>0,$$

$$(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)>0,$$

$$(1-\sin^2 x)-\sin^2 x>0,$$

$$(\sqrt{2}\sin x+1)(\sqrt{2}\sin x-1)<0,$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin x<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore\quad 0^\circ\leqq x<45^\circ,\ 135^\circ<x<225^\circ,$$
$$315^\circ<x\leqq 360^\circ.$$

(3) 把右边移项, 得

$$\frac{2\sin^2 x-1}{\sin x}\geqq 0,$$

$$\frac{1}{\sin x}(\sqrt{2}\sin x+1)(\sqrt{2}\sin x-1)\geqq 0.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin x\leqq 1,$$

或 $$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin x<0.$$

由 $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin x\leqq 1$, 得

$$45^\circ\leqq x\leqq 135^\circ.$$

由 $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin x<0$, 得

$$180^\circ<x\leqq 225^\circ,\ 315^\circ\leqq x<360^\circ.$$

2295. 证明下列各不等式:

(1) $\sin x>\operatorname{tg}x-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{2}$, $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$;

(2) $\operatorname{ctg}\frac{x}{4}-\operatorname{ctg}x>2$, $(0<x<\pi)$.

解 (1) $\sin x-\left(\operatorname{tg}x-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{2}\right)>0,$

$$\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin^2 x}{2\cos^3 x}\right)>0,$$

$$\frac{\sin x}{2\cos^3 x}(2\cos^3 x-3\cos^2 x+1)>0,$$

$$\frac{\sin x}{2\cos^3 x}(\cos x-1)(2\cos^2 x-\cos x-1)>0,$$

$$\frac{\sin x}{2\cos^3 x}(\cos x-1)^2(2\cos x+1)>0,$$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ 时最后一个不等式总成立,

$$\therefore\quad \sin x>\operatorname{tg}x-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{2}.$$

(2)

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{4}=\frac{\cos\frac{x}{4}}{\sin\frac{x}{4}}=\frac{2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}{2\sin^2\frac{x}{4}}$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}}{1-\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{1-\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\csc\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

同样 $$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\csc x+\operatorname{ctg}x.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\frac{x}{4}=\csc\frac{x}{2}+\csc x+\operatorname{ctg}x.$$

因此 $$\operatorname{ctg}\frac{x}{4}-\operatorname{ctg}x=\csc\frac{x}{2}+\csc x.$$

因为 $0<x<\pi$, 所以

$$\csc\frac{x}{2}>1,\quad \csc x\geqq 1.$$

所以 $$\csc\frac{x}{2}+\csc x>2,$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\frac{x}{4}-\operatorname{ctg}x>2.$$

2296. 解下列各不等式:

(1) $\sqrt{3}\sin x>\cos x$;

(2) $\sin 3x>\cos 3x$;

(3) $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x-1>0$.

解 (1) $\sqrt{3}\sin x-\cos x>0,$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)>0,$$

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)>0,$$

$$\therefore\quad 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)>0.$$

满足上式的 x 的范围是

$$2n\pi<x-\frac{\pi}{6}<(2n+1)\pi.\ (n\text{ 是整数})$$

$$\therefore\quad 2n\pi+\frac{\pi}{6}<x<(2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}.$$

(2) 移项, 得

$$\sin 3x-\cos 3x>0,$$

$$\sqrt{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)>0.$$

满足上式的 x 的范围是

$$2n\pi<3x-\frac{\pi}{4}<(2n+1)\pi.\ (n\text{ 是整数})$$

∴　$2n\pi+\frac{\pi}{4}<3x<2n\pi+\frac{5\pi}{4}$.

∴　$\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{12}<x<\frac{2n\pi}{3}+\frac{5\pi}{12}$.

(3) 把左边变形，得

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)-1>0,$$

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x\right)-1>0,$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)>\frac{1}{2}.$$

满足上式的 x 的范围是

$$2n\pi-\frac{\pi}{3}<2x-\frac{\pi}{6}<2n\pi+\frac{\pi}{3}.$$

(n 是整数)

∴　$2n\pi-\frac{\pi}{6}<2x<2n\pi+\frac{\pi}{2}$.

∴　$n\pi-\frac{\pi}{12}<x<n\pi+\frac{\pi}{4}$.

2297. 解不等式

$$2\cos x(\cos 4x-1)-3(\cos 3x+\cos x)<0.$$

这里，设 $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$.

解　把左边变形，得

$$2\cos x(2\cos^2 2x-2)-3\cdot 2\cos 2x\cos x<0,$$

$$\cos x(\cos 2x-2)(2\cos 2x+1)<0. \quad ①$$

由 $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$，得

$$\cos x\geqq 0,$$

又，由 $\cos 2x\leqq 1$，得

$$\cos 2x-2<0.$$

因此，由①，得

$$2\cos 2x+1>0,$$

即　$\cos 2x>-\frac{1}{2}$.

又因为由 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ 可得 $0\leqq 2x\leqq\pi$，所以

$$0\leqq 2x<\frac{2\pi}{3}.$$

∴　$0\leqq x<\frac{\pi}{3}$.

2298. 解不等式:

$$\cos 2\theta+2\cos 3\theta+\cos 4\theta<0.$$

解　$(\cos 2\theta+\cos 4\theta)+2\cos 3\theta<0$.

∴　$2\cos 3\theta\cos\theta+2\cos 3\theta<0$.

∴　$\cos 3\theta(\cos\theta+1)<0$.

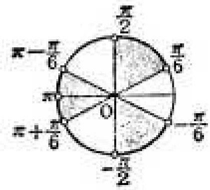
首先　$\cos\theta\neq -1$,

∴　$\theta\neq(2m-1)\pi$. (m 是整数)　①

这时 $\cos\theta+1>0$，所以 $\cos 3\theta<0$.

∴　$(2n-1)\pi-\frac{\pi}{2}<3\theta<(2n-1)\pi+\frac{\pi}{2}$. ($n$ 是整数) ②

为了得出满足①、②的 θ 的范围，可把 $2n-1$ 分为 $6p-1$, $6p+1$, $6p+3$ (p 是整数) 等情况．于是



$$2p\pi-\frac{\pi}{2}<\theta<2p\pi-\frac{\pi}{6},$$

$$2p\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<2p\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$2p\pi+\frac{5}{6}\pi<\theta<(2p+1)\pi,$$

$$(2p+1)\pi<\theta<2p\pi+\frac{7}{6}\pi.$$

2299. 解下列各不等式 ($0°\leqq x\leqq 360°$):

(1) $\sin x<\cos x$;

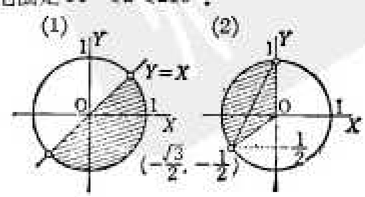
(2) $\sin x-\sqrt{3}\cos x>1$.

解　设 $\cos x=X$, $\sin x=Y$, 用 XY 平面内单位圆 $X^2+Y^2=1$ 上的点 (X, Y) 表示 $(\cos x, \sin x)$.

(1) 因为 $Y<X$，所以点 (X, Y) 在直线 $Y=X$ 的下方．因此角 x 的范围是 $0°\leqq x<45°$, $225°<x\leqq 360°$.

(2) $Y-\sqrt{3}X>1$, ∴　$Y>\sqrt{3}X+1$.

因此，点 $(X、Y)$ 在直线 $Y=\sqrt{3}X+1$ 的上方．直线和圆的一个交点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 所示的角是 $x=210°$．因此，所要求的角 x 的范围是 $90°<x<210°$.



2300. 解下列各不等式:

(1) $\cos x>\operatorname{tg} x$;

(2) $5\sin^2 x+3\sin x-1<0$.

解 (1) $\cos x-\operatorname{tg} x>0$,

$$\cos x-\frac{\sin x}{\cos x}>0,$$

$$\frac{\cos^2 x-\sin x}{\cos x}>0.$$

两边同乘以 $\cos^2 x$, 得

$$\cos x(1-\sin^2 x-\sin x)>0,$$

$$\cos x(\sin^2 x+\sin x-1)<0,$$

$$\cos x\left(\sin x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\times\left(\sin x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)<0.$$

因为这第二个因式是正的, 所以

$$\cos x\left(\sin x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)<0.$$

若 $\cos x>0$, 即 x 在第一、第四象限内时,

$$-1<\sin x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore\quad 2n\pi-\frac{\pi}{2}<x<2n\pi+\arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

若 $\cos x<0$, 即 x 在第二、第三象限内时,

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<\sin x<1.$$

$$\therefore\quad 2n\pi+\frac{\pi}{2}<x<(2n+1)\pi-\arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

(2) $5\sin^2 x+3\sin x-1<0$,

$$\left(\sin x-\frac{-3-\sqrt{29}}{10}\right)\left(\sin x-\frac{-3+\sqrt{29}}{10}\right)<0,$$

$$\therefore\quad \frac{-3-\sqrt{29}}{10}<\sin x<\frac{-3+\sqrt{29}}{10}.$$

因此, 适合上式的 x 的范围分为在第一、四象限的部分和在第二、三象限的部分.

$$\begin{cases} 2n\pi+\arcsin\dfrac{-3-\sqrt{29}}{10}<x<2n\pi+\arcsin\dfrac{-3+\sqrt{29}}{10}, \\ (2n+1)\pi-\arcsin\dfrac{-3+\sqrt{29}}{10}<x<(2n+1)\pi-\arcsin\dfrac{-3-\sqrt{29}}{10}. \end{cases}$$

注 因为 $\arcsin\dfrac{-3-\sqrt{29}}{10}$ 是反正弦函数的主值, 所以是负的锐角.

2301. 解不等式:

$$\sin x\operatorname{tg} x>2(1-\cos x).$$

解 把不等式变形, 得

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x}-2(1-\cos x)>0,$$

$$\frac{1}{\cos x}(1-\cos^2 x-2\cos x+2\cos^2 x)>0,$$

$$\cos x(\cos^2 x-2\cos x+1)>0,$$

$$\cos x(\cos x-1)^2>0.$$

因为 $(\cos x-1)^2>0$, $(x\neq 2n\pi)$

所以 $\cos x>0$.

$$\therefore\quad 2n\pi-\frac{\pi}{2}<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

因此, x 的范围是

$$2n\pi-\frac{\pi}{2}<x<2n\pi,$$

$$2n\pi<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

2302. 解不等式:

$$\sin x\cos 2x-\sin 3x>0.$$

解 把原不等式变形, 得

$$\sin x(1-2\sin^2 x)-(3\sin x-4\sin^3 x)>0,$$

$$2\sin x(\sin^2 x-1)>0,$$

$$2\sin x(\sin x+1)(\sin x-1)>0.$$

因为

$$\sin x+1>0,\ \left(x\neq 2n\pi-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin x-1<0,\ \left(x\neq 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right),$$

所以在 $x\neq 2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\sin x<0$.

$$\therefore\quad 2n\pi-\pi<x<2n\pi-\frac{\pi}{2},$$

$$2n\pi-\frac{\pi}{2}<x<2n\pi.$$

2303. 解不等式:

$$\frac{\cos^2 x}{4\cos^2 x-3}>\frac{\sin^2 x}{1-4\sin^2 x}.$$

解 把不等式变形,得

$$\frac{1-\sin^2 x}{4(1-\sin^2 x)-3}-\frac{\sin^2 x}{1-4\sin^2 x}>0,$$

$$\frac{1-\sin^2 x-\sin^2 x}{1-4\sin^2 x}>0,$$

$$(1-4\sin^2 x)(1-2\sin^2 x)>0,$$

$$[1-2(1-\cos 2x)]\cos 2x>0,$$

$$\cos 2x(2\cos 2x-1)>0.$$

由此可得 $\cos 2x$ 的范围是

$$-1\leq\cos 2x<0,\quad \frac{1}{2}<\cos 2x\leq 1.$$

适合于上面两式的 x 的范围分别是

$$2n\pi+\frac{\pi}{2}<2x<2n\pi+\frac{3\pi}{2},$$

$$2n\pi-\frac{\pi}{3}<2x<2n\pi+\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad n\pi+\frac{\pi}{4}<x<n\pi+\frac{3\pi}{4},$$

$$n\pi-\frac{\pi}{6}<x<n\pi+\frac{\pi}{6}.\ (n\text{ 是整数})$$

2304. 解分式不等式:

$$\frac{\cos 2x+\cos x-1}{\cos 2x}>2.$$

解 把原不等式变形,得

$$\frac{1}{\cos 2x}(\cos 2x+\cos x-1-2\cos 2x)>0,$$

$$\cos 2x[\cos x-1-(2\cos^2 x-1)]>0,$$

$$\cos 2x(\cos x-2\cos^2 x)>0,$$

$$\cos x(2\cos^2 x-1)(1-2\cos x)>0,$$

$$\cos x\left(\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\times\left(\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0.$$

由此求得 $\cos x$ 的范围是

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos x<0, \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}<\cos x<\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad ②$$

因此,适合于①式的 x 的范围是

$$2n\pi-\frac{3\pi}{4}<x<2n\pi-\frac{\pi}{2},$$

$$2n\pi+\frac{\pi}{2}<x<2n\pi+\frac{3\pi}{4}.$$

适合于②式的 x 的范围是

$$2n\pi+\frac{\pi}{4}<x<2n\pi+\frac{\pi}{3},$$

$$2n\pi-\frac{\pi}{3}<x<2n\pi-\frac{\pi}{4}.$$

2305. 求使

$$y=\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x$$

小于零的 x 的范围. 这里,设 $0\leq x\leq 2\pi$.

解 $y=\sin x(1+\sin x)+\sin^3 x(1+\sin x)$

$=(1+\sin x)(\sin x+\sin^3 x)$

$=\sin x(1+\sin x)(1+\sin^2 x)$.

因此,要使 $y<0$, 只要使 $\sin x(1+\sin x)$ 是负的就可以了. 又因为 $\sin x<1+\sin x$, 所以只要使

$$\sin x<0, \qquad ①$$

$$\sin x+1>0. \qquad ②$$

由①,得 $\quad \pi<x<2\pi,$

由②,得 $\quad x\neq\frac{3\pi}{2}.$

因此,由①、②,得

$$\pi<x<\frac{3\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2}<x<2\pi.$$

2306. 求使 $x^2\sin\theta+2x\sin 2\theta+\cos\theta>0$ 对于所有的实数 x 都成立的 θ 的范围. 这里,设 $0\leq\theta<2\pi$.

解 $\quad x^2\sin\theta+2x\sin 2\theta+\cos\theta>0, \qquad ①$

$$0\leq\theta<2\pi. \qquad ②$$

当 $\sin\theta=0$ 时,由②,得 $\theta=0$、π, 又因为这时①式变成 $\cos\theta>0$, 所以得到

$$\theta=0.$$

当 $\sin\theta\neq 0$ 时,①的左边是 x 的二次函数,对于 x 所有的实数值,①式成立的条件是

$$\sin\theta>0, \qquad ③$$

$$\sin^2 2\theta-\sin\theta\cos\theta<0. \qquad ④$$

由②、③,得

$$0<\theta<\pi. \qquad ⑤$$

把④变形,得

$$2\sin^2 2\theta-\sin 2\theta<0,$$

$$\therefore\quad 0<\sin 2\theta<\frac{1}{2}. \qquad ⑥$$

由⑤,得 $\quad 0<2\theta<2\pi,$

在这范围内，当

$$0<2\theta<\frac{\pi}{6} \quad 或 \quad \pi-\frac{\pi}{6}<2\theta<\pi$$

时，⑥成立。

$$\therefore \quad 0<\theta<\frac{\pi}{12} \quad 或 \quad \frac{5\pi}{12}<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

所以，包括 $\theta=0$ 的情况在内，所要求的 θ 的范围是

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{12}, \ \frac{5\pi}{12}<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

2307. 满足下面两式的点 (x, y) 在怎样的范围内？用图示意。这里，设 $0°\leqq\alpha\leqq30°$，$0°\leqq\beta\leqq60°$。

$$x=3\sin\alpha+2\cos\beta, \ y=2\sin\alpha+3\cos\beta.$$

解　因为 $0°\leqq\alpha\leqq30°$，$0°\leqq\beta\leqq60°$，所以

$$0\leqq\sin\alpha\leqq\frac{1}{2}, \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}\leqq\cos\beta\leqq1. \qquad ②$$

关于 $\sin\alpha$，$\cos\beta$，解方程组

$$\begin{cases} x=3\sin\alpha+2\cos\beta, \\ y=2\sin\alpha+3\cos\beta, \end{cases}$$

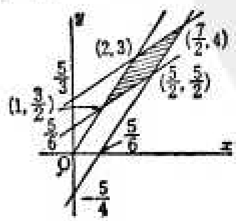
得　$\sin\alpha=\dfrac{3x-2y}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{3y-2x}{5}$。

根据①、②，得

$$0\leqq3x-2y\leqq\frac{5}{2}, \ \frac{5}{2}\leqq3y-2x\leqq5,$$

即 $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}\leqq y\leqq\dfrac{3}{2}x$，

$\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{6}\leqq y\leqq\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{3}$。



从而得出，所要求的范围是上图的平行四边形(包括边界)。

2308. 函数 $f(x)=a\cos^2x+2b\cos x\sin x+c\sin^2x$ (这里 a、b、c 中至少有一个不是零)，确定不管 x 取怎样的实数值，使函数 $f(x)$ 取一定值的系数 a、b、c 之间的关系。

解　设

$$f(x)=a\cos^2x+2b\cos x\sin x+c\sin^2x$$

对于任意的实数 x，都取得定值。因为

$$f(0)=a, \ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=c,$$

所以　$$a=\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2}=c.$$

由此可得　$a=c$，$b=0$。

反过来，若 $a=c$，$b=0$，则

$$f(x)=a\cos^2x+a\sin^2x=a(一定).$$

因此，所要求的关系是

$$a=c\neq0, \ b=0.$$

2309. 若 x 从 $0°$ 到 $360°$ 变化，求使函数 $y=\sin(x+60°)+2\sin(x-60°)$ 为负的 x 的范围。

解　$$\begin{aligned} y&=\sin(x+60°)+2\sin(x-60°) \\ &=\sin x\cos60°+\cos x\sin60° \\ &\quad+2\sin x\cos60°-2\cos x\sin60° \\ &=\frac{3}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \\ &=\sqrt{3}\sin(x-30°). \end{aligned}$$

因为 $0°\leqq x\leqq360°$，所以 $-30°\leqq x-30°\leqq330°$。在这个范围内，正弦值为负的条件是

$$-30°\leqq x-30°<0°,$$
$$180°<x-30°\leqq330°.$$
$$\therefore \quad 0°\leqq x<30°, \ 210°<x\leqq360°.$$

2310. 求满足不等式 $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)>\cos x$ 的 x 值的范围。这里，设 $0\leqq x\leqq2\pi$。

解　把给出的不等式变形，得

$$\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}-\cos x>0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{3}{2}\cos x>0,$$

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x>0,$$

$$2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)>0,$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}>0,$$

$$\therefore \quad \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>0.$$

在 $0\leqq x\leqq2\pi$，即 $-\dfrac{\pi}{3}\leqq x-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5\pi}{3}$ 的范围内，满足上式的 x 的范围是

$$0<x-\frac{\pi}{3}<\pi, \quad \therefore \quad \frac{\pi}{3}<x<\frac{4\pi}{3}.$$

2311. 当$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$时，求同时满足不等式

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(x+\alpha)<\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\alpha, & ①\\ \operatorname{ctg}(\alpha-x)>\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}x & ②\end{cases}$$

的锐角x的范围。

解 由①，得

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha}-(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\alpha)<0,$$

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha}[1-(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha)]<0,$$

$$(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha<0.$$

因为当$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$时，$\operatorname{tg}\alpha>0$，所以

$$\operatorname{tg}x\left(\operatorname{tg}x-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\alpha)>0.$$

又因为当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\operatorname{tg}x>0$，所以

$$\operatorname{tg}x>\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

$$\therefore\quad 0<\operatorname{ctg}x<\operatorname{tg}\alpha,$$

即 $$0<\operatorname{ctg}x<\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right). \qquad ③$$

由②，得

$$\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}\alpha+1}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}\alpha}+(\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}\alpha)>0,$$

$$\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}\alpha+1+(\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}\alpha)^2}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}\alpha}>0.$$

因为上式的分子总是正的，所以

$$\operatorname{ctg}x>\operatorname{ctg}\alpha. \qquad ④$$

因此，由③、④，得

$$\operatorname{ctg}\alpha<\operatorname{ctg}x<\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

因为在$0<x<\frac{\pi}{2}$的范围内余切函数是减函数，所以要使适合于上面这个不等式的x的值存在，必须使

$$\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)>0,\ \alpha>\frac{\pi}{4}.$$

当$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$时，适合题意的$x$的范围是

$$\frac{\pi}{2}-\alpha<x<\alpha.$$

2312. 若$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$，求满足

$$\log_a\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\leq 1+\log_a\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

的x的范围。这里，设$-\pi<x<\pi$。

解 根据对数的定义，得

$$1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}>0,\ 1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}>0.$$

$$\therefore\quad -1<\operatorname{tg}\frac{x}{2}<1. \qquad ①$$

由$-\pi<x<\pi$，得

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

在这个范围内，要使①式成立，必须使

$$-\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}.\quad \therefore\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}. \qquad ②$$

这时，所给的不等式可写成

$$\log_a\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\leq\log_a a\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

因为$a=\frac{1}{\sqrt{3}}<1$，所以

$$1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\geq a\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

因为①式成立，所以

$$\frac{1}{a}\geq\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}},\ \frac{1}{a}\geq\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

即 $$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\leq\sqrt{3}. \qquad ③$$

由②，得 $0<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$.

在这个范围内，③式成立的条件是

$$0<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{3}.$$

因此，所要求的x的范围是

$$-\frac{\pi}{2}<x\leq\frac{\pi}{6}.$$

2313. 求适合于下面两个不等式的x值的范围。这里，设x以弧度为单位。

$$\begin{cases}\sin 3x+\sin x>2\sin 2x, & ①\\ x^2-6x<-8. & ②\end{cases}$$

解 由②，得

$$x^2-6x+8<0,\ (x-2)(x-4)<0.$$

$$\therefore\quad 2<x<4. \qquad ③$$

由①，得

$$2\sin 2x\cos x-2\sin 2x>0,$$

$$2\sin 2x(\cos x-1)>0.$$

当 $2<x<4$ 时, $\cos x-1<0$.

所以 $$\sin 2x<0,$$

$$(2n-1)\pi<2x<2n\pi.$$

$$\therefore\quad n\pi-\frac{\pi}{2}<x<n\pi. \qquad ④$$

因此,同时适合于 ③ 和 ④ 的 x 的范围,在 ④ 中是取 $n=1$ 的时候,即是

$$2<x<\pi.$$

2314. 求满足不等式

$$\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}>\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x$$

的 x 值的范围。这里,设 $0°\leq x\leq 360°$.

解　当 $\sin x=0$ 时,两边都是 0,不等式不成立。因此,设 $\sin x\neq 0$.

当 $\sin x>0$ 时,

$$\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}>\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x$$

的两边是正的,因此把两边同时平方,得

$$2-2\sqrt{1-\sin^2 x}>\frac{4}{3}\sin^2 x,$$

$$3-3\sqrt{\cos^2 x}>2(1-\cos^2 x),$$

$$2\cos^2 x-3|\cos x|+1>0,$$

$$(|\cos x|-1)(2|\cos x|-1)>0.$$

$$\therefore\quad |\cos x|>1\quad 或\quad |\cos x|<\frac{1}{2}.$$

因为 $|\cos x|>1$ 不成立,所以

$$|\cos x|<\frac{1}{2},\ \sin x>0.$$

因此,在 $0°\leq x\leq 360°$ 的范围内

$$60°<x<120°. \qquad ①$$

当 $\sin x<0$ 时,把给出的不等式变形,得

$$\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1+\sin x}<\frac{2}{\sqrt{3}}(-\sin x).$$

这时,上式两边都是正的。因此,把两边同时平方,得

$$2-2\sqrt{1-\sin^2 x}<\frac{4}{3}\sin^2 x.$$

把这个式子按照前面那样变形,得

$$(|\cos x|-1)(2|\cos x|-1)<0.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}<|\cos x|<1,\ \sin x<0.$$

因此,在 $0°\leq x\leq 360°$ 的范围内

$$180°<x<240°,\ 300°<x<360°. \qquad ②$$

① 和 ② 就是所要求的范围.

2315. 若函数 $f(x)=a+b\cos x+c\sin x$ 的图象经过两点 $(0,1)$, $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, 且在 $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ 内 $|f(x)|\leq 2$, 问: a 的值在怎样的范围内?

解　从 $f(0)=1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,

得 $$a+b=1,\ a+c=1.$$

$$\therefore\quad a=1-b,\ c=b.$$

因此

$$f(x)=1-b+b(\cos x+\sin x).$$

而 $$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

当 $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\frac{\pi}{4}\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3\pi}{4},$$

从而得出

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1,$$

$$1\leq\cos x+\sin x\leq\sqrt{2}.$$

当 $b\geq 0$ 时,

$$b\leq b(\cos x+\sin x)\leq\sqrt{2}b.$$

$$\therefore\quad 1-b+b\leq f(x)\leq 1-b+\sqrt{2}b,$$

$$1\leq f(x)\leq 1+(\sqrt{2}-1)b.$$

要使 $|f(x)|\leq 2$, 必须使

$$1+(\sqrt{2}-1)b\leq 2,$$

$$\therefore\quad 0\leq b\leq\sqrt{2}+1. \qquad ①$$

当 $b<0$ 时,

$$b\geq b(\cos x+\sin x)\geq\sqrt{2}b.$$

$$\therefore\quad 1-b+b\geq f(x)\geq 1-b+\sqrt{2}b,$$

$$1\geq f(x)\geq 1+(\sqrt{2}-1)b.$$

要使 $|f(x)|\leq 2$, 必须使

$$1+(\sqrt{2}-1)b\geq -2,$$

$$\therefore\quad -3(\sqrt{2}+1)\leq b<0. \qquad ②$$

由 ①、② 和 $b=1-a$, 得

$$-3(\sqrt{2}+1)\leq 1-a\leq\sqrt{2}+1,$$

$$\therefore\quad -\sqrt{2}\leq a\leq 4+3\sqrt{2}.$$

2316. 若 a、b、c 和 A、B、C 是三角形的元素, x、y、z 是适合于方程 $\cos x=\frac{a}{b+c}$,

$\cos y=\dfrac{b}{a+c}$，$\cos z=\dfrac{c}{a+b}$ 的锐角，证明下列各等式:

(1) $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{z}{2}=1$;

(2) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$.

解 (1) $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$$=\frac{1-\dfrac{a}{b+c}}{1+\dfrac{a}{b+c}}=\frac{b+c-a}{a+b+c}.$$

同理可得 $\operatorname{tg}^2\dfrac{y}{2}=\dfrac{a+c-b}{a+b+c}$,

$$\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}=\frac{a+b-c}{a+b+c}.$$

所以 $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{z}{2}=1$.

(2) $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{b+c-a}{a+b+c}$

$$=\frac{\sin B+\sin C-\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{4\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}}{4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

同理可得 $\operatorname{tg}^2\dfrac{y}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$,

$$\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}.$$

所以 $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}^2\dfrac{y}{2}\operatorname{tg}^2\dfrac{z}{2}$

$$=\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}.$$

因此

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

2317. 在下面的 $\boxed{\quad}$ 内填入等号或不等号，并说明理由。

$$\sin x+\cos x\ \boxed{\quad}\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

解 $\sin x+\cos x-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=(\sqrt{2}-1)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

当 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>0$ 时，得

$$2n\pi<x+\frac{\pi}{4}<2n\pi+\pi,\ (n\text{ 是整数})$$

∴ 当 $2n\pi-\dfrac{\pi}{4}<x<2n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$ 时，得

$$\sin x+\cos x>\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

又，当 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<0$ 时，得

$$2n\pi+\pi<x+\frac{\pi}{4}<2n\pi+2\pi,$$

∴ 当 $2n\pi+\dfrac{3}{4}\pi<x<2n\pi+\dfrac{7\pi}{4}$ 时，得

$$\sin x+\cos x<\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

而当 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，即

$$x+\frac{\pi}{4}=n\pi,\quad\therefore\quad x=n\pi-\frac{\pi}{4}$$

时，得 $\sin x+\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2318. 设 α、β、γ 是三角形的三个内角，$p=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$:

(1) 由加法定理推导出

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

(2) 设角 γ 固定，角 α、β 任意变化，讨论 p 取得最大值时 α、β 之间的关系;

(3) 用(2)的结果，求出当 α、β、γ 任意变化时，使 p 取到最大值的角 α、β、γ。

解 (1) 参见第528题。

(2) 由(1)，得

$$p=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\gamma$$

$$=2\cos\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\gamma$$

$$=2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\gamma.$$

当 γ 固定时，$\sin\dfrac{\gamma}{2}$、$\cos\gamma$ 都是确定的，又

因为 $\sin\frac{\gamma}{2}>0$，所以仅当

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1 \quad 即 \quad \alpha=\beta$$

时 p 取得最大值．

(3) 当 γ 固定、p 取得最大值即 $\alpha=\beta$ 时，最大值是

$$p=2\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\gamma$$

$$=2\sin\frac{\gamma}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

$$=-2\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}.$$

使这个式子取得最大值的 γ 值是

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}, \quad 即 \quad \gamma=60^\circ.$$

这时，$\alpha=\beta=60^\circ$，由此可得，$\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$，$p$ 取得的最大值是 $\frac{3}{2}$.

2319. 当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ 时，比较

$$\cos\frac{x+y}{2} \quad 和 \quad \frac{\cos x+\cos y}{2}$$

的大小．

解　$\cos\frac{x+y}{2}-\frac{\cos x+\cos y}{2}$

$$=\cos\frac{x+y}{2}\left(1-\cos\frac{x-y}{2}\right).$$

因为 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$，所以

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{x+y}{2}<\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2}<\frac{x-y}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \quad \cos\frac{x+y}{2}-\frac{\cos x+\cos y}{2}\geqq 0.$$

即　$$\cos\frac{x+y}{2}\geqq\frac{\cos x+\cos y}{2}.$$

其中等号仅当 $\frac{x-y}{2}=0$ 即 $x=y$ 时成立．

2320. 已知 A、B、C 是三角形的三个内角，证明

$$\sin A+\sin B+\sin C\geqq\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C.$$

解　因为 A、B、C 是三角形的各个内角，所以

$$\sin A+\sin B+\sin C-(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-4\sin A\sin B\sin C$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\times\left(1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right).$$

又因为　$0<\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqq\frac{1}{8}$，

所以上式的值非负．

由此可知，原不等式成立．

2321. 当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，证明

$$\alpha-\sin\alpha<\frac{\alpha^3}{4}.$$

解　这个不等式与

$$\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}<\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3$$

等价．两边同乘以 4×3^3 后，得

$$36\pi-54\sqrt{3}<\pi^3,$$

这就变成要证明这个不等式成立．

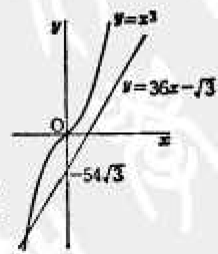
现考察

$$y=x^3 \qquad ①$$

和

$$y=36x-54\sqrt{3} \qquad ②$$

的交点．设 $f(x)=x^3-36x+54\sqrt{3}$，则因为 $f(x)=0$ 是三次方程，所以它至少有一个实根．



$$f(-10)=-640+54\sqrt{3}<0,$$

$$f(0)=54\sqrt{3}>0.$$

所以在 $-10<x<0$ 的范围内至少有一实根．由

$$f'(x)=3(x^2-12)=0$$

得，$x=\pm2\sqrt{3}$．易知，当 $x\leqq-2\sqrt{3}$ 与 $x\geqq2\sqrt{3}$ 时 $f(x)$ 是增函数，当

$$-2\sqrt{3}\leqq x\leqq2\sqrt{3}$$

时 $f(x)$ 是减函数．但因为

$$f(2\sqrt{3})=6\sqrt{3}>0,$$

$$f(-2\sqrt{3})=102\sqrt{3}>0,$$

从而得出，$f(x)=0$ 只有在 $x<-2\sqrt{3}$ 时才有一个解，而在 $x\geqq-2\sqrt{3}$ 时恒得到 $f(x)>0$。或者说 ①、② 在 $x<-2\sqrt{3}$ 时有一个交点，$x\geqq-2\sqrt{3}$ 时 ① 的图象恒在 ② 的上方。因为 $\pi>-2\sqrt{3}$，

$$\therefore\quad \pi^3>36\pi-54\sqrt{3}.$$

2322. 如果 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，证明 $\sin\theta>\operatorname{tg}\theta-\frac{\operatorname{tg}^3\theta}{2}$。

解

$$\begin{aligned}
&\sin\theta-\left(\operatorname{tg}\theta-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^3\theta\right)\\
&=\sin\theta-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}\\
&=\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\left(\cos^3\theta-\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\\
&=\frac{\sin\theta}{2\cos^3\theta}(2\cos^3\theta-3\cos^2\theta+1)\\
&=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{2\cos^3\theta}(1+\cos\theta-2\cos^2\theta)\\
&=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)}{2\cos^3\theta}\\
&=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)}{2\cos^3\theta}>0.
\end{aligned}$$

所以原不等式成立。

2323. 证明如果 θ 在 0 与 π 之间，那么

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\geqq1+\operatorname{ctg}\theta.$$

解

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-(1+\operatorname{ctg}\theta)\\
&=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{ctg}\theta-1\\
&=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-1\\
&=\frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta}-1\\
&=\frac{\sin\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta}-1\\
&=\frac{1}{\sin\theta}-1\geqq0.
\end{aligned}$$

所以原不等式成立。

2324. 已知 $\operatorname{tg}\theta=n\operatorname{tg}\varphi$，证明

$$\operatorname{tg}^2(\theta-\varphi)\leqq\frac{(n-1)^2}{4n},$$

其中设 $n>1$。

解

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\theta-\varphi)&=\frac{\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi}\\
&=\frac{(n-1)\operatorname{tg}\varphi}{1+n\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{n-1}{\operatorname{ctg}\varphi+n\operatorname{tg}\varphi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \operatorname{tg}^2(\theta-\varphi)&=\frac{(n-1)^2}{\operatorname{ctg}^2\varphi+2n+n^2\operatorname{tg}^2\varphi}\\
&=\frac{(n-1)^2}{(n\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{ctg}\varphi)^2+4n}.
\end{aligned}$$

除了当分母中的 $n\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{ctg}\varphi=0$ 时外，分母总比 $4n$ 大，

$$\therefore\quad \operatorname{tg}^2(\theta-\varphi)\leqq\frac{(n-1)^2}{4n}.$$

2325. 如果 θ 是比 $\frac{\pi}{2}$ 小的正角，证明 $\sqrt{\cos\theta}$ 小于 $\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}}$。

解　$\cos\theta$ 小于 $1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{24}$，即小于

$$\left(1-\frac{\theta^2}{4}\right)^2.$$

所以当 θ 在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 间时，$\sqrt{\cos\theta}$ 小于 $1-\frac{\theta^2}{4}$。又当 θ 在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}}$ 和 $1-\frac{\theta^2}{4}$ 都是正值，所以 $\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}}$ 比 $1-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)^2$ 大，即比 $1-\frac{\theta^2}{4}$ 大。所以 $\sqrt{\cos\theta}$ 比 $\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}}$ 小。

2326. 证明，若 A、B 是锐角，$A>B$ 时，下列不等式成立：

$$\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}>\frac{\sin A}{\sin B}.$$

解

$$\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}=\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\sin A}{\sin B}\cdot\frac{\cos B}{\cos A}.$$

当 A、B 都是锐角时，上述等式两边都是正的。因为 $A>B$，所以 $\cos B>\cos A$，从而得出 $\frac{\cos B}{\cos A}>1$，$\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B}>\frac{\sin A}{\sin B}$。

2327．当 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{2\pi}{3}$ 时，证明

$$\sin x<\operatorname{tg} x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^3 x.$$

解 因为 $\sin x>0$，$0>\cos x>-\frac{1}{2}$，所以

$$\sin x-\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^3 x$$
$$=\frac{(2\cos x+1)(\cos x-1)^2\sin x}{2\cos^3 x}<0.$$

因此，原不等式成立。

2328．证明

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta>2(\sin\alpha+\sin\beta-1).$$

解 $(\sin\alpha-1)^2>0$，从而得出

$$\sin^2\alpha>2\sin\alpha-1,$$

同理 $$\sin^2\beta>2\sin\beta-1.$$

所以

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta>2\sin\alpha+2\sin\beta-2.$$

2329．如果三角形 ABC 中 $C>90°$，证明 $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B<1$。

解

$$1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=\frac{\cos(A+B)}{\cos A\cos B}=\frac{-\cos C}{\cos A\cos B}.$$

又因为 $C>90°$，A、B 都是锐角，从而得出 $\cos A\cos B>0$，所以

$$1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B>0,\quad \therefore\quad 1>\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B.$$

2330．三角形的三边成等比数列，证明其公比大于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，小于 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$。

解 因为 a、b、c 成等比数列，若设公比为 $\frac{1}{r}$，则 $a=cr^2$，$b=cr$。因为三角形中 $a<b+c$，$b<c+a$，$c<a+b$。所以

$$r^2-r-1<0, \quad ①$$
$$r^2-r+1>0, \quad ②$$
$$r^2+r-1>0, \quad ③$$
$$r>0. \quad ④$$

由①，得

$$\left(r+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(r-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)<0.$$

结合④，得

$$0<r<\frac{\sqrt{5}+1}{2}. \quad ⑤$$

②式就是 $\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$。所以它总是成立的。

由③，得

$$\left(r+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(r-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)>0,$$

结合④，得

$$r>\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \quad ⑥$$

由⑤、⑥，就可以得到所要证明的结论。

2331．当 γ 为不大于 $\frac{\pi}{4}$ 的正数时，证明，当 θ 从 0 增大到 γ 时，$\sin\theta[1+\sin(\gamma-\theta)]$ 的值不断增大。

解 设 θ_2 比 θ_1 大，且 θ_2、θ_1 都在 0 与 γ 之间，在

$$\sin\theta[1+\sin(\gamma-\theta)]$$
$$=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\gamma\sin 2\theta-\cos\gamma\sin^2\theta$$

式中，依次用 θ_1、θ_2 代入，再把所得的结果相减，得

$$(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\left[1+\frac{1}{2}\sin\gamma\cdot\frac{\sin 2\theta_2-\sin 2\theta_1}{\sin\theta_2-\sin\theta_1}\right.$$
$$\left.-(\sin\theta_2+\sin\theta_1)\cos\gamma\right].$$

因为 $(\sin\theta_2+\sin\theta_1)\cos\gamma<2\sin\gamma\cos\gamma$，

即 $$(\sin\theta_2+\sin\theta_1)\cos\gamma<\sin 2\gamma,$$
$$(\sin\theta_2+\sin\theta_1)\cos\gamma<1,$$

所以上式大于

$$(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\left[1+\frac{1}{2}\sin\gamma\right.$$
$$\left.\times\frac{\sin 2\theta_2-\sin 2\theta_1}{\sin\theta_2-\sin\theta_1}-1\right],$$

即

$$\frac{1}{2}\sin\gamma(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\frac{\sin 2\theta_2-\sin 2\theta_1}{\sin\theta_2-\sin\theta_1}.$$

把这个式子约分，并注意到

$$\sin 2\theta_2-\sin 2\theta_1>0,$$

就不难得到欲证的结论。

2332．如果 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，证明

$$\sin^4\alpha+\sin^4\beta+\sin^4\gamma$$
$$=\frac{1}{2}(3+4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$+\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma).$$

解 $$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$$

$$\therefore\quad \sin^4\alpha=\frac{1}{4}(1-\cos 2\alpha)^2,$$

$\therefore\quad \sin^4\alpha=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2 2\alpha.$

同理可得到类似的式子，因而

$$原式的左边=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma)+\frac{1}{4}(\cos^2 2\alpha+\cos^2 2\beta+\cos^2 2\gamma).$$

因为 $\cos^2 2\alpha=\frac{1}{2}(\cos 4\alpha+1)$，所以

$$\begin{aligned}&\cos^2 2\alpha+\cos^2 2\beta+\cos^2 2\gamma\\&=\frac{1}{2}(\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma)+\frac{3}{2}\\&=2\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma+1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\\&=2\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]-1\\&=-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 原式=\frac{1}{2}(3+4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma).$$

2333. 解方程组：

$$\begin{cases}x+y=150°, & ①\\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=-\frac{2}{\sqrt{3}}. & ②\end{cases}$$

解 由①，得

$$\operatorname{tg}(x+y)=\operatorname{tg}150°=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad \frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=-\frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad ③$$

由②、③，得

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=-1. \qquad ④$$

由②、④可知，$\operatorname{tg}x$、$\operatorname{tg}y$ 的值是方程

$$z^2+\frac{2}{\sqrt{3}}z-1=0$$

即 $$\sqrt{3}\,z^2+2z-\sqrt{3}=0$$

的根．从而得出 $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$，或 $z=-\sqrt{3}$．

$$\therefore\quad \operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \operatorname{tg}y=-\sqrt{3}$$

或 $$\operatorname{tg}x=-\sqrt{3},\ \operatorname{tg}y=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

所以 $$x=n\cdot180°+30°,\quad y=n\cdot180°+120°,$$

或 $$x=n\cdot180°+120°,\quad y=n\cdot180°+30°.$$

根据①，可得 x、y 的值为下述四组：

$n\cdot180°+30°,\ -n\cdot180°+120°;$

$-n\cdot180°+30°,\ n\cdot180°+120°;$

$n\cdot180°+120°,\ -n\cdot180°+30°;$

$-n\cdot180°+120°,\ n\cdot180°+30°.$

2334. 如果

$$\sin(180°-A)=\sqrt{2}\cos(B-90°),$$
$$\sqrt{3}\cos A=-\sqrt{2}\cos(180°+B),$$

A、B、C 是三角形的内角，求 A、B、C 的值．

解 由 $\sin(180°-A)=\sqrt{2}\cos(B-90°)$，得

$$\sin A=\sqrt{2}\sin B. \qquad ①$$

又由 $\sqrt{3}\cos A=-\sqrt{2}\cos(180°+B)$，得

$$\cos A=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos B. \qquad ②$$

由②可看出，$\cos A$、$\cos B$ 符号相同．所以 A、B 都是锐角

把①、②两边分别平方后相加，得

$$2\sin^2 B+\frac{2}{3}\cos^2 B=1,$$

即 $$4\sin^2 B=1.$$

因为 $\sin B$ 为正，所以

$$\sin B=\frac{1}{2}. \qquad ③$$

从而由①得

$$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad ④$$

求出满足③、④的锐角 A、B 的值分别是

$$A=45°,\ B=30°.$$

$$\therefore\quad C=180°-(45°+30°)=105°.$$

2335. 要使 $\operatorname{tg}\theta+\sin\theta=m$，$\operatorname{tg}\theta-\sin\theta=n\ (m^2-n^2\neq0)$ 同时成立，m、n 应满足什么关系？

解 把给出的两式两边分别相加，再把两式两边分别相减，得

$$2\operatorname{tg}\theta=m+n,\ 2\sin\theta=m-n.$$

从而得出 $$\cos\theta=\frac{m-n}{m+n}.$$

把这样得到的 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 值代入

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

得 $$\left(\frac{m-n}{2}\right)^2+\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2=1.$$

所以 $$(m^2-n^2)^2=16mn.$$

2336. 如果 $\sin\alpha+\sin\beta=a$，$\cos\alpha+\cos\beta=b\ (ab\neq0)$，证明

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2},$$

并求 $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 的值。

解　由已知条件可知，

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=a,$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=b.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a}{b}.$$

所以 $$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\left(\dfrac{a}{b}\right)}{1+\dfrac{a^2}{b^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

又因为 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{a}{b}$，

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}}=\pm\frac{\dfrac{a}{b}}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}}}=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

别解　由给出的条件可知

$$\begin{aligned}2ab&=2(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)\\&=\sin2\alpha+\sin2\beta+2\sin(\alpha+\beta)\\&=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\sin(\alpha+\beta)\\&=2\sin(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+1].\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2\\&=2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=2[1+\cos(\alpha-\beta)],\end{aligned}$$

从而得出

$$\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+1]}{2[1+\cos(\alpha-\beta)]}=\sin(\alpha+\beta).$$

2337. 要使 $\sin\theta-\cos\theta=m$，$\sin2\theta=n$ 同时成立，m、n 应满足什么关系式？

解　把第一个式子两边分别平方，得

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=m^2,$$

即 $$1-\sin2\theta=m^2.$$

由第二个式子，得

$$1-n=m^2,$$

即 $$m^2+n=1.$$

2338. 求满足下列方程的锐角 A、B:

$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=1,\ \operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^2B=3\frac{1}{3}.$$

解　把第一个方程的两边同乘以 2 后与第二个方程的两边分别相加、减，得

$$(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)^2=\frac{16}{3},$$

$$(\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B)^2=\frac{4}{3}.$$

把这两式开方，再把两边分别相加、减，注意到 A、B 为锐角，得

$$\operatorname{tg}A=\sqrt{3},\ \operatorname{tg}B=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

或 $$\operatorname{tg}A=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \operatorname{tg}B=\sqrt{3}.$$

所以 $$A=60^\circ,\ B=30^\circ,$$

或 $$A=30^\circ,\ B=60^\circ.$$

2339. 设两直线

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=3,$$
$$x\cos\beta+y\sin\beta=4$$

的交点为 $P(\alpha-\beta\neq k\pi)$。

(1) 若原点为 O，把 OP^2 用 $\alpha-\beta$ 的三角函数表出。

(2) 若 $OP=5$，求两点 $A(3\cos\alpha,\ 3\sin\alpha)$，$B(4\cos\beta,\ 4\sin\beta)$ 之间的距离。

解　(1)

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=3,\qquad ①$$
$$x\cos\beta+y\sin\beta=4.\qquad ②$$

由 ①、② 求 x、y，得

$$x=\frac{4\sin\alpha-3\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},$$

$$y=\frac{3\cos\beta-4\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

$$OP^2=x^2+y^2=\frac{25-24\cos(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha-\beta)}.$$

(2) 若把 $OP=5$ 代入上式，则

$$25\sin^2(\alpha-\beta)=25-24\cos(\alpha-\beta),$$

$$\therefore\quad 25\cos^2(\alpha-\beta)=24\cos(\alpha-\beta).$$

$$\therefore\quad \cos(\alpha-\beta)=0,$$

或 $$\cos(\alpha-\beta)=\frac{24}{25}.$$

$$AB^2=(3\cos\alpha-4\cos\beta)^2+(3\sin\alpha-4\sin\beta)^2=25-24\cos(\alpha-\beta).$$

从而得出

$$AB^2=25,\ 或\ AB^2=\frac{49}{25}.$$

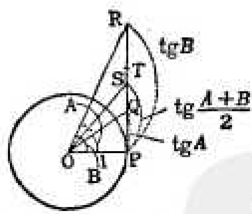
$$\therefore\quad AB=5,\ 或\ AB=\frac{7}{5}.$$

2340． 如果 A、B 都是正的锐角，试比较

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$

和 $\dfrac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{2}$

的大小。



解 由题意，因为 A、B 都是正的锐角，则可如右图过单位圆上一点 P，作与 OP 垂直的直线，且设

$\angle POQ=A$, $\angle POR=B$（这里设 $A\leq B$），

则 $$PQ=\operatorname{tg}A,\ PR=\operatorname{tg}B.\qquad ①$$

$\angle QOR$ 的平分线与直线 PR 交于点 S。由角平分线的定理，得

$$\frac{RS}{SQ}=\frac{OR}{OQ}\geq 1.\quad \therefore\quad RS\geq SQ.$$

因此若设 T 是 QR 的中点，则

$$PS\leq PT.\qquad ②$$

因为 $$\angle POS=\frac{A+B}{2},$$

所以 $$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=PS.$$

又由①，得

$$PT=\frac{PQ+PR}{2}=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B),$$

从而由②得出

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\leq\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{2}.$$

等号仅当 $A=B$ 时取得。

别解 设

$$X=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}},$$

$$Y=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}}.$$

因为 $0<A\leq B<90°$，所以可设

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=x,\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=y,\ 0<x\leq y<1.$$

于是得

$$X=\frac{x+y}{1-xy},\ Y=\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}.$$

$$\begin{aligned}Y-X&=\frac{(x+y)(1-xy)}{(1-x^2)(1-y^2)}-\frac{x+y}{1-xy}\\&=\frac{(x+y)[(1-xy)^2-(1-x^2)(1-y^2)]}{(1-x^2)(1-y^2)(1-xy)}\\&=\frac{(x+y)(x-y)^2}{(1-x^2)(1-y^2)(1-xy)}\geq 0.\end{aligned}$$

2341． $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 都是 0 到 π 之间的角，证明下列各不等式：

(1) $$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D\leq 4\sin\frac{(A+B+C+D)}{4};$$

(2) $$\sin A+\sin B+\sin C\leq 3\sin\frac{(A+B+C)}{3}.$$

解 (1) $$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

若设 $P=\sin A+\sin B-2\sin\dfrac{A+B}{2}$，则

$$P=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-1\right).$$

因为 $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，所以

$$\sin\frac{A+B}{2}>0,\quad 0<\cos\frac{A-B}{2}\leq 1.$$

$\therefore$ $P\leq 0$，（等号仅当 $A=B$ 时成立）。

因此 $\sin A+\sin B\leqq 2\sin\dfrac{A+B}{2}$.

同理，$\sin C+\sin D\leqq 2\sin\dfrac{C+D}{2}$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\sin A+\sin B+\sin C+\sin D\\ &\leqq 2\left(\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C+D}{2}\right)\\ &\leqq 2\cdot 2\sin\frac{A+B+C+D}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\sin A+\sin B+\sin C+\sin D\\ &\leqq 4\sin\frac{A+B+C+D}{4}.\end{aligned}$$

等号仅当 $A=B$, $C=D$ 且 $A+B=C+D$ 时成立，亦即仅当 $A=B=C=D$ 时成立。

(2) 在上面的不等式中设 $D=\dfrac{A+B+C}{3}$，则

$$\frac{A+B+C+D}{4}=\frac{A+B+C}{4}+\frac{A+B+C}{12}=\frac{A+B+C}{3}.$$

再代入(1)中得到的结果，得

$$\sin A+\sin B+\sin C+\sin\frac{A+B+C}{3}\leqq 4\sin\frac{A+B+C}{3}.$$

$$\therefore\quad \sin A+\sin B+\sin C\leqq 3\sin\frac{A+B+C}{3}.$$

等号成立的条件是

$$A=B,\ C=\frac{A+B+C}{3},$$

$$A+B=C+\frac{A+B+C}{3},$$

即仅当 $A=B=C$ 时成立等号。

2342. 如果 $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}=P$, $P>1+\sqrt{2}$ 或 $P<1-\sqrt{2}$，证明 $\sin\theta+\cos\theta<0$.

解　由假设，可知 P 是下列不等式的解

$$[P-(1+\sqrt{2})][P-(1-\sqrt{2})]>0.$$

因为　$1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$,

$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$,

所以　$P^2-2P-1>0$,

$$\therefore\quad 1+2P-P^2<0. \qquad ①$$

又

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\sec^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}.$$

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\\ &=\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\\ &=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{\sec^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

所以

$$\sin\theta=\frac{2P}{1+P^2},\quad \cos\theta=\frac{1-P^2}{1+P^2}. \qquad ②$$

从而得出

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{1+P^2}(1+2P-P^2).$$

因为 $1+P^2>0$，所以由①，得

$$\sin\theta+\cos\theta<0.$$

2343. (1) 如果 $x=\sin\theta+\cos\theta$，把

$$\sin\theta\cos\theta-a(\sin\theta+\cos\theta)$$

用 x 表出。

(2) 用(1)的结果，把能使不等式

$$b\leqq\sin\theta\cos\theta-a(\sin\theta+\cos\theta)$$

对于任何 θ 都成立的 a, b 作为点的坐标，试在图上给出点 $(a,\ b)$ 的范围。

解　(1)　$x=\sin\theta+\cos\theta$, 　①

$$\begin{aligned}\therefore\quad x^2&=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\\ &=1+2\sin\theta\cos\theta.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-1}{2}. \qquad ②$$

设给出的式子为 $f(x)$，即

$$f(x)=\sin\theta\cos\theta-a(\sin\theta+\cos\theta).$$

把①、②代入，得

$$f(x)=\frac{x^2-1}{2}-ax=\frac{1}{2}(x^2-2ax-1). \qquad ③$$

(2) 把①式的右边变形为

$$x=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\therefore\quad |x|\leqq\sqrt{2}. \qquad ④$$

在这范围里，求 ⑧ 的最小值。⑧ 可化为

$$f(x)=\frac{1}{2}[(x-a)^2-(a^2+1)].$$

(i) 当 $a\geqq\sqrt{2}$ 时，

$f(x)$ 的最小值 $=f(\sqrt{2})$

$$=\frac{1}{2}(2-2\sqrt{2}a-1)=-\sqrt{2}a+\frac{1}{2}.$$

(ii) 当 $\sqrt{2}\geqq a\geqq-\sqrt{2}$ 时，

$$f(x)\text{ 的最小值}=-\frac{1}{2}(a^2+1).$$

(iii) 当 $-\sqrt{2}\geqq a$ 时，

$f(x)$ 的最小值 $=f(-\sqrt{2})$

$$=\frac{1}{2}(2+2\sqrt{2}a-1)=\sqrt{2}a+\frac{1}{2}.$$

要使所给的不等式对任何 θ 都成立的条件是

$$b\leqq f(x)\text{ 的最小值}.$$

因此，a、b 应分别满足

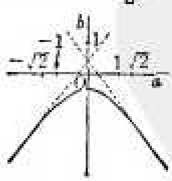
(i) 当 $a\geqq\sqrt{2}$ 时，$b\leqq-\sqrt{2}a+\frac{1}{2}$.

(ii) 当 $\sqrt{2}\geqq a\geqq-\sqrt{2}$ 时，

$$b\leqq-\frac{1}{2}(a^2+1).$$

(iii) 当 $-\sqrt{2}\geqq a$ 时，$b\leqq\sqrt{2}a+\frac{1}{2}$.

点 $(a,\ b)$ 的图示如右图。



2344. 解方程：

$$2\cos^2x-\sqrt{3}\sin x+1=0.$$

解 用

$$\cos^2x=1-\sin^2x$$

代入原方程，得

$$2\sin^2x+\sqrt{3}\sin x-3=0.$$

$$\therefore\quad(\sin x+\sqrt{3})(2\sin x-\sqrt{3})=0.$$

$$\because\quad|\sin x|\leqq1,\quad\therefore\quad\sin x+\sqrt{3}>0.$$

$$\therefore\quad\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore\quad x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}.\ (n\text{ 是整数})$$

2345. 要使不等式

$$|\cos 3x+(a^2+3)\cos x+b|\geqq1$$

恒成立，实数 a、b 应满足什么关系？并用图表示点 $(a,\ b)$ 的存在范围。

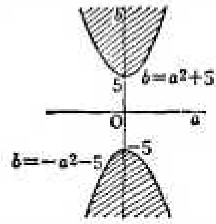
解 设 $\cos x=t(-1\leqq t\leqq1)$。用三倍角公式，得

$$\begin{aligned}&\cos 3x+(a^2+3)\cos x+b\\&=4\cos^3x-3\cos x+(a^2+3)\cos x+b\\&=4\cos^3x+a^2\cos x+b\\&=4t^3+a^2t+b,\ (-1\leqq t\leqq1).\end{aligned}$$

设这个式子为 $f(t)$，则

$$f'(t)=12t^2+a^2\geqq0.$$

所以，$f(t)$ 是单调上升的。因此要证明原不等式成立，也即要证明当在 $-1\leqq t\leqq1$ 时，$|f(t)|\geqq1$ 恒成立的条件是



$$f(-1)\geqq1,$$

或 $f(1)\leqq-1$.

即 $-4-a^2+b\geqq1$,

或 $4+a^2+b\leqq-1$.

$\therefore\quad b\geqq a^2+5$,

或 $b\leqq-a^2-5$.

因此，满足这两个不等式的点 $(a,\ b)$ 的范围，是上图中涂阴影的部分（包括边界在内）。

2346. 如果 $\frac{\pi}{2}>x\geqq y\geqq0$，比较 $x-y$，$\sin x-\sin y$，$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y$ 三者的大小。

解 设 $y=a=$ 常数，把

$$f(x)=x-a,\ g(x)=\sin x-\sin a,$$

$$h(x)=\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a$$

求导，则

$$f'(x)=1,\ g'(x)=\cos x,$$

$$h'(x)=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}.$$

$\therefore$ 当 $\frac{\pi}{2}>x>0$ 时，

$$h'(x)>f'(x)>g'(x).$$

又因为 $h(a)=f(a)=g(a)=0$，所以

$$h(x)>f(x)>g(x),\ \left(\frac{\pi}{2}>x>a\right).$$

再设 $y=a$，则

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y>x-y>\sin x-\sin y,$$

$$\left(\frac{\pi}{2}>x>y\geqq0\right).$$

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=x-y=\sin x-\sin y=0,$$

$$\left(\frac{\pi}{2}>x=y\geqq0\right).$$

2347．解不等式 $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta+1<0$，其中设 $0\leqq\theta\leqq2\pi$。

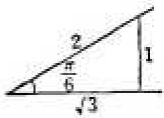
解　因为

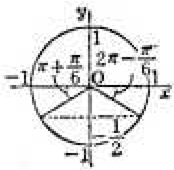
$$2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-2\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta,$$

所以　$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)<-\frac{1}{2}.$$

因为 $0\leqq\theta\leqq2\pi$，所以





$$\pi+\frac{\pi}{6}<\theta-\frac{\pi}{6}<2\pi-\frac{\pi}{6},$$

因而　$$\frac{4\pi}{3}<\theta<2\pi.$$

2348．求满足 $2\cos(x-15^\circ)\leqq1$ 的 x 的范围，其中 $0^\circ\leqq x\leqq180^\circ$。

解　$$2\cos(x-15^\circ)\leqq1.$$

$$\therefore\quad\cos(x-15^\circ)\leqq\frac{1}{2}.$$

因为 $0^\circ\leqq x\leqq180^\circ$，所以

$$-15^\circ\leqq x-15^\circ\leqq165^\circ.$$

要使不等式在上述范围内成立，必须使

$$60^\circ\leqq x-15^\circ\leqq165^\circ.$$

$$\therefore\quad75^\circ\leqq x\leqq180^\circ.$$

2349．当 $0\leqq x\leqq\pi$ 时，考察

$$f(x)=\sin(\cos x)、g(x)=\cos(\sin x)$$

这两个函数：

(1) 试求 $f(x)$ 的最大值和最小值；

(2) 试求 $g(x)$ 的最大值和最小值；

(3) 把(1)、(2)中求得的四个值比较大小，并按从大到小的顺序排列；

(4) 讨论 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的大小关系。

解

	$f(x)$		$g(x)$	
	最大值	最小值	最大值	最小值
值	$\sin 1$	$-\sin 1$	1	$\cos 1$
顺序	2	4	1	3

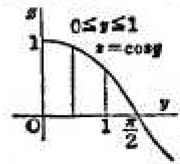
(1) 当 $0\leqq x\leqq\pi$ 时，

$$-1\leqq\cos x\leqq1,\ 0\leqq\sin x\leqq1.$$

因为 $\cos x$ 在这个范围内单调减少，$\sin x$ 在 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间是单调增加的，所以 $f(x)$ 的最小值是

$$f(-1)=-\sin1,$$

最大值是



$$f(1)=\sin1.$$

(2) 根据右图可判定，当 $x=0$ 时 $g(x)$ 取得最大值 $g(0)=1$，而最小值为 $g(1)=\cos1$。

(3) 因为 $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$，所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin1<1,\quad\frac{1}{\sqrt{2}}>\cos1>0.$$

$$\therefore\quad1>\sin1>\cos1>-\sin1.$$

(4) 当 $\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ 时，$f(x)\leqq0<g(x)$，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，

$$0<\sin x<x<\frac{\pi}{2},\qquad ①$$

又因为 $\cos x$ 是单调减少的，所以

$$\cos(\sin x)>\cos x.\qquad ②$$

因为 $0<\cos x<1<\frac{\pi}{2}$，把①中的 x 用 $\cos x$ 代入，就得到

$$\sin(\cos x)<\cos x.\qquad ③$$

由②、③可知，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)<g(x)$，从而得出，总起来都有 $f(x)<g(x)$。

2350．如果 A 是锐角，证明

(1) $\sin A+\cos A>1$；

(2) 如果 $\sec A>\csc A$，则 $A>45^\circ$。

解　(1) A 是锐角时，$\cos A$、$\sin A$ 都是正的。从而由

$$(\sin A+\cos A)^2$$

$$=\sin^2A+\cos^2A+2\sin A\cos A$$

$$=1+2\sin A\cos A,$$

可得　$$(\sin A+\cos A)^2>1,$$

所以　$$\sin A+\cos A>1.$$

(2) 因为 $\sec A>\csc A$，所以

$$\frac{1}{\cos A}>\frac{1}{\sin A}.$$

因为 A 是锐角，$\sin A$、$\cos A$ 都是正的。如果把上述不等式两边同乘以 $\sin A\cos A$，则得 $\sin A>\cos A$，即 $\sin A>\sin(90°-A)$。因为 $90°-A$ 也是锐角，由 $\sin A$ 的单调性可知 $A>90°-A$，所以 $2A>90°$，所以 $A>45°$。

2351. 如果 $\sin^4 x+\cos^4 x=a$，证明

$$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1.$$

解 把 $\sin^4 x+\cos^4 x=a$ 变形，得

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=a.$$

$$\therefore\quad a=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

因为 $0\leqq\sin^2 2x\leqq 1$，所以

$$\frac{1}{2}\leqq 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\leqq 1.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\leqq a\leqq 1.$$

2352. 求函数

$$y=\frac{2\sin x+1}{2\sin x-1}$$

的值域。

解 把 $y=\dfrac{2\sin x+1}{2\sin x-1}$ 去分母，得

$$2(y-1)\sin x=y+1.$$

因为当 $y=1$ 时上式不成立，所以 $y\neq 1$，从而得出

$$\sin x=\frac{y+1}{2(y-1)}.$$

因为 $-1\leqq\sin x\leqq 1$，所以

$$-1\leqq\frac{y+1}{2(y-1)}\leqq 1.$$

由 $-1\leqq\dfrac{y+1}{2(y-1)}$，得 $\dfrac{3y-1}{2(y-1)}\geqq 0$。

$$\therefore\quad y\leqq\frac{1}{3}\quad 或\quad y>1.$$

由 $\dfrac{y+1}{2(y-1)}\leqq 1$，得 $\dfrac{y-3}{2(y-1)}\geqq 0$。

$$\therefore\quad y<1\quad 或\quad y\geqq 3.$$

综合上述两种情况，得

$$y\leqq\frac{1}{3},\ y\geqq 3.$$

2353. 如果三角形 ABC 中

$$\sin^2 A-\cos^2 A=\frac{1}{2},$$

求 A 的值。

解 $\sin^2 A-\cos^2 A=-\cos 2A=\dfrac{1}{2}$.

$$\therefore\quad 2A=120°\quad 或\quad 2A=240°.$$

$$\therefore\quad A=60°\quad 或\quad 120°.$$

5. 最大与最小(极大与极小)

2354. 如果 $x+y=\dfrac{\pi}{3}$，求 $\sin x+\sin y$ 的最大值。

解 因为 $x+y=\dfrac{\pi}{3}$，把原式化成积的形式，得

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$=2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{x-y}{2}.$$

要这个式子取得最大值，必须使

$$\frac{x-y}{2}=2n\pi.\quad\therefore\quad x-y=4n\pi.$$

即当 $x-y=4n\pi$ 时，$\sin x+\sin y$ 取得最大值，最大值是 1。

2355. 如果三角形的三边长分别是 3cm，4cm，$\sqrt{38}$ cm，证明最大的一个内角大于 120°。

解 由三角形的性质可知，长是 $\sqrt{38}$ cm 的边的对角最大，设这个角是 θ，则

$$\cos\theta=\frac{9+16-38}{2\times3\times4}=-\frac{13}{24}<-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \theta>120°.$$

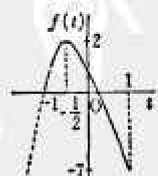
2356. 求 $4\cos^2 x-4\sin x-3$ 的最大值、最小值。

解 原式 $=4(1-\sin^2 x)-4\sin x-3$
$=-4\sin^2 x-4\sin x+1$.

现设 $\sin x=t$，则

$$-1\leqq t\leqq 1.$$

$$f(t)=-4(t^2+t)+1$$
$$=-4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+2.$$



因为 $-1\leqq t\leqq 1$，所以当 $t=-\dfrac{1}{2}$ 时 $f(t)$ 取得最大值，最大值是 2。当 $t=1$ 时取得最小值，最小值是 -7。

2357. 如果 $x+y=\dfrac{2\pi}{3}$，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$，求 $\sin x\sin y$ 的最大值和最小值。

解　　　$\because\ y=\frac{2\pi}{3}-x$,

$$\therefore\ \sin x\sin y=\sin x\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right).$$

因为 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$，所以

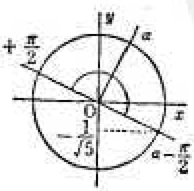
$$-\frac{2\pi}{3}\leqq 2x-\frac{2\pi}{3}\leqq\frac{\pi}{3}.$$

从而得出：当 $2x-\frac{2\pi}{3}=0$ 即 $x=y=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin x\sin y$ 取得最大值，最大值是 $\frac{3}{4}$；当 $2x-\frac{2\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}$ 即 $x=0$，$y=\frac{2}{3}\pi$ 时，$\sin x\sin y$ 取得最小值，最小值是 0.

2358. 求 $\frac{\pi}{2}-2+\sqrt{4-x^2}$ 的最大值和最小值.

解　因为 $4-x^2\geqq 0$，所以 $-2\leqq x\leqq 2$. 设 $x=2\sin\theta$，$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$. 这时，$\sqrt{4-x^2}=2|\cos\theta|$. 因为

$$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},$$



所以 $\cos\theta\geqq 0$.

$$\therefore\ \sqrt{4-x^2}=2\cos\theta.$$

因此，原式成为

$$\sin\theta+2\cos\theta-2=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)-2.$$

其中 α 为满足 $\operatorname{tg}\alpha=2$ 的锐角. 因为

$$-\frac{\pi}{2}+\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\frac{\pi}{2}+\alpha.$$

参看上图，在 $-\frac{\pi}{2}+\alpha$ 到 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 之间，

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq 1.$$

从而得出，当 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ 即 $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$，

$$x=2\sin\theta=2\cos\alpha=\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

时，原式取得最大值，最大值是 $\sqrt{5}-2$. 当

$$\theta+\alpha=-\frac{\pi}{2}+\alpha\quad\text{即}\quad\theta=-\frac{\pi}{2},$$

$x=2\sin\theta=-2$ 时取最小值. 最小值是 -3.

2359. 若 $a=\sqrt{6}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}-1$，求 $\triangle ABC$ 的最大角.

解　由 $a>b>c$，得 $A>B>C$.

$$\therefore\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{4+4-2\sqrt{3}-6}{2\cdot 2(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{2}.$$

因为 $180°>A>0°$，所以 $A=120°$.

2360. 若 $0°\leqq x\leqq 90°$，求下列各函数的最大值和最小值：

(1) $f(x)=\sin x\cos(x-30°)$；

(2) $g(x)=\cos(x+60°)\cos x$.

解　(1) $2f(x)=2\sin x\cos(x-30°)$
$=\sin(2x-30°)+\sin 30°$.

所以

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x-30°)+\frac{1}{4}.$$

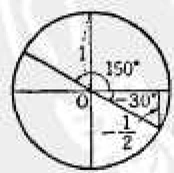
其中只有第一项是变化的. 设 $2x-30°=\theta$，则

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{4}.\qquad ①$$

因为 $0°\leqq x\leqq 90°$，所以 $0°\leqq 2x\leqq 180°$.

$$\therefore\ -30°\leqq 2x-30°\leqq 150°,$$

即　$-30°\leqq\theta\leqq 150°$.



参照图中的单位圆，$\sin\theta$ 可取的最大值是1，可取的最小值是 $-\frac{1}{2}$，代入 ① 式，得

$$f(x)\text{的最大值}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}=\frac{3}{4};$$

$$f(x)\text{的最小值}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=0.$$

(2) 只要象(1)那样讨论即可，要点如下：

$$g(x)=\frac{1}{2}[\cos(2x+60°)+\cos 60°]$$

$$=\frac{1}{2}\cos(2x+60°)+\frac{1}{4}.$$

设 $2x+60°=\theta$，画出单位圆考察 $60°\leqq\theta\leqq 240°$ 范围内 $\cos\theta$ 的增减情形，得

$g(x)$的最大值是$\frac{1}{2}$，最小值是$-\frac{1}{4}$.

2361. 求适合于$\sin^3\theta+\cos^3\theta=0$的最小的$\theta$值$(\pi>\theta>0)$.

解 把$\sin^3\theta=-\cos^3\theta$的两边分别开立方，得$\sin\theta=-\cos\theta$，所以$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-1$，即$\operatorname{tg}\theta=-1$. 从而得出$\theta=\frac{3}{4}\pi$.

2362. 平面内有两个动点P、Q，开始运动t秒后的位置是

$$P:\begin{cases}x=2\sin(30^\circ t+90^\circ),\\ y=\sin 30^\circ t;\end{cases}$$

$$Q:\begin{cases}x=\cos(30^\circ t+90^\circ),\\ y=2\cos 30^\circ t.\end{cases}$$

问：何时P、Q相距最近？

解 根据点P、Q的坐标可知

$$\begin{aligned}PQ^2&=[2\sin(30^\circ t+90^\circ)\\&\quad-\cos(30^\circ t+90^\circ)]^2\\&\quad+(\sin 30^\circ t-2\cos 30^\circ t)^2\\&=(2\cos 30^\circ t+\sin 30^\circ t)^2\\&\quad+(\sin 30^\circ t-2\cos 30^\circ t)^2\\&=2\sin^2 30^\circ t+8\cos^2 30^\circ t\\&=2[(1-\cos^2 30^\circ t)+4\cos^2 30^\circ t]\\&=2(1+3\cos^2 30^\circ t).\end{aligned}$$

因此，当开始运动$30^\circ t=90^\circ$即$t=3$秒时，P、Q相距最近.

2363. 在下列(　)中填入适当的值：x的函数

$$\sin^2 x-3\sin x+1.$$

当x等于(　)时取得最大值，最大值是(　).
又x等于(　)时取得最小值，最小值是(　).

解

$$\begin{aligned}y&=\sin^2 x-3\sin x+1\\&=\left(\sin x-\frac{3}{2}\right)^2+1-\frac{9}{4}\\&=\left(\sin x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

当$\sin x=-1$即$x=2n\pi-\frac{\pi}{2}$时，y取得最大值，即

$$y=(-1)^2-3(-1)+1=5.$$

因为$\sin x\leq 1$，所以当$\sin x=1$即$x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$时，y取得最小值，即

$$y=1-3+1=-1.$$

2364. 求下列各函数的最大值和最小值：

(1) $3+5\sin x-2\sin^2 x$;

(2) $4\sin^2 x+4\sqrt{3}\sin x+6$.

解 (1) 把给出的式子变形，得

$$\begin{aligned}y&=-2\left(\sin^2 x-\frac{5}{2}\sin x\right)+3\\&=-2\left(\sin x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{49}{8}.\end{aligned}$$

因此，当$\sin x=1$时y取得最大值，即

$$y=3+5-2=6.$$

而当$\sin x=-1$时y取得最小值，即

$$y=3+5(-1)-2(-1)^2=-4.$$

(2) $$\begin{aligned}y&=4(\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x)+6\\&=4\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+3.\end{aligned}$$

因此，当$\sin x=1$时，y取得最大值，即

$$y=4+4\sqrt{3}+6=10+4\sqrt{3}.$$

而当$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$y$取得最小值，即

$$y=3.$$

2365. 求x的函数

$$2-2a\sin x-\cos^2 x$$

的最大值和最小值.

解 记原式为y，变形，得

$$\begin{aligned}y&=2-2a\sin x-\cos^2 x\\&=2-2a\sin x-(1-\sin^2 x)\\&=\sin^2 x-2a\sin x+1\\&=(\sin x-a)^2+1-a^2.\end{aligned}$$

y取得最大值的情况讨论如下：

(i) 若$a\geq 0$，当$\sin x=-1$时y取得最大值，最大值是

$$y=(-1)^2-2a(-1)+1=2(1+a).$$

(ii) 若$a<0$，当$\sin x=1$时y取得最大值，这时

$$y=1-2a+1=2(1-a).$$

所以y的最大值是

$$2(1+|a|).$$

又y取得最小值的情况讨论如下：

(i) 若$a>1$，当$\sin x=1$时y取得最小值，最小值是

$$y=1-2a+1=2(1-a).$$

(ii) 若$-1\leq a\leq 1$，当$\sin x=a$时y取得最小值，最小值是

$$y=1-a^2.$$

(iii) 若 $a<-1$，当 $\sin x=-1$ 时 y 取得最小值，这时

$$y=(-1)^2-2a(-1)+1=2(1+a).$$

综合起来，得到 y 的最小值是：

在 $|a|>1$ 时是 $2(1-|a|)$，

在 $|a|\leq 1$ 时是 $1-a^2$.

2366. 求 $\sin x\cos^3 x$ 的最大值和最小值.

解　设给出的式子为 y，则

$$y^2=\sin^2 x\cos^6 x=\sin^2 x(1-\sin^2 x)^3$$
$$=27\sin^2 x\cdot\frac{1-\sin^2 x}{3}\cdot\frac{1-\sin^2 x}{3}\cdot\frac{1-\sin^2 x}{3}.$$

因为

$$\sin^2 x+\frac{1-\sin^2 x}{3}+\frac{1-\sin^2 x}{3}+\frac{1-\sin^2 x}{3}=1(\text{常数}),$$

所以仅当 $\sin^2 x=\frac{1-\sin^2 x}{3}$ 时，y^2 取得最大值，

$$\therefore\quad \sin^2 x=\frac{1}{4}.$$

y^2 的最大值是

$$y^2=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3.$$

所以 y 的最大值是 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$，最小值是 $-\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

2367. 求函数 $\frac{\csc^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-1}$ 的最大值.

解

$$y=\frac{\csc^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-1}$$
$$=\frac{1+\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-1}$$
$$=\frac{\operatorname{tg}^2 x+1-\operatorname{tg}^4 x}{1+\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x}$$
$$=\frac{2-(\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x+1)}{\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x+1}$$
$$=\frac{2}{\left(\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-1.$$

所以，当 $\left(\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{2}\right)^2$ 最小亦即 $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{2}$ 时，y 取得最大值，即

$$y=2\times\frac{4}{3}-1=\frac{5}{3}.$$

2368. 求下列各式的最小值：

(1) $a^2\sin^2 x+b^2\csc^2 x$;

(2) $a\sec^2 x+b^2\csc^2 x$.

解　(1) 因为对于两个正数 $a^2\sin^2 x$、$b^2\csc^2 x$ 来说，

$$a^2\sin^2 x\cdot b^2\csc^2 x=a^2b^2,(\text{常数})$$

所以，原式仅当

$$a^2\sin^2 x=b^2\csc^2 x=|ab|$$

时取得最小值，最小值是

$$|ab|+|ab|=2|ab|.$$

(2) 把原式变形，得

$$\text{原式}=a^2(1+\operatorname{tg}^2 x)+b^2(1+\operatorname{ctg}^2 x)$$
$$=a^2+b^2+(a^2\operatorname{tg}^2 x+b^2\operatorname{ctg}^2 x).$$

因为 $a^2\operatorname{tg}^2 x$、$b^2\operatorname{ctg}^2 x$ 都是正的，它们的积又是常数，所以，仅当

$$a^2\operatorname{tg}^2 x=b^2\operatorname{ctg}^2 x=|ab|$$

时原式取得最小值，最小值是

$$a^2+b^2+2|ab|,$$

即 $ab>0$ 时是 $(a+b)^2$，$ab<0$ 时是 $(a-b)^2$.

2369. 求下列各函数的最大值和最小值：

(1) $1+(\sin x+\cos x)$;

(2) $1+(\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)^2$.

解　(1) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\therefore\quad -\sqrt{2}\leq\sin x+\cos x\leq\sqrt{2}.\qquad ①$$

其中左边的等号仅当 $x=-\frac{3\pi}{4}+2n\pi$ 时成立，右边的等号仅当 $x=\frac{\pi}{4}+2n\pi$ 时成立，n 为任意整数.

所以 $1+(\sin x+\cos x)$ 的最大值是 $1+\sqrt{2}$，最小值是 $1-\sqrt{2}$.

(2) 设 $y=\sin x+\cos x$，

$$1+(\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)^2$$
$$=1+y-y^2=-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}.\qquad ②$$

由 ① 可知，$-\sqrt{2}\leq y\leq\sqrt{2}$. 所以当 $y=\frac{1}{2}$ 时 ② 式取得最大值 $\frac{5}{4}$，当 $y=-\sqrt{2}$ 时取得最小值，即

$$1-\sqrt{2}-(-\sqrt{2})^2=-1-\sqrt{2}.$$

2370. 求函数
$$y=(a+\sin x)(a+\cos x)$$
的最大值和最小值,其中 a 是正的常数.

解 $(a+\sin x)(a+\cos x)$
$$=a^2+a(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x$$
$$=a^2+a(\sin x+\cos x)$$
$$+\frac{1}{2}[(\sin x+\cos x)^2-1].$$

设 $t=\sin x+\cos x$, 则
$$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$
$$y=a^2+at+\frac{1}{2}(t^2-1)$$
$$=\frac{1}{2}(t+a)^2+\frac{a^2-1}{2}.$$

因为 $a>0$, $-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$, 所以当 $t=\sqrt{2}$ 时 $(t+a)^2$ 取得最大值. 从而得出 y 的最大值是
$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+a)^2+\frac{a^2-1}{2}=a^2+\sqrt{2}a+\frac{1}{2}.$$

当 $0<a\leq\sqrt{2}$ 时, $-a$ 在 t 的取值范围内,所以当 $t=-a$ 时 $(t+a)^2$ 取得最小值且最小值是 0.

当 $\sqrt{2}<a$ 时, $-a<-\sqrt{2}$, 从而得出,当 $t=-\sqrt{2}$ 时 $(t+a)^2$ 取得最小值.

所以,当 $0<a\leq\sqrt{2}$ 时 y 的最小值是 $\frac{a^2-1}{2}$, 当 $\sqrt{2}<a$ 时最小值是
$$a^2-\sqrt{2}a+\frac{1}{2}.$$

2371. (1) p 为给定的实数,试把 θ 的函数
$$2\sin^2\theta+4p\cos\theta-p^2$$
的最大值用 p 表出.

(2) 设 (1) 中求出的最大值为 $f(p)$, 画出 $q=f(p)$ 的图象.

解 (1) 把给出的式子变形,得
$$y=2\sin^2\theta+4p\cos\theta-p^2$$
$$=2(1-\cos^2\theta)+4p\cos\theta-p^2$$
$$=-2\cos^2\theta+4p\cos\theta+2-p^2$$
$$=-2(\cos\theta-p)^2+2+p^2.$$

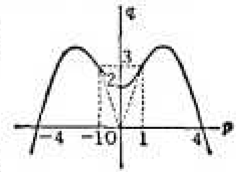
由此可得

(i) 若 $p>1$, 则当 $\cos\theta=1$ 时 y 取得最大值,即
$$y=-2+4p+2-p^2$$
$$=-p^2+4p.$$

(ii) 若 $-1\leq p\leq1$, 则当 $\cos\theta=p$ 时 y 取得最大值,即
$$y=2+p^2.$$

(iii) 若 $p<-1$, 则当 $\cos\theta=-1$ 时 y 取得最大值,即
$$y=-2-4p+2-p^2=-p^2-4p.$$

综合上述结果,得到 y 的最大值 $f(p)$ 是



$|p|>1$ 时,
$$f(p)=-p^2+4|p|, \quad ①$$
$|p|\leq1$ 时 $\quad f(p)=p^2+2. \quad ②$

(2) 由 ①、②, 得 $q=f(p)$ 的图象如上图所示.

2372. 求函数
$$3\cos\theta+2\cos2\theta+\cos3\theta$$
的最大值和最小值.

解 设给出的函数为 y. 则
$$y=3\cos\theta+2\cos2\theta+\cos3\theta$$
$$=3\cos\theta+2(2\cos^2\theta-1)$$
$$+(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$$
$$=4\cos^3\theta+4\cos^2\theta-2.$$

现设 $\cos\theta=x(-1\leq x\leq1)$, 则
$$y=4x^3+4x^2-2,$$
$$\therefore\quad y'=12x^2+8x=4x(3x+2).$$

y 的增减性如下表所示.

x	-1		$-\frac{2}{3}$		0		1
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-2	$\nearrow$	$-\frac{38}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6

因此,当 $x=-\frac{2}{3}$ 时 y 取得极大值,极大值是
$$y=-\frac{32}{27}+\frac{16}{9}-2=-\frac{38}{27}<6.$$

而当 $x=1$ 即 $x=\cos\theta=1$, $\theta=2n\pi$ 时 y 取得最大值,最大值是 $y=6$.

又当 $x=-1$ 和 $x=0$, 即

$$\cos\theta=-1,\ \therefore\ \theta=(2n+1)\pi,$$

$$\cos\theta=0,\ \therefore\ \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$$

时y取得最小值，最小值是$y=-2$。

2373. $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$时，求函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2x}}$$

的最大值和最小值。

解 设原式为y，要y取得最大值，就要$1-\frac{3}{4}\sin^2x$取得最小值。由此可得，当$\sin^2x=1$时，y取得最大值，即

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=2.$$

而要y取得最小值，就要$1-\frac{3}{4}\sin^2x$取得最大值。由此可得，当$\sin^2x=0$时，y取得最小值，即

$$y=\frac{1}{\sqrt{1}}=1.$$

2374. 求$\frac{1}{|\sin x-\cos x|}$的最小值。

解

$$\frac{1}{|\sin x-\cos x|}=\frac{1}{\sqrt{2}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|}.$$

要使上式取得最小值，必须使

$$\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

取得最大值。所以上式的最小值是$\frac{1}{\sqrt{2}}$。

2375. 在$\frac{\pi}{3}\geqq x\geqq\frac{\pi}{6}$时，求

$$\frac{\operatorname{tg}x-\sin^2x}{\operatorname{tg}x+\sin^2x}$$

的最大值和最小值。

解
$$y=\frac{\operatorname{tg}x-\sin^2x}{\operatorname{tg}x+\sin^2x}$$

$$=\frac{\sin x-\sin^2x\cos x}{\sin x+\sin^2x\cos x}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}\sin 2x}{1+\frac{1}{2}\sin 2x}$$

$$=\frac{2-\sin 2x}{2+\sin 2x}=\frac{4}{2+\sin 2x}-1.$$

因为$\frac{\pi}{3}\geqq x\geqq\frac{\pi}{6}$，所以

$$\frac{2\pi}{3}\geqq 2x\geqq\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin 2x\leqq 1.$$

因此，y的最大值是

$$y=\frac{4}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-1=\frac{4-\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{13}(19-8\sqrt{3}).$$

y的最小值是

$$y=\frac{4}{2+1}-1=\frac{1}{3}.$$

2376. 求$(5-\sin x)(2+\sin x)$的最大值。

解 这里，因式$5-\sin x$，$2+\sin x$都是正的，且

$$(5-\sin x)+(2+\sin x)=7,\ (\text{常数})$$

所以，原式仅当

$$5-\sin x=2+\sin x$$

时取得最大值。

$$\therefore\ \sin x=\frac{3}{2}.$$

但根据$\sin x$的性质上式不能成立。所以，当

$$(5-\sin x)-(2+\sin x)=3-2\sin x$$

取得最小值时，原式取得最大值。也即$\sin x=1$时原式取得最大值

$$y=(5-1)(2+1)=12.$$

2377. 当函数$y=2\cos x-3\sin x$取得最大时，$\operatorname{tg}x$是多少？

解 把给出的函数变形为

$$y=2\cos x-3\sin x$$

$$=\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos x-\frac{3}{\sqrt{13}}\sin x\right).$$

设$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$，则

$$y=\sqrt{13}(\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha)$$

$$=\sqrt{13}\cos(x+\alpha).$$

要使y取得最大值，必须使

$$x+\alpha=2n\pi.\ \therefore\ x=2n\pi-\alpha.$$

这时

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(2n\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$
$$=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{2}.$$

2378. 当 a 是确定的实数时，求函数

$$2a\sin x-\cos^2 x$$

的最大值和最小值.

解 设给出的式子为 y，作变形，得

$$y=2a\sin x-\cos^2 x=2a\sin x-(1-\sin^2 x)$$
$$=\sin^2 x+2a\sin x-1$$
$$=(\sin x+a)^2-1-a^2.$$

所以，y 取得最大值的情况是：

(i) 若 $a\geqq 0$，当 $\sin x=1$ 时 y 取得最大值，即

$$y=1+2a-1=2a.$$

(ii) 若 $a<0$，当 $\sin x=-1$ 时 y 取得最大值，即

$$y=(-1)^2+2a(-1)-1=-2a.$$

所以 y 的最大值是 $y=2|a|$.

y 取得最小值的情况是：

(i) 若 $a>1$，当 $\sin x=-1$ 时 y 取得最小值，即

$$y=(-1)^2+2a(-1)-1=-2a.$$

(ii) 若 $-1\leqq a\leqq 1$，当 $\sin x=-a$ 时 y 取得最小值．即

$$y=-(a^2+1).$$

(iii) 若 $a<-1$，当 $\sin x=1$ 时 y 取得最小值，即

$$y=1+2a-1=2a.$$

综合起来，y 的最小值是

$|a|>1$ 时，$y=-2|a|$.

$|a|\leqq 1$ 时，$y=-(a^2+1)$.

2379. x、y 是任意的角，求下列各函数的最大值和最小值：

(1) $3\sin x-4\cos y$;

(2) $3\sin^2 x-4\cos^2 y$.

解 (1) 函数 $3\sin x-4\cos y$，当 $\sin x=1$，$\cos y=-1$ 时取得最大值，最大值是 $3+4=7$．又当 $\sin x=-1$，$\cos y=1$ 时该函数取得最小值，最小值是 $-3-4=-7$.

(2) 函数 $3\sin^2 x-4\cos^2 y$，当 $\sin x=\pm 1$，$\cos y=0$ 时取得最大值，最大值是 $3-0=3$．又当 $\sin x=0$，$\cos y=\pm 1$ 时该函数取得最小值，最小值是 $0-4=-4$.

2380. n 是确定的正整数，x 是实数．求

$$\frac{\cos^n\left[x+(-1)^n\frac{3}{2}\pi\right]-3}{\sin^n[x-(2n-1)\pi]+3}$$

的最大值和最小值.

解

$$\cos\left[x+(-1)^n\frac{3}{2}\pi\right]$$
$$=\cos x\cos\left[(-1)^n\frac{3}{2}\pi\right]$$
$$-\sin x\sin\left[(-1)^n\frac{3}{2}\pi\right]$$
$$=(-1)^n\sin x.$$
$$\sin[x-(2n-1)\pi]$$
$$=\sin(x+\pi)=-\sin x.$$
$$\therefore\quad f(x)=\frac{\cos^n\left[x+(-1)^n\frac{3}{2}\pi\right]-3}{\sin^n[x-(2n-1)\pi]+3}$$
$$=\frac{(-1)^{n^2}\sin^n x-3}{(-1)^n\sin^n x+3}.$$

所以，当 n 是偶数时，

$$f(x)=\frac{\sin^n x-3}{\sin^n x+3}=1-\frac{6}{\sin^n x+3};$$

当 n 是奇数时，

$$f(x)=\frac{\sin^n x+3}{\sin^n x-3}=1-\frac{6}{3-\sin^n x}.$$

当 n 是偶数时，由 $-1\leqq\sin x\leqq 1$ 可推得 $0\leqq\sin^n x\leqq 1$．所以，当 $\sin^n x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $-\frac{1}{2}$；当 $\sin^n x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值 -1.

又当 n 是奇数时，$-1\leqq\sin^n x\leqq 1$．所以，当 $\sin^n x=-1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $-\frac{1}{2}$；当 $\sin^n x=1$ 时，$f(x)$ 取得最小值 -2.

所以 $f(x)$ 的最大值是 $-\frac{1}{2}$；最小值，当 n 是偶数时，是 -1，当 n 是奇数时，是 -2.

2381. 在三角形 ABC 中，求

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}$$

的最小值.

解 因为 A、B、C 是三角形的内角，所以

$$\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1.$$
$$2\sum\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=2+\sum\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^2.$$

当 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ 时，$2\sum\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}$ 取得最小值 2. 所以原式当 $A=B=C$ 时取得最小值 1.

2382. a、b 是确定的实数. 若当 x 取各种实数值时,

$$2ab\cos^2 x-(a^2-b^2)\sin x\cos x$$

的最大值是 2，当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，上式的值是 $\sqrt{3}$，试确定 a、b 的值.

解　因为 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos x=\frac{1}{2}$，所以

$$2ab\cdot\frac{1}{4}-(a^2-b^2)\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}. \qquad ①$$

又因为

$$\begin{aligned}&[(b+a)\cos x+(b-a)\sin x]^2\\&=(b+a)^2\cos^2 x+2(b^2-a^2)\sin x\cos x\\&\quad+(b-a)^2\sin^2 x\\&=b^2+a^2+2ab(\cos^2 x-\sin^2 x)\\&\quad-2(a^2-b^2)\sin x\cos x\\&=(b-a)^2+4ab\cos^2 x\\&\quad-2(a^2-b^2)\sin x\cos x,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&2ab\cos^2 x-(a^2-b^2)\sin x\cos x\\&=\frac{1}{2}[(b+a)\cos x+(b-a)\sin x]^2\\&\quad-\frac{1}{2}(b-a)^2\\&=\frac{1}{2}[(b+a)^2+(b-a)^2]\sin^2(x+\alpha)\\&\quad-\frac{1}{2}(b-a)^2\\&=(a^2+b^2)\sin^2(x+\alpha)-\frac{1}{2}(b-a)^2.\end{aligned}$$

其中 α 由 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b+a}{b-a}$ 确定. 因此，当

$$\sin^2(x+\alpha)=1$$

时，$2ab\cos^2 x-(a^2-b^2)\sin x\cos x$ 取得最大值，即

$$\begin{aligned}&a^2+b^2-\frac{1}{2}(b-a)^2\\&=\frac{2a^2+2b^2-b^2-a^2+2ab}{2}=\frac{(a+b)^2}{2}.\end{aligned}$$

设这个值是 2，则 $(a+b)^2=4$，$a+b=\pm2$.

用 $b=2-a$ 代入 ①，得

$$\begin{aligned}&2a(2-a)-(a^2-4+4a-a^2)\sqrt{3}\\&=4\sqrt{3},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 4a-2a^2-4\sqrt{3}a=0.$$

$$\therefore\quad a=0,\quad 或\quad a=2-2\sqrt{3}.$$

从而得出

$$b=2,\quad 或\quad b=2\sqrt{3}.$$

又用 $b=-2-a$ 代入 ①，得

$$\begin{aligned}&-2a(2+a)-(a^2-4-4a-a^2)\sqrt{3}\\&=4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad -4a-2a^2+4\sqrt{3}a=0.$$

$$\therefore\quad a=0,\quad 或\quad a=2\sqrt{3}-2,$$

从而得出

$$b=-2,\quad 或\quad b=-2\sqrt{3}.$$

因此，答案是

$$\begin{cases}a=0,\\b=2,\end{cases}\quad\begin{cases}a=2-2\sqrt{3},\\b=2\sqrt{3},\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=0,\\b=-2,\end{cases}\quad\begin{cases}a=2\sqrt{3}-2,\\b=-2\sqrt{3}.\end{cases}$$

2383. (1) 设 x、θ 分别在 $1\leq x\leq2$，$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$ 的范围内，把

$$\begin{aligned}F=&x\cos^2\theta+(4-2x)\sin\theta\cos\theta\\&+(2-x)\sin^2\theta\end{aligned}$$

看作是 x 的函数，试问：F 的最大值和最小值是 θ 的怎样的函数?

(2) 若 x、θ 在 (1) 中给出的范围内，求 F 的最大值和最小值. 并问：当 x、θ 等于什么值时 F 取到这个最大值和最小值?

解　(1) 按 x 整理，得

$$\begin{aligned}F=&x\cos^2\theta+(4-2x)\sin\theta\cos\theta\\&+(2-x)\sin^2\theta\\=&x(\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)\\&+4\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta\\=&x(\cos2\theta-\sin2\theta)\\&+2\sin2\theta+1-\cos2\theta.\end{aligned}$$

当 $\cos2\theta-\sin2\theta>0$ 即 $0\leq\theta<\frac{\pi}{8}$ 时，F 是 x 的增函数，由此可知，在 $1\leq x\leq2$ 的范围内，

最大值是 $F=1+\cos2\theta$（$x=2$ 时取得）

最小值是 $F=1+\sin2\theta$（$x=1$ 时取得）

当 $\cos 2\theta-\sin 2\theta<0$ 即 $\frac{\pi}{8}<\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ 时，F 是 x 的减函数，由此可知

最大值是 $F=1+\sin 2\theta$ ($x=1$ 时取得)

最小值是 $F=1+\cos 2\theta$ ($x=2$ 时取得)

当 $\cos 2\theta-\sin 2\theta=0$ 即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，$F=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$，这时无最大值最小值可言。

(2) 当 $0\leqq\theta<\frac{\pi}{8}$ 时，

$$2\geqq1+\cos 2\theta>1+\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$1\leqq1+\sin 2\theta<1+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

当 $\frac{\pi}{8}<\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ 时，

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}<1+\sin 2\theta\leqq2,$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}>1+\cos 2\theta\geqq1.$$

因此，由(1)的结果可得，F 的最大值是 2，这时 $x=2$，$\theta=0$ 或 $x=1$，$\theta=\frac{\pi}{4}$。又 F 的最小值是 1，这时 $x=1$，$\theta=0$ 或 $x=2$，$\theta=\frac{\pi}{4}$。

2384. 若 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$，试答下列问题：

(1) 求 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ 的取值范围；

(2) 求函数

$$y=7-4\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

的最大值和最小值．这时 θ 应是多少？

解 (1) 因为 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$，所以

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{2\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad \cos\frac{2\pi}{3}\leqq\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq\cos\frac{\pi}{6}.$$

$$-\frac{1}{2}\leqq\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) $$y=7-4\left[1-\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right]-4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=4\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+3.$$

设 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=x$，则

$$y=4x^2-4x+3=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2,$$

$$\left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

所以，当 $x=\frac{1}{2}$ 时 y 取得最小值 2；当 $x=-\frac{1}{2}$ 时 y 取得最大值 6。

$$\therefore\quad \begin{cases}\theta=\frac{\pi}{6}\text{ 时，}y\text{ 的最小值为 }2.\\ \theta=\frac{\pi}{2}\text{ 时，}y\text{ 的最大值为 }6.\end{cases}$$

2385. 已知三角形 ABC 中的一边 a 及对角 A，求这个三角形面积的最大值．

解 当 $BC=a$ 给定时，三角形 ABC 取得最大面积等价于 BC 上的高 AD 的长取得最大值．容易知道，当 A 是等腰三角形的顶点时，AD 才能取得最大值．这时

$$AD=BD\operatorname{ctg}\angle BAD=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A.$$

因此三角形的面积是

$$\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A.$$

2386. 若 $f(x)=\csc 2x-2\cos 4x$，
$\sin 2x=t$，

(1) 试把 $f(x)$ 用 t 的式子表出；

(2) 求(1)中所得式的极小值；

(3) 当(1)中式子取得最小时，求 $\operatorname{tg}x$ 的值．

解 (1)

$$f(x)=\csc 2x-2\cos 4x$$

$$=\frac{1}{\sin 2x}-2(\cos^2 2x-\sin^2 2x)$$

$$=\frac{1}{\sin 2x}-2(1-2\sin^2 2x).$$

用 $\sin 2x=t$ 代入，并设所得的式子为 $g(t)$，则

$$f(x)=g(t)=4t^2+\frac{1}{t}-2.$$

(2) $g'(t)=8t-\frac{1}{t^2}$，当 $8t^3-1=0$ 时，得 $t=\frac{1}{2}$．这时得到 $g(t)$ 的极小值．所求的极小值为 $g\left(\frac{1}{2}\right)=1+2-2=1$。

(3) 由题意可知 $\sin 2x=\frac{1}{2}$.

$$\therefore\quad 2x=n\cdot 360^\circ+30^\circ,$$

或

$$2x=n\cdot 360^\circ+150^\circ.$$

从而得出

$$\operatorname{tg}(15^\circ+n\cdot 180^\circ)=\operatorname{tg}15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$$

$$=\frac{\sin(45^\circ-30^\circ)}{\cos(45^\circ-30^\circ)}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=2-\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{tg}(n\cdot 180^\circ+75^\circ)=\operatorname{tg}75^\circ=\frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ}$$

$$=\frac{\sin(45^\circ+30^\circ)}{\cos(45^\circ+30^\circ)}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}x=2\pm\sqrt{3}.$$

2387. 如果 $0\leq x\leq 2\pi$，求函数 $\cos x-\sin x$ 的最大值和最小值，并求出何时取得最大值和最小值。

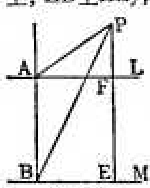
解　$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$,

其中 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 的最大值和最小值分别是 1 和 -1. 所以

当 $x=\frac{3\pi}{4}$ 时，函数 $\cos x-\sin x$ 取到最小值 $-\sqrt{2}$.

当 $x=\frac{7\pi}{4}$ 时，该函数取到最大值 $\sqrt{2}$.

2388. AL、BM 是两平行线，点 P 在 AL、BM 之外．求出 AL、BM 的公垂线段 AB(即 A 在 AL 上，B 在 BM 上，$AB\perp AL$)，使得从 P 看 AB 的视角最大．



解　连结 PA、PB，过 P 作 PFE 垂直于 AL、BM，与 AL、BM 分别交于 F、E. 这时

$$\operatorname{tg}\angle APB=\operatorname{tg}(\angle APE-\angle BPE)$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\angle APE-\operatorname{tg}\angle BPE}{1+\operatorname{tg}\angle APE\operatorname{tg}\angle BPE}.$$

设 $AF=BE=x$, $PF=l$, $FE=m$. 则

$$\operatorname{tg}\angle APB=\frac{\frac{x}{l}-\frac{x}{l+m}}{1+\frac{x^2}{l(l+m)}}$$

$$=\frac{mx}{l(l+m)+x^2}.$$

由于 $\angle APB$ 取得最大值时，$\operatorname{tg}\angle APB$ 也取得最大值，所以只要求出何时 $\frac{xm}{l(l+m)+x^2}$ 取得最大值即可，而

$$\frac{mx}{l(l+m)+x^2}=\frac{m}{\frac{l(l+m)}{x}+x}.$$

这只要分母 $\frac{l(l+m)}{x}+x$ 取得最小值就可以了．因为 $\frac{l(l+m)}{x}$ 与 x 的积为常数，所以仅当 $\frac{l(l+m)}{x}=x$ 时 $\angle APB$ 取得最大值．这时 BE 是 PF、PE 的比例中项．即如果过 P 作 $Pn\parallel AL$ 和 AB 的延长线相交于 C，则 C 是过 F、E 且与 n 相切的圆的切点．

2389. 求函数 $\sin^2 x-2\sin x+3$ 的最大值和最小值．

解　设原式为 $f(x)$，则 $f(x)=(\sin x-1)^2+2$.

$$\because\quad -1\leq\sin x\leq 1,$$

$$\therefore\quad -2\leq\sin x-1\leq 0,$$

$$\therefore\quad 2\leq f(x)\leq 6.$$

2390. 设四边形的两条对角线长度为 h 和 k，交角为 A，证明它的外接矩形的最大面积为 $\frac{1}{2}hk(1+\sin A)$.

解　设四边形的长为 h 的对角线与过其一端的矩形一边成角 θ，则矩形的另一边为 $h\sin\theta$. 而过长为 k 的对角线与其过一端的矩形边交成

$$\frac{3\pi}{2}-(\theta+A).$$

由此可知，另一边长为 $k\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta-A\right)$，即 $-k\cos(\theta+A)$.

因此，

$$\text{矩形的面积}=-hk\sin\theta\cos(\theta+A)$$

$$=\frac{hk}{2}[-\sin(2\theta+A)+\sin A].$$

所以当 $2\theta+A=\frac{3\pi}{2}$ 时，外接矩形的面积取得最大值，即

$$\frac{hk}{2}(1+\sin A).$$

2391. 求函数 $4\sin^2 x-3\sin x+8$ 的最大值和最小值.

解　设给出的式子为 $f(x)$，则

$$f(x)=4\left(\sin x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{119}{16}.$$

$$\because\quad -1\leq\sin x\leq 1,$$

$$\therefore\quad -\frac{11}{8}\leq\sin x-\frac{3}{8}\leq\frac{5}{8}.$$

$$\therefore\quad \frac{119}{16}\leq f(x)\leq 15.$$

因此给出函数的最大值是 15，最小值是 $\frac{119}{16}$.

2392. 在三角形 ABC 中，求

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C$$

的最小值.

解　设 C 确定，则 $A+B$ 也确定. 因此

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}.$$

显然，当 $\sin A\sin B$ 取得最大值时 $\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B$ 取得最小值. 而

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B).$$

所以当 $A=B$ 时 $\sin A\sin B$ 取得最大值. 这时，$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B$ 取得最小值. 由此可得，$A=B=C=60°$ 时给出的式子的值最小，其值为 $\sqrt{3}$.

2393. 在三角形 ABC 中，求 $\cos A\cos B\times\cos C$ 的最大值.

解　设 $A+B=a$ 为定值，则 C 也为定值. 这时

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$

$$=\frac{1}{2}\cos(A-B)+\frac{1}{2}\cos a.$$

显然，当 $A=B$ 时 $\cos A\cos B$ 取得最大值，就是说，当固定一个角时，只有当其他两个角相等时原式才可取得最大值.（可以证明，原式有最大值.）从而得出，当三个角相等时 $\cos A\cos B\cos C$ 取得最大值，即

$$\cos^3 60°=\frac{1}{8}.$$

2394. 如果 a、b、c、k 为常数，α、β、γ 满足关系式 $a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta+c\operatorname{tg}\gamma=k$，求

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma$$

的最小值.

解

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)&(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma)\\&-(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta+c\operatorname{tg}\gamma)^2\\=&(b\operatorname{tg}\gamma-c\operatorname{tg}\beta)^2\\&+(c\operatorname{tg}\alpha-a\operatorname{tg}\gamma)^2\\&+(a\operatorname{tg}\beta-b\operatorname{tg}\alpha)^2.\end{aligned}$$

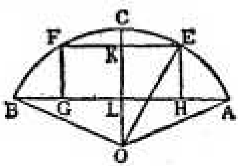
上式右边的最小值是 0，所以

$$(a^2+b^2+c^2)(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma)-k^2$$

的最小值是 0. 即 $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma$ 的最小值是

$$\frac{k^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

2395. 试在一个中心角小于平角的给定弓形中，内接一个面积最大的矩形.



解　设 ACB 为给出的弓形，$EFGH$ 为内接矩形. 设 EF、GH 与 OC 的交点分别是 K、L，C 为 AB 的中点，O 为弓形所在圆的圆心. 设 $\angle EOC$、$\angle AOC$ 分别为 x、α，现在要解的问题是已知 α，求出能使内接矩形的面积最大的角 x.

设半径为 r，则

$$EF=2EK=2OE\sin\angle EOC=2r\sin x.$$

$$\begin{aligned}EH=KL&=OK-OL\\&=OE\cos\angle EOK-OA\cos\angle AOL\\&=r\cos x-r\cos\alpha.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\text{矩形的面积}&=EF\cdot EH\\&=2r^2\sin x(\cos x-\cos\alpha),\end{aligned}$$

矩形面积取得最大值就等价于

$$\sin x(\cos x-\cos\alpha)$$

取得最大值，因而只要求

$$\sin^2 x(\cos x-\cos\alpha)^2$$

何时取得最大值即可. 令

$$\cos x=t,\ \cos\alpha=A,$$

设

$$\begin{aligned}f(t)&=\sin^2 x(\cos x-\cos\alpha)^2\\&=(1-t^2)(t-A)^2.\end{aligned}$$

当角 x 变化 θ 时，设 $\cos x$ 的增量为 h，即

$$\cos(x+\theta)=\cos x+h=t+h,$$

则记 $f(t+h)$ 为 F 后，得

$$F=[1-(t+h)^2][(t-A)+h]^2$$
$$=[(1-t^2)-2ht-h^2]$$
$$\times[(t-A)^2+2h(t-A)+h^2]$$
$$=f(t)+Ph+Qh^2+Rh^3+Sh^4.$$

其中

$$P=-2(t-A)(2t^2-At-1), \quad ①$$
$$Q=-(6t^2-6At+A^2-1), \quad ②$$
$$R=-2(2t-A),$$
$$S=-1.$$
$$\therefore \quad \frac{F-f(t)}{h^2}=\frac{P}{h}+Q+Rh+Sh^2.$$

当$|h|$非常小时，如果$P\neq0$，那么随着h取正或取负，$\frac{F-f(t)}{h^2}$的值也取正或取负．于是应令$P=0$，解$P=0$且取$t>0$，得

$$\cos x=\frac{1}{4}(\cos\alpha-\sqrt{\cos^2\alpha+8}).$$

这时参见①、②可知，因为$P=0$，所以$2t^2-At-1=0$．而

$$Q=-[3(2t^2-At-1)-3At+A^2+2].$$
$$\therefore \quad Q=-(-3At+A^2+2).$$

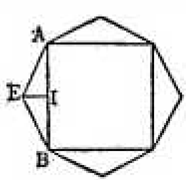
当$t<1$时，上式括号中的值大于

$$A^2-3A+2=(A-1)(A-2)>0.$$
$$\therefore \quad Q<0.$$

因此，这时可求得的最大值是$\sqrt{f(t)}$，即

$$最大值=2r^2\sqrt{f(t)}.$$

2396． 以正方形的各边为底，向外作全等的等腰三角形，已知腰长为c，问正方形多大时才能使作出的八边形面积取得最大值．



解 设AE是等腰三角形的一腰，要求角AEI，可设这个角为x，则$AI=c\sin x$，而等腰三角形AEB的面积是$\frac{1}{2}c^2\sin 2x$，所以八边形的面积是$4\times\frac{c^2}{2}\sin 2x+4c^2\sin^2 x$．去掉常数因子，现在要求的是

$$\sin 2x+2\sin^2 x=\sin 2x+(1-\cos 2x)$$

何时取得最大值．即$\sin 2x-\cos 2x$何时取到最大．因为

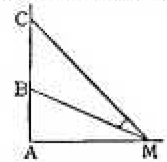
$$\sin 2x-\cos 2x=\sin 2x-\sin(90^\circ-2x)$$
$$=2\cos 45^\circ\sin(2x-45^\circ),$$

所以，仅当$\sin(2x-45^\circ)$取得最大值时，所求的八边形才可取得最大面积，即当

$$2x-45^\circ=90^\circ,\quad x=\frac{135^\circ}{2}=67.5^\circ$$

时可取得，这时正方形的边长是$2c\sin 67.5^\circ$．

2397． 两条互相垂直的直线交于点A，其中一条直线上有B、C两定点，另一条直线上有一点M，问AM多大时从M看BC的视角达到最大．



解 现设$AM=x$．

$$\operatorname{tg}\angle BMC=\operatorname{tg}(\angle CMA-\angle BMA)$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\angle CMA-\operatorname{tg}\angle BMA}{1+\operatorname{tg}\angle CMA\operatorname{tg}\angle BMA}$$
$$=\frac{\frac{AC}{x}-\frac{AB}{x}}{1+\frac{AC}{x}\cdot\frac{AB}{x}}=\frac{AC-AB}{x+\frac{AC\cdot AB}{x}}.$$

因为$\angle BMC$显然是锐角，所以仅当$\operatorname{tg}\angle BMC$即

$$\frac{AC-AB}{x+\frac{AC\cdot AB}{x}}$$

取得最大值时$\angle BMC$才可取得最大值．而$\frac{AC-AB}{x+\frac{AC\cdot AB}{x}}$中分子为常数，所以仅当分母最小时这个分式才可取得最大值．因为x与$\frac{AB\cdot AC}{x}$的积是定值，所以仅当$x=\frac{AC\cdot AB}{x}$时分母取得最小值．这时

$$x=AM=\sqrt{AC\cdot AB},$$

即AM是AC、AB的比例中项．即点M是过B、C且与AM相切的圆的切点．

2398． 在三角形ABC中，求

$$\cos A+\cos B+\cos C$$

的最大值．

解 设C为定值，则$A+B$也为定值．因此

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

所以，当$A=B$时$\cos A+\cos B$取得最大值．其他的角也有同样的情况，可以证明原

式有最大值，所以仅当

$$A=B=C=60°$$

时原式才可能取得最大值，最大值为

$$3\times\cos 60°=\frac{3}{2}.$$

2399. α、β 是 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 间的角。α、β 的和是定角 2σ，求 $\sin\alpha\sin\beta$ 的最大值和最小值。

解 不妨设 $\alpha\geqq\beta$，于是可设 $h\geqq 0$ 且 $\alpha=\sigma+h$，$\beta=\sigma-h$。则

$$\sin\alpha\sin\beta=\sin(\sigma+h)\sin(\sigma-h)$$
$$=\sin^2\sigma-\sin^2 h.$$

现在只要考察 h 的变化情况即可。因为

$$0\leqq\beta\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2},$$

所以 $$0\leqq\sigma-h\leqq\sigma+h\leqq\frac{\pi}{2},$$

$$0\leqq h\leqq\sigma,\ 0\leqq h\leqq\frac{\pi}{2}-\sigma.$$

当 $\sigma\leqq\frac{\pi}{2}-\sigma$ 即 $\sigma\leqq\frac{\pi}{4}$ 时，有 $0\leqq h\leqq\sigma$，这时原式最大值是 $\sin^2\sigma$，最小值是 0。当 $\sigma>\frac{\pi}{2}-\sigma$ 即 $\sigma>\frac{\pi}{4}$ 时，有 $0\leqq h\leqq\frac{\pi}{2}-\sigma$，这时原式最大值是 $\sin^2\sigma$，最小值是 $\sin^2\sigma-\cos^2\sigma$。

2400. 如果锐角 α、β 的和为一定角 2σ，求 $\cos\alpha\cos\beta$ 和 $\cos\alpha+\cos\beta$ 的最大值。

解 设 $h\geqq 0$，$\alpha=\sigma+h$，$\beta=\sigma-h$，则

$$\cos\alpha\cos\beta=\cos(\sigma+h)\cos(\sigma-h)$$
$$=\cos^2\sigma\cos^2 h-\sin^2\sigma\sin^2 h$$
$$=\cos^2\sigma-\sin^2 h,$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=\cos(\sigma+h)+\cos(\sigma-h)$$
$$=2\cos\sigma\cos h.$$

由此可得，两者都是当 $h=0$ 即 $\alpha=\beta=\sigma$ 时取得最大值。它们的最大值分别是 $\cos^2\sigma$，$2\cos\sigma$。

2401. 如果 α、β 在 0 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间，$\alpha+\beta$ 是定角 2σ，求 $\csc\alpha+\csc\beta$ 的最大值。

解 设 $h\geqq 0$，$\alpha=\sigma+h$，$\beta=\sigma-h$，则

$$f(h)=\frac{1}{\sin(\sigma+h)}+\frac{1}{\sin(\sigma-h)}$$
$$=\frac{\sin(\sigma-h)+\sin(\sigma+h)}{\sin(\sigma+h)\sin(\sigma-h)}$$
$$=\frac{2\sin\sigma\cdot\cos h}{\sin^2\sigma-\sin^2 h}.$$

所以 $f(h)$ 的最大值是 $f(0)=2\csc\sigma$。

2402. 在三角形 ABC 中，求

$$\sin A+\sin B+\sin C$$

的最大值。

解 若设 C 为常数，则 $A+B$ 也确定，于是

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

仅当 $A=B$ 时取得最大值。(可以证明，原式有最大值。)由此可知 $\sum\sin A$ 仅当 $A=B=C$ 时取得最大值。最大值是

$$3\sin 60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2403. 如果 α、β 在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 间，$\alpha+\beta$ 为定角 2σ，求 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$ 的最大值和最小值。

解 设 $h\geqq 0$，$\alpha=\sigma+h$，$\beta=\sigma-h$，则

$$f(h)=\frac{\sin(\sigma+h)}{\cos(\sigma+h)}+\frac{\sin(\sigma-h)}{\cos(\sigma-h)}$$
$$=\frac{\sin 2\sigma}{\cos(\sigma+h)\cos(\sigma-h)}$$
$$=\frac{2\sin 2\sigma}{\cos 2\sigma+\cos 2h}.$$

因为 $\cos 2\sigma$ 可以小于或等于零，所以必须加以讨论。因为 $0\leqq 2h\leqq 2\sigma$，所以

(i) 当 $\cos 2\sigma>0$ 时，

$$\text{最大值}=f(\sigma)=\operatorname{tg}2\sigma,$$
$$\text{最小值}=f(0)=\frac{2\sin 2\sigma}{\cos 2\sigma+1}.$$

(ii) 当 $\cos 2\sigma=0$ 时，没有最大值，

$$\text{最小值}=f(0)=\frac{2\sin 2\sigma}{\cos 2\sigma+1}.$$

(iii) 当 $\cos 2\sigma<0$ 时，因为若 $2h\to\pi-2\sigma$ 则 $\cos 2\sigma+\cos 2h\to\infty$，所以这时没有最大值，也没有最小值。

2404. 在三角形 ABC 中，求

$$\sec A+\sec B+\sec C$$

的最小值。

解 $$\sec A+\sec B=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}$$
$$=\frac{\cos A+\cos B}{\cos A\cos B}$$
$$=\frac{2\cos\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}}{\cos A\cos B}.$$

当 C 是定值时，$A+B$ 也是定值，所以若设

$$\frac{A+B}{2}=\theta,\quad \frac{A-B}{2}=x,$$

$$\sec A+\sec B=f(x),$$

则
$$f(x)=\frac{2\cos\theta\cos x}{\cos A\cos B}$$
$$=\frac{2\cos\theta\cos x}{\cos^2 x-\sin^2\theta}$$
$$=\cos\theta\left(\frac{1}{\cos x+\sin\theta}+\frac{1}{\cos x-\sin\theta}\right).$$

上式当 $\cos x=1$ 时取得最小值，最小值是

$$f(0)=\frac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta}.$$

而当 $\cos x=1$ 时，$A=B$。(可以证明，原式有最小值。)由此可知，当 $A=B=C$ 时原式取得最小值。

$$最小值=3\sec 60^\circ=6.$$

2405. 求 $a\cos(\alpha+\theta)+b\sin\theta$ 的最大值。

解 原式为

$$a\cos\alpha\cos\theta-a\sin\alpha\sin\theta+b\sin\theta$$

即 $$a\cos\alpha\cos\theta+(b-a\sin\alpha)\sin\theta.$$

所以当 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b-a\sin\alpha}{a\cos\alpha}$ 时原式取得最大值

$$\sqrt{a^2\cos^2\alpha+(b-a\sin\alpha)^2},$$

即等于 $\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\alpha}$.

2406. 求 $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ 的最大值。

解 原式就是

$$2\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$$
$$=2(\sin 30^\circ\cos\theta+\cos 30^\circ\sin\theta)$$
$$=2\sin(\theta+30^\circ).$$

所以，原式仅当 $\sin(\theta+30^\circ)=1$ 时取得最大值。最大值为 2.

2407. 求 $p\sin\theta+q\cos\theta$ 的最大值和最小值。

解 原式 $=\sqrt{p^2+q^2}\sin(\theta+\varphi)$,

其中 $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{q}{p}$.

因此，原式当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时取得最大值，最大值是 $\sqrt{p^2+q^2}$.

原式当 $\sin(\theta+\varphi)=-1$ 时取得最小值，最小值是 $-\sqrt{p^2+q^2}$.

2408. 求 $p\cos\theta+q\sin(\alpha+\theta)$ 的最大值。

解 原式为

$$p\cos\theta+q\sin\alpha\cos\theta+q\cos\alpha\sin\theta$$
$$=(p+q\sin\alpha)\cos\theta+q\cos\alpha\sin\theta.$$

当 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{q\cos\alpha}{p+q\sin\alpha}$ 时原式取得最大值，最大值是

$$\sqrt{(p+q\sin\alpha)^2+q^2\cos^2\alpha}$$

即 $$\sqrt{p^2+q^2+2pq\sin\alpha}.$$

2409. 已知 $A+B+C=90^\circ$，求

$$\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^2B+\operatorname{tg}^2C$$

的最小值。

解

$\because$ $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A=1$,

$\therefore$ $\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^2B+\operatorname{tg}^2C$

$$=1+\frac{1}{2}(\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B)^2+\frac{1}{2}(\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}C)^2+\frac{1}{2}(\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}A)^2.$$

所以，当

$\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}A=0$

时，原式取得最小值，即 $A=B=C$ 时取得最小值，最小值是 1.

2410. 如果 $x+y$ 是常数，求 $\sin x\sin y$ 的最大值和最小值。

解 设 $A=x+y$, $x=\dfrac{A}{2}+z$, $y=\dfrac{A}{2}-z$,

则 $$\sin x\sin y=\sin\left(\frac{A}{2}-z\right)\sin\left(\frac{A}{2}+z\right)$$
$$=\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2 z.$$

因为 $\sin^2 z$ 在 0 与 1 之间，所以 $\sin x\sin y$ 在 $\sin^2\dfrac{A}{2}$ 和 $-\cos^2\dfrac{A}{2}$ 之间。所以原式的最大值是 $\sin^2\dfrac{A}{2}$，最小值是 $-\cos^2\dfrac{A}{2}$.

2411. 求 $3-2\cos\theta+\cos^2\theta$ 的最小值。

解 设 $\cos^2\theta-2\cos\theta+3=\lambda$，则

$$\cos^2\theta-2\cos\theta+(3-\lambda)=0.$$

从而得出 $\cos\theta$ 取得实数的条件是

$$4-4(3-\lambda)\geqq 0.$$

化简这个不等式得 $\lambda\geqq 2$.

验证后可知，$\lambda=2$ 是可以取得的。所以原式的最小值是 2.

2412． 求 $8\sec^2\theta+18\cos^2\theta$ 的最小值．

解　因为 $8\sec^2\theta\cdot 18\cos^2\theta=8\times 18$．所以原式仅当 $8\sec^2\theta=18\cos^2\theta$ 时取得最小值．因此

$$\cos^2\theta=\frac{2}{3},\ \sec^2\theta=\frac{3}{2}.$$

这时原式取得的最小值是

$$8\times\frac{3}{2}+18\times\frac{2}{3}=24.$$

2413． 求 $4\sin^2\theta+\csc^2\theta$ 的最小值．

解　因为 $4\sin^2\theta$ 和 $\csc^2\theta$ 的积为常数，所以原式仅当 $4\sin^2\theta=\csc^2\theta$ 时取得最小值，这时 $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，原式取得的最小值是 4．

2414． 求 $p\operatorname{ctg}\theta+q\operatorname{tg}\theta$ 的最小值，其中 $pq>0$，θ 是锐角．

解　因为 $p\operatorname{ctg}\theta$ 与 $q\operatorname{tg}\theta$ 的积是常数 pq，所以仅当 $p\operatorname{ctg}\theta=q\operatorname{tg}\theta$ 时两者的和取得最小值．从而得出：

$$\operatorname{tg}^2\theta=\frac{p}{q}.\quad\therefore\quad \operatorname{tg}\theta=\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

这时原式取得的最小值是

$$p\sqrt{\frac{q}{p}}+q\sqrt{\frac{p}{q}}=2\sqrt{pq}.$$

2415． 求 $1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ 的最大值．

解　$\sin x+\cos x=\sin x+\sin(90^\circ-x)$
$$=2\sin 45^\circ\cos(45^\circ-x),$$

只有当 $\cos(45^\circ-x)$ 取得最大值即

$$45^\circ-x=360^\circ k,$$

就是 $x=45^\circ-360^\circ k$ 时，$\sin x+\cos x$ 取得最大值．

$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，只有当

$$2x=90^\circ+360^\circ k$$

也就是 $x=45^\circ+180^\circ k$ 时，$\sin x\cos x$ 取得最大值．

因为 $\sin x+\cos x$、$\sin x\cos x$ 都在 $x=45^\circ+360^\circ k$ 时取得最大值，所以这时原式可取得最大值，即

$$1+\sin 45^\circ+\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cos 45^\circ$$
$$=\frac{2\sqrt{2}+3}{2}.$$

2416． 已知

$$\sin(90^\circ-A)+\sin(180^\circ-A)=0,$$

求能使上式成立的一个绝对值最小的 A 的值．

解　因为 $\sin(180^\circ-A)=\sin A$，所以原式就是

$$\sin(90^\circ-A)+\sin A=0,$$
$$2\sin 45^\circ\cos(45^\circ-A)=0.$$

所以　　$\cos(45^\circ-A)=0.$

由 $45^\circ-A=90^\circ$ 可以得到 A 的值，即 $A=-45^\circ$．

2417． 把

$$x=u\cos\theta-v\sin\theta,$$
$$y=u\sin\theta+v\cos\theta$$

代入 x、y 的二次式

$$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c,$$

并整理成

$$Au^2+2Huv+Bv^2+2Fu+2Gv+C.$$

试问 $a+b$ 和 $A+B$ 之间有什么关系．

解　把表示 x、y 的式子代入给出的二次式，得

$$\begin{aligned}&ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c\\&=a(u\cos\theta-v\sin\theta)^2\\&\quad+2h(u\cos\theta-v\sin\theta)(u\sin\theta+v\cos\theta)\\&\quad+b(u\sin\theta+v\cos\theta)^2\\&\quad+2f(u\cos\theta+v\sin\theta)\\&\quad+2g(u\sin\theta+v\cos\theta)+c.\end{aligned}$$

设整理后的式子为

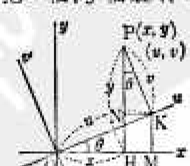
$$Au^2+2Huv+Bv^2+2Fu+2Gv+C.$$

比较对应的系数，得

$$A=a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta,$$
$$B=a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta.$$
$$\begin{aligned}\therefore\quad A+B&=a(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\&\quad+b(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\&=a+b.\end{aligned}$$

即　　$A+B=a+b.$

注　以原点为中心，把 x 轴、y 轴旋转 θ 角，得到新坐标轴为 u 轴、v 轴．



设点 P 关于 x、y 轴的坐标是 (x, y)，关于 u、v 轴的坐标是 (u, v)，点 P 向 x 轴、u 轴所作的垂线的垂足分别为 H、K．由 K 向 x 轴及 PH 所作垂线的垂足分别为 M、N．因为，

$$\angle KPN=\angle KOM=\theta,$$

所以

$$\begin{aligned}x&=OH=OM-HM=OM-NK\\&=OK\cos\theta-PK\sin\theta\\&=u\cos\theta-v\sin\theta.\\y&=PH=PN+NH=PN+KM\\&=PK\cos\theta+OK\sin\theta\\&=u\sin\theta+v\cos\theta.\end{aligned}$$

这就是说，本题题设中给出的式子是坐标轴的旋转公式.

2418. 求出使

$$A\cos^2\theta+B\cos^2(\alpha+\theta)+C\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$$

与 θ 无关的充要条件，其中

$$\sin\alpha\neq0,\ \cos\alpha\neq0.$$

解　(i) 必要条件：因为 θ 用 0、$-\alpha$、$\frac{\pi}{2}$ 分别代入后原式的值不变，所以

$$\begin{aligned}&A+B\cos^2\alpha+C\cos\alpha\\&\quad=A\cos^2\alpha+B+C\cos\alpha=B\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

由其中的第一、二式，得

$$A(1-\cos^2\alpha)=B(1-\cos^2\alpha),$$

即

$$A\sin^2\alpha=B\sin^2\alpha,$$

因为 $\sin\alpha\neq0$，所以 $A=B$.

又由第二、三式，得

$$2A\cos^2\alpha+C\cos\alpha=0.$$

因为 $\cos\alpha\neq0$，所以 $A=-\frac{C\sec\alpha}{2}$.

$$\therefore\quad A=B=-\frac{C\sec\alpha}{2}.\qquad ①$$

(ii) 充分条件：如果 ① 成立，那么

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{2}\{A(\cos2\theta+1)\\&\quad+B[\cos2(\alpha+\theta)+1]\\&\quad+C[\cos(\alpha+2\theta)+\cos\alpha]\}\\&=\frac{1}{2}[A\cos2\theta+B(\cos2\alpha\cos2\theta\\&\quad-\sin2\alpha\sin2\theta)+C(\cos\alpha\cos2\theta\\&\quad-\sin\alpha\sin2\theta)+A+B+C\cos\alpha]\\&=\frac{1}{2}[(A+B\cos2\alpha+C\cos\alpha)\cos2\theta\\&\quad-(B\sin2\alpha+C\sin\alpha)\sin2\theta\\&\quad+A+B+C\cos\alpha]\\&=\frac{1}{2}\Big\{\Big[-\frac{C}{2}\sec\alpha-\frac{C}{2}\sec\alpha(2\cos^2\alpha-1)\\&\quad+C\cos\alpha\Big]\cos2\theta-\Big(-\frac{C}{2}\sec\alpha\\&\quad\times2\sin\alpha\cos\alpha+C\sin\alpha\Big)\sin2\theta\\&\quad+A+B+C\cos\alpha\Big\}\\&=\frac{1}{2}(A+B+C\cos\alpha).\end{aligned}$$

可见，原式与 θ 无关．所以 ① 也是充分条件.

2419. 证明 $\cos36°\pm i\sin36°$ 和 $\cos108°\pm i\sin108°$ 是方程 $x^4-x^3+x^2-x+1=0$ 的根.

解　$x^4-x^3+x^2-x+1=\frac{x^5+1}{x+1}$.

所以只要求出方程 $x^5+1=0$ 的根，并除去 $x=-1$，就可以得到给出方程的根了.

而 $x^5=-1$，可写成

$$x^5=\cos n\pi+i\sin n\pi,$$

其中 n 是奇数．由此可得

$$\begin{aligned}x&=(\cos n\pi+i\sin n\pi)^{\frac{1}{5}}\\&=\cos\frac{n\pi}{5}+i\sin\frac{n\pi}{5}.\end{aligned}$$

当 n 取1、2、3、4时就得到求证方程的四个根．当 n 取5时得到 $x=-1$，这个根舍去.

2420. 证明

$$\begin{aligned}&\left(x-2\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(x-2\cos\frac{4\pi}{7}\right)\\&\quad\times\left(x-2\cos\frac{6\pi}{7}\right)=x^3+x^2-2x-1.\end{aligned}$$

解

$$\begin{aligned}\because\quad&\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\\&=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}\\&=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\\&\quad\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{7\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\end{aligned}$$

$$=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$=\frac{8\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$=\frac{4\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{16\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$=\frac{1}{8},$$

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$
$$+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right.$$
$$\left.+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$
$$=-\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad\left(x-2\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(x-2\cos\frac{4\pi}{7}\right)$$
$$\times\left(x-2\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$
$$=x^3-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^2+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x-8\cdot\frac{1}{8}$$
$$=x^3+x^2-2x-1.$$

2421. 如果 $\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{863}{864}$，证明 θ 约等于 5°.

解 因为 $\frac{\sin\theta}{\theta}$ 约等于1，所以 $|\theta|$ 很小，可把 $\sin\theta$ 展开到 θ^3 的式子取近似式，即

$$\sin\theta\approx\theta-\frac{\theta^3}{6}.$$

$$\therefore\quad\frac{\sin\theta}{\theta}\approx1-\frac{\theta^2}{6}\to1.$$

由 $\quad 1-\frac{\theta^2}{6}=\frac{863}{864}$，得 $\quad\frac{\theta^2}{6}=\frac{1}{864}.$

$$\therefore\quad\theta^2=\frac{1}{144}.\quad\therefore\quad\theta=\frac{1}{12}.$$

所以 θ 的度数约是

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=5^\circ.$$

2422. 证明

$$(2\cos\theta-1)(2\cos2\theta-1)(2\cos2^2\theta-1)$$
$$\cdots(2\cos2^{n-1}\theta-1)=\frac{2\cos2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}.$$

解

$$2\cos\theta-1=\frac{4\cos^2\theta-1}{2\cos\theta+1}=\frac{2\cos2\theta+1}{2\cos\theta+1},$$

$$2\cos2\theta-1=\frac{4\cos^22\theta-1}{2\cos2\theta+1}=\frac{2\cos4\theta+1}{2\cos2\theta+1},$$

$$2\cos2^{n-1}\theta-1=\frac{4\cos^2 2^{n-1}\theta-1}{2\cos2^{n-1}\theta+1}$$
$$=\frac{2\cos2^n\theta+1}{2\cos2^{n-1}\theta+1}.$$

把这些式子两边相乘，就得到要求证明的结果.

2423. 已知

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{\cos\beta(\cos x-\cos\alpha)}{\cos\alpha(\cos x-\cos\beta)},$$

证明 $\quad\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$

解 $\because\quad\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{\cos\beta(\cos x-\cos\alpha)}{\cos\alpha(\cos x-\cos\beta)},$

$$\therefore\quad\frac{\cos x-\cos\alpha}{\cos x-\cos\beta}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta\cos\beta}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha}.$$

所以

$$\cos x=\frac{\sin^2\beta\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha-\sin^2\alpha\cos\beta}$$
$$=\frac{(1-\cos^2\beta)\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta}{(1-\cos^2\beta)\cos\alpha-(1-\cos^2\alpha)\cos\beta}$$
$$=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{(\cos\alpha-\cos\beta)(1+\cos\alpha\cos\beta)}$$
$$=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}.$$

由此可得

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\cos\beta}$$
$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}.$$

所以 $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$.

2424. 如果 A、B、C 都是锐角，证明 $\sin(A+B+C)<\sin A+\sin B+\sin C$.

解

$$\begin{aligned}&\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)\\&=\sin A(1-\cos B\cos C)\\&\quad+\sin B(1-\cos C\cos A)\\&\quad+\sin C(1-\cos A\cos B)\\&\quad+\sin A\sin B\sin C.\end{aligned}$$

当 A、B、C 都是锐角时，上式中各项都是正的．所以原式得证。

2425. 求值:

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2^2}+\cos\frac{\beta}{2^2}\right)\cdots\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}+\cos\frac{\beta}{2^n}\right).$$

解 $\cos\frac{\alpha}{2^n}+\cos\frac{\beta}{2^n}$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2^n}-\cos^2\frac{\beta}{2^n}}{\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\cos\frac{\beta}{2^{n-1}}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}},$$

同理，可得

$$\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}+\cos\frac{\beta}{2^{n-1}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}}-\cos\frac{\beta}{2^{n-2}}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\cos\frac{\beta}{2^{n-1}}}.$$

依次作这样的变形，最后得

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos\beta)}{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}}.$$

把这些式子的两边分别相乘，得

$$\frac{\frac{(\cos\alpha-\cos\beta)}{2^n}}{\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}}.$$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{2^n\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}-\cos\frac{\beta}{2^n}\right)}$.

2426. 已知 $\cos A$，求 $\cos\frac{A}{3}$ 的值。

解 $\cos A=4\cos^3\frac{A}{3}-3\cos\frac{A}{3}$.

所以，当已知 $\cos A$ 时求 $\cos\frac{A}{3}$，只要解一个三次方程就行了。

注 设 $\cos\frac{A}{3}=x$，$\cos A=a$，且 $-1\leqq a\leqq 1$，则

$$f(x)=4x^3-3x-a=0.$$

由 $f'(x)=12x^2-3=0$，可得 $x=\pm\frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-(1+a),\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-a.$$
$$\therefore\quad f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)=a^2-1\leqq 0.$$

所以 $f(x)=0$ 有三个实根。

2427. 在 $x>0$ 的范围内，求出能使

$$\left[\log_2\left(x\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)\right]^2-\left(\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}\right)\left(2+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)\log_{81}x^8$$

取得最小值的 x 值。

解 $\because$ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right),$$
$$\log_{81}x^8=\frac{8\log_3 x}{\log_3 81}=2\log_3 x,$$

$\therefore$ 原式 $=\left(\log_3\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+\sqrt{3})2\log_3 x$$
$$=\left(\log_3 x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\log_3 x.$$

设 $\log_3 x=t$，则

$$原式=t^2-t+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t$$

$$=\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\geqq\frac{3}{16}.$$

所以要原式取得最小值,必须使

$$t=\frac{1}{4},\ 即\quad \log_3 x=\frac{1}{4}.$$

$$\therefore\quad x=3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}.$$

2428. 求 x 的二次函数

$$x^2-4(\cos\alpha)x-4\sin^2\alpha$$

的最小值. 其中 α 是满足 $0\leqq\alpha\leqq\pi$ 的角.

解

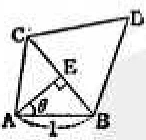
$$x^2-4(\cos\alpha)x-4\sin^2\alpha$$
$$=(x-2\cos\alpha)^2-4(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$
$$=(x-2\cos\alpha)^2-4.$$

所以这个二次函数在 $x=2\cos\alpha$ 时取到最小值,最小值是 -4.

2429. 在三角形 ABC 中, 设 $AB=AC=1$, $\angle BAC=2\theta$.

(1) 把三角形 ABC 与以 BC 为一边的正三角形面积的和 S, 用 θ 的函数表示出来.

(2) 求 S 的最大值, 并求出 θ 为何值时 S 取得最大值.



解 (1) 因为三角形 ABC 是等腰三角形, 所以 BC 上的高 AE 也是 $\angle A$ 的平分线.

$$\therefore\quad AE=\cos\theta.$$

又 $\qquad BC=2\cdot BE=2\sin\theta.$

所以正三角形 BCD 的面积是 $\sqrt{3}\sin^2\theta$.

$$\therefore\quad S=\sin\theta\cdot\cos\theta+\sqrt{3}\sin^2\theta. \qquad ①$$

(2) 把 ① 式变形, 得

$$S=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\cos\frac{\pi}{3}\sin 2\theta-\sin\frac{\pi}{3}\cos 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因为 $0<2\theta<\pi$, 所以

$$-\frac{\pi}{3}<2\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}.$$

由此可得, 当 $2\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 即 $\theta=\frac{5\pi}{12}$ 时, 得 $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$. 这时 S 取得最大值

$$1+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2430. 设

$$y=20\cos^2\theta+32\sin\theta-31,$$

(1) 求使 $y=0$ 的 $\sin\theta$ 值;

(2) 在 $45^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ 的范围内, 求 y 的最大值和最小值.

解 (1) 设 $y=0$, 则

$$20\cos^2\theta+32\sin\theta-31=0,$$
$$20(1-\sin^2\theta)+32\sin\theta-31=0,$$
$$20\sin^2\theta-32\sin\theta+11=0,$$
$$(2\sin\theta-1)(10\sin\theta-11)=0.$$

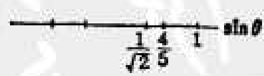
因为 $\sin\theta\neq\frac{11}{10}$, 所以

$$\sin\theta=\frac{1}{2}.$$

(2) $$y=-20\sin^2\theta+32\sin\theta-11$$
$$=\frac{9}{5}-20\left(\sin\theta-\frac{4}{5}\right)^2.$$

因为 $45^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$, 所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\theta\leqq 1.$$



因此, 当 $\sin\theta=\frac{4}{5}$ 时 y 取得最大值, 最大值是 $\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$.

又因为 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707\cdots$, $\frac{4}{5}=0.8$, 所以 $\frac{4}{5}-\frac{1}{\sqrt{2}}<1-\frac{4}{5}$. 因此, 当 $\sin\theta=1$ 时 y 取得最小值. 最小值是 1.

2431. 试答下列关于

$$f(x)=4\cos 2x(\cos 2x-1)+3-4\cos 2x$$

的问题, 其中 x 用弧度作单位:

(1) 求使 $f(x)>0$ 的 x 的范围;

(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值, 并求出何时取得最大值和最小值.

解　(1) 把给出的式子变形，得

$$f(x)=4\cos 2x(\cos 2x-1)+3-4\cos 2x$$
$$=4\cos^2 2x-8\cos 2x+3 \quad ①$$
$$=(2\cos 2x-3)(2\cos 2x-1).$$

因为$|\cos 2x|\leq 1$，所以$2\cos 2x-3<0$．由此可得，当$f(x)>0$时，$\cos 2x<\frac{1}{2}$．所以

$$(2n+1)\pi-\frac{2\pi}{3}<2x<(2n+1)\pi+\frac{2\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad n\pi+\frac{\pi}{6}<x<n\pi+\frac{5}{6}\pi,$$

(n是整数)。

(2) 由①，得

$$f(x)=4\cos^2 2x-8\cos 2x+3$$
$$=4(\cos 2x-1)^2-1.$$

因为$-1\leq\cos 2x\leq 1$，所以

(i) 要使$f(x)$取得最大值，必须使

$\cos 2x=-1$．$\therefore\quad 2x=(2n+1)\pi$，

$$\therefore\quad x=n\pi+\frac{\pi}{2},\ (n\text{是整数}).$$

$\therefore f(x)$的最大值是$4(-1-1)^2-1=15$．

(ii) 要使$f(x)$取得最小值，必须使

$\cos 2x=1$．$\therefore\quad 2x=2m\pi$，

$\therefore\quad x=m\pi$，(m是整数)．

$f(x)$的最小值是$4(1-1)^2-1=-1$．

2432．证明下列等式，其中$i=\sqrt{-1}$：

(1) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$
$\times(\cos\gamma+i\sin\gamma)$
$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma)$；

(2) 当n是正整数时，

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

[棣莫佛(De Moivre)定理]

解　(1) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$
$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$
$+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$
$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$．①

从而得出：

$[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)](\cos\gamma+i\sin\gamma)$
$=\cos[(\alpha+\beta)+\gamma]+i\sin[(\alpha+\beta)+\gamma]$
$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma)$．②

(2) 与(1)同理，得

$(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)$
$\cdots(\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n)$
$=\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$
$+i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$．

设$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\theta$，则

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

研究　棣莫佛定理当n是负整数时也是成立的．

$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}$
$$=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}$$
$=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$．

取n为负整数，设$n=-m$，则

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=[(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}]^m$
$=[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^m$．

这时，因为m是正整数，所以

$[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^m$
$=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)$，

$\therefore\quad(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$．

2433．应用棣莫佛定理，把$\sin 3\theta$、$\cos 3\theta$分别用$\sin\theta$和$\cos\theta$表示出来。

解　由棣莫佛定理，得

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta.$$

左边$=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta$
$-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta$
$=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)$
$+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$．

所以　$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$，

即　$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)$，

$\therefore\quad\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$．

$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$，

即　$\sin 3\theta=3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta$，

$\therefore\quad\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$．

2434．证明下面的关系式：

$$\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n$$
$$=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

解

$$\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}$$
$$=\frac{[(1+\sin\theta)+i\cos\theta]^2}{(1+\sin\theta)^2-(i\cos\theta)^2}$$
$$=\frac{2\sin\theta(1+\sin\theta)+2i\cos\theta(1+\sin\theta)}{2(1+\sin\theta)}$$
$=\sin\theta+i\cos\theta$．

由棣莫佛定理，得

$$\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n=(\sin\theta+i\cos\theta)^n$$
$$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]^n$$
$$=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

2435. 证明

$$\cos 33°45'=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

解

$$\cos 33°45'=\cos\frac{135°}{4}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{135°}{2}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1+\cos 135°}{2}}\right)}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2}}\right]}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

2436. 证明 $\sin 67.5°=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

解

$$\sin 67.5°=\sqrt{\frac{1-\cos 135°}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

2437. 证明

$$\operatorname{ctg} 11\frac{1}{4}°=1+\sqrt{2}+\sqrt{2(2+\sqrt{2})}.$$

解

$$\operatorname{ctg} 11\frac{1}{4}°=\frac{1}{\operatorname{tg} 11\frac{1}{4}°}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}-\sqrt{2}-1}$$
$$=\sqrt{2(2+\sqrt{2})}+\sqrt{2}-1.$$

2438. 试用数学归纳法证明: 当 n 是自然数时,

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

(棣莫佛定理)

解 $n=1$ 时, 原式的左、右两边都是 $\cos\theta+i\sin\theta$, 所以原式成立.

设 $n=k$ 时原式成立, 即

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta.$$

两边同乘以 $(\cos\theta+i\sin\theta)$, 得

$$(\cos\theta+i\sin k\theta)^{k+1}$$
$$=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)$$
$$+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)$$
$$=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta.$$

这就是说, 当 $n=k+1$ 时原式也成立. 所以, 对于任何自然数来说, 原式恒成立.

2439. 在三角形 OP_0P_1 中, 设 $OP_0=a$, $\angle OP_0P_1=\alpha$, $\angle P_0OP_1=\theta$, 作一系列相似三角形如下:

$$\triangle OP_0P_1\backsim\triangle OP_1P_2\backsim\cdots$$
$$\backsim\triangle OP_nP_{n+1}\backsim\cdots;$$

(1) 求出当 n 无限增大时, P_n 无限接近于定点 O 的充要条件, 并把这一条件用 θ、α 表出.

(2) 设

$$S=\triangle OP_0P_1+\triangle OP_1P_2+\cdots$$
$$+\triangle OP_nP_{n+1}+\cdots,$$

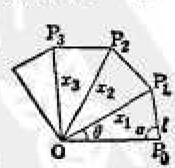
那么 S 的值是 $\triangle OP_0P_1$ 的几倍? 用 θ、α 表出这个倍数. 这里 $\triangle OP_nP_{n+1}$ 等都表示面积.

(3) 求

$$L=P_0P_1+P_1P_2+\cdots+P_nP_{n+1}+\cdots$$

的值. 又当 a、α 固定, θ 无限接近 0 时, L 趋近什么值?

解 (1) 设 $OP_1=x_1$, 则



$$\frac{x_1}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\angle OP_1P_0},$$

$\angle OP_1P_0=180°-(\alpha+\theta)$,

$$\therefore\ \sin\angle OP_1P_0=\sin(\alpha+\theta).$$
$$\therefore\ x_1=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}.$$

设 $k=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}$, 则 $x_1=ka$.

同理可得

$$OP_2=x_2=kx_1=k^2a.$$
$$\cdots\cdots.$$
$$OP_n=x_n=k^na.$$

当 $n\to\infty$ 时 P_n 无限接近 O 的条件是

$$\lim_{n\to\infty} OP_n=0. \quad \therefore \quad 0<k<1.$$

即 $$0<\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}<1. \qquad ①$$

因为 θ、α 是三角形的内角，所以

$$\sin\alpha>0,\ \sin(\theta+\alpha)>0.$$

由条件①，得

$$\sin(\theta+\alpha)-\sin\alpha>0,$$

$$2\cos\frac{\theta+2\alpha}{2}\sin\frac{\theta}{2}>0.$$

$$\because\quad \sin\frac{\theta}{2}>0,\quad \therefore\quad \cos\frac{\theta+2\alpha}{2}>0. \qquad ②$$

因为 $0<\frac{\theta+2\alpha}{2}<\pi$，所以由②，得

$$0<\frac{\theta+2\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

即 $$\theta+2\alpha<\pi.$$

(2) 设 $\triangle OP_0P_1=S_0$，$\triangle OP_1P_2=S_1$，…，$\triangle OP_nP_{n+1}=S_n$，…，则

$$S_0=\frac{1}{2}ka^2\sin\theta=\frac{a^2\sin\alpha\cos\theta}{2\sin(\alpha+\theta)},$$

$$S_1=k^2S_0,\ S_2=k^4S_0,\ \cdots,\ S_n=k^{2n}S_0,\ \cdots.$$

因为 $0<k<1$，所以 $\sum_{k=0}^{\infty}S_k$ 收敛。

$$\therefore\quad S=S_0(1+k^2+\cdots+k^{2n}+\cdots)$$
$$=\frac{S_0}{1-k^2}.$$

但是

$$1-k^2=\frac{\sin^2(\alpha+\theta)-\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\theta)}$$
$$=\frac{\cos 2\alpha-\cos 2(\alpha+\theta)}{2\sin^2(\alpha+\theta)}$$
$$=\frac{\sin\theta\sin(2\alpha+\theta)}{\sin^2(\alpha+\theta)}.$$

所以 S 是 $\triangle OP_0P_1$ 的 $\frac{\sin^2(\alpha+\theta)}{\sin\theta\sin(2\alpha+\theta)}$ 倍。

(3) 设 $P_0P_1=l$，则

$$P_1P_2=kl,\ P_2P_3=k^2l,\ \cdots,$$
$$P_nP_{n+1}=k^nl.$$

$$\therefore\quad L=l(1+k+k^2+\cdots+k^n+\cdots)$$
$$=\frac{l}{1-k},$$

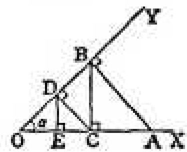
$$l=\frac{a\sin\theta}{\sin(\alpha+\theta)}.$$

$$\therefore\quad L=\frac{a\sin\theta}{\sin(\alpha+\theta)}\cdot\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+\theta)-\sin\alpha}$$

$$=\frac{2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{2\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{a\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{2\alpha+\theta}{2}}.$$

$$\lim_{\theta\to 0}L=\lim_{\theta\to 0}\frac{a\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{2\alpha+\theta}{2}}=\frac{a}{\cos\alpha}.$$

2440. 已知 $\angle XOY=\alpha$，在 $\angle XOY$ 的一边 OX 上取点 A 使 $OA=d$，由 A 作 OY 的垂线 AB，由 B 作 OX 的垂线 BC，…，如此继续下去，求折线 $ABCD\cdots$ 的长。



解 $$AB=d\sin\alpha,$$
$$BC=AB\cos\angle ABC=d\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$CD=BC\cos\alpha=d\sin\alpha\cos^2\alpha,$$
$$\cdots\cdots.$$

由此可知，

折线全长 $=d\sin\alpha(1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cdots)$

$$=\frac{d\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

2441. 求下列各式的最大值：

(1) $\cos^4x-\sin^4x$;　　(2) $\sin x+\cos x$.

解 (1)

$$\cos^4x-\sin^4x$$
$$=(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^2x-\sin^2x)$$
$$=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x.$$

所以，原式的最大值可以是1。

(2) $$\sin x+\cos x=\sin x+\sin(90^\circ-x)$$
$$=\sqrt{2}\cos(x-45^\circ).$$

所以，原式当 $\cos(x-45^\circ)=1$ 时取得最大值，最大值是 $\sqrt{2}$。

2442. 求 $12\sin\theta-9\sin^2\theta$ 的最大值。

解 设 $12\sin\theta-9\sin^2\theta=y$，则

$$9\sin^2\theta-12\sin\theta+y=0.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{2\pm\sqrt{4-y}}{3}.$$

因为 $\sin\theta$ 取实数，所以 $4-y\geq 0$，$y\leq 4$。经过验证可知，y 的值可以是4。因此，所求 y 的最大值是4。

别解　因为

$$12\sin\theta-9\sin^2\theta=4-(2-3\sin\theta)^2,$$

所以，原式仅当 $2-3\sin\theta=0$ 即 $\sin\theta=\frac{2}{3}$ 时取得最大值．最大值是 4．

2443．证明 $a^2\operatorname{tg}^2x+b^2\operatorname{ctg}^2x$ 的极小值是 $\pm2ab$．

解　$a^2\operatorname{tg}^2x$、$b^2\operatorname{ctg}^2x$ 总是正值，而且

$$a^2\operatorname{tg}^2x\cdot b^2\operatorname{ctg}^2x=a^2b^2=\text{常数}.$$

所以它们的和 $a^2\operatorname{tg}^2x+b^2\operatorname{ctg}^2x$ 仅当 $a^2\operatorname{tg}^2x=b^2\operatorname{ctg}^2x$ 原式取得最小值，即当

$$a\operatorname{tg}x=\pm b\operatorname{ctg}x,$$

$$\operatorname{tg}^2x=\pm\frac{b}{a},\quad \operatorname{ctg}^2x=\pm\frac{a}{b}$$

时原式可取得极小值．所以原式的最小值是

$$a^2\left(\pm\frac{b}{a}\right)+b^2\left(\pm\frac{a}{b}\right)=\pm2ab.$$

其中当 $ab>0$ 时取"+"号，$ab<0$ 时取"−"号．

2444．当 x 变化时，求

$$\sin(\alpha+x)+\cos(\alpha-x)$$

的最大值．

解　$\sin(\alpha+x)+\cos(\alpha-x)$

$$=\sin(\alpha+x)+\sin(90^\circ-\alpha+x)$$
$$=2\sin(45^\circ+x)\cos(\alpha-45^\circ).$$

所以，当 $\cos(\alpha-45^\circ)>0$(或 <0)时，原式可以取得最大值，而且仅当 $\sin(45^\circ+x)=1$ (或 -1) 时才可以取得这个最大值，最大值是 $2\cos(\alpha-45^\circ)$ [或 $-2\cos(\alpha-45^\circ)$]．综合起来，原式的最大值是 $|2\cos(\alpha-45^\circ)|$．

2445．下列□里应填入什么数？

在 $0\leq x\leq2\pi$ 的范围内，函数

$$f(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x,$$

当 $x=$□π 时取得最大值□，当 $x=$□π 时取得最小值□．

解　$f(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x$

$$=2\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}+1$$

$$=-2\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}.$$

当 $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 取得最大值，也就是当 $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}$，即 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时 $f(x)$ 取得最大值 $\frac{3}{2}$．

又当 $\frac{x}{2}=\pi$ 即 $x=2\pi$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值是

$$-2\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=-3.$$

2446．在 0 到 π 之间，求能使

$$\sin\theta\cos(\beta-\theta)$$

取得最大值的 θ 值．其中 β 是 0 到 π 间的已知角．

解　$\sin\theta\cos(\beta-\theta)$

$$=\frac{1}{2}[\sin\beta+\sin(2\theta-\beta)].$$

当 $2\theta-\beta=\frac{\pi}{2}$ 即 $\theta=\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}$ 时，$\sin(2\theta-\beta)$ 取得最大值，因而原式就取得最大值．

2447．α、β 为锐角，$\alpha+\beta$ 为定角 σ，求 $\sin\alpha+\sin\beta$ 的极大值或是极小值．

解　$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$=2\sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

因为 $\sin\frac{\sigma}{2}>0$，所以当 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 取到极大或极小值时原式取到极大或极小值．不妨设 $\alpha>\beta$，显然 $0\leq\alpha-\beta<\sigma$．所以，当 $\frac{\alpha-\beta}{2}=0$ 时 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 取得极大值．因为 $\frac{\alpha-\beta}{2}$ 不能达到 $\frac{\sigma}{2}$，所以 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 没有极小值．于是得方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\sigma}{2},\\[2mm]\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\alpha=\frac{\sigma}{2},\quad \beta=\frac{\sigma}{2}.$$

这时，$\sin\alpha+\sin\beta$ 取得极大值 $2\sin\frac{\sigma}{2}$．

2448．当 A 变化时，求 $\operatorname{tg}^2A+\operatorname{ctg}^2A$ 的最小值．

解　因为 $\operatorname{tg}^2A\cdot\operatorname{ctg}^2A=1$，即 $\operatorname{tg}^2A\cdot\operatorname{ctg}^2A$ 是常数，所以当 $\operatorname{tg}^2A=\operatorname{ctg}^2A$ 时 $\operatorname{tg}^2A+\operatorname{ctg}^2A$ 取得最小值．这时，

$$(\operatorname{tg}^2A)^2=1,$$

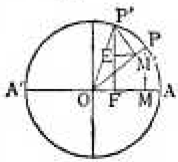
$\therefore\quad \mathrm{tg}^2 A = \mathrm{ctg}^2 A = 1.$

所以 $\mathrm{tg}^2 A + \mathrm{ctg}^2 A$ 取得最小值 2.

2449. 如果 α、β 表示小于 $\frac{1}{4}$ 圆的圆弧所对的圆心角，证明

$$\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta.$$

解　在单位圆中，设弧 $AP = \alpha$，弧 $PP' = \beta$，则弧 $AP' = \alpha+\beta$，所以若由 P、P' 各向 AA' 作垂线，设垂足分别是 M、F，则 $\sin(\alpha+\beta) = P'F$，$\sin\alpha = PM$，$\sin\beta = P'M'$。其中 M' 是 P' 向 OP 所作垂线的足。如果 M' 向 $P'F$ 所作垂线的足是 E，则 $EF < PM$，$P'E < P'M'$，从而得出 $P'F < P'M' + PM$。即



$$\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta.$$

2450. 如果

$$\sin(\pi\,\mathrm{ctg}\,\theta) = \cos(\pi\,\mathrm{tg}\,\theta),$$

证明 $\csc 2\theta$ 或 $\mathrm{ctg}\,2\theta$ 可以表示成 $m + \frac{1}{4}$ 的形式，其中 m 是整数.

解　$\because\ \sin(\pi\,\mathrm{ctg}\,\theta) = \cos(\pi\,\mathrm{tg}\,\theta)$，

$$\therefore\quad \cos(\pi\,\mathrm{tg}\,\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi\,\mathrm{ctg}\,\theta\right).$$

这个方程的解是

$$\pi\,\mathrm{tg}\,\theta = 2m\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \pi\,\mathrm{ctg}\,\theta\right).$$

上式中取 + 号时，得

$$2m + \frac{1}{2} = \mathrm{tg}\,\theta + \mathrm{ctg}\,\theta,$$

即
$$2m + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}.$$

$$\therefore\quad m + \frac{1}{4} = \csc 2\theta.$$

上式中取 − 号时，得

$$\frac{1}{2} - 2m = \mathrm{ctg}\,\theta - \mathrm{tg}\,\theta = 2\,\mathrm{ctg}\,2\theta.$$

即
$$\frac{1}{2} - 2m = 2\,\mathrm{ctg}\,2\theta.$$

$$\therefore\quad \mathrm{ctg}\,2\theta = \frac{1}{4} - m.$$

$$\left(\text{设 } m = -m'\text{，即成为 } \frac{1}{4} + m'\right)$$

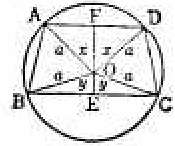
因此，$\csc 2\theta$、$\mathrm{ctg}\,2\theta$ 都可以表示成 $m + \frac{1}{4}$ 形式.

2451. 梯形 $ABCD$ ($AD \parallel BC$) 内接于圆 O，O 在梯形内，设圆 O 的半径是 a，$\angle AOD = 2x$，$\angle BOC = 2y$，试答：

(1) 把梯形的面积 S 用 a、x、y 表出；

(2) 若 $x + y = \alpha$（常数），求 S 的最大值.

解　(1) 由题意可知，$AB = CD$，即 $ABCD$ 是等腰梯形. 设 BC、DA 的中点分别是 E、F，易知 E、O、F 在同一直线上，且 EOF 与 AD、BC 都垂直. 于是



$$AD = 2a\sin x,\quad BC = 2a\sin y.$$

$$EF = EO + OF = a\cos y + a\cos x.$$

$$\therefore\quad S = \frac{1}{2}EF(AD+BC)$$

$$= \frac{1}{2}a(\cos x + \cos y)\cdot 2a(\sin x + \sin y)$$

$$= a^2(\sin x + \sin y)(\cos x + \cos y)$$

$$= a^2\cdot 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\times 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$= a^2\sin(x+y)\cdot 2\cos^2\frac{x-y}{2}$$

$$= a^2\sin(x+y)[1+\cos(x-y)].$$

(2) 若 $x + y = \alpha$，则

$$S = a^2\sin\alpha[1+\cos(x-y)].$$

因为 $0 < 2(x+y) < 2\pi$，所以 $0 < x+y < \pi$.

$$\therefore\quad 0 < \sin\alpha.$$

因为 $1+\cos(x-y) \geq 0$，所以当 $x = y = \frac{\alpha}{2}$ 时 S 取得最大值，最大值 $= 2a^2\sin\alpha$.

而 α 是变化着的，所以 S 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时取得最大值，最大值是 $2a^2$.

2452. 设

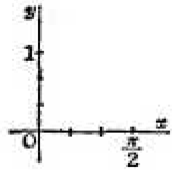
$$f(x) = \cos 2x - a\cos x + b,$$

$y = f(x)$ 的图象与 x 轴相切，一个切点在 $0 < x$

$<\frac{\pi}{2}$ 的范围内，试答：

(1) a 可取什么范围内的值？并用 a 表出 b；

(2) 把 $a=2$ 时 $y=f(x)$ 的图象画在上述坐标平面上；



(3) 设 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴、y 轴、$x=\frac{\pi}{2}$ 的直线所围成的面积为 S，求 S 的最小值.

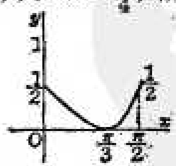
解 (1) 由 $f'(x)=\sin x(a-4\cos x)$，得切点的横坐标可能是 $\sin x=0$ 或 $\cos x=\frac{a}{4}$. 当 $\sin x=0$ 时，$x=m\pi$. 这样，在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 的范围内 $y=f(x)$ 就不与 x 轴相切，这与题意不符. 所以切点的横坐标只能是满足 $\cos x=\frac{a}{4}$ 的 x. 这时，由 $f(x)=0$，得 $b=\frac{a^2+8}{8}$.

$$\therefore\quad f(x)=2\left(\cos x-\frac{a}{4}\right)^2. \qquad ①$$

因为图象和 x 轴在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 的范围内有一个切点，且 $0<\cos x<1$，又 $\cos x=\frac{a}{4}$，所以必须有 $0<a<4$.

(2) 在①中设 $a=2$，则

$$f(x)=2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2.$$



因此在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时切点是 $\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$，$f(x)$ 的图象如右图所示.

(3) $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x-a\cos x+b)dx$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-a\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+bx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

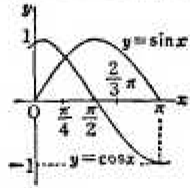
$$=-a+\frac{\pi b}{2}=\frac{\pi}{16}(a^2+8)-a$$

$$=\frac{\pi}{16}\left[a^2-\frac{16a}{\pi}+\left(\frac{8}{\pi}\right)^2\right]+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{16}\left(a-\frac{8}{\pi}\right)^2+\frac{\pi^2-8}{2\pi}.$$

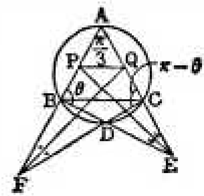
所以，当 $a=\frac{8}{\pi}$（这个值满足 $0<a<4$）时，S 取得最小值 $\frac{\pi^2-8}{2\pi}$.

2453. 求 $\sin x+\cos x\ (0\leq x\leq\pi)$ 的最大值和最小值.



解 由右图可知，当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时取得最大，最大值是 $\sqrt{2}$；当 $x=\pi$ 时取得最小，最小值是 -1.

2454. 在正三角形 ABC 外接圆的劣弧 BC 上取一点 D，直线 AC 和直线 BD 的交点是 E，直线 AB 和直线 CD 的交点是 F. 设 $\angle CEB$ 的平分线和 AB 的交点是 P，$\angle CFB$ 的平分线和 AC 的交点是 Q. 试答：



(1) 证明 $PQ\parallel BC$；

(2) 确定 D 的位置使 PQ 的长度取得最大值.

解 设 $\angle ABD=\theta$.

(1) $$\frac{AP}{PB}=\frac{AE}{BE}=\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

$$\frac{AQ}{QC}=\frac{AF}{CF}=\frac{\sin(\pi-\theta)}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\pi}{3}}.$$

$$\therefore\quad \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}.\qquad \therefore\quad PQ\parallel BC.$$

(2) $$\frac{PQ}{BC}=\frac{AP}{AB}=\frac{AP}{AP+PB}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\pi}{3}+\sin\theta}$$

$$=1-\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}+\sin\theta}.$$

$$\therefore\quad PQ=BC\left(1-\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}+\sin\theta}\right).$$

因为 $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta\leq 1$.

当 $\sin\theta=1$ 时，即 D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，这时 PQ 取得最大值。

2455. 如果 $x+y=\dfrac{\pi}{3}$，求 $\cos^2 x-\cos^2 y$ 的最大值。答案用小数给出，小数点后第三位四舍五入。

解

$$\cos^2 x-\cos^2 y=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 2y)$$
$$=-\sin(x+y)\sin(x-y)$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$$

所以，原式的最大值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，四舍五入后得 0.87。

2456. 设锐角三角形 ABC 的三边长分别是 a、b、c，外接圆的半径是 R，在 BC 边上取一点 P，点 P 关于 AB、AC 边的对称点分别是 P_1、P_2，设 $BP=x$。试答：

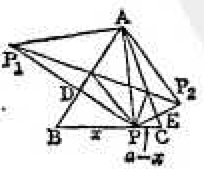
(1) 把 $P_1P_2^2$ 用 a、b、c、x 和 R 表示出来；

(2) 求使 $P_1P_2^2$ 取得最小值的 x 值。

解 (1) 设 PP_1、PP_2 和 AB、AC 的交点分别是 D、E，则

$$PD=x\sin B,\ PE=(a-x)\sin C,$$
$$\angle DPE=\pi-A.$$
$$\therefore\quad PP_1=2x\sin B,\ PP_2=2(a-x)\sin C.$$

在 $\triangle PP_1P_2$ 中，根据余弦定理，得



$$P_1P_2^2=PP_1^2+PP_2^2-2PP_1\cdot PP_2\times\cos(\pi-A)$$
$$=4x^2\sin^2 B+4(a-x)^2\sin^2 C+8x(a-x)\times\sin B\sin C\cos A.$$

用 $\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

代入，得

$$P_1P_2^2=4x^2\frac{b^2}{4R^2}+4(a-x)^2\frac{c^2}{4R^2}+8x(a-x)\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{a}{R^2}[ax^2-(c^2+a^2-b^2)x+ac^2].$$

(2) 由上面所得的结果，得

$$P_1P_2^2=\frac{a}{R^2}\left[a\left(x-\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2+ac^2-\frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{4a}\right].$$

由题设条件可知 $C<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $c^2<b^2+a^2$，即 $c^2-a^2<b^2$。从而得出：$\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}<a$。

所以 $P_1P_2^2$ 当 $x=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}$ 时取得最小值。

别解 注意到 $\triangle AP_1P_2$ 中，

$$\angle P_1AP_2=2\angle A,\ AP_1=AP_2=AP.$$
$$\therefore\quad \overline{P_1P_2}^2=\overline{AP}^2+\overline{AP}^2-2\overline{AP}^2\cos 2A$$
$$=2\overline{AP}^2(1-\cos 2A)$$
$$=4\overline{AP}^2\sin^2 A$$
$$=4\overline{AP}^2\frac{a^2}{4R^2}=\frac{a^2}{R^2}\overline{AP}^2.$$

设 $\overline{AP}=l$，在 $\triangle ABP$ 中，根据余弦定理，得

$$l^2=c^2+x^2-2cx\cos B$$
$$=c^2+x^2-2cx\,\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$=c^2+x^2-\frac{x(c^2+a^2-b^2)}{a}.$$

另一方法是在 $\triangle ABP$、$\triangle APC$ 中，根据余弦定理（设 $\angle BPA=\alpha$），得

$$c^2=x^2+l^2-2xl\cos\alpha,\qquad ①$$
$$b^2=(a-x)^2+l^2-2(a-x)l\cos(\pi-\alpha).\qquad ②$$

由 ①×$(a-x)$+②×x，可求出 al^2。下面的步骤只要注意到 $a>\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}>0$ 就行了。

熟悉几何的人会注意到这样求出的 x 恰好使得 AP 是 BC 上的高，这只要作如下的验算即可

$$x=AB\cos B=c\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}.$$

2457. 设

$$f(\theta)=a\sin\theta\cos\theta+b(\sin\theta+\cos\theta)+1,$$
$$(a>0,\ b\ 为实数)，$$

回答下列问题：

(1) 求 $f(\theta)$ 的最大值和最小值；

(2) 如果 $f(\theta)=0$ 有实数解，求 a、b 必须满足的关系式。

解 (1)

$$f(\theta)=a\sin\theta\cos\theta+b(\sin\theta+\cos\theta)+1,$$
$$(a>0,\ b\text{ 是实数})$$

设 $\sin\theta+\cos\theta=t$，则 $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$$\therefore\quad -\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}.$$

又 $$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta.$$

$$\therefore\quad f(\theta)=F(t)=a\left(\frac{t^2-1}{2}\right)+bt+1.$$

$$F(t)=\frac{a}{2}\left(t+\frac{b}{a}\right)^2+1-\frac{a}{2}-\frac{b^2}{2a}.$$

其中 $|t|\leq\sqrt{2}$, $a>0$.

(i) 根据 b 的不同符号，得到 $F(t)$ 的最大值是:

$$\begin{cases}F(-\sqrt{2}), & \text{当 } b<0 \text{ 时;}\\ F(\sqrt{2}), & \text{当 } b\geq 0 \text{ 时.}\end{cases}$$

(ii) 根据 $-\dfrac{b}{a}$ 的不同值，得到 $F(t)$ 的最小值是:

$$\begin{cases}F(\sqrt{2}), & \text{当 } -\dfrac{b}{a}>\sqrt{2} \text{ 时;}\\ F\left(-\dfrac{b}{a}\right), & \text{当 } \sqrt{2}\geq-\dfrac{b}{a}\geq-\sqrt{2} \text{ 时;}\\ F(-\sqrt{2}), & \text{当 } -\sqrt{2}>-\dfrac{b}{a} \text{ 时.}\end{cases}$$

综合上述结果，得下表:

<table>
<tr><th></th><th>最 大 值</th><th>最 小 值</th></tr>
<tr><td>$\dfrac{b}{a}<-\sqrt{2}$</td><td rowspan="2">$\dfrac{a-2\sqrt{2}b+2}{2}$</td><td>$\dfrac{a+2\sqrt{2}b+2}{2}$</td></tr>
<tr><td>$-\sqrt{2}\leq\dfrac{b}{a}<0$</td><td rowspan="2">$\dfrac{2a-a^2-b^2}{2a}$</td></tr>
<tr><td>$0\leq\dfrac{b}{a}\leq\sqrt{2}$</td><td rowspan="2">$\dfrac{a+2\sqrt{2}b+2}{2}$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{2}<\dfrac{b}{a}$</td><td>$\dfrac{a-2\sqrt{2}b+2}{2}$</td></tr>
</table>

(2) 如果 $f(\theta)=0$ 有实数解，那么 $f(\theta)$ 的最大值是正值，它的最小值是负值，或者它的最大值、最小值中至少有一个是零。

当 $\dfrac{b}{a}<-\sqrt{2}$ 即 $b<-\sqrt{2}a$ 时，得

$$\frac{a-2\sqrt{2}b+2}{2}\cdot\frac{a+2\sqrt{2}b+2}{2}\leq 0.$$

因为 $b<0$，所以

$$a-2\sqrt{2}b+2>0.$$
$$\therefore\quad a+2\sqrt{2}b+2\leq 0.$$

同理，当 $\sqrt{2}<\dfrac{b}{a}$ 即 $\sqrt{2}a<b$ 时，得

$$a-2\sqrt{2}b+2\leq 0.$$

又当 $-\sqrt{2}\leq\dfrac{b}{a}\leq\sqrt{2}$ 即 $-\sqrt{2}a\leq b\leq\sqrt{2}a$ 时，得

$$a^2+b^2\geq 2a.$$

综合上述结果，得

$$\begin{cases}a+2\sqrt{2}b\leq-2, & \text{当 } b<-\sqrt{2}a \text{ 时;}\\ a^2+b^2\geq 2a, & \text{当 } -\sqrt{2}a\leq b\leq\sqrt{2}a \text{ 时;}\\ a-2\sqrt{2}b\leq-2, & \text{当 } \sqrt{2}a<b \text{ 时.}\end{cases}$$

2458. 当 θ 可取任意值时，求 $\sin\theta\cos\theta$ 的最大值和最小值，并分别求出 θ 为何值时取得最大值和最小值。

解 $$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

由此可知，仅当 $\sin 2\theta$ 取到最大值或最小值时，原式才可取得最大值或最小值。

所以原式的最大值是 $\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$. 这时

$$\because\quad \sin 2\theta=1,\ \therefore\quad 2\theta=n\cdot 360^\circ+90^\circ,$$
$$\theta=(4n+1)\cdot 45^\circ.$$

原式的最小值是 $\dfrac{1}{2}\times(-1)=-\dfrac{1}{2}$. 这时

$$\because\quad \sin 2\theta=-1,$$
$$\therefore\quad 2\theta=n\cdot 360^\circ-90^\circ,\quad \theta=(4n-1)\cdot 45^\circ.$$

2459. 设

$$f(\theta)=a\cos\theta+b\sin\theta,$$
$$g(\theta)=c\cos\theta+d\sin\theta,$$

当 a、b、c、d 为实常数，θ 从 0 变到 2π 时，$f(\theta)$、$g(\theta)$、$f(\theta)+g(\theta)$ 的最大值分别是 3、5、6，试答:

(1) 求 $ac+bd$ 的值;

(2) 求 $f(\theta)g(\theta)$ 的最大值。

解 (1) 把 $f(\theta)$、$g(\theta)$、$f(\theta)+g(\theta)$ 作变形，得

$$f(\theta)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha), \qquad ①$$
$$g(\theta)=\sqrt{c^2+d^2}\sin(\theta+\beta), \qquad ②$$
$$f(\theta)+g(\theta)=(a+c)\cos\theta+(b+d)\sin\theta$$
$$=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\sin(\theta+\gamma). \qquad ③$$

在①、②、③中α、β、γ都是定值．当θ从0变到2π时，$\sin(\theta+\alpha)$、$\sin(\theta+\beta)$、$\sin(\theta+\gamma)$的最大值是1．从而得出：

$$\sqrt{a^2+b^2}=3,\quad \sqrt{c^2+d^2}=5,$$
$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}=6.$$

由此可得

$$\begin{cases} a^2+b^2=9, & ④\\ c^2+d^2=25, & ⑤\\ (a+c)^2+(b+d)^2=36. & ⑥\end{cases}$$

由$\frac{1}{2}$[⑥－(④＋⑤)]，得$ac+bd=1$.

(2)

$$f(\theta)g(\theta)=ac\cos^2\theta+bd\sin^2\theta+(ad+bc)\sin\theta\cos\theta$$
$$=ac+(bd-ac)\sin^2\theta+\frac{1}{2}(ad+bc)\sin 2\theta$$
$$=ac+\frac{1}{2}(bd-ac)-\frac{1}{2}(bd-ac)\cos 2\theta+\frac{1}{2}(ad+bc)\sin 2\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[ac+bd+\sqrt{(ad+bc)^2+(ac-bd)^2}\times\sin(2\theta+\delta)\right].$$

由(1)可知，$ac+bd=1$，而$\sin(2\theta+\delta)$的最大值是1（当θ从0变到2π时$\sin(2\theta+\delta)$的值总可以取得1）．从而得出$f(\theta)g(\theta)$的最大值是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(ad+bc)^2+(ac-bd)^2}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}.$$

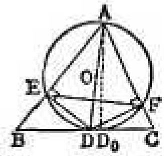
由④、⑤可知$a^2+b^2=9$，$c^2+d^2=25$，代入后得到$f(\theta)g(\alpha)$的最大值是8.

2460． 在给定的锐角三角形ABC的边BC上有一点D．从D作AB、AC的垂线，垂足分别为E、F．试答：

(1) 用$\angle A$和线段AD表示出线段EF的长；

(2) 求点D的位置，要使线段EF取得最小值．

解　(1) 因为$\triangle AEF$内接于以AD为直径的圆，所以



$$\frac{EF}{\sin\angle A}=AD.$$
$$\therefore\quad EF=AD\sin\angle A.$$

(2) 由(1)的结果得到，当AD取得最小值时，EF取得最小值．因此，只要从A作BC的垂线，设垂足是D_0，以D_0作为D即可．

2461． 已知抛物线

$$y=x^2+2x\sin\theta+\cos^2\theta.$$

(1) 求顶点的坐标；

(2) 把顶点和原点之间的距离用$\sin\theta$表示出来；

(3) 当θ变化时，求顶点和原点之间距离的最大值和最小值．

解　(1) $y=x^2+2x\sin\theta+\cos^2\theta$
$$=(x+\sin\theta)^2+\cos^2\theta-\sin^2\theta.$$

所以这抛物线的顶点的坐标是$(-\sin\theta, \cos 2\theta)$.

(2) 设原点和顶点间的距离是d，则

$$d^2=f(\theta)=(-\sin\theta)^2+\cos^2 2\theta$$
$$=\sin^2\theta+(1-2\sin^2\theta)^2$$
$$=4\sin^4\theta-3\sin^2\theta+1$$
$$=4\left(\sin^2\theta-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{7}{16}.$$

(3) 因为$0\leq\sin^2\theta\leq1$，所以，当$\sin^2\theta=\frac{3}{8}$时d取得最小值$\frac{\sqrt{7}}{4}$；当$\sin^2\theta=1$即$\sin\theta=\pm1$时，d取得最大值

$$d=\sqrt{4\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2+\frac{7}{16}}=\sqrt{2}.$$

2462． 如果$0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$，求能使

$$k(\sin\theta+8\cos\theta)\geq\sin\theta\cos\theta$$

恒成立的k的最小值．

解　$k(\sin\theta+8\cos\theta)\geq\sin\theta\cos\theta$，　①

$$0<\theta\leq\frac{\pi}{2}. \qquad ②$$

在②的范围内，因为$\sin\theta+8\cos\theta>0$，所以①式与

$$k\geq\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+8\cos\theta} \qquad ③$$

等价. 现设 ③ 式右边为 $f(\theta)$, 则

$$f(\theta)=\frac{\sin 2\theta}{2(\sin\theta+8\cos\theta)}.$$

$$f'(\theta)=[2(\sin\theta+8\cos\theta)\cos 2\theta-\sin 2\theta(\cos\theta-8\sin\theta)]\div[2(\sin\theta+8\cos\theta)^2].$$

其中

$$\begin{aligned}\text{被除式}&=2(\sin\theta+8\cos\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\&\quad-2\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-8\sin\theta)\\&=2(8\cos^3\theta-\sin^3\theta).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f'(\theta)=\frac{8\cos^3\theta-\sin^3\theta}{(\sin\theta+8\cos\theta)^2}.$$

由此可知, $f'(\theta)=0$ 的实根是

$$2\cos\theta=\sin\theta,$$

即

$$\operatorname{tg}\theta=2. \qquad ④$$

在 ② 的范围内存在满足 ④ 的一个 θ 值. 在这个 θ 的值的左右, $f'(\theta)$ 的值由正到负, 所以, 这时 $f(\theta)$ 取得极大值. 容易证明, 这也是 $f(\theta)$ 的最大值.

由 ④, 得

$$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt5},\quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt5}.$$

所以 $f(\theta)$ 的最大值是

$$\frac{\dfrac{2}{\sqrt5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt5}}{\dfrac{2}{\sqrt5}+\dfrac{8}{\sqrt5}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt5}{10}=\frac{\sqrt5}{25}.$$

从而得出 $f(\theta)\leq\dfrac{\sqrt5}{25}$. 因此在 ② 的范围内使 ③ 恒成立的 k 的最小值是 $\dfrac{\sqrt5}{25}$.

2463. 求 θ 的取值范围, 使得对于任何 x, 不等式

$$\frac{x^2\cos\theta+x(\cos\theta+2)+\cos\theta}{x^2+x+1}>\sin\theta-2$$

总成立.

解 因为 $x^2+x+1=\left(x+\dfrac12\right)^2+\dfrac34>0$, 所以去分母后, 得

$$(\cos\theta-\sin\theta+2)x^2+(\cos\theta-\sin\theta+4)x+(\cos\theta-\sin\theta+2)>0. \qquad ①$$

其中

$$\cos\theta-\sin\theta+2=2-\sqrt2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right).$$

因为 $\cos\theta-\sin\theta+2>0$, 所以 ① 成为绝对不等式的条件是

$$(\cos\theta-\sin\theta+4)^2-[2(\cos\theta-\sin\theta+2)]^2<0.$$

$$\therefore\quad [3(\cos\theta-\sin\theta)+8]\times[-(\cos\theta-\sin\theta)]<0.$$

$$\left[8-3\sqrt2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\sqrt2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)<0.$$

因为

$$\left|3\sqrt2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leq3\sqrt2<8,$$

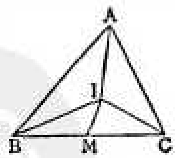
所以 $$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)<0,$$

$$\therefore\quad (2n-1)\pi<\theta-\frac{\pi}{4}<2n\pi.$$

$$\therefore\quad (2n-1)\pi+\frac{\pi}{4}<\theta<2n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

(n 是整数)

2464. 设三角形 ABC 中 $BC=2a$ (a 是常数), $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$, $\angle B=\theta$. 三角形内心是 I, BC 边的中点是 M.



(1) 把线段 MI 的长度用 θ 的函数表示出来;

(2) 求这个函数的最小值.

解 (1)

$$\angle BIC=\frac{\pi}{2}+\frac12\angle A=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac23\pi.$$

在 $\triangle BIC$ 中, 根据正弦定理, 得

$$\frac{BI}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\theta}{2}\right)}=\frac{CI}{\sin\dfrac{\theta}{2}}=\frac{BC}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}.$$

用 $BC=2a$, $\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt3}{2}$ 代入, 得

$$BI=\frac{4}{\sqrt3}a\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right),$$

$$CI=\frac{4}{\sqrt3}a\sin\frac{\theta}{2}.$$

因为 M 是 BC 的中点, 所以

$$BI^2+CI^2=2MI^2+2BM^2,$$

$\therefore\quad MI^2=\frac{1}{2}(BI^2+CI^2)-BM^2$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}a^2\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\frac{\theta}{2}\right]-a^2$$

$$=\frac{8a^2}{3}\left[\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}-\frac{3}{8}\right]$$

$$=\frac{a^2}{3}\left[5-4\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right].$$

$$\therefore\quad MI=\frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{5-4\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}.$$

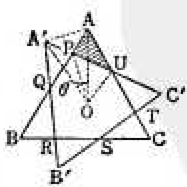
(2) 当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，MI 取得最小值 $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

2465. 两个边长是 a 的正三角形重合在一起，当其中一个围绕中心旋转 $\theta\left(0<\theta<\frac{2}{3}\pi\right)$时，试答：

(1) 两个三角形相重迭部分的面积是多少？

(2) 求使重迭面积取得最小值的 θ 值。

解　(1) 设两个正三角形是 ABC、$A'B'C'$，中心是 O，设 $\triangle A'B'C'$ 绕 O 旋转 θ，则 $\angle AOA'=\theta$。如右图所示，设 P、Q、R、S、T、U 是旋转后的 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的各边的交点．在 $\triangle OAP$、$\triangle OA'P$ 中，



$$OA=OA',\ OP\text{ 是公共边},$$

$$\angle OAP=\angle OA'P=\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore\quad \triangle OAP\cong\triangle OA'P$$

或　　$\angle OPA+\angle OPA'=\pi$.

又因为 $\angle OPA+\angle OPA'>\pi$，所以上述两种情况中只可能是

$$\triangle OAP\cong\triangle OA'P.$$

$$\therefore\quad PA=PA'.$$

从而得出：

$$\angle PAU=\angle PA'Q=\frac{\pi}{3},$$

$$\angle APU=\angle A'PQ.$$

$$\therefore\quad \triangle APU\cong\triangle A'PQ.$$

同样地，$\triangle APU$、$\triangle A'PQ$，$\triangle BRQ$、$\triangle B'RS$，$\triangle CTS$、$\triangle C'TU$ 都是全等的三角形，因此，$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 重迭部分的面积 S 是

$S=$六边形 $PQRSTU$ 面积

$=\triangle ABC$ 面积 $-3\triangle APU$ 面积

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{3}{2}AP\cdot AU\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2-3AP\cdot AU).\qquad ①$$

设 $OA=OA'=r$，因为 $\angle AOA'=\theta$，所以

$$AA'=2r\sin\frac{\theta}{2}.$$

$$\angle AA'U=\angle OA'A-\angle OA'U=\frac{1}{2}(\pi-\theta)-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}.$$

又因为 AC、$A'C'$ 所夹的角等于旋转角，所以

$$\angle AUA'=\theta.$$

从而得出，在 $\triangle AUA'$ 中，根据正弦定理，得

$$\frac{AU}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{AA'}{\sin\theta}.$$

$$\therefore\quad AU=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)\cdot 2r\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\frac{r\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

同样地，在 $\triangle APU$ 中，得

$$\frac{AP}{\sin\theta}=\frac{AU}{\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right]}.$$

$$\therefore\quad AP=\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}\cdot\frac{r\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{r\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}.$$

因为 $r=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{a}{\sqrt{3}}$，所以

$$AP\cdot AU=\frac{a^2\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{3\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}.$$

代入①，得

$$S=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\left[1-\frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\cdot\frac{\cos\left[\frac{\theta}{2}+\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}a^2\cos\frac{\pi}{3}}{2\left[\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{3}a^2}{2\left[1+2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right]}.$$

(2) 在 $0<\theta<\frac{2}{3}\pi$ 的范围内，当

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1,$$

也即 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时 S 取得最小值。

2466. 如果 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$,

$$f(\theta)=\sin 3\theta+\cos 3\theta,$$
$$g(\theta)=a\sin^2\theta-\sin 3\theta,$$

(1) 求当 $f(\theta)$ 取得最大值时的 $\sin\theta$ 的值；

(2) 求 a，要使 $f(\theta)$ 取得最大值时的 θ 值与 $g(\theta)$ 取得最小值时的 θ 值相同。

解 (1) $\because\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$,

$$\therefore\ 0\leq 3\theta\leq\frac{3\pi}{2}.$$

$$f(\theta)=\sqrt{2}\sin\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right).$$

在上述范围内，$f(\theta)$ 仅当

$$3\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

即 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 时取得最大值．这时

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

(2) $g(\theta)=a\sin^2\theta-\sin 3\theta$

$$=-3\sin\theta+a\sin^2\theta+4\sin^3\theta$$
$$=-3x+ax^2+4x^3.$$

其中设 $x=\sin\theta$, $(0\leq x\leq 1)$.

$$\therefore\ \frac{dg(\theta)}{dx}=-3+2ax+12x^2,$$

要使 $g(\theta)$ 在 $x=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ 时取得最小值，必须使当 $x=\sin\frac{\pi}{12}$ 时，

$$\frac{dg(\theta)}{dx}=0,$$

即

$$-3+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)a+12\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)=0.$$

$$a=\frac{\sqrt{2}(3\sqrt{3}-3)}{\sqrt{3}-1}=3\sqrt{2}.$$

反之，当 $a=3\sqrt{2}$ 时，

$$\frac{dg(\theta)}{dx}=3(-1+2\sqrt{2}x+4x^2)$$

$$=12\left(x-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right).$$

x	0		$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$		1
$\frac{dg}{dx}$		$-$		$+$	
$g(\theta)$		↘	最小	↗	

所以 $g(\theta)$ 当 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 即 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ 时取得最小值．

2467. 求

$$f(x)=\sin 2x-x\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

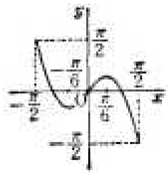
的最大值和最小值。

解 $f(x)=\sin 2x-x$, $\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x)=2\cos 2x-1=0,$$

所以　　$\cos 2x=\dfrac{1}{2}$.

$$\therefore\quad x=\frac{\pi}{6},\ \text{或}\ \ x=-\frac{\pi}{6}.$$



$$f\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\approx\pm0.342.$$

$$f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\mp\frac{\pi}{2}\approx\mp1.57.$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
f'	-3	$-$	0	$+$	0	$-$	-3
f	1.57	↘	-0.34	↗	0.34	↘	-1.57

因此，$f(x)$的最大值是$\dfrac{\pi}{2}$，最小值是$-\dfrac{\pi}{2}$.

2468. 如果nx是锐角，$(n-2)x$是正角，证明

$$\operatorname{tg} nx-\operatorname{tg}(n-1)x>\operatorname{tg}(n-1)x-\operatorname{tg}(n-2)x.$$

解　原不等式可以写成

$$\frac{\sin x}{\cos nx\cos(n-1)x}>\frac{\sin x}{\cos(n-1)x\cos(n-2)x}.$$

因为$\sin x$, $\cos nx$, $\cos(n-1)x$, $\cos(n-2)x$都是正的，所以要证的式子等价于

$$\frac{1}{\cos nx}>\frac{1}{\cos(n-2)x},$$

或　　$\cos(n-2)x>\cos nx$.

这个不等式是显然成立的，所以要证的不等式成立.

2469. 如果方程$x^2-2px+q^2=0$中

$$p=\frac{1}{2}\sec\theta,\ q=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta,$$

证明这个方程的两个根是

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}}\quad\text{和}\quad\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\theta}{2}-1}.$$

解　(i) 设$x^2-2px+q^2=0$的两个根是α、β，则

$$\alpha+\beta=2p=\sec\theta,\ \alpha\beta=q^2=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\theta.$$

因为

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\theta}{2}-1}$$

$$=\frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}+\frac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta,$$

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\theta}{2}-1}$$

$$=\frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{4\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\theta,$$

所以，原方程的根是$\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}}$、$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\theta}{2}-1}$.

(ii) 如果一个方程以

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}}、\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\theta}{2}-1}$$

为根，那么

$$\left(x-\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\theta}{2}-1}\right)=0,$$

即　$$\left(x-\frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos\theta}\right)\left(x-\frac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos\theta}\right)=0,$$

$$x^2-x\sec\theta+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\theta=0.$$

这与给出的方程完全相同.

2470. 设$x^2+6x+7=0$的两根是$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}\beta$，证明$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

解　由根与系数的关系，得

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-6,\qquad ①$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=7.\qquad ②$$

由①，得

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=-6.$$

$$\therefore\quad \sin(\alpha+\beta)=-6\cos\alpha\cos\beta. \qquad ③$$

由 ②, 得

$$\sin\alpha\sin\beta=7\cos\alpha\cos\beta.$$

即 $-6\cos\alpha\cos\beta=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$

$$\therefore\quad -6\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta). \qquad ④$$

由 ③、④, 得

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta).$$

2471. 求方程 $x^2-2x\operatorname{ctg}2\beta-1=0$ 的根的简化形式.

解 由 $x^2-2x\operatorname{ctg}2\beta-1=0$, 得

$$x=\operatorname{ctg}2\beta\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2 2\beta+1}$$
$$=\operatorname{ctg}2\beta\pm\csc 2\beta$$
$$=\frac{\cos 2\beta\pm 1}{\sin 2\beta}.$$

当取 + 号时, 得

$$x=\frac{2\cos^2\beta}{2\sin\beta\cos\beta}=\operatorname{ctg}\beta.$$

当取 − 号时, 得

$$x=\frac{-2\sin^2\beta}{2\sin\beta\cos\beta}=-\operatorname{tg}\beta.$$

2472. 如果

$$\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^2\beta}=1,\quad \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\varphi}{\sin\beta},$$

证明 $\sin\theta=\dfrac{\pm\sin\alpha}{\sqrt{1\mp\cos\alpha\cos\beta}}.$

解 由给出的第二个式子, 得

$$\sin^2\varphi=\frac{\sin^2\beta\sin^2\theta}{\sin^2\alpha}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}^2\varphi=\frac{\sin^2\beta\sin^2\theta}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta\sin^2\theta}.$$

代入给出的第一个式子, 得

$$\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{\cos^2\beta\sin^2\theta}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta\sin^2\theta}=1.$$

$$\therefore\quad \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta\sin^2\theta-\cos^2\beta\sin^2\theta}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta\sin^2\theta},$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta\sin^2\theta}.$$

即

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2\alpha}{(1-\sin^2\theta)\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta\sin^2\theta}.$$

所以

$$\sin^2\theta\cos^2\alpha(\sin^2\alpha-\sin^2\beta\sin^2\theta)$$
$$=(\sin^2\alpha-\sin^2\theta)(1-\sin^2\theta)\sin^2\alpha,$$

$$\sin^4\theta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\beta)$$
$$-\sin^2\theta(\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha)$$
$$+\sin^4\alpha=0,$$

$$\sin^4\theta(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta)$$
$$-2\sin^2\theta\sin^2\alpha+\sin^4\alpha=0.$$

解这个双两次方程, 得

$$\sin^2\theta=\frac{1\pm\cos\alpha\cos\beta}{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}\sin^2\alpha$$
$$=\frac{\sin^2\alpha}{1\mp\cos\alpha\cos\beta}.$$

显然原式得证.

2473. 已知

$$\cos\theta+\cos\varphi+\cos\psi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi=0,$$

证明

$$\csc^2\theta+\csc^2\varphi+\csc^2\psi$$
$$\pm 2\csc\theta\csc\varphi\csc\psi=1.$$

解 为简明起见, 设

$$\cos\theta=x,\ \cos\varphi=y,\ \cos\psi=z,$$
$$\sin\theta=m,\ \sin\varphi=n,\ \sin\psi=p,$$

则

$$x+y+z=-xyz.$$

从而得出:

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=x^2y^2z^2.$$

即

$$(1-m^2)+(1-n^2)+(1-p^2)$$
$$+2(xy+yz+zx)$$
$$=(1-m^2)(1-n^2)(1-p^2),$$

$$2(xy+yz+zx)$$
$$=m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2p^2-2.$$

从而得出:

$$4[x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)]$$
$$=(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2p^2-2)^2.$$

即

$$4[(1-m^2)(1-n^2)+(1-n^2)(1-p^2)$$
$$+(1-p^2)(1-m^2)-2x^2y^2z^2]$$
$$=(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2p^2-2)^2,$$

$$4[(1-m^2)(1-n^2)+(1-n^2)(1-p^2)$$
$$+(1-p^2)(1-m^2)$$
$$-2(1-m^2)(1-n^2)(1-p^2)]$$
$$=(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2p^2-2)^2.$$

经化简后得

$$m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2p^2=\pm 2mnp,$$

$$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\pm\frac{2}{mnp}=1.$$

即

$$\csc^2\theta+\csc^2\varphi+\csc^2\psi \pm 2\csc\theta\csc\varphi\csc\psi=1.$$

2474. 如果

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1,$$
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$
$$\cos A\cos\alpha+\cos B\cos\beta+\cos C\cos\gamma=0,$$

证明

$$\frac{\sin\alpha\sin 2\alpha}{\cos A}+\frac{\sin\beta\sin 2\beta}{\cos B}+\frac{\sin\gamma\sin 2\gamma}{\cos C}+\frac{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos A\cos B\cos C}=0.$$

解　把左边通分后得其分子是

$$\begin{aligned}&2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)\cos B\cos C\\&\quad+2\cos\beta(1-\cos^2\beta)\cos C\cos A\\&\quad+2\cos\gamma(1-\cos^2\gamma)\cos A\cos B\\&\quad+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\&=2\cos\alpha(\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\cos B\cos C\\&\quad+2\cos\beta(\cos^2\gamma+\cos^2\alpha)\cos C\cos A\\&\quad+2\cos\gamma(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)\cos A\cos B\\&\quad+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\&=2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos A+\cos\beta\cos B)\cos C\\&\quad+2\cos\beta\cos\gamma(\cos\beta\cos B+\cos\gamma\cos C)\cos A\\&\quad+2\cos\gamma\cos\alpha(\cos\gamma\cos C+\cos\alpha\cos A)\cos B\\&\quad+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\&=-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^2 C\\&\quad-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^2 A\\&\quad-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos^2 B\\&\quad+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\&=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(1-\cos^2 C-\cos^2 A-\cos^2 B)=0.\end{aligned}$$

所以原式成立。

2475. 证明

$$\begin{aligned}&[(\sec\theta\sec\varphi+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi)^2-(\operatorname{tg}\theta\sec\varphi+\sec\theta\operatorname{tg}\varphi)^2]\\&\quad\div[2(1+\operatorname{tg}^2\theta\operatorname{tg}^2\varphi)-\sec^2\theta\sec^2\varphi]\\&=(\sec 2\theta\sec 2\varphi)\div(\sec^2\theta\sec^2\varphi).\end{aligned}$$

解

$$\begin{aligned}\because\quad&(\sec\theta\sec\varphi+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi)^2-(\operatorname{tg}\theta\sec\varphi+\sec\theta\operatorname{tg}\varphi)^2\\&=\sec^2\theta\sec^2\varphi+\operatorname{tg}^2\theta\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^2\theta\sec^2\varphi-\sec^2\theta\operatorname{tg}^2\varphi\\&=\sec^2\varphi(\sec^2\theta-\operatorname{tg}^2\theta)-\operatorname{tg}^2\varphi(\sec^2\theta-\operatorname{tg}^2\theta)\\&=\sec^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi=1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2(1+\operatorname{tg}^2\theta\operatorname{tg}^2\varphi)-\sec^2\theta\sec^2\varphi\\&=\frac{2(\cos^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\sin^2\theta)-1}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}\\&=\frac{(1+\cos 2\theta)\cos^2\varphi+(1-\cos 2\theta)\sin^2\varphi-1}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}\\&=\frac{\cos 2\theta(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}\\&=\frac{\cos 2\theta\cos 2\varphi}{\cos^2\theta\cos^2\varphi},\end{aligned}$$

$$\therefore\ \text{原式左边}=1\div\frac{\cos 2\theta\cos 2\varphi}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}=\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{\cos 2\theta\cos 2\varphi}=\frac{\sec 2\theta\sec 2\varphi}{\sec^2\theta\sec^2\varphi}.$$

这就是说，原式成立。

2476. 如果 $\operatorname{tg}\theta=\frac{7}{24}$，求 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ 的值。

解　因为 $\operatorname{tg}2\theta=\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}$，所以若设

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=x,$$

则　$\operatorname{tg}\theta=\frac{2x}{1-x^2}$. $\therefore\ \frac{7}{24}=\frac{2x}{1-x^2}$

解这个方程，得

$$x=-7\quad\text{或}\quad\frac{1}{7}.$$

2477. 解方程

$$\cos^3\theta-\cos\theta\sin\theta-\sin^3\theta=1.$$

解　由给出的方程，得

$$\cos^3\theta-\sin^3\theta=1+\cos\theta\sin\theta,$$
$$(\cos\theta-\sin\theta)(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)=1+\cos\theta\sin\theta,$$
$$(\cos\theta-\sin\theta)(1+\cos\theta\sin\theta)=1+\cos\theta\sin\theta.$$

由 $1+\cos\theta\sin\theta=0$，得

$$2+\sin 2\theta=0,\ \sin 2\theta=-2.$$

这时，方程无解。

由 $\cos\theta-\sin\theta=1$，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

从而得出：$\frac{\pi}{4}+\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

即　$\theta=2n\pi$，或　$\theta=2n\pi-\frac{\pi}{2}$.

2478. 证明 $\theta=\cos\theta$ 有且仅有一个根，而且这个根小于 $\frac{\pi}{4}$.

解　当 θ 从 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\theta$ 从 1 趋近于 0. 因此，在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 间有且仅有一个适当的值可能满足 $\theta=\cos\theta$。当 $\theta=0$ 时 $\cos\theta>\theta$；当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时 $\cos\theta<\theta$。所以，使 $\theta=\cos\theta$ 成立的 θ 值一定小于 $\frac{\pi}{4}$. 又 θ 从 0 变到 $-\frac{\pi}{2}$ 时，它的余弦的值总是正值，所以这时 $\theta=\cos\theta$ 不能成立. 当 θ 的绝对值大于 $\frac{\pi}{2}$ 时，因为 $\frac{\pi}{2}>1$，所以这时 $\theta=\cos\theta$ 也不能成立. 所以 $\theta=\cos\theta$ 的根有且仅有一个，且这个根小于 $\frac{\pi}{4}$.

2479. 解方程：

$$\operatorname{ctg}5\theta-\operatorname{ctg}2\theta=\csc 2\theta.$$

解　由给出的方程，得

$$\frac{-\sin 3\theta}{\sin 5\theta\sin 2\theta}=\frac{1}{\sin 2\theta},$$

$$\frac{\sin 5\theta+\sin 3\theta}{\sin 5\theta\sin 2\theta}=0,$$

$$\frac{2\sin 4\theta\cos\theta}{\sin 5\theta\sin 2\theta}=0,$$

$$\frac{4\cos 2\theta\cos\theta}{\sin 5\theta}=0,$$

$$\cos 2\theta\cos\theta=0.$$

由 $\cos 2\theta=0$，得

$$2\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

由 $\cos\theta=0$，得

$$\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

2480. 解方程：

$$\sin 2\theta=3\operatorname{tg}\theta\cos 2\theta.$$

解　由给出的方程，得

$$\operatorname{tg}2\theta=3\operatorname{tg}\theta,$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}=3\operatorname{tg}\theta.$$

由此可得

$$\operatorname{tg}\theta=0,\text{或}\quad\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2\theta}=3.$$

由 $\operatorname{tg}\theta=0$，得 $\theta=n\pi$。

由 $\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2\theta}=3$，得 $\operatorname{tg}\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，即

$$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

2481. 解方程：$\operatorname{tg}\theta+\cos 2\theta=1$.

解　由给出的方程，得

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=1-\cos 2\theta,$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2\sin^2\theta.$$

由此可得

$$\sin\theta=0,\text{或}\quad\frac{1}{\cos\theta}=2\sin\theta.$$

由 $\sin\theta=0$，得 $\theta=n\pi$.

由 $\frac{1}{\cos\theta}=2\sin\theta$，得 $\sin 2\theta=1$，即

$$2\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2},\quad\theta=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

2482. 解方程：$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}3\theta=2\operatorname{tg}2\theta$.

解　$\operatorname{tg}3\theta-\operatorname{tg}2\theta=\operatorname{tg}2\theta-\operatorname{tg}\theta$.

即

$$\frac{\sin(3\theta-2\theta)}{\cos 3\theta\cos 2\theta}=\frac{\sin(2\theta-\theta)}{\cos 2\theta\cos\theta},$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos 3\theta\cos 2\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos 2\theta\cos\theta},$$

$$\frac{\sin\theta(\cos\theta-\cos 3\theta)}{\cos 3\theta\cos 2\theta\cos\theta}=0,$$

$$\frac{4\sin^3\theta}{\cos 3\theta\cos 2\theta}=0.$$

从而得出

$$\sin\theta=0,\quad\therefore\quad\theta=n\pi.$$

2483. 解方程：

$$2\operatorname{ctg}2\theta-\operatorname{tg}2\theta=3\operatorname{ctg}3\theta.$$

解　$2\operatorname{ctg}2\theta-2\operatorname{ctg}3\theta=\operatorname{ctg}3\theta+\operatorname{tg}2\theta.$

$$\frac{2\sin(3\theta-2\theta)}{\sin 2\theta\sin 3\theta}=\frac{\cos(3\theta-2\theta)}{\sin 3\theta\cos 2\theta},$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 2\theta\sin 3\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin 3\theta\cos 2\theta},$$

$$\frac{1}{\cos\theta\sin3\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin3\theta\cos2\theta},$$

$$\frac{\cos^2\theta-1}{\cos\theta\cos2\theta\sin3\theta}=0,$$

$$\frac{-\sin\theta}{\cos\theta\cos2\theta(3-4\sin^2\theta)}=0.$$

从而得出：$\sin\theta=0$，$\therefore\ \theta=n\pi$。经检验后，这是增根，所以原方程无解。

2484．解方程：$\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{tg}\theta=4$。

解　$$\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}+\operatorname{tg}\theta=4,$$

即　$$1+\operatorname{tg}^2\theta=4\operatorname{tg}\theta,$$

$$\operatorname{tg}^2\theta-4\operatorname{tg}\theta+4=3.$$

由此可得　$\operatorname{tg}\theta-2=\pm\sqrt{3}$。

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\theta=2\pm\sqrt{3}.$$

所以

$\theta=180°n+15°$　或　$\theta=180°n+75°$。

2485．解方程：$\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=1$。

解　由给出的方程，得

$$\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x-1=0.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

所以原方程的解是

$$x=n\pi+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right).$$

2486．把60°的角分成两部分，使一部分的正弦是另一部分正弦的2倍，求各部分的正弦。

解　设一部分为x，则另一部分为$60°-x$。根据题意，得

$$\sin x=2\sin(60°-x).$$

即　$\sin x=2\sin60°\cos x-2\sin x\cos60°$。

把$\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$和$\cos60°=\frac{1}{2}$代入，得

$$\sin x=\sqrt{3}\cos x-\sin x,$$

即　$$2\sin x=\sqrt{3}\cos x,$$

$$2\sin x=\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\sin^2x},$$

$$7\sin^2x=3,$$

$$\therefore\quad \sin x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

因为x是小于60°的正角，所以

$$\sin x=\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$\therefore\quad \sin(60°-x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14}.$$

因此所分成的两部分的正弦的值分别是$\frac{\sqrt{21}}{7}$和$\frac{\sqrt{21}}{14}$。

2487．解方程：

$$\sin x+\sin2x+\sin3x=4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3x}{2}.$$

解　给出的方程的

$$\begin{aligned}左边&=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\\&=2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{5x}{2}\right)\\&=4\cos\frac{x}{2}\cos x\sin\frac{3x}{2}.\end{aligned}$$

所以给出的方程就是

$$4\cos\frac{x}{2}\cos x\left(\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)=0.$$

由$\cos\frac{x}{2}=0$，得$x=(2n+1)\pi$。

由$\cos x=0$，得$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$。

由$\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=0$，得$\operatorname{tg}\frac{3}{2}x=1$，即

$$\frac{3}{2}x=n\pi+\frac{\pi}{4},\quad x=(4n+1)\frac{\pi}{6}.$$

2488．解方程：

$$\sec x=\sin x+2\cos x.$$

解　把原方程变形，得

$$\frac{1}{\cos x}=\sin x+2\cos x,$$

$$1-2\cos^2x=\sin x\cos x,$$

$$-\cos2x=\frac{1}{2}\sin2x,$$

$$\operatorname{tg}2x=-2.$$

查表得

$$2x=180°-63°26'5.82'',$$

$$x=58°16'57.09''.$$

设这个角为α，则一般解是

$$2x=n\cdot180°+2\alpha.$$

即　$$x=n\cdot90°+\alpha.$$

2489．如果a是正的常数，$0\leqq x\leqq\pi$，求使

$$(a+1)^2\cos^2x+4a\sin x\cos x+(a-1)^2\sin^2x$$

取得最大值或最小值的x值。

解　原式$=a^2+1+2a(\cos^2x-\sin^2x)$
$+4a\sin x\cos x$
$=a^2+1+2a(\cos 2x+\sin 2x)$
$=a^2+1+2\sqrt{2}\,a\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $\frac{\pi}{4}\leq 2x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{9\pi}{4}$，所以当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$、$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$ 时，原式分别取得最大值和最小值．即原式当 $x=\frac{\pi}{8}$ 时取得最大值，当 $x=\frac{5\pi}{8}$ 时，取得最小值．

2490． 如果三角形 ABC 中 C 是直角，证明

$$\operatorname{tg}2A=\frac{2ab}{b^2-a^2}.$$

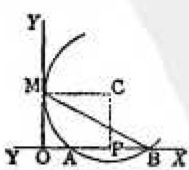
解

$$\operatorname{tg}2A=\frac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2A}=\frac{\frac{2a}{b}}{1-\frac{a^2}{b^2}}=\frac{2ab}{b^2-a^2}.$$

别解

$$\operatorname{tg}2A=\frac{\sin 2A}{\cos 2A}=\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2A-\sin^2A}$$
$$=\frac{2\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}}{\frac{b^2}{c^2}-\frac{a^2}{c^2}}=\frac{2ab}{b^2-a^2}.$$

2491． 在直角 O 的一边上有 A、B 两定点，$OA=a$，$OB=b$．在另一边上取一点 M，使 $\angle AMB$ 取得极大值，求这时三角形 AMB 的外接圆半径．



解　设

$$OM=x,\ \angle OMA=\alpha,\ \angle OMB=\beta,$$

则

$$\operatorname{tg}\angle AMB=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

其中　$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{x}$，$\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{x}$．

所以 $\operatorname{tg}\angle AMB=\frac{(b-a)x}{x^2+ab}=m$．

因而得　$mx^2-(b-a)x+mab=0$．

要使 x 是实数，必须使

$$(b-a)^2-4m^2ab\geq 0.$$

即　$-\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}\leq m\leq\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$．

当 $\angle AMB$ 取得极大值即 $m=\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$ 时，$x=\frac{b-a}{2m}=\sqrt{ab}$，即

$$OM^2=OA\cdot OB,$$

$\triangle AMB$ 的外接圆过 A、B 而切 OY 于点 M．若设圆心为 C，则 $MC=OP=\frac{a+b}{2}$．

2492． 解方程:

$$8\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\cos^3\theta+8\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\sin^3\theta$$
$$-6\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}.$$

解　把

$$\cos^3\theta=\frac{3\cos\theta+\cos 3\theta}{4},$$
$$\sin^3\theta=\frac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{4}$$

代入原方程，得

$$2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)(3\cos\theta+\cos 3\theta)$$
$$+2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)(3\sin\theta-\sin 3\theta)$$
$$-6\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3},$$

$$6\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\cos 3\theta$$
$$+6\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta$$
$$-2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\sin 3\theta$$
$$-6\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3},$$

$$2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\cos 3\theta$$
$$-2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\sin 3\theta=\sqrt{3}.$$

即　$-\sin\left(3\theta-\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

从而得出

$$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore\quad 2\theta+\frac{\pi}{3}=n\pi+(-1)^n\frac{4\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}.$$

2493. 当 a 是实数时，设 x 的三次方程 $x^3+x^2-x+a=0$ 有虚根 $\cos\theta+i\sin\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，试答：

(1) 求 θ 的值；

(2) 求 a 的值，并解这个三次方程．

解　(1) 因为

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta,$$
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta,$$

所以，把它们代入 $x^3+x^2-x+a=0$，得

$$(\cos 3\theta+\cos 2\theta-\cos\theta+a)+i(\sin 3\theta+\sin 2\theta-\sin\theta)=0.$$

其中实部、虚部分别满足

$$\cos 3\theta+\cos 2\theta-\cos\theta+a=0, \qquad ①$$
$$\sin 3\theta+\sin 2\theta-\sin\theta=0. \qquad ②$$

由②，得

$$2\cos 2\theta\sin\theta+\sin 2\theta=0.$$
$$\therefore\quad 2\sin\theta(\cos 2\theta+\cos\theta)=0.$$

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\sin\theta\neq 0$，所以

$$\cos 2\theta+\cos\theta=0.$$
$$\therefore\quad (2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)=0.$$

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\cos\theta>0$，所以

$$\cos\theta=\frac{1}{2}.\quad\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{3}.$$

(2) 把 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入①，得

$$\cos\pi+\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}+a=0.$$
$$\therefore\quad -1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+a=0.$$
$$\therefore\quad a=2.$$

设　　$f(x)=x^3+x^2-x+2.$

$$\because\quad f(-2)=(-2)^3+(-2)^2-(-2)+2=0,$$
$$\therefore\quad f(x)=x^3+x^2-x+2=(x+2)(x^2-x+1).$$
$$\therefore\quad x=-2,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

2494. 求证：

(1) $\sin 18^\circ=\sin^2 54^\circ-\sin^2 36^\circ$；

(2) $\operatorname{tg} 50^\circ+\operatorname{ctg} 50^\circ=2\sec 10^\circ$；

(3) $\cos^2 27.5^\circ+\cos^2 32.5^\circ+\cos^2 87.5^\circ=\frac{3}{2}$；

(4) $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ=\frac{3}{4}$．

解　(1)

$$\begin{aligned}左边&=\sin 90^\circ\sin 18^\circ\\&=\sin(54^\circ+36^\circ)\sin(54^\circ-36^\circ)\\&=\sin^2 54^\circ-\sin^2 36^\circ.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}左边&=\frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ}+\frac{\cos 50^\circ}{\sin 50^\circ}\\&=\frac{\sin^2 50^\circ+\cos^2 50^\circ}{\sin 50^\circ\cos 50^\circ}\\&=\frac{2}{2\sin 50^\circ\cos 50^\circ}\\&=\frac{2}{\sin 100^\circ}=\frac{2}{\cos 10^\circ}\\&=2\sec 10^\circ.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}左边&=\frac{1}{2}(\cos 55^\circ+1+\cos 65^\circ+1+\cos 175^\circ+1)\\&=\frac{1}{2}(\cos 55^\circ+\cos 65^\circ+\cos 175^\circ)+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}左边&=\frac{1}{2}(1-\cos 20^\circ+1+\cos 80^\circ+\sin 50^\circ-\sin 30^\circ)\\&=\frac{1}{2}(2-2\sin 50^\circ\sin 30^\circ+\sin 50^\circ-\sin 30^\circ)\\&=\frac{1}{2}\left(2-\sin 50^\circ+\sin 50^\circ-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

2495. 已知 $\sec\alpha\sec\theta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta=\sec\beta$，求 $\operatorname{tg}\theta$．

解　$\sec\alpha\sec\theta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta=\sec\beta$,

$$\sec\alpha\sec\theta=\sec\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta,$$
$$\sec^2\alpha\sec^2\theta=(\sec\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta)^2,$$

即

$$\sec^2\alpha(1+\mathrm{tg}^2\theta)=\sec^2\beta-2\sec\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\theta+\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\theta,$$

$$(\sec^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha)\,\mathrm{tg}^2\theta+2\sec\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\theta=\sec^2\beta-\sec^2\alpha,$$

$$\mathrm{tg}^2\theta+2\sec\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\theta=\sec^2\beta-\sec^2\alpha,$$

$$(\mathrm{tg}\,\theta+\mathrm{tg}\,\alpha\sec\beta)^2=\sec^2\beta-\sec^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\sec^2\beta.$$

$$\because\ \sec^2\beta-\sec^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\sec^2\beta=\sec^2\beta\sec^2\alpha-\sec^2\alpha=\mathrm{tg}^2\beta\sec^2\alpha,$$

$$\therefore\ \mathrm{tg}\,\theta+\mathrm{tg}\,\alpha\sec\beta=\pm\mathrm{tg}\,\beta\sec\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\,\theta=-\mathrm{tg}\,\alpha\sec\beta\pm\mathrm{tg}\,\beta\sec\alpha=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}\pm\frac{\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{-\sin\alpha\pm\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

2496. 如果 β 是方程 $\cos\theta=\theta$ 的根的过剩近似值，证明 $\beta-\dfrac{\beta-\cos\beta}{1+\cos\beta}$ 是该方程根的比 β 更为精确的过剩近似值.

解 设 β 是0到 $\dfrac{\pi}{2}$ 之间的角，且 β 较方程 $\theta=\cos\theta$ 的根大，则 $\beta-\cos\beta$ 是正值．设 $\beta-\alpha$ 是 $\theta=\cos\theta$ 的根，则 $\beta-\alpha=\cos(\beta-\alpha)$，即

$$\beta-\alpha=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha.$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{\beta-\cos\beta\cos\alpha}{1+\sin\beta\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}.$$

因为 $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}<1$ 时，$\cos\alpha$ 也小于1，从而得出 $\dfrac{\beta-\cos\beta}{1+\sin\beta}$ 小于 α，且是正值．所以

$$\beta-\frac{\beta-\cos\beta}{1+\sin\beta}$$

是比 β 更为接近 $\theta=\cos\theta$ 的根的过剩近似值.

2497. 解方程：

$$\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y=a,\quad x+y=b.$$

解 由给出的第一个方程的左边，得

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)},$$

所以第一个方程就是

$$\frac{2\sin b}{\cos b+\cos(x-y)}=a.$$

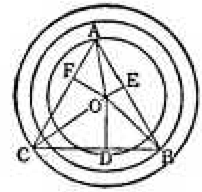
从而得出

$$\cos(x-y)=\frac{2\sin b}{a}-\cos b.$$

设满足上式的 $x-y$ 的最小正值是 α，则 $x-y=2n\pi\pm\alpha$，结合 $x+y=b$，得

$$x=\frac{b}{2}+n\pi\pm\frac{\alpha}{2},\quad y=\frac{b}{2}-n\pi\mp\frac{\alpha}{2}.$$

2498. 给出三个同心圆，试作顶点分别在这三个同心圆上的正三角形.



解 设三个圆的公共圆心是 O，所作的正三角形为 ABC．从 O 向 BC、AB、CA 所作的垂线分别是 OD、OE、OF，且设 $OD=x$，$OE=y$，$OF=z$．又设 $OA=r_1$，$OB=r_2$，$OC=r_3$，$\angle OCB=\theta$，$\angle OCA=\varphi$，则 $\sin\theta=\dfrac{x}{r_3}$，

$$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\frac{x^2}{r_3^2}}.$$

同理可得 $\quad\sin\varphi=\dfrac{z}{r_3}$，

$$\cos\varphi=\sqrt{1-\frac{z^2}{r_3^2}}.$$

又 $\quad\cos(\varphi+\theta)=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$，

即 $\quad\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$，

$$\therefore\ \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{r_3^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{r_3^2}\right)}-\frac{xz}{r_3^2}=\frac{1}{2}.$$

即 $\quad 2\sqrt{(r_3^2-x^2)(r_3^2-z^2)}-2xz=r_3^2$，

$$4(r_3^4-r_3^2x^2-r_3^2z^2+x^2z^2)=r_3^4+4r_3^2xz+4x^2z^2,$$

$$4r_3^2xz+4r_3^2(x^2+z^2)=3r_3^4.$$

$$x^2+xz+z^2=\frac{3}{4}r_3^2. \qquad ①$$

同理可得

$$y^2+yx+x^2=\frac{3}{4}r_2^2, \qquad ②$$

$$z^2+zy+y^2=\frac{3}{4}r_1^2. \qquad ③$$

解由①、②、③组成的方程组，求出 x、y、z

后就可作出这个正三角形。

2499. 证明下列各式。

(1) $\dfrac{1-\sin A\cos A}{\cos A(\sec A-\csc A)}\cdot\dfrac{\sin^2 A-\cos^2 A}{\sin^3 A+\cos^3 A}$
$=\sin A$;

(2) $\sec A+\text{tg}\,A=\dfrac{1}{\sec A-\text{tg}\,A}$;

(3) $\text{tg}^2\theta-\text{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\theta}{\cos^2\theta\cos^2\alpha}$;

(4) $\dfrac{\text{tg}\,x}{1+\text{tg}^2 x}=\sin x\cos x$;

(5) $\dfrac{1-\text{tg}^2 A}{1+\text{tg}^2 A}=\cos^2 A-\sin^2 A$;

(6) $\dfrac{1-\sin A}{1-\cos A}\cdot\dfrac{\csc\theta+1}{\sec\theta+1}=\text{ctg}^3\theta$;

(7) $\dfrac{\sin^4 A-\cos^4 A}{1-2\sin A\cos A}\cdot\dfrac{1-\text{ctg}\,A}{\sin A+\cos A}$
$=\csc A$.

解 (1)

$$\text{左边}=\frac{(1-\sin A\cos A)\sin A}{\sin A-\cos A}\times\frac{\sin^2 A-\cos^2 A}{\sin^3 A+\cos^3 A}$$
$$=\frac{(1-\sin A\cos A)\sin A}{\sin^2 A-\sin A\cos A+\cos^2 A}$$
$$=\sin A.$$

(2) $$\sec A+\text{tg}\,A=\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}$$
$$=\frac{1+\sin A}{\cos A}=\frac{\cos A(1+\sin A)}{\cos^2 A}$$
$$=\frac{\cos A(1+\sin A)}{1-\sin^2 A}=\frac{\cos A}{1-\sin A}$$
$$=\frac{1}{\dfrac{1}{\cos A}-\dfrac{\sin A}{\cos A}}=\frac{1}{\sec A-\text{tg}\,A}.$$

别解

$\because$ $(\sec A+\text{tg}\,A)(\sec A-\text{tg}\,A)$
$=\sec^2 A-\text{tg}^2 A=1$,

$\therefore$ $\sec A+\text{tg}\,A=\dfrac{1}{\sec A-\text{tg}\,A}$.

(3)

$$\text{左边}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{\sin^2\theta\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\theta}{\cos^2\theta\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{(1-\cos^2\theta)\cos\alpha-(1-\cos^2\alpha)\cos^2\theta}{\cos^2\theta\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\theta}{\cos^2\theta\cos^2\alpha}.$$

(4) $$\text{左边}=\frac{\text{tg}\,x}{\sec^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x$$
$$=\sin x\cos x.$$

(5) $$\text{左边}=\frac{1-\text{tg}^2 A}{\sec^2 A}=\cos^2 A\left(1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)$$
$$=\cos^2 A-\sin^2 A.$$

(6) $$\text{左边}=\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$=\frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$
$$=\text{ctg}^3\theta.$$

(7) $$\text{左边}=\frac{\sin^2 A-\cos^2 A}{(\sin A-\cos A)^2}\times\frac{\sin A-\cos A}{\sin A(\sin A+\cos A)}$$
$$=\frac{1}{\sin A}=\csc A.$$

2500. 求 $(5-\sin x)(2+\sin x)$ 的极大值。

解 因为 $(5-\sin x)$ 与 $(2+\sin x)$ 的和是常数 7，所以当 $5-\sin x=2+\sin x$ 时，它们的积取得极大值。这时

$$2\sin x=3,\ \sin x=\frac{3}{2}.$$

但是因为 $|\sin x|\leq 1$，$\sin x=\dfrac{3}{2}$ 不可能成立。所以原式当 $[5-\sin x-(2+\sin x)]=(3-2\sin x)$ 极小，即 $\sin x=1$ 时取得极大值，极大值 $=(5-1)(2+1)=12$。

2501. 解方程:

$$\sin 5\theta+\sin 3\theta+\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)\cos\theta=0.$$

解 给出的方程就是

$$2\sin 4\theta\cos\theta+\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)\cos\theta=0.$$

从而得出:

$$\cos\theta=0, \qquad ①$$

或 $$2\sin 4\theta+\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)=0. \qquad ②$$

把 ② 变形，得

$$\sin 4\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta=0,$$

即 $$\sin 4\theta+\sin(45^\circ+\theta)=0,$$

$$2\sin\frac{1}{2}(45^\circ+5\theta)\cos\frac{1}{2}(3\theta-45^\circ)=0.$$

所以

$$\sin\frac{1}{2}(45^\circ+5\theta)=0, \qquad ③$$

或

$$\cos\frac{1}{2}(3\theta-45^\circ)=0. \qquad ④$$

由①，得 $\theta=(2n+1)\cdot 90^\circ$.

由③，得

$$\frac{1}{2}(45^\circ+5\theta)=n\cdot 180^\circ,$$

即 $$45^\circ+5\theta=n\cdot 360^\circ,$$

$$\theta=n\cdot 72^\circ-9^\circ=(8n-1)\cdot 9^\circ.$$

由④，得

$$\frac{1}{2}(3\theta-45^\circ)=n\cdot 180^\circ+90^\circ,$$

$$3\theta-45^\circ=n\cdot 360^\circ+180^\circ,$$

$$3\theta=n\cdot 360^\circ+225^\circ,$$

$$\theta=n\cdot 120^\circ+75^\circ=(8n+5)\cdot 15^\circ.$$

2502. 解方程:

$$\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin x.$$

解 由给出的方程,得

$$\sin 2x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\sqrt{2}\sin x,$$

即 $$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x.$$

把 $\sin\frac{\pi}{4}$ 用它的值 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 代入，然后约去公因数,得

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x.$$

因此 $$\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x.$$

由此可得 $$\frac{3\pi}{4}-2x=2n\pi+x,$$

或 $$\frac{3\pi}{4}-2x=(2n+1)\pi-x,$$

$$\therefore\quad x=-\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{4}.$$

或 $$x=-2n\pi-\frac{\pi}{4}.$$

2503. 证明

$$\cos\frac{11\pi}{36}+\cos\frac{13\pi}{36}+\cos\frac{35\pi}{36}=0.$$

解 设 $A=\frac{11\pi}{36}$, 则

$$\frac{13\pi}{36}=\frac{24\pi}{36}-\frac{11\pi}{36}=120^\circ-A,$$

$$\frac{35\pi}{36}=\frac{24\pi}{36}+\frac{11\pi}{36}=120^\circ+A.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 左边&=\cos A+\cos(120^\circ-A)\\&\quad+\cos(120^\circ+A)\\&=\cos A+2\cos 120^\circ\cos A\\&=\cos A-\cos A=0.\end{aligned}$$

2504. 已知 $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 求 $\operatorname{tg}15^\circ$ 的值.

解 $$\operatorname{tg}30^\circ=\frac{2\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}.$$

设 $\operatorname{tg}15^\circ=x$, 则

$$\operatorname{tg}30^\circ=\frac{2x}{1-x^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2x}{1-x^2}.$$

由此可得 $$1-x^2=2\sqrt{3}x,$$

$$x^2+2\sqrt{3}x-1=0.$$

$$\therefore\quad x=-\sqrt{3}\pm\sqrt{3+1}=-\sqrt{3}\pm 2.$$

又因为 $\operatorname{tg}15^\circ>0$, 所以

$$x=-\sqrt{3}+2.$$

2505. 已知 $\operatorname{tg}\alpha$, 请连续应用求 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 的公式求 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$ 的值.

解 $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha},$$

这里,根号前的正、负号必须根据 α 的值适当地选取. 现在把这样取得的 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 的值设为 t, 于是,根据上面同样的公式得到

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+t^2}}{t}.$$

2506. 若 $\sin\theta=\frac{120}{169}$, 求 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ 和 $\cos\frac{3\theta}{2}$ 的值.

解 这里,

$$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\left(\frac{120}{169}\right)^2}=\pm\frac{119}{169}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\pm\sqrt{\frac{1\mp\frac{119}{169}}{1\pm\frac{119}{169}}}.$$

即　$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\pm\frac{5}{12}$, $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\pm\frac{12}{5}$.

又　$\cos\frac{3\theta}{2}=\cos\frac{\theta}{2}\left(4\cos^2\frac{\theta}{2}-3\right)$

$$=\cos\frac{\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}(2\cos\theta-1).$$

把 $\cos\theta$ 的值代入上式，得

$$\cos\frac{3\theta}{2}=\pm\frac{828}{2197},\ \cos\frac{3\theta}{2}=\pm\frac{2035}{2197}.$$

2507. 解方程：

$$\sin^2x+2\sin x\cos x-2\cos^2x=m.$$

m 取怎样的值时所得的解成立？又，$m=\frac{1}{2}$ 时求 x 的值。

解　把　$\sin x=\pm\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}$,

$$\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}$$

代入给出的方程，得

$$\frac{\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}\pm\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}-\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2x}=m.$$

去分母，整理后得

$$(1-m)\operatorname{tg}^2x\pm2\operatorname{tg}x-(2+m)=0.$$

要使这个方程的根是实数，必须使

$$1+(1-m)(2+m)\geq0,$$

即　$$m^2+m-3\leq0.$$

这时 m 是在使上式的左边是 0 的两个值之间，即

$$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\leq m\leq\frac{-1+\sqrt{13}}{2}.$$

并且　$\operatorname{tg}x=\frac{\pm1\pm\sqrt{3-m(1+m)}}{1-m}$.

当 $m=\frac{1}{2}$ 时，

$$\operatorname{tg}x'=\pm1,\ \operatorname{tg}x''=\pm5.$$

从而得出：$x'=n\cdot180^\circ\pm45^\circ$,

$$x''=n\cdot180^\circ\pm78^\circ41'24''24.$$

2508. 证明 $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm\sin2\theta$，并求使 $2\sin\theta=\sqrt{1+\sin2\theta}-\sqrt{1-\sin2\theta}$ 成立的 θ 值的范围。

解　$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2$

$$=\sin^2\theta\pm2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$=1\pm\sin2\theta.$$

因此　$\sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{1+\sin2\theta}$,

$$\sin\theta-\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin2\theta}.$$

把这两个式子两边分别相加后使

$$2\sin\theta=\sqrt{1+\sin2\theta}-\sqrt{1-\sin2\theta}\qquad①$$

的条件是

$$\sin\theta+\cos\theta\geq0,\ \sin\theta-\cos\theta\leq0$$

同时成立。

由 $\sin\theta+\cos\theta\geq0$，得

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geq0.$$

$$\therefore\quad 2n\pi\leq\theta+\frac{\pi}{4}\leq(2n+1)\pi,$$

$$\therefore\quad 2n\pi-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq2n\pi+\frac{3\pi}{4}.\qquad②$$

由 $\sin\theta-\cos\theta\leq0$，得

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leq0.$$

$$\therefore\quad (2n-1)\pi\leq\theta-\frac{\pi}{4}\leq2n\pi,$$

$$\therefore\quad 2n\pi-\frac{3\pi}{4}\leq\theta\leq2n\pi+\frac{\pi}{4}.\qquad③$$

因此，由 ②、③ 得

$$2n\pi-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq2n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

除此以外，使 ① 式成立的 θ 值还有

$$\theta=(2n+1)\pi.$$

2509. 若 $A+B+C=180^\circ$，证明

$$\sin^3A+\sin^3B+\sin^3C$$

$$=3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$+\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}.$$

解　$\sin^3A+\sin^3B+\sin^3C$

$$=\frac{1}{4}(3\sin A+3\sin B+3\sin C$$

$$-\sin3A-\sin3B-\sin3C).$$

又　$\sin A+\sin B+\sin C$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin3A+\sin3B+\sin3C$$

$$=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2},$$

所以原式得证。

2510. 求 $y=|\sqrt{3}\sin x+\cos x|$ 的最大值及使它取得最大值时的 x 的值。

解　$y=|\sqrt{3}\sin x+\cos x|$

$$=2\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right|$$

$$=2\left|\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right|$$

$$=2\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right|.$$

因此，y 的最大值是 2. 这时，x 的值可以从 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\pm1$ 求得. 即

$$x+\frac{\pi}{6}=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad x=2n\pi-\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{2}.$$

即　$$x=2n\pi+\frac{\pi}{3},$$

和　$$x=2n\pi-\frac{2\pi}{3}=(2n-1)\pi+\frac{\pi}{3}.$$

综合这两个式子，得

$$x=n\pi+\frac{\pi}{3}.$$

2511. 若 $0°<x\leqq45°$，求使

$$y=\sin^2x+4\sin x\cos x+5\cos^2x$$

取得最大值、最小值的 x 的值，及它的最大值和最小值.

解　应用倍角公式，得

$$y=\sin^2x+4\sin x\cos x+5\cos^2x$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos2x)+2\sin2x+\frac{5}{2}(1+\cos2x)$$

$$=2(\sin2x+\cos2x)+3$$

$$=2\sqrt{2}\sin(2x+45°)+3.$$

因为当 $0°<x\leqq45°$ 时，$45°<2x+45°\leqq135°$，所以当 $2x+45°=90°$，即 $x=22.5°$ 时 y 取得最大值，最大值是

$$2\sqrt{2}+3.$$

又当 $2x+45°=135°$，即 $x=45°$ 时 y 取得最小值，最小值是

$$2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+3=5.$$

2512. 求 $y=\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 的最大值及它取得最大值时的 x 的值.

解　$$y=\frac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}\times\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}(1-\cos x)$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}.$$

因此，y 的最大值是

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1),$$

这时，x 的值是

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,\quad x+\frac{\pi}{4}=2n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad x=2n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

2513. 若 a、b 都是正数，求

$$(a\sin^2x+b\cos^2x)(a\cos^2x+b\sin^2x)$$

的最大值. 这里 $a\neq b$.

解　这里，两个因数都是正的，且

$$(a\sin^2x+b\cos^2x)+(a\cos^2x+b\sin^2x)$$

$$=a+b,$$

它们的和是定值，所以积取得最大值是在

$$a\sin^2x+b\cos^2x=a\cos^2x+b\sin^2x$$

的时候. 把这个式子变形，得

$$a(\cos^2x-\sin^2x)-b(\cos^2x-\sin^2x)$$

$$=(a-b)(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$$

$$=0.$$

$$\therefore\quad \cos x=\pm\sin x,\quad 即\quad \operatorname{tg}x=\pm1.$$

对于这时的 x 的值，原式取得最大值，最大值是

$$\frac{a+b}{2}\times\frac{a+b}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

2514. 若 $0<a<1$，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$，求函数

$\dfrac{a(\cos x+a)}{2a\cos x+a^2+1}$ 的最大值和最小值。

解　设 $y=\dfrac{a(\cos x+a)}{2a\cos x+a^2+1}$.

去分母，得

$$2ay\cos x+(a^2+1)y=a\cos x+a^2.$$

$$\because\quad y\neq\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad \cos x=\frac{a^2-(a^2+1)y}{a(2y-1)}.$$

又因为 $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$，所以

$$0\leq\cos x\leq 1,$$

$$\therefore\quad 0\leq\frac{a^2-(a^2+1)}{a(2y-1)}\leq 1.$$

由这个不等式，求 y 的范围．由

$$\frac{a^2-(a^2+1)}{a(2y-1)}\geq 0,$$

得　　$a(2y-1)[a^2-(a^2+1)y]\geq 0$,

即　　$\left(y-\dfrac{1}{2}\right)\left(y-\dfrac{a^2}{a^2+1}\right)\leq 0$.

$$\therefore\quad \frac{a^2}{a^2+1}\leq y<\frac{1}{2}. \qquad ①$$

由　　$\dfrac{a^2-(a^2+1)y}{a(2y-1)}\leq 1$,

且在 $y<\dfrac{1}{2}$ 的条件下，得

$$a^2-(a^2+1)y\geq a(2y-1),$$

$$a^2+a\geq(a^2+2a+1)y.$$

$$\therefore\quad y\leq\frac{a(a+1)}{(a+1)^2},\ y\leq\frac{a}{a+1}. \qquad ②$$

又因为 $0<a<1$，所以

$$\frac{a^2}{a^2+1}<\frac{a}{a+1}<\frac{1}{2}.$$

根据①、②

$$\frac{a^2}{a^2+1}\leq y\leq\frac{a}{a+1},$$

因此，y 的最大值是 $\dfrac{a}{a+1}$，最小值是 $\dfrac{a^2}{a^2+1}$.

注　y 取得最大值是在 $\cos x=1$ 的时候，取得最小值是在 $\cos x=0$ 的时候。

2515．若 $a>0$, $b>0$，求

$\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}+\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$ 的最大值和最小值。

解　设所给的式子为 y，两边分别平方，得

$$\begin{aligned}y^2&=a^2(\cos^2x+\sin^2x)+b^2(\sin^2x+\cos^2x)\\&\quad+2[(a^4+b^4)\sin^2x\cos^2x\\&\quad+a^2b^2(\sin^4x+\cos^4x)]^{\frac{1}{2}}\\&=a^2+b^2+2[(a^4+b^4)\sin^2x\cos^2x\\&\quad+a^2b^2(1-2\sin^2x\cos^2x)]^{\frac{1}{2}}\\&=a^2+b^2+2[a^2b^2\\&\quad+(a^2-b^2)^2\sin^2x\cos^2x]^{\frac{1}{2}}\\&=a^2+b^2+[4a^2b^2+(a^2-b^2)^2\sin^22x]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

因为 y 的值总是正的，所以，y 取得最大值、最小值的时候，也就是 y^2 分别取得最大值、最小值的时候．y^2 当 $\sin^22x=1$ 时取得最大值，最大值是

$$\begin{aligned}y^2&=a^2+b^2+\sqrt{4a^2b^2+(a^2-b^2)^2}\\&=2(a^2+b^2).\end{aligned}$$

又，y^2 当 $\sin^22x=0$ 时取得最小值，最小值是

$$y^2=a^2+b^2+\sqrt{4a^2b^2}=(a+b)^2.$$

因此，y 的最大值是 $\sqrt{2(a^2+b^2)}$，最小值是 $a+b$.

特别地，当 $a=b$ 时，因为

$$\sqrt{a^2(\cos^2x+\sin^2x)}+\sqrt{a^2(\sin^2x+\cos^2x)}=2a,$$

所以这时 y 没有最大值和最小值。

2516．求下列函数的最大值和最小值：

(1) $\sin^2x+\sin x\cos x+2\cos^2x$;

(2) $a\cos^2x+2b\cos x\sin x+c\sin^2x$.

解　(1) 设给出的函数是 y，应用倍角公式，得

$$\begin{aligned}y&=\sin^2x+\sin x\cos x+2\cos^2x\\&=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}\sin 2x\\&\quad+(1+\cos 2x)\\&=\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)+\frac{3}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

因此，当 $2x+\dfrac{\pi}{4}=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{8}$ 时 y 取得最大值，最大值是

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}=\frac{3+\sqrt{2}}{2}.$$

又当 $2x+\frac{\pi}{4}=2n\pi-\frac{\pi}{2}$，即 $x=n\pi-\frac{3\pi}{8}$ 时 y 取得最小值，最小值是

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}=\frac{3-\sqrt{2}}{2}.$$

(2) 设给出的函数为 y，当 $4b^2+(a-c)^2\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}y&=a\cos^2x+2b\cos x\sin x+c\sin^2x\\&=\frac{a}{2}(1+\cos 2x)+b\sin 2x\\&\quad+\frac{c}{2}(1-\cos 2x)\\&=b\sin 2x+\frac{a-c}{2}\cos 2x+\frac{a+c}{2}\\&=\sqrt{b^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}\left[\frac{2b}{\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}\sin 2x\right.\\&\quad\left.+\frac{a-c}{\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}\cos 2x\right]+\frac{a+c}{2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+(a-c)^2}\sin(2x+\alpha)+\frac{a+c}{2},\end{aligned}$$

这里，　　$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a-c}{2b}.$

因此，当 $\sin(2x+\alpha)=1$ 时 y 取得最大值，最大值是

$$\frac{1}{2}[a+c+\sqrt{4b^2+(a-c)^2}].$$

又，当 $\sin(2x+\alpha)=-1$ 时 y 取得最小值，最小值是

$$\frac{1}{2}[a+c-\sqrt{4b^2+(a-c)^2}].$$

特别地，当 $4b^2+(a-c)^2=0$，即 $a=c, b=0$ 时，$y=a$，所以这时 y 没有最大值和最小值。

2517．对于函数

$$f(x)=\cos\theta+\cos x+\cos(x-\theta),$$

解答下列问题：

(1) 在什么情况下，$f(x)$ 的值等于3？$f(x)$ 的值可以等于 -3 吗？（不把 $f(x)$ 变形而进行考察）

(2) 把 $f(x)$ 的最小值看成是 θ 的函数，用 $g(\theta)$ 来表示，求这时 $g(\theta)$ 的最小值。

解　(1) 因为余弦的绝对值恒不大于1，所以，仅当 $\cos\theta=1$，$\cos x=1$，$\cos(x-\theta)=1$ 时，$f(x)=3$．由 $\cos\theta=1$，得

$$\theta=2n\pi.$$

由 $\cos x=1$，得

$$x=2m\pi.$$

这时，$\cos(x-\theta)=\cos 2(m-n)\pi=1$.

所以 $f(x)=3$ 时，$x=2m\pi$，$\theta=2n\pi$.

同样，如果 $f(x)=-3$，那么

$$\cos\theta=-1,\ \cos x=-1,$$

$$\cos(x-\theta)=-1. \qquad ①$$

由 $\cos\theta=-1$，得

$$\theta=(2n+1)\pi,$$

由 $\cos x=-1$，得

$$x=(2m+1)\pi,$$

这时　　$x-\theta=2(m-n)\pi,$

$$\therefore\quad \cos(x-\theta)=1\neq -1.$$

因为这和 ① 相矛盾，所以 $f(x)\neq -3$.

(2) $$\begin{aligned}f(x)&=\cos\theta+\cos x+\cos(x-\theta)\\&=\cos\theta+2\cos\left(x-\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

(i) 当 $\cos\frac{\theta}{2}\geqq 0$ 时，

由上式可知，$f(x)$ 在 $\cos\left(x-\frac{\theta}{2}\right)=-1$ 时取得最小值，最小值 $g(\theta)$ 是

$$\begin{aligned}g(\theta)&=\cos\theta-2\cos\frac{\theta}{2}\\&=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1-2\cos\frac{\theta}{2}\\&=2\left(\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

因此，$g(\theta)$ 当 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$ 时取得最小值，最小值是 $-\frac{3}{2}$.

(ii) 当 $\cos\frac{\theta}{2}<0$ 时，

同样，$f(x)$ 在 $\cos\left(x-\frac{\theta}{2}\right)=1$ 时取得最小值，最小值 $g(\theta)$ 是

$$\begin{aligned}g(\theta)&=\cos\theta+2\cos\frac{\theta}{2}\\&=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1+2\cos\frac{\theta}{2}\\&=2\left(\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

因此，$g(\theta)$ 当 $\cos\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{2}$ 时取得最小值，最小值是 $-\frac{3}{2}$.

由(i)、(ii)，得到 $g(\theta)$ 的最小值是 $-\frac{3}{2}$.

2518. 若 $0°\leq x\leq 360°$，求 $\sin x+\cos^2 x$ 的最大值和最小值。

解 把给出的式子变形，得

$$y=\sin x+\cos^2 x=\sin x+(1-\sin^2 x)$$
$$=-\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}.$$

所以，当 $\sin x=\frac{1}{2}$ 时 y 取得最大值，最大值是 $y=\frac{5}{4}$。

又当 $\sin x=-1$ 时 y 取得最小值，最小值是 $-1+(1-1)=-1$。

2519. 求证：任意一个三角形和以它的三条中线为边的三角形，它们的面积的比是 4:3.

解 设 $\triangle ABC$ 的三条边是 a、b、c，面积是 S，则

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}}$$
$$\times\sqrt{\frac{c+a-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}.$$

设这个三角形的三条中线是 l、m、n，以 l、m、n 为三条边的三角形的面积为 S'，于是

$$S'=\frac{1}{4}\sqrt{2m^2n^2+2n^2l^2+2l^2m^2-l^4-m^4-n^4},$$

因为 $$l=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},$$
$$m=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2},$$
$$n=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2},$$

所以把这些值代入上式后得到

$$S'=\frac{3}{16}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}.$$

由此可得，

$$S:S'=\frac{1}{4}:\frac{3}{16}=4:3.$$

2520. 求函数

$$(2\cos 2\theta+2\cos\theta+3)(2\cos\theta+3)-\sin^2 2\theta$$

的最大值、最小值及相应的 θ 值。这里设 $0\leq\theta\leq\pi$。

解 设所给的函数是 y，变形后得

$$y=(2\cos 2\theta+2\cos\theta+3)(2\cos\theta+3)$$
$$-\sin^2 2\theta=(2\cos\theta+3)^2$$
$$+2\cos 2\theta(2\cos\theta+3)-\sin^2 2\theta$$
$$=(2\cos\theta+3)^2+2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$\times(2\cos\theta+3)-4\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=[(2\cos\theta+3)+2\cos^2\theta]$$
$$\times[(2\cos\theta+3)-2\sin^2\theta]$$
$$=(2\cos^2\theta+2\cos\theta+3)$$
$$\times(2\cos^2\theta+2\cos\theta+1)$$
$$=(2\cos^2\theta+2\cos\theta)^2$$
$$+4(2\cos^2\theta+2\cos\theta)+3$$
$$=[(2\cos^2\theta+2\cos\theta)+2]^2-1$$
$$=4\left[\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2-1.$$

所以，当 $\cos\theta=1$，即 $\theta=0$ 时 y 取得最大值，最大值是

$$(2+2+3)(2+2+1)=35.$$

又，当 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，即 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 时 y 取得最小值，最小值是

$$4\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{5}{4}.$$

别解 如果把这题作为三角和微分的综合性问题来考虑，则可以象下面这样来解答。

把 y 化成只含 $\cos\theta$ 的函数。

$$y=(2\cos 2\theta+2\cos\theta+3)(2\cos\theta+3)-\sin^2 2\theta$$
$$=[2(2\cos^2\theta-1)+2\cos\theta+3](2\cos\theta+3)$$
$$-4(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta$$
$$=4\cos^4\theta+8\cos^3\theta+12\cos^2\theta+8\cos\theta+3.$$

设 $\cos\theta=x\ (-1\leq x\leq 1)$，则

$$y=4x^4+8x^3+12x^2+8x+3.$$
$$\therefore\ y'=16x^3+24x^2+24x+8$$
$$=8(2x^3+3x^2+3x+1)$$
$$=8(2x+1)(x^2+x+1).$$

因为 $x^2+x+1>0$，所以当 $-1\leq x<-\frac{1}{2}$ 时 $y'<0$，当 $-\frac{1}{2}<x\leq 1$ 时 $y'>0$。因此，当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，y 取得极小值，且是最小值，最小值是

$$\frac{1}{4}-1+3-4+3=\frac{5}{4}.$$

这时，$x=\cos\theta=-\frac{1}{2}$，$\therefore\ \theta=\frac{2\pi}{3}$.

又因为当 $x=-1$ 时

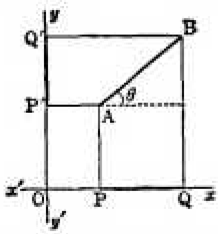
$$y=4-8+12-8+3=3,$$

$x=1$ 时　$y=4+8+12+8+3=35$,

所以，当 $x=1$ 时 y 取得最大值，最大值是 $y=35$. 这时

$$x=\cos\theta=1,\quad \therefore\quad \theta=0.$$

2521. 一条定长的线段 AB, 它在两条互相垂直的定直线上的正射影分别是 PQ、$P'Q'$. 要使 PQ、$P'Q'$ 的长度和尽可能地大, AB 应放在哪个位置上?



解　设互相垂直的两条定直线是 $x'x$、$y'y$, 它们的交点是 O, 线段 AB 在 $x'x$、$y'y$ 上的正射影分别是 PQ、$P'Q'$, AB 和 $x'x$ 所构成的较小的一个角是 θ. 再设

$$AB=a,\quad PQ+P'Q'=l,$$

于是

$$\begin{aligned} l&=PQ+P'Q'=AB\cos\theta+AB\sin\theta\\ &=a(\cos\theta+\sin\theta)\\ &=\sqrt{2}\,a\sin(\theta+45^\circ). \end{aligned}$$

因此，要使 l 取得最大值，必须使

$$\theta+45^\circ=90^\circ,\quad 即\quad \theta=45^\circ.$$

所以，只要把线段 AB 放成和两条定直线都成 45° 的角就可以了.

2522. $AB=2$, 在以 AB 为直径的半圆上有一点 C, 设 AB 的中点是 O, $\angle AOC=60^\circ$. 试答:

(1) 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上取一点 P, 若 $\angle BOP=2\theta$, 把 $PA+PB+PC$ 表示成 θ 的函数.

(2) 设 $PA+PB+PC$ 是 $f(\theta)$, 求 $f(\theta)$ 的最大值及这时 θ 的值.

解　(1)　$0^\circ\leqq 2\theta\leqq 120^\circ$,

$$\therefore\quad 0^\circ\leqq\theta\leqq 60^\circ. \qquad ①$$

$$\because\quad \angle PAB=\frac{1}{2}\angle POB=\frac{1}{2}(2\theta)=\theta,$$

$$\angle APB=90^\circ,$$

$$\therefore\quad PA=AB\cos\theta=2\cos\theta, \qquad ②$$

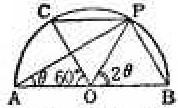
$$PB=AB\sin\theta=2\sin\theta, \qquad ③$$

$$\angle POC=180^\circ-2\theta-60^\circ=2(60^\circ-\theta).$$

因为 $\overset{\frown}{PC}$ 上的圆周角是 $60^\circ-\theta$, 所以根据正弦定理，得

$$PC=AB\sin(60^\circ-\theta)=2\sin(60^\circ-\theta). \qquad ④$$

由 ②+③+④, 得



$$\begin{aligned} &PA+PB+PC\\ &=2[\cos\theta+\sin\theta\\ &\quad+\sin(60^\circ-\theta)]. \end{aligned}$$

(2) $f(\theta)=2[\cos\theta+\sin\theta+\sin(60^\circ-\theta)]$.

把上式的 $\sin\theta$ 和 $\sin(60^\circ-\theta)$ 化成积的形式，得

$$\begin{aligned} f(\theta)&=2[2\sin 30^\circ\cos(30^\circ-\theta)+\cos\theta]\\ &=2[\cos(30^\circ-\theta)+\cos\theta]\\ &=4\cos 15^\circ\cos(15^\circ-\theta). \qquad ⑤ \end{aligned}$$

由 ⑤ 可知，只有当 $\cos(15^\circ-\theta)$ 取得最大值时, $f(\theta)$ 才可取得最大值. 因为 θ 值的范围是 $0^\circ\leqq\theta\leqq 60^\circ$, 所以 $15^\circ-\theta=0^\circ$ 时，即 $\theta=15^\circ$ 时,

$$\cos(15^\circ-\theta)=\cos 0^\circ=1,$$

这时 $f(\theta)$ 取得最大值.

$$\begin{aligned} f(\theta)\text{的最大值}&=4\cos 15^\circ\\ &=4\cos(45^\circ-30^\circ)\\ &=4(\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ)\\ &=4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\right)\\ &=4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\\ &=\sqrt{6}+\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2523. x、y 及 $x+y$ 都是锐角，若 $x+y$ 是定值，证明下列两式都在 $x=y$ 时取得最小值:

(1) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y$;

(2) $\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y$.

解　设 $x+y=\alpha$.

$$\begin{aligned} (1)\quad \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y&=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}\\ &=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}\\ &=\frac{\sin(x+y)}{\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]}\\ &=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos(x-y)}. \end{aligned}$$

因为 α 是锐角，所以 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 是正的，而且分母也是正的. 所以原式当 $\cos(x-y)$ 取得最大值时，即 $x=y$ 时取得最大值.

(2) $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos y}{\sin y}$

$$=\frac{\sin(x+y)}{-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]}$$

$$=\frac{2\sin\alpha}{\cos(x-y)-\cos\alpha}.$$

同理这个式子当 $x=y$ 时取得最小值.

2524. x、y 及 $x+y$ 都是锐角，若 $x+y$ 是定值，证明下列两式都是在 $x=y$ 时取得最小值：

(1) $\sec x+\sec y$;

(2) $\csc x+\csc y$.

解　设 $x+y=\alpha$.

(1) $\sec x+\sec y=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos y}$

$$=\frac{\cos x+\cos y}{\cos x\cos y}$$

$$=\frac{2\cos\frac{x+x}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]}$$

$$=\frac{4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{1-2\sin^2\frac{x+y}{2}+2\cos^2\frac{x-y}{2}-1}$$

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{\cos^2\frac{x-y}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{x-y}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}\right).$$

因此原式当 $\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}$ 及 $\cos\frac{x-y}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}$ 取得最大值时，即 $\cos\frac{x-y}{2}$ 取得最大值时取得最小值，从而得出，也就是当 $x=y$ 时，原式取得最小值.

(2) $\csc x+\csc y=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin y}$

$$=\frac{\sin x+\sin y}{\sin x\sin y}$$

$$=\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]}$$

$$=\frac{4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos^2\frac{x-y}{2}-1-\left(2\cos^2\frac{x+y}{2}-1\right)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{\cos^2\frac{x-y}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}\right).$$

同理，原式当 $x=y$ 时取得最小值.

2525. 若 $x+y=\alpha$（定值），求 $\sin x+\sin y$ 的最大值和最小值.

解　把 $\sin x+\sin y$ 化成积的形式，得

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

这里，必须考虑到 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 的值可能是正，也可能是负.

(i) 当 $\sin\frac{\alpha}{2}>0$ 时，

原式当 $\cos\frac{x-y}{2}=1$，即

$$\frac{x-y}{2}=2n\pi,\ x-y=4n\pi$$

时取得最大值，最大值是 $2\sin\frac{\alpha}{2}$.

又，原式当 $\cos\frac{x-y}{2}=-1$，即

$$\frac{x-y}{2}=(2n+1)\pi,\ x-y=2(2n+1)\pi$$

时取得最小值，最小值是 $-2\sin\frac{\alpha}{2}$.

(ii) 当 $\sin\frac{\alpha}{2}<0$ 时，

原式当 $x-y=(2n+1)\pi$ 时取得最大值，最大值是 $-2\sin\frac{\alpha}{2}$；当 $x-y=4n\pi$ 时，取得最

小值，最小值是 $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$。

(iii) 当 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=0$ 时，

这时，无最大值，也无最小值。

2526. 求下列各函数的最大值和最小值：

(1) $y=\sin^2x+2\cos x+1$, $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

(2) $y=\dfrac{1}{\sin^2x-\sin x+1}$. $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解 (1)
$$\begin{aligned}y&=\sin^2x+2\cos x+1\\&=-\cos^2x+2\cos x+2\\&=-(\cos x-1)^2+3.\end{aligned}$$

在 $0\leqq x\leqq\dfrac{3\pi}{4}$ 的范围内

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\cos x\leqq1,$$

$$-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\leqq\cos x-1\leqq0.$$

从而得出：

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\geqq(\cos x-1)^2\geqq0.$$

$$\therefore\quad -\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+3\leqq-(\cos x-1)^2+3\leqq3.$$

因此 $$\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\leqq y\leqq3.$$

左边的等号当 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 时成立，右边的等号当 $x=0$ 时成立。

因此，y 当 $x=0$ 时取得最大值 3，当 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 时取得最小值 $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$。

(2)
$$\sin^2x-\sin x+1=\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

由 $-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$，得

$$-1\leqq\sin x\leqq1.$$

$$\therefore\quad -\frac{3}{2}\leqq\sin x-\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad 0\leqq\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{9}{4}.$$

因此，$$\frac{3}{4}\leqq\sin^2x-\sin x+1\leqq3,$$

$$\frac{4}{3}\geqq\frac{1}{\sin^2x-\sin x+1}\geqq\frac{1}{3}.$$

左边的等号当 $\sin x-\dfrac{1}{2}=0$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时成立，右边的等号当 $\sin x-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$，即 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 时成立。

因此，当 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时 y 取得最大值 $\dfrac{4}{3}$，当 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 时取得最小值 $\dfrac{1}{3}$。

2527. 若 $a\sin^2x+2\cos x-a-2$ 的最大值是 m，问：随着 a 的变化，m 作怎样的变化？以 a 作为横坐标，以 m 作为纵坐标，作出图象来。

解 设 $\cos x=t$，则

$$-1\leqq t\leqq1.$$

$$a\sin^2x+2\cos x-a-2=-at^2+2t-2.$$

设这个函数为 $f(t)$。当 $a\leqq0$ 时，在 $-1\leqq t\leqq1$ 的范围内，得

$$-at^2\leqq-a,\ 2t-2\leqq0,$$

$\therefore\quad f(t)\leqq-a$（等号在 $t=1$ 时成立）。

因此

$$m=-a. \qquad ①$$

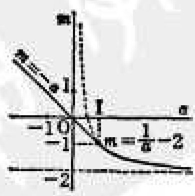
当 $a>0$ 时，

$$f(t)=-a\left(t-\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a}-2.$$

因为 t 的范围是 $-1\leqq t\leqq1$，且 $0<\dfrac{1}{a}$，所以如果 $0<\dfrac{1}{a}\leqq1$，那么 $f(t)$ 当 $t=\dfrac{1}{a}$ 时取得最大值，如果 $1<\dfrac{1}{a}$，那么 $f(t)$ 当 $t=1$ 时取得最大值。

因此，如果 $1\leqq a$，那么

$$m=f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}-2. \qquad ②$$



如果 $0<a<1$，那么

$$m=f(1)=-a. \qquad ③$$

综合 ①、②、③，得到

当 $a<1$ 时，$m=-a$，

当 $1\leqq a$ 时，

$$m=\frac{1}{a}-2.$$

图象如上图的曲线所示。

2528. 设等腰三角形的腰长是 10 cm，顶角是 θ，当 $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$ 取得最大值时，求这个三角形外接圆的半径。

解 设 $y=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$，把它变形后得

$$\begin{aligned}y&=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)\\&=2(\cos30^\circ\cos\theta+\sin30^\circ\sin\theta)\\&=2\cos(\theta-30^\circ).\end{aligned}$$

所以，在 $0^\circ<\theta<180^\circ$ 的范围内，要使 y 取得最大值的条件是

$$\theta-30^\circ=0^\circ,\ 即\ \theta=30^\circ.$$

这时，等腰三角形的底角是 75°。设三角形外接圆的半径是 R cm，则由正弦定理，得

$$\begin{aligned}2R&=\frac{10}{\sin75^\circ}=\frac{10}{\sin(30^\circ+45^\circ)}\\&=\frac{10}{\sin30^\circ\cos45^\circ+\cos30^\circ\sin45^\circ}\\&=\frac{10}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\\&=10\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)=10(\sqrt{6}-\sqrt{2}).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad R=5(\sqrt{6}-\sqrt{2})\ (\text{cm}).$$

2529. 顺次连结三角形 ABC 的旁心，证明由此得出的三角形的面积是

$$\frac{abc}{2}\left[\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right].$$

解 设 $\triangle ABC$ 的三个旁心是 O_1、O_2、O_3，旁切圆的半径是 r_1、r_2、r_3，内心是 I，内切圆的半径是 r，则

$$\begin{aligned}四边形\ IBO_1C&=\frac{1}{2}a(r+r_1)\\&=\frac{a}{2}\left[(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}+s\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right]\\&=\frac{a}{2}(2s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{a}{2}(b+c)\operatorname{tg}\frac{A}{2}\\&=\frac{abc}{2}\cdot\frac{c+b}{bc}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}\\&=\frac{abc}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\end{aligned}$$

同理可得

$$四边形\ ICO_2A=\frac{abc}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\operatorname{tg}\frac{B}{2},$$

$$四边形\ IAO_3B=\frac{abc}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

所以

$$\begin{aligned}\triangle O_1O_2O_3&=四边形\ IBO_1C+四边形\ ICO_2A+四边形\ IAO_3B\\&=\frac{abc}{2}\left[\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right].\end{aligned}$$

2530. 设 $f(\theta)=a\cos\theta+b\sin\theta$，
$g(\theta)=c\cos\theta+d\sin\theta$，
设 a、b、c、d 都是已知实数，θ 从 0 变到 2π，且 $f(\theta)$、$g(\theta)$、$f(\theta)+g(\theta)$ 的最大值分别是 3、5、6，请解答下列问题：

(1) 求 $ac+bd$ 的值；

(2) 求 $f(\theta)\cdot g(\theta)$ 的最大值。

解 一般地，$A\cos\theta+B\sin\theta$ 可以象下面这样变形：

$$A\cos\theta+B\sin\theta=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\theta+\alpha).$$

$$\left(这里\ \sin\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \cos\alpha=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

从而得出，这个函数的最大值是 $\sqrt{A^2+B^2}$。

(1) $f(\theta)=a\cos\theta+b\sin\theta$，
$g(\theta)=c\cos\theta+d\sin\theta$，
$f(\theta)+g(\theta)=(a+c)\cos\theta+(b+d)\sin\theta$，
它们的最大值分别是

$$\sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{c^2+d^2},\ \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$

根据题意，得

$$\sqrt{a^2+b^2}=3,\ \sqrt{c^2+d^2}=5,\qquad ①$$

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}=6.\qquad ②$$

由②，得

$$(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2(ac+bd)=36,$$

由①，得

$$a^2+b^2=9,\ c^2+d^2=25.$$

$$\therefore\quad 9+25+2(ac+bd)=36.$$

由此可得 $ac+bd=1$。

(2)

$$f(\theta)\cdot g(\theta)=ac\cos^2\theta+bd\sin^2\theta+(ad+bc)\cos\theta\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}[(ac-bd)\cos2\theta+(ad+bc)\sin2\theta]+\frac{1}{2}(ac+bd).$$

因为 2θ 从 0 变到 4π，所以 $f(\theta)\cdot g(\theta)$ 的最大值是

$$\frac{1}{2}\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}+\frac{1}{2}(ac+bd)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+\frac{1}{2}(ac+bd)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5+\frac{1}{2}\cdot1=8.$$

2531. 若 $0<x<2\pi$，求分式

$$\frac{(1+\sin x)^2}{\sin x(1-\sin x)}$$

的极大值和极小值.

解　设给出的式子为 y，变形后得

$$y(\sin x-\sin^2x)=1+2\sin x+\sin^2x,$$

$$(y+1)\sin^2x-(y-2)\sin x+1=0.$$

当 $\sin x=-\frac{1}{3}$ 时，$y=-1$. 当 $\sin x\neq-\frac{1}{3}$ 时，因为 $\sin x$ 的值是实数，所以

$$判别式\ D=(y-2)^2-4(y+1)\geqq0,$$

$$y^2-8y\geqq0,\ y(y-8)\geqq0.$$

$$\therefore\quad y\leqq0,\ 或\quad y\geqq8.$$

当 $y=0$ 时，得

$$\frac{(1+\sin x)^2}{\sin x(1-\sin x)}=0,$$

$$\therefore\quad \sin x+1=0.$$

满足上式的 x 的值确实是存在的.

又，当 $y=8$ 时，得

$$\frac{(1+\sin x)^2}{\sin x(1-\sin x)}=8,$$

即 $$(3\sin x-1)^2=0.$$

同样，满足上式的 x 的值也确实是存在的. 因此，y 的极大值是 0，极小值是 8.

2532. 若 $0<x<\frac{\pi}{2}$，证明 $\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}^3x}$ 的极大值和极小值分别是 $17-12\sqrt{2}$ 和 $17+12\sqrt{2}$.

解　应用正切的三倍角公式，得

$$y=\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}^3x}=\frac{\dfrac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x}}{\operatorname{tg}^3x}=\frac{3-\operatorname{tg}^2x}{\operatorname{tg}^2x(1-3\operatorname{tg}^2x)}.$$

设 $\operatorname{tg}^2x=t$，因为 $0<x<\frac{\pi}{2}$，所以 $t>0$. 因此

$$3-t=yt(1-3t),$$

$$\therefore\quad 3yt^2-(1+y)t+3=0.\qquad ①$$

当 $t=3$ 时，$y=0$. 当 $y\neq0$ 时，如果把上式看作是 t 的二次方程，那么 t 必须是正的实数. 因此

$$判别式=(1+y)^2-36y=y^2-34y+1\geqq0.$$

$$\therefore\quad [y-(17+\sqrt{288})][y-(17-\sqrt{288})]\geqq0.$$

$$\therefore\quad y\leqq17-12\sqrt{2},$$

或 $$y\geqq17+12\sqrt{2}.\qquad ②$$

因为 ① 的两个根都是正的，所以

$$\alpha+\beta=\frac{1+y}{3y}>0,\ \alpha\beta=\frac{1}{y}>0.\qquad ③$$

$$\therefore\quad y>0.$$

由 ②、③ 得到所要求的条件是

$$0<y\leqq17-12\sqrt{2},\ y\geqq17+12\sqrt{2}.$$

因此，y 的极大值是 $17-12\sqrt{2}$，极小值是 $17+12\sqrt{2}$.

2533. 求 $\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2\cos x}$ 的极大值和极小值.

解　(i) 当 $\cos x>0$ 时.

因为 $\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos x}=1$(定值)，

所以原式当 $\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\cos x}=1$ 时取得最小值，最小值是 $1+1=2$.

(ii) 当 $\cos x<0$ 时，

用同样的方法得到，这时的最大值是 -2.

因此，原式的极小值是 2，极大值是 -2.

2534. 求分式 $\frac{4\sin x-3\cos x-2}{6\sin x-5\cos x-1}$ 的极大值和极小值.

解　设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

所以原式变形后得

$$y=\frac{t^2+8t-5}{4t^2+12t-6},$$

即 $t^2(1-4y)+4t(2-3y)-(5-6y)=0$.

当 $t=\frac{7}{10}$ 时, $y=\frac{1}{4}$. 当 $y\neq\frac{1}{4}$ 时, 如果把上式看作是 t 的二次方程, 那么因为 t 是实数, 所以

$$\text{判别式}=16(2-3y)^2+4(1-4y)(5-6y)\geqq 0.$$

$$\therefore\quad 60y^2-74y+21\geqq 0.$$

解这个不等式, 得

$$\left(y-\frac{37+\sqrt{109}}{60}\right)\left(y-\frac{37-\sqrt{109}}{60}\right)\geqq 0.$$

$$\therefore\quad y\leqq\frac{37-\sqrt{109}}{60},\quad y\geqq\frac{37+\sqrt{109}}{60}.$$

事实上, 当 $t=\frac{7-\sqrt{109}}{10}$ 时,

$$y=\frac{37+\sqrt{109}}{60},$$

当 $t=\frac{7+\sqrt{109}}{60}$ 时,

$$y=\frac{37-\sqrt{109}}{60}>\frac{1}{4}.$$

因此, y 的极大值是 $\frac{37-\sqrt{109}}{60}$, 极小值是 $\frac{37+\sqrt{109}}{60}$.

2535. 设 AB 的长度是 d, P 是以 AB 为直径的半圆上的一个动点, 且 $\angle PAB=\theta$, $PA+PB=x$.

(1) 把 $\sin^6\theta+\cos^6\theta$ 表示成 x 的函数.

(2) 求 $\sin^6\theta+\cos^6\theta$ 的最小值, 并求出这时 θ 和 x 的值.

解 (1)

$$PA=d\cos\theta,\ PB=d\sin\theta,$$

所以 $$x=d(\cos\theta+\sin\theta). \qquad ①$$

$$\therefore\quad x^2=d^2(1+2\sin\theta\cos\theta).$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-d^2}{2d^2}. \qquad ②$$

$$\begin{aligned}\sin^6\theta+\cos^6\theta&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\&\quad\times(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)\\&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-3(\sin\theta\cos\theta)^2,\end{aligned}$$

把 ② 代入后得到

$$\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-\frac{3(x^2-d^2)^2}{4d^4}. \qquad ③$$

(2) 由 ①, 得

$$x=\sqrt{2}\,d\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).$$

因为 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3\pi}{4}$.

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1.$$

从而得出 $d\leqq x\leqq\sqrt{2}\,d$,

$$0\leqq x^2-d^2\leqq d^2,$$

$$0\leqq(x^2-d^2)^2\leqq d^4.$$

因此, 由 ③, 得

$$\sin^6\theta+\cos^6\theta\geqq 1-\frac{3d^4}{4d^4},$$

$$\therefore\quad \sin^6\theta+\cos^6\theta\geqq\frac{1}{4}.$$

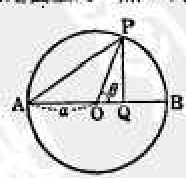
等号当 $x=\sqrt{2}\,d$ 时成立. 这时

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

从而得出 $$\theta=\frac{\pi}{4}.$$

因此, $\sin^6\theta+\cos^6\theta$ 当 $x=\sqrt{2}\,d$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时取得最小值 $\frac{1}{4}$.

2536. 从半径是 a 的定圆上的一点 P 向定直径 AB 引垂线 PQ, 求当三角形 APQ 的面积取得最大值时弦 AP 的长度.



解 右图中, 如果 $\angle BOP$ 用 θ 来表示, 那么使得三角形 APQ 的面积 S 取得最大值的角 θ, 只要在 $0^\circ<\theta\leqq 90^\circ$ 的范围内考虑就可以了. 这时

$$PQ=OP\sin\theta=a\sin\theta,$$

$$AQ=OA+OQ=a+a\cos\theta=a(1+\cos\theta).$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}AQ\cdot PQ=\frac{a^2}{2}(1+\cos\theta)\sin\theta.$$

$$\therefore\quad S^2=\frac{a^4}{4}(1+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta).$$

设 $\cos\theta=t\,(0\leq t<1)$，则

$$S^2=\frac{a^4}{4}(1+t)^2(1-t^2).$$

$$\therefore\quad \frac{dS^2}{dt}=\frac{a^4}{4}[2(1+t)(1-t^2)+(1+t)^2(-2t)]$$
$$=\frac{a^4}{2}(1+t)^2(1-2t).$$

由此可得，当 $0\leq t<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{dS^2}{dt}>0$，当 $\frac{1}{2}<t<1$ 时，$\frac{dS^2}{dt}<0$，当 $t=\frac{1}{2}$ 时，S^2 取得极大值，且是最大值．因此，三角形 APQ 的面积当 $\cos\theta=t=\frac{1}{2}$，即 $\theta=60^\circ$ 时取得最大值，这时

$$AP^2=AQ^2+PQ^2$$
$$=a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta$$
$$=a^2[(1+\cos\theta)^2+(1-\cos^2\theta)]$$
$$=a^2\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)=3a^2.$$
$$\therefore\quad AP=\sqrt{3}\,a.$$

注　不应用微分，象下面那样也可以求出当 S^2 取得最大值时的 θ 值．即

$$S^2=\frac{a^4}{4}(1+\cos\theta)^3(1-\cos\theta),$$

因为　$1+\cos\theta>0,\ 1-\cos\theta\geq 0,$

且

$$(1+\cos\theta)+(1+\cos\theta)+(1+\cos\theta)+3(1-\cos\theta)=6\text{(定值)},$$

所以当　$1+\cos\theta=3(1-\cos\theta)$，

即　$$\cos\theta=\frac{1}{2},\ \theta=60^\circ$$

时 S^2 取得最大值．

另外，在不应用三角函数的情况下，可设 $AQ=x$，于是

$$PQ^2=AQ\cdot BQ=x(2a-x).$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}AQ\cdot PQ=\frac{1}{2}x\sqrt{x(2a-x)},$$

$$S^2=\frac{1}{4}x^3(2a-x)=\frac{1}{12}x^3(6a-3x).$$

因为

$$x+x+x+(6a-3x)=6a\text{(定值)},$$

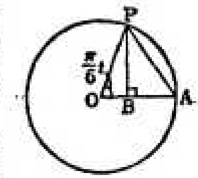
所以，当

$$x=6a-3x,\ \text{即}\quad x=\frac{3}{2}a$$

时 S^2 取得最大值．

2537． 在圆心是 O、半径是 1cm 的圆上有一定点 A，动点 P 从 A 出发，以每分钟转 5 周的速度，沿着逆时针方向绕圆周运动：

(1) 三角形 OAP 的面积随着时间的变化，作怎样的变化？用图象表示出发后 12 秒内的变化状态．



(2) 从 P 向经过 A 的直径作垂线，设垂足是 B，那么 $OB^2+OA\cdot BP$ 在最初的半周内取得最大值，这时在出发后的几秒钟？

解　(1) 因为点 P 的角速度是每秒

$$\frac{5\times 2\pi}{60}=\frac{\pi}{6},$$

所以在出发后 t 秒钟时，

$$\angle AOP=\frac{\pi}{6}t,$$

因此，若设这时三角形 OAP 的面积是 $S\,\text{cm}^2$，则

$$S=\frac{1}{2}OA\cdot OP\left|\sin\frac{\pi}{6}t\right|=\frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{6}t\right|.$$

由此可得，在 $0\leq t\leq 12$ 的范围内，S 的图象如右图所示．

(2) 点 P 转半周所需要的时间是：

$$\frac{\pi}{6}t=\pi,\quad\therefore\quad t=6\text{(秒)}.$$

因此，当 $0\leq t\leq 6$ 时

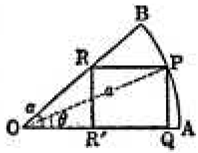
$$y=OB^2+OA\cdot BP$$
$$=\left(OP\cos\frac{\pi}{6}t\right)^2+OA\cdot OP\sin\frac{\pi}{6}t$$
$$=\cos^2\frac{\pi}{6}t+\sin\frac{\pi}{6}t$$
$$=1-\sin^2\frac{\pi}{6}t+\sin\frac{\pi}{6}t$$
$$=-\left(\sin\frac{\pi}{6}t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}.$$

因此，y 取得最大值时

$\sin\frac{\pi}{6}t=\frac{1}{2}$, $\therefore$ $\frac{\pi}{6}t=\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$.

$\therefore$ $t=1$ 或 5 (秒).

2538. 在已知扇形 OAB 中, 设 $OA=OB=a$, 圆心角 $\angle AOB=\alpha<90°$. 从弧 AB 上的任意一点 P 向半径 OA 引垂线, 得垂足 Q, 再从 P 引 OA 的平行线, 和半径 OB 交于点 R. 现设 $\angle AOP=\theta$, 试把以 PQ、PR 为两边的长方形的面积表示成 θ 的函数, 然后确定使这个面积取得最大值的点 P 的位置.



解 从点 R 向半径 OA 作垂线, 设垂足是 R', 于是

$$PQ=OP\sin\angle POQ=a\sin\theta,$$

$$\begin{aligned}PR&=OQ-OR'\\&=OP\cos\angle POQ-RR'\operatorname{ctg}\angle ROR'\\&=a\cos\theta-PQ\operatorname{ctg}\alpha\\&=a(\cos\theta-\operatorname{ctg}\alpha\sin\theta).\end{aligned}$$

因此, 若设以 PQ、PR 为两边的长方形的面积是 S, 则

$$\begin{aligned}S&=PQ\cdot PR\\&=a^2\sin\theta(\cos\theta-\operatorname{ctg}\alpha\sin\theta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S&=a^2\left[\frac{1}{2}\sin2\theta-\operatorname{ctg}\alpha\times\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)\right]\\&=\frac{a^2}{2}\left(\sin2\theta+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos2\theta-\operatorname{ctg}\alpha\right)\\&=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin2\theta\sin\alpha+\cos2\theta\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\\&=\frac{a^2}{2\sin\alpha}[\cos(2\theta-\alpha)-\cos\alpha].\end{aligned}$$

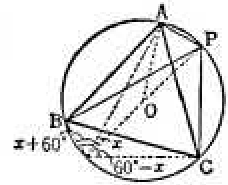
这里, 因为 α 是定值, 所以, S 取得最大值时,

$\cos(2\theta-\alpha)=1$. $\therefore$ $2\theta-\alpha=0$,

$$\therefore\quad\theta=\frac{\alpha}{2}.$$

也就是, 当点 P 是弧 AB 的中点时, S 取得最大值.

2539. 在半径是 R 的定圆上有一定点 P, 圆内有一个可以转动的内接正三角形, 求从三角形的三个顶点到 P 的距离之积的最大值.



解 设定圆的圆心是 O, 半径是 R, 正三角形是 ABC, 且

$\angle AOP=2x$,

则 $PA=2R\sin x$,

$$PB=2R\sin(x+60°),$$

$$PC=2R\sin(60°-x).$$

这里, x 的变化范围只要考虑

$$0°<2x<120°,\ 即\quad 0°<x<60°$$

就足够了. 因此

$$\begin{aligned}y&=PA\cdot PB\cdot PC\\&=8R^3\sin x\sin(x+60°)\sin(60°-x)\quad①\\&=4R^3\sin x(\cos2x-\cos120°)\\&=4R^3\sin x\left(1-2\sin^2x+\frac{1}{2}\right)\\&=2R^3(3\sin x-4\sin^3x)\\&=2R^3\sin3x.\end{aligned}$$

因此, 当 $x=30°$ 时 y 取得最大值, 最大值是 $2R^3$.

注 或者, 把 ① 变形, 得

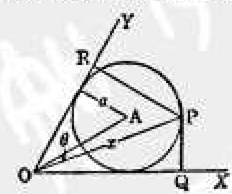
$$y=4R^3\sin(x+60°)[\cos(2x-60°)-\cos60°].$$

因为当 $x=30°$ 时

$$\sin(x+60°)\quad 和\quad \cos(2x-60°)$$

都取得最大值, 所以当 $x=30°$ 时 y 取得最大值.

2540. 在大小等于 $\frac{\pi}{3}$ 的角 XOY 的内部, 有一个和角的两边相切、半径是 a、圆心是 A 的定圆. 圆上有一动点 P, 从 P 向 OX、OY 引垂线, 设垂足分别是 Q、R. 试回答下列各题:



(1) 设 $\angle AOP=\theta$, $OP=x$, 用 θ 和 x 表示四边形 $OQPR$ 的周长 l;

(2) 求 l 的最大值.

解 (1) 当点 P 在 $\angle AOX$ 的内部时, 由

$\angle AOQ=\frac{\pi}{6}$, $\angle AOP=\theta$, 得

$$\angle POQ=\frac{\pi}{6}-\theta,\ \angle POR=\frac{\pi}{6}+\theta.$$

$$\therefore\ l=OQ+OR+PR+PQ$$
$$=x\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+x\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$$
$$+x\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)+x\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right).$$

当点 P 在 $\angle AOY$ 的内部时也可以得到同样的结果。把上式变形，得

$$l=x\left(2\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta+2\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta\right)$$
$$=(\sqrt{3}+1)x\cos\theta. \qquad ①$$

这里，θ 的变化范围是

$$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}, \qquad ②$$

又 x 的变化范围是

$$OA-a\leq x\leq OA+a.$$

又因为 $\angle XOY=\frac{\pi}{3}$，所以 $OA=2a$。因此

$$a\leq x\leq 3a. \qquad ③$$

(2) 由①、②、③可知，当 $x=3a$，$\theta=0$，也就是点 P 在 OA 的延长线和圆 A 的交点上时，l 取得最大值，最大值是

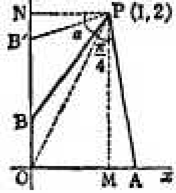
$$3(\sqrt{3}+1)a.$$

2541. 设点 P 的坐标是 $(1,2)$，点 A、B 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，且 $\angle APB=\frac{\pi}{4}$。从 P 向 y 轴作垂线 PN。设 $\angle BPN=\alpha$。

(1) 求 $\mathrm{tg}\,\alpha$ 的变化范围。

(2) 求四边形 $PAOB$ 的面积的最大值。

解 (1) 设 x 轴上的动点 A 和原点 O 重合时，动点 B 的位置是 B'，于是 $\mathrm{tg}\,\alpha$ 的变化范围是



$$\mathrm{tg}\angle B'PN<\mathrm{tg}\,\alpha<\mathrm{tg}\angle OPN.$$

又因为

$$\mathrm{tg}\angle OPN=2,$$

$$\mathrm{tg}\angle B'PN=\mathrm{tg}\left(\angle OPN-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\mathrm{tg}\angle OPN-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\mathrm{tg}\angle OPN\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3},$$

所以 $$\frac{1}{3}<\mathrm{tg}\,\alpha<2.$$

(2) 设四边形 $PAOB$ 的面积是 S，则
$S=$梯形 $PAON$ 面积 $-\triangle PBN$ 面积
$$=\frac{1}{2}(PN+OA)\cdot ON-\frac{1}{2}PN\cdot NB.$$

从 P 向 x 轴引垂线，设垂足是 M，于是
$$OA=OM+MA=OM+PM\,\mathrm{tg}\angle APM$$
$$=1+2\,\mathrm{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=1+2\,\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=1+2\cdot\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}$$
$$=1+\frac{2(\mathrm{tg}\,\alpha-1)}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha-1}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

又 $$NB=PN\,\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$\therefore\ S=\frac{2}{2}\left(1+\frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha-1}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha$$
$$=\frac{7\,\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha}{2(1+\mathrm{tg}\,\alpha)}.$$

设 $\mathrm{tg}\,\alpha=t$ $\left(\frac{1}{3}<t<2\right)$，得

$$S=\frac{7t-t^2}{2(1+t)}.$$

$$\therefore\ \frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(7-2t)(1+t)-(7t-t^2)}{(1+t)^2}.$$

由此可知，当 $\frac{1}{3}<t<-1+2\sqrt{2}$ 时，$\frac{dS}{dt}>0$；当 $-1+2\sqrt{2}<t<2$ 时，$\frac{dS}{dt}<0$。因此，当 $t=-1+2\sqrt{2}$ 时 S 取得极大值且是最大值，最大值是

$$S=\frac{7(-1+2\sqrt{2})-(-1+2\sqrt{2})^2}{2(1-1+2\sqrt{2})}$$
$$=\frac{14\sqrt{2}-7-(9-4\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{18\sqrt{2}-16}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(9-4\sqrt{2}).$$

注　四边形 $PAOB$ 的面积 S 也可以象下面这样求得。

$$S=\triangle OPA\text{面积}+\triangle OPB\text{面积}$$
$$=\frac{1}{2}OA\cdot PM+\frac{1}{2}OB\cdot PN$$
$$=\frac{1}{2}[OA\cdot PM+(ON-NB)\cdot PN]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3\operatorname{tg}\alpha-1}{1+\operatorname{tg}\alpha}\cdot 2+(2-\operatorname{tg}\alpha)\cdot 1\right]$$
$$=\frac{7\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{2(1+\operatorname{tg}\alpha)}.$$

或者，

$$S=\text{长方形}OMPN-\triangle PNB+\triangle PMA$$
$$=2-\frac{1}{2}PN\cdot NB+\frac{1}{2}PM\cdot MA$$
$$=2-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right),$$

由此也可得到同样的结果。

还有，不管用上面哪一种方法，MA 或 $\triangle PMA$ 的值都有正负两种可能。

2542. 三角形的三边成等差数列，最大角比最小角大 $90°$，证明三边的比是

$$(\sqrt{7}+1):\sqrt{7}:(\sqrt{7}-1).$$

解　设 A 是最大角，C 是最小角。因为三边 a、b、c 成等差数列，所以

$$a+c=2b.$$

把上式化为角的关系，得

$$\sin A+\sin C=2\sin B.$$

又因为 $A=90°+C$，所以

$$B=180°-(A+C)$$
$$=180°-(90°+C+C)=90°-2C.$$

代入前面的式子，得

$$\sin(90°+C)+\sin C=2\sin(90°-2C),$$
$$\cos C+\sin C-2\cos 2C=0,$$
$$\cos C+\sin C-2(\cos^2 C-\sin^2 C)=0,$$
$$(\cos C+\sin C)[1-2(\cos C-\sin C)]=0.$$

因为 $C<90°$，所以 $\cos C+\sin C\neq 0$。因此

$$\cos C-\sin C=\frac{1}{2},$$
$$\sqrt{1-\sin^2 C}-\sin C=\frac{1}{2},$$
$$1-\sin^2 C=\frac{1}{4}+\sin C+\sin^2 C,$$
$$8\sin^2 C+4\sin C-3=0,$$
$$\therefore\quad \sin C=\frac{-2+\sqrt{4+24}}{8}=\frac{\sqrt{7}-1}{4}.$$

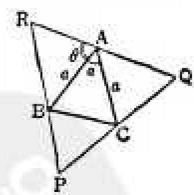
由此可得：

$$\sin A=\cos C=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{4}=\frac{\sqrt{7}+1}{4}.$$
$$\sin B=\cos 2C=1-2\sin^2 C$$
$$=1-2\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

所以，由正弦定理，得

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$
$$=\frac{\sqrt{7}+1}{4}:\frac{\sqrt{7}}{4}:\frac{\sqrt{7}-1}{4}$$
$$=(\sqrt{7}+1):\sqrt{7}:(\sqrt{7}-1).$$

2543. 如图所示，试用 a、α、θ 表示等腰三角形 ABC 的外接正三角形的边长。又，当 θ 变化时，正三角形 PQR 什么时候取得最大值？



解　在 $\triangle ABR$ 中，$\angle ARB=60°$，$\angle BAR=\theta$，

$$\therefore\quad \angle ABR=180°-(60°+\theta)$$
$$=120°-\theta.$$

由正弦定理，得

$$\frac{AR}{\sin(120°-\theta)}=\frac{a}{\sin 60°}.$$
$$\therefore\quad AR=a\cdot\frac{\sin(120°-\theta)}{\sin 60°}$$
$$=\frac{2a}{\sqrt{3}}\sin(60°+\theta).\qquad ①$$

又，在 $\triangle ACQ$ 中

$$\angle AQC=60°,$$
$$\angle CAQ=180°-(\theta+\alpha),$$
$$\therefore\quad \angle ACQ=180°-[60°+180°-(\theta+\alpha)]=\theta+\alpha-60°.$$

由正弦定理，得

$$\frac{AQ}{\sin(\theta+\alpha-60°)}=\frac{a}{\sin 60°}.$$

$$\therefore \quad AQ=a\cdot\frac{\sin(\theta+\alpha-60^\circ)}{\sin 60^\circ}$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{3}}\sin(\theta+\alpha-60^\circ). \quad ②$$

因此，由①、②得到，正三角形 PQR 的一边长 l 是

$$l=QR=AR+AQ$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{3}}[\sin(60^\circ+\theta)+\sin(\theta+\alpha-60^\circ)].$$

$$\therefore \quad l=\frac{2a}{\sqrt{3}}\cdot 2\sin\frac{2\theta+\alpha}{2}\cos\frac{120^\circ-\alpha}{2}$$

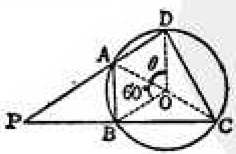
$$=\frac{4a}{\sqrt{3}}\cos\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right).$$

这里，α 是定值，又因为 $\cos\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$ 是正的，所以，当

$$\theta+\frac{\alpha}{2}=90^\circ, \quad \theta=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$$

时，l 也就是正三角形 PQR 取得最大值．这时，QR 平行于 BC．

2544． 作圆 O 的内接四边形 $ABCD$，使得点 O 在四边形的内部，且 (1) $\angle AOB=60^\circ$，(2) $\angle AOD+\angle BOC=180^\circ$，设直线 AD 和 BC 的交点是 P．现固定 A、B 并在满足条件 (2) 的同时移动 C、D，问：线段 AP 的长取得最大值时 $\angle AOD$ 是几度？



解 因为

$$\angle AOB=60^\circ, \ \angle AOD+\angle BOC=180^\circ,$$

所以 $\angle COD=120^\circ$．

所以点 P 是在 DA 的延长线上．设 $\angle AOD=\theta$，则

$$\angle BOC=180^\circ-\theta.$$

$$\because \quad \angle PAB=\angle BCD=\frac{1}{2}\angle BOD$$

$$=\frac{1}{2}(\theta+60^\circ)=30^\circ+\frac{\theta}{2},$$

$$\angle PBA=\angle ADC=\frac{1}{2}\angle AOC$$

$$=\frac{1}{2}(60^\circ+180^\circ-\theta)=120^\circ-\frac{\theta}{2},$$

$$\therefore \quad \angle APB=180^\circ-\left(30^\circ+\frac{\theta}{2}+120^\circ-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=30^\circ.$$

因此，在 $\triangle PAB$ 中，由正弦定理，得

$$\frac{AP}{\sin\left(120^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{AB}{\sin 30^\circ},$$

$$\therefore \quad AP=2AB\sin\left(120^\circ-\frac{\theta}{2}\right).$$

因此，当线段 AP 的长取得最大值时，

$$\sin\left(120^\circ-\frac{\theta}{2}\right)=1,$$

即 $\quad 120^\circ-\frac{\theta}{2}=90^\circ, \quad \therefore \quad \theta=60^\circ.$

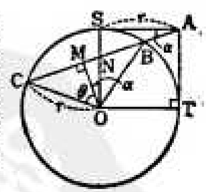
因为这个值在 $0^\circ<\theta<180^\circ$ 的范围内，所以适合条件．

$$\therefore \quad \angle AOD=60^\circ.$$

2545． AS、AT 是圆 O 的两条切线，它们互相垂直．经过 A 的一条直线和圆 O 交于 B、C．若 $\angle BOC=2\theta$，$\angle BAS=\alpha$，试解答下列各题：

(1) 证明 $\sin\theta=\sqrt{\sin 2\alpha}$；

(2) 求出当三角形 OBC 的面积取得最大值时 α 的值．



解 (1) (i) 当 $0^\circ\leq\alpha\leq45^\circ$ 时，直线 ABC 和 OS 相交，设这个交点是 N．又经过 O 向 BC 引垂线，设垂足是 M，且圆 O 的半径是 r，则

$$OM=r\cos\theta.$$

$$\because \quad OS=ON+NS,$$

$$\therefore \quad r=\frac{r\cos\theta}{\cos\alpha}+r\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

即 $\quad \cos\theta=\cos\alpha-\sin\alpha.$

$$\therefore \quad \cos^2\theta=1-2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\sin^2\theta=\sin 2\alpha.$$

因为 $0^\circ\leq\theta\leq90^\circ$，$0^\circ\leq2\alpha\leq90^\circ$，

所以 $\quad \sin\theta=\sqrt{\sin 2\alpha}.$

(ii) 当 $45^\circ\leq\alpha\leq90^\circ$ 时，设 $\angle BAT=\alpha'$，同理可得

$$\sin\theta=\sqrt{\sin 2\alpha'}.$$

因为 $\alpha'=90^\circ-\alpha$，所以

$$\sin\theta=\sqrt{\sin 2\alpha}.$$

(2) $\quad \triangle OBC=\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta,$

在 $0^\circ\leq2\theta\leq180^\circ$ 的范围内，当 $2\theta=90^\circ$ 时

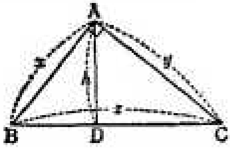
$\triangle OBC$ 取得最大值．这时

$$\sin 2\alpha=\frac{1}{2},$$

$\therefore\quad \alpha=15^\circ,\ 75^\circ.\ (\because\quad 0^\circ\leqq\alpha\leqq 90^\circ)$

2546. 在直角三角形中，若两条直角边的和是 l(定值)，求斜边上高的最大值．

解　图中，设 $\angle A=90^\circ$，$AB=x$，$AC=y$，$BC=z$，高 $AD=h$．



根据题意，可得下列关系式：

$$\begin{cases} x+y=l, & ① \\ x^2+y^2=z^2, & ② \\ xy=zh. & ③ \end{cases}$$

把①代入等式 $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$，得

$$4xy=l^2-(x-y)^2. \qquad ④$$

由③、④，得

$$4zh=l^2-(x-y)^2.$$

$$\therefore\quad h=\frac{l^2-(x-y)^2}{4z}.$$

把②代入，得

$$h=\frac{l^2-(x-y)^2}{4\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{l^2-(x-y)^2}{4\sqrt{\frac{1}{2}[(x+y)^2+(x-y)^2]}}$$

$$=\frac{l^2-(x-y)^2}{2\sqrt{2[l^2+(x-y)^2]}}.$$

很明显，当 $x=y$ 时，分子取得最大值，而分母取得最小值，因而这时高 h 就取得最大值，h 的最大值是 $\frac{l}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\,l}{4}$．

2547. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是锐角，若 $x_1+x_2+\cdots+x_n=\alpha$（$\alpha$ 是定值），求 $\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n$ 和 $\sin x_1\sin x_2\cdots\sin x_n$ 的最大值．

解　因为

$$\sin x_i+\sin x_j=2\sin\frac{(x_i+x_j)}{2}\cos\frac{(x_i-x_j)}{2},$$

所以，如果 $x_i\neq x_j$，那么

$$\sin x_i+\sin x_j<2\sin\frac{x_i+x_j}{2},$$

如果 $x_i=x_j$，那么

$$\sin x_i+\sin x_j=2\sin\frac{(x_i+x_j)}{2}.$$

因此 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中如果有两个不相等，例如 $x_i\neq x_j$，那么在 $\sum\sin x_k$ 中把 x_i、x_j 分别代换成 $\frac{x_i+x_j}{2}$ 后，所得到的和式的值就要大于原来的 $\sum\sin x_k$ 的值．从而得出，当

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{\alpha}{n}$$

时，$\sum\sin x_k$ 取得最大值 $n\sin\frac{\alpha}{n}$．

又，因为

$$\sin x_i\sin x_j=\frac{1}{2}[\cos(x_i-x_j)-\cos(x_i+x_j)],$$

所以，如果 $x_i\neq x_j$，那么

$$\sin x_i\sin x_j<\frac{1}{2}[1-\cos(x_i+x_j)],$$

即　$\sin x_i\sin x_j<\sin^2\frac{1}{2}(x_i+x_j)$．

如果 $x_i=x_j$，那么

$$\sin x_i\sin x_j=\sin^2\frac{1}{2}(x_i+x_j).$$

因此，当

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{\alpha}{n}$$

时，$\sin x_1\sin x_2\cdots\sin x_n$ 取得最大值 $\sin^n\frac{\alpha}{n}$．

2548. 在三角形 ABC 中：

(1) 若 $\sin(A+B)=\frac{1}{2}=\cos(A-C)$，讨论 A、B、C 的大小；

(2) 若 $\sin(A+B)=\frac{1}{2}\cos(A-C)=\frac{1}{2}$，讨论 A、B、C 的大小．

解　(1) $\sin(A+B)=\frac{1}{2}$，

所以 $A+B=30^\circ$，或 $A+B=150^\circ$．

又　$\cos(A-C)=\frac{1}{2}$，

所以 $A-C=60^\circ$，或 $C-A=60^\circ$．

在 $\triangle ABC$ 中

$$A+B+C=180^\circ.$$

所以　$C=150^\circ$　或　$C=30^\circ$．

若设 $C=150^\circ$，则

$$A-C=60°, \quad C-A=60°$$

都不成立.

若设 $C=30°$，则由 $A-C=60°$，得

$$A=90°.$$

又由 $A+B=150°$，得 $B=60°$，并且 $A-C\neq 60°$.

(2) $$\sin(A+B)=\frac{1}{2}.$$

所以 $A+B=30°$，或 $A+B=150°$. ①

又 $$\cos(A-C)=1,$$

所以 $$A-C=0°.$$

即 $$A=C. \quad ②$$

此外 $$A+B+C=180°. \quad ③$$

由 ① 和 ③，得

$$C=150° \quad 或 \quad C=30°.$$

但是，由 ② 可知 $C=150°$ 是不可能的. 因此

$$A=C=30°,$$

从而得出 $$B=120°.$$

2549. 求 $a\sin x+b\cos x$ 的最大值和最小值. 这里 a、b 不同时为零.

解 原式 $=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

$\left(这里，\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}，\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

所以，原式当 $\sin(x+\varphi)=1$ 时取得最大值 $\sqrt{a^2+b^2}$，$\sin(x+\varphi)=-1$ 时取得最小值 $-\sqrt{a^2+b^2}$.

2550. 在三角形 ABC 中，求 $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\times\cos\frac{C}{2}$ 的最大值.

解

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\cos\frac{A}{2}\left[\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right].$$

若 A 的值固定，则当 $B=C$ 时上式取得最大值. 用上面同样的方法可以推出，如果 A、B、C 中有不相同的角，那么使它们相等时值就会增大. 因此，当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时，原式取得最大值，最大值是

$$\cos^3\frac{\pi}{6}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

2551. 若 $0<x<\frac{\pi}{2}$，求 $\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x$ 的最小值.

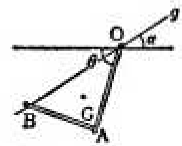
解 由 $0<x<\frac{\pi}{2}$，得

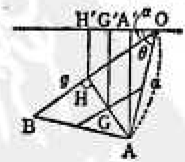
$$\operatorname{tg}x>0, \ \operatorname{ctg}x>0.$$

因为 $\operatorname{tg}x(3\operatorname{ctg}x)=3$(定值)，所以，当 $\operatorname{tg}x=3\operatorname{ctg}x$，即 $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$ 时 $\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x$ 取得最小值，最小值是

$$\sqrt{3}+3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$$

2552. 图中，g 是对水平面的倾斜度 $\operatorname{tg}\alpha$ 为 $\frac{1}{2}$ 的定直线. OA、AB 是在 A 点活络连结的长度相等的木棒，它的一个端点 O 固定在 g 上，当 OA 在包含 g 的铅垂面上自由旋转时，另外一个端点 B 可以沿着 g 运动. 问：折线 OAB 的重心 G (连结 OA、AB 中点的线段的中点)最低时，OA 对水平面的倾斜度 $\operatorname{tg}\theta$ 是多少?





解 从 A 向 g 作垂线 AH，则 G 是线段 AH 的中点. 从 A、G、H 向水平面作垂线 AA'、GG'、HH'，则

$$GG'=\frac{1}{2}(AA'+HH').$$

设 $OA=a$，则

$$AA'=a\sin\theta,$$
$$OH=a\cos(\theta-\alpha),$$
$$\therefore \quad HH'=a\cos(\theta-\alpha)\sin\alpha.$$

从而得出

$$GG'=\frac{a}{2}[\sin\theta+\cos(\theta-\alpha)\sin\alpha].$$

设 $f(\theta)=\sin\theta+\cos(\theta-\alpha)\sin\alpha$，

则

$$f(\theta)=(\sin^2\alpha+1)\sin\theta+\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta.$$

因为 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$，所以

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{4}{5}.$$

从而得出　　$\sin^2\alpha=\frac{1}{5}$，

$$\sin\alpha\cos\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha=\frac{2}{5}.$$

$$\therefore\quad f(\theta)=\frac{2}{5}(3\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=\frac{2\sqrt{10}}{5}\sin(\theta+\beta).$$

这里，β 是使 $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ 的锐角。

由 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$，得

$$\alpha<\frac{\pi}{4}.$$

因为 β 是锐角，且

$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}<\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以　　$\beta<\frac{\pi}{4}$.

$$\therefore\quad \alpha+\beta<\frac{\pi}{2}.$$

因为 θ 是在 $\alpha<\theta<\alpha+\frac{\pi}{2}$ 的范围内变化，所以

$$\alpha+\beta<\theta+\beta<\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}.$$

因此，$\sin(\theta+\beta)$ 当 $\theta+\beta=\frac{\pi}{2}$ 时取得最大值，这时 $\theta=\frac{\pi}{2}-\beta$. 从而得出，$f(\theta)$ 当 $\theta=\frac{\pi}{2}-\beta$ 时取得最大值，也就是重心最低．这时

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=3.$$

2553．在三角形 ABC 中，若设 A、B、C 分别是 α、β、γ，则

$$\begin{cases}\sin\alpha-2\sin\beta+\sin\gamma=0,\\ \sin\alpha+2\sin\beta-2\sin\gamma=0\end{cases}$$

成立．设这个三角形最短的一条边长是 l，试用 l 表示其他两边的长及最长的一条中线的长度．

解　　$\sin\alpha-2\sin\beta+\sin\gamma=0$，　　①

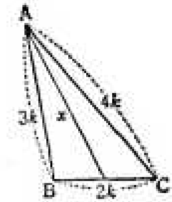
$$\sin\alpha+2\sin\beta-2\sin\gamma=0.\qquad ②$$

①+②，得

$2\sin\alpha=\sin\gamma$，

②−①，得

$4\sin\beta=3\sin\gamma$.



$$\therefore\quad \frac{\sin\alpha}{2}=\frac{\sin\beta}{3}=\frac{\sin\gamma}{4}.$$

由正弦定理，得三边的比等于 2:3:4．因此可以设三角形的三边分别是 $2k$、$3k$、$4k$. 因为其中最小的一条边是 $2k$，所以

$$l=2k,\quad\therefore\quad k=\frac{l}{2}.\qquad ③$$

因此，其他两边的长度分别是 $\frac{3}{2}l$，$2l$.

又，最长的一条中线在最短的边上．设它的长度是 x，则

$$(3k)^2+(4k)^2=2(x^2+k^2),$$

$$\therefore\quad x^2=\frac{23}{2}k^2,\quad x=\frac{\sqrt{46}}{2}k.\qquad ④$$

把 ③ 代入 ④，得

$$x=\frac{\sqrt{46}}{4}l.$$

2554．若三角形三边的长是

$$m^2+m+1,\ m^2-1,\ 2m+1,$$

求这个三角形的最大的角．

解　因为三角形的最大的角对应于最大的边，所以首先要找出三边中哪一条边最大．因为三角形的每边的长度是用正数来表示的，所以由 $2m+1>0$ 得

$$m>-\frac{1}{2}.\qquad ①$$

又由 $m^2-1>0$，得

$$m>1\quad\text{或}\quad m<-1.\qquad ②$$

由 ①、②，得

$$m>1.$$

在这个条件下，得

$$(m^2+m+1)-(2m+1)$$

$$=m(m-1)>0,$$

$$\therefore\quad m^2+m+1>2m+1;$$

$$(m^2+m+1)-(m^2-1)=m+2>0,$$

$$\therefore\quad m^2+m+1>m^2-1.$$

从而得出，m^2+m+1 是最大边．设这条

边的对角是 A，由第二余弦定理，得

$$\cos A=\frac{(2m+1)^2+(m^2-1)^2-(m^2+m+1)^2}{2(2m+1)(m^2-1)}.$$

这里，

$$\begin{aligned}分子&=(2m+1)^2+(m^2-1+m^2+m+1)\\&\quad\times(m^2-1-m^2-m-1)\\&=(2m+1)^2+(2m^2+m)(-m-2)\\&=(2m+1)^2-m(2m+1)(m+2)\\&=(2m+1)(2m+1-m^2-2m)\\&=(2m+1)(1-m^2),\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \cos A=\frac{(2m+1)(1-m^2)}{2(2m+1)(m^2-1)}=-\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad A=120^\circ.$$

2555. 求三边长是 a、b、$\sqrt{a^2+ab+b^2}$ 的三角形的最大的角.

解 因为边 $\sqrt{a^2+ab+b^2}$ 的对角是最大的角，所以若设这个角是 θ，则

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-(a^2+ab+b^2)}{2ab}=-\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad \theta=120^\circ.$$

2556. 设在三角形 ABC 中，$a^2-a-2b-2c=0$，$a+2b-2c+3=0$，求它的最大的角.

解 把两个已知式两边分别相加，得

$$a^2-4c+3=0,\ \therefore\ c=\frac{a^2+3}{4};\qquad ①$$

两边分别相减，得

$$a^2-2a-4b-3=0,$$

$$\therefore\quad b=\frac{a^2-2a-3}{4}.\qquad ②$$

这里，使 b 是正值的条件是

$$a^2-2a-3>0,\ (a-3)(a+1)>0,$$

$$\therefore\quad a>3.$$

在这个条件下，考察三边的大小关系. 因为

$$\begin{aligned}c-a&=\frac{a^2+3}{4}-a=\frac{1}{4}(a^2-4a+3)\\&=\frac{1}{4}[(a-2)^2-1]>0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c-b&=\frac{a^2+3}{4}-\frac{a^2-2a-3}{4}\\&=\frac{1}{4}(a^2+3-a^2+2a+3)\\&=\frac{1}{4}(2a+6)=\frac{1}{2}(a+3)>0,\end{aligned}$$

所以，c 边所对的角是最大的角.

$$\begin{aligned}\cos C&=\frac{a^2+\frac{1}{16}(a^2-2a-3)^2-\frac{1}{16}(a^2+3)^2}{2a\cdot\frac{1}{4}(a^2-2a-3)}\\&=\left[a^2+\frac{1}{16}(a^2-2a-3+a^2+3)\right.\\&\quad\left.\times(a^2-2a-3-a^2-3)\right]\\&\quad\div\left[\frac{1}{2}a(a^2-2a-3)\right]\\&=\frac{4a^2-(a^2-a)(a+3)}{2a(a^2-2a-3)}\\&=\frac{4a-(a-1)(a+3)}{2(a^2-2a-3)}\\&=\frac{4a-a^2-2a+3}{2(a^2-2a-3)}\\&=-\frac{a^2-2a-3}{2(a^2-2a-3)}=-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad C=120^\circ.$$

第七章　消去法，反三角函数，反三角方程

1. 消去法

2557. 什么是消去法?

解　从所给的一组方程中，导出不含特殊字母的关系等式，叫做消去它的字母。被求得的关系式是所给的一组方程联立的必要条件，这个关系式叫做消去式。

2558. 从 $a\sin\theta+b\cos\theta=a'$

及　$$a\cos\theta-b\sin\theta=b'$$

中消去 θ。

解　将所给的两个式子分别平方，然后两边相加即得

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2.$$

2559. 从 $\cos\theta-\sin\theta=b$

及　$$\cos3\theta+\sin3\theta=a$$

中消去 θ。

解　从第二个式子得

$$4\cos^3\theta-3\cos\theta+3\sin\theta-4\sin^3\theta=a,$$

或　$$4(\cos^3\theta-\sin^3\theta)-3(\cos\theta-\sin\theta)=a.$$

因此从第一个式子得

$$4b(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)-3b=a,$$

或　$$4b(1+\cos\theta\sin\theta)-3b=a,$$

或　$$4b\cos\theta\sin\theta=a-b.$$

又，将第一个式子平方，得

$$1-2\sin\theta\cos\theta=b^2,$$

或　$$2\sin\theta\cos\theta=1-b^2,$$

因此　$$2b(1-b^2)=a-b,$$

或　$$2b^3=3b-a.$$

2560. 从 $\cos\theta+\sin\theta=a$ 及 $\cos2\theta=b$ 中消去 θ。

解　从 $\cos2\theta=b$ 得

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta=b,$$

上式除以第一个式子得

$$\cos\theta-\sin\theta=\frac{b}{a}.$$

因此　$$a^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=2,$$

即　$$a^4+b^2=2a^2.$$

2561. 从 $\cos\theta+\sin\theta=a$

及　$$\cos\theta-\sin\theta=b$$

中消去 θ。

解　将这两个式子分别平方，得

$$\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=a^2,$$
$$\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=b^2,$$

两边相加，得

$$2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a^2+b^2,$$
$$\therefore\quad 2=a^2+b^2.$$

2562. 从 $\sec\theta=a$，$\operatorname{tg}\theta=b$ 中消去 θ。

解　将所给的第一个式子平方，得 $\sec^2\theta=a^2$，从而 $1+\operatorname{tg}^2\theta=a^2$。根据第二个已知式，将上式中的 $\operatorname{tg}\theta$ 用 b 代入，得 $1+b^2=a^2$。

2563. 在三角形 ABC 中，

$$b\sin B-c\sin C=m,$$

$$\frac{a}{2}\sin(B-C)=n,$$

从这两个式子中消去 A、B、C。

解　设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，

则　$$\begin{aligned}b\sin B-c\sin C&=k(\sin^2B-\sin^2C)\\&=k\sin A\sin(B-C)\\&=a\sin(B-C),\end{aligned}$$

$$\therefore\quad m=2n.$$

2564. 从 $\sin(\alpha+x)=m$，$\sin(\alpha-x)=n$ 中消去 x。

解　从所给的两个式子得

$$\sin(\alpha+x)+\sin(\alpha-x)=m+n,$$

或　$$2\sin\alpha\cos x=m+n;\qquad ①$$

又得　$$\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)=mn,$$

或　$$\cos2x-\cos2\alpha=2mn,$$

因此　$$2\cos^2x-1=\cos2\alpha+2mn.$$

由上式和①得

$$2\left(\frac{m+n}{2\sin\alpha}\right)^2-1=\cos2\alpha+2mn,$$

即 $\dfrac{(m+n)^2}{2\sin^2\alpha}-1=\cos 2\alpha+2mn$,

或 $\dfrac{(m+n)^2}{1-\cos 2\alpha}=1+\cos 2\alpha+2mn$,

因此

$(m+n)^2=1-\cos^2 2\alpha+2mn-2mn\cos 2\alpha$,

即 $m^2+n^2=\sin^2 2\alpha-2mn\cos 2\alpha$.

2565. 从 $a\sin\theta+b\cos\theta-m=0$, ①

$b\operatorname{tg}\theta-a-n\sec\theta=0$ ②

中消去 θ.

解 从①得

$$a\sin\theta+b\cos\theta=m. \quad ③$$

将②乘以 $\cos\theta$, 得

$$b\sin\theta-a\cos\theta=n. \quad ④$$

将③的平方与④的平方两边相加，得

$$a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=m^2+n^2,$$

即 $a^2+b^2=m^2+n^2$.

2566. 从 $a\sin\theta+b\cos\theta=1$, ①

$b\sin\theta+a\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta$ ②

中消去 θ.

解 将②的两边除以 $\sin\theta\cos\theta$, 得

$$\frac{b}{\cos\theta}+\frac{a}{\sin\theta}=2.$$

由上式和①得

$$\frac{b}{\cos\theta}+\frac{a}{\sin\theta}=2a\sin\theta+2b\cos\theta,$$

即 $a\left(\dfrac{1}{\sin\theta}-2\sin\theta\right)+b\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-2\cos\theta\right)=0$,

即 $a\cdot\dfrac{1-2\sin^2\theta}{\sin\theta}+b\cdot\dfrac{1-2\cos^2\theta}{\cos\theta}=0$,

因此 $a\cdot\dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}-b\cdot\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}=0$.

因此 $\dfrac{a}{\sin\theta}-\dfrac{b}{\cos\theta}=0$.

因此 $a\cos\theta-b\sin\theta=0$.

将上式两边平方，得

$$a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-2ab\cos\theta\sin\theta=0. \quad ③$$

将①的两边平方，得

$$a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta\sin\theta=1. \quad ④$$

将③和④两边相加，得

$$a^2+b^2=1.$$

别解 ①和②两边相乘，得

$$ab+(a^2+b^2)\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta,$$

即 $2ab=(2-a^2-b^2)\sin 2\theta$. ③

又，将①和②分别平方，相加，得

$$a^2+b^2+4ab\sin\theta\cos\theta=4\cos^2\theta\sin^2\theta+1,$$

即 $a^2+b^2-1+2ab\sin 2\theta=\sin^2 2\theta$. ④

从③得 $\sin 2\theta=\dfrac{2ab}{2-a^2-b^2}$,

将这代入④，得

$$(a^2+b^2-1)+\frac{4a^2b^2}{2-a^2-b^2}=\frac{4a^2b^2}{(2-a^2-b^2)^2},$$

即

$$(a^2+b^2-1)+\frac{4a^2b^2}{2-a^2-b^2}\left(1-\frac{1}{2-a^2-b^2}\right)=0,$$

即 $(a^2+b^2-1)-\dfrac{4a^2b^2(a^2+b^2-1)}{(2-a^2-b^2)^2}=0$,

即 $(a^2+b^2-1)\left[1-\dfrac{4a^2b^2}{(2-a^2-b^2)^2}\right]=0$,

因此 $a^2+b^2=1$, ⑤

或 $(2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2=0$.

由后式得 $(a+b)^2=2$ ⑥

或 $(a-b)^2=2$. ⑦

这里，当有⑥或⑦的结果时，因为

$$2-a^2-b^2=\pm 2ab,$$

所以将这代入 $\sin 2\theta$ 的值，得 $\sin 2\theta=\pm 1$, 从而得到 $2\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 的特殊值，这说明从①、②消去 θ, 所得的式子仅仅是⑤.

2567. 从 $\operatorname{tg}\theta+\cos\theta=a$, $\operatorname{tg}\theta-\cos\theta=b$ 中消去 θ.

解 把所给的两个式子两边相加减，得

$$2\operatorname{tg}\theta=a+b \quad 和 \quad 2\cos\theta=a-b.$$

因此 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{a+b}{2}$, ①

$\cos\theta=\dfrac{a-b}{2}$. ②

将②代入①，得

$$\frac{2\sin\theta}{a-b}=\frac{a+b}{2},$$

因此 $\sin\theta=\dfrac{a^2-b^2}{4}$. ③

将②和③分别平方，相加，得

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=\frac{(a-b)^2}{4}+\frac{(a^2-b^2)^2}{16},$$

即　$$1=\frac{(a-b)^2}{4}+\frac{(a^2-b^2)^2}{16},$$

因此　$(a-b)^2[(a+b)^2+4]=16$。

别解　从所给的方程得

$$\frac{\operatorname{tg}\theta}{b+a}=\frac{\cos\theta}{a-b}=\frac{-1}{-1-1}.$$

由此得　$\operatorname{tg}\theta=\frac{a+b}{2}$，$\cos\theta=\frac{a-b}{2}$，

即　$$\sec^2\theta=\frac{4}{(a-b)^2},$$

或　$$1+\operatorname{tg}^2\theta=\frac{4}{(a-b)^2},$$

因此　$$1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{4}{(a-b)^2},$$

即　$(a-b)^2[(a+b)^2+4]=16$。

2568. 从 $\sin\theta\cos^2\theta=a$，$\cos\theta\sin^2\theta=b$ 中消去 θ。

解　将所给的两个式子平方，相加，得

$$a^2+b^2=\sin^2\theta\cos^4\theta+\sin^4\theta\cos^2\theta=\sin^2\theta\cos^2\theta,$$

两边再立方得

$$(a^2+b^2)^3=\sin^6\theta\cos^6\theta.\qquad ①$$

又，将所给的两个式子两边相乘，得

$$\sin^3\theta\cos^3\theta=ab,$$

两边再平方得

$$\sin^6\theta\cos^6\theta=a^2b^2.\qquad ②$$

因此，从①、②得

$$a^2b^2=(a^2+b^2)^3.$$

2569. 从 $\cos\theta\sin\theta=m$，$\operatorname{ctg}\theta=n$ 中消去 θ。

解　将所给的两个式子两边相乘，得

$$\cos^2\theta=mn.$$

又，两边相除得

$$\sin^2\theta=\frac{m}{n}.$$

因此　$$mn+\frac{m}{n}=1,$$

即　$$m(n^2+1)=n.$$

2570. 从 $a\sin\theta+b\cos\theta+c=0$，

$$a'\sin\theta+b'\cos\theta+c'=0$$

中消去 θ。其中 $ab'-a'b\neq0$。

解　因为 $ab'-a'b\neq0$，所以解关于 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 的两个式子得

$$\sin\theta=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\quad \cos\theta=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}.$$

将这些代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，然后去分母得

$$(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2=(ab'-a'b)^2.$$

2571. 从方程

$$\begin{cases} y\cos\theta-x\sin\theta=a\cos2\theta, & ①\\ y\sin\theta+x\cos\theta=2a\sin2\theta & ②\end{cases}$$

中消去 θ，证明 $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$。

解　①×$\cos\theta$+②×$\sin\theta$，得

$$\begin{aligned}y&=a\cos2\theta\cos\theta+2a\sin2\theta\sin\theta\\&=a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos\theta+4a\sin^2\theta\cos\theta\\&=a(\cos^3\theta+3\sin^2\theta\cos\theta).\qquad ③\end{aligned}$$

②×$\cos\theta$−①×$\sin\theta$，得

$$\begin{aligned}x&=2a\sin2\theta\cos\theta-a\cos2\theta\sin\theta\\&=4a\sin\theta\cos^2\theta-a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\theta\\&=a(\sin^3\theta+3\sin\theta\cos^2\theta).\qquad ④\end{aligned}$$

③+④，得

$$x+y=a(\sin\theta+\cos\theta)^3,$$

$$\therefore\quad \sin\theta+\cos\theta=\left(\frac{x+y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}.\qquad ⑤$$

④−③，得

$$x-y=a(\sin\theta-\cos\theta)^3,$$

$$\therefore\quad \sin\theta-\cos\theta=\left(\frac{x-y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}.\qquad ⑥$$

⑤²+⑥²，得

$$2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\left(\frac{x+y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{x-y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

$$\therefore\quad (x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}.$$

2572. 从 $x=a\operatorname{tg}^2\varphi$，$y=2a\operatorname{ctg}\varphi$ 中消去 φ。

解　从所给的两个式子得

$$\begin{aligned}xy^2&=(a\operatorname{tg}^2\varphi)(2a\operatorname{ctg}\varphi)^2\\&=a\times4a^2\operatorname{tg}^2\varphi\operatorname{ctg}^2\varphi=4a^3.\end{aligned}$$

2573. 从 $\csc\theta=a$，$\operatorname{ctg}\theta=b$ 中消去 θ。

解　将第二个式子平方，得 $\operatorname{ctg}^2\theta=b^2$，从而 $1+\operatorname{ctg}^2\theta=1+b^2$，或 $\csc^2\theta=1+b^2$。因此，再由第一式得 $a^2=1+b^2$。

2574. 从 $\sec\theta=a$ 及 $\operatorname{ctg}\theta=b$ 中消去 θ。

解　因为 $1+\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta$，所以

$$1+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\theta}=\sec^2\theta,$$

从而　$$1+\frac{1}{b^2}=a^2,$$

或
$$a^2b^2-b^2=1.$$

2575. 从 $a=\operatorname{ctg}\theta+\cos\theta$,
$$b=\operatorname{ctg}\theta-\cos\theta$$
中消去 θ。

解　从所给的两个式子得
$$\frac{a+b}{2}=\operatorname{ctg}\theta,\quad \frac{a-b}{2}=\cos\theta.$$
因此 $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}$$
$$=\frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$
将上式化简得
$$16ab=(a^2-b^2)^2.$$

2576. 从下面两个方程中消去 θ。
$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\dfrac{\sec^2\theta-\cos^2\theta}{\sec^2\theta+\cos^2\theta}, & ①\\[2ex] \dfrac{2b}{y}=\sec^2\theta+\cos^2\theta. & ②\end{cases}$$

解　将②代入①得
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{2b}(\sec^2\theta-\cos^2\theta),$$
$$\therefore\quad \sec^2\theta-\cos^2\theta=\frac{2bx}{ay}. \qquad ③$$
②+③，得
$$2\sec^2\theta=\frac{2b}{y}+\frac{2bx}{ay},$$
$$\therefore\quad \sec^2\theta=\frac{b}{y}\left(1+\frac{x}{a}\right). \qquad ④$$
②−③，得
$$2\cos^2\theta=\frac{2b}{y}-\frac{2bx}{ay},$$
$$\therefore\quad \cos^2\theta=\frac{b}{y}\left(1-\frac{x}{a}\right). \qquad ⑤$$
④×⑤，由于 $\sec^2\theta\cos^2\theta=1$，所以得
$$\left(\frac{b}{y}\right)^2\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)=1,$$
$$\left(\frac{y}{b}\right)^2=1-\left(\frac{x}{a}\right)^2,$$
$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

2577. 从下面的方程中消去 θ。

(1) $$\begin{cases}\sin^2\theta-a\sin\theta+1=0, & ①\\ \cos^2\theta-b\cos\theta+1=0. & ②\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=c, & ①\\ a\csc^2\theta+b\sec^2\theta=d. & ②\end{cases}$$

解　(1) 从①得
$$\sin\theta=\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2-4}). \qquad ③$$
从②得　$$\cos\theta=\frac{1}{2}(b\pm\sqrt{b^2-4}). \qquad ④$$
将③、④代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，得
$$\frac{1}{4}\Big(2a^2-4\pm2a\sqrt{a^2-4}$$
$$+2b^2-4\pm2b\sqrt{b^2-4}\Big)=1,$$
$$a^2+b^2-4\pm(a\sqrt{a^2-4}\pm b\sqrt{b^2-4})=2,$$
$$a^2+b^2-6=\mp(a\sqrt{a^2-4}\pm b\sqrt{b^2-4}),$$
两边平方得
$$(a^2+b^2-6)^2=a^2(a^2-4)+b^2(b^2-4)$$
$$\pm2ab\sqrt{a^2-4}\cdot\sqrt{b^2-4},$$
$$2a^2b^2-8a^2-8b^2+36$$
$$=\pm2ab\sqrt{(a^2-4)(b^2-4)},$$
两边再平方，得
$$(a^2b^2-4a^2-4b^2+18)^2$$
$$=a^2b^2(a^2-4)(b^2-4).$$

(2) 从①得
$$a\sin^2\theta+b(1-\sin^2\theta)=c,$$
$$(a-b)\sin^2\theta=c-b,$$
$$\therefore\quad \sin^2\theta=\frac{c-b}{a-b}. \qquad ③$$
从②得　$$\frac{a}{\sin^2\theta}+\frac{b}{1-\sin^2\theta}=d,$$
将③代入上式，得
$$\frac{a}{\frac{c-b}{a-b}}+\frac{b}{1-\frac{c-b}{a-b}}=d,$$
$$\frac{a(a-b)}{c-b}+\frac{b(a-b)}{a-c}=d,$$
$$\therefore\quad \frac{a}{c-b}+\frac{b}{a-c}=\frac{d}{a-b}.$$

2578. 从下面两个方程中消去 θ。
$$\begin{cases}x=a\cos(\theta-\alpha),\\ y=b\cos(\theta-\beta).\end{cases}$$

解　将所给两式的右边展开，得
$$\begin{cases}x=a(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha), & ①\\ y=b(\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\beta). & ②\end{cases}$$
①×$b\cos\beta$−②×$a\cos\alpha$，得

$$bx\cos\beta-ay\cos\alpha$$
$$=ab\cos\beta\sin\theta\sin\alpha-ab\cos\alpha\sin\theta\sin\beta$$
$$=ab\sin\theta\sin(\alpha-\beta),$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{bx\cos\beta-ay\cos\alpha}{ab\sin(\alpha-\beta)}. \qquad ③$$

①$\times b\sin\beta-$②$\times a\sin\alpha$，得

$$bx\sin\beta-ay\sin\alpha$$
$$=ab\sin\beta\cos\alpha\cos\theta-ab\sin\alpha\cos\beta\cos\theta$$
$$=-ab\cos\theta\sin(\alpha-\beta),$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{ay\sin\alpha-bx\sin\beta}{ab\sin(\alpha-\beta)}. \qquad ④$$

③$^2+$④^2，得

$$b^2x^2+a^2y^2-2abxy(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=a^2b^2\sin^2(\alpha-\beta),$$
$$b^2x^2+a^2y^2-2abxy\cos(\alpha-\beta)$$
$$=a^2b^2\sin^2(\alpha-\beta),$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos(\alpha-\beta)$$
$$=\sin^2(\alpha-\beta).$$

2579. 从下面的方程中消去 θ。

(1) $\begin{cases} x=(\csc\theta-\sin\theta)^2, & ① \\ y=(\sec\theta-\cos\theta)^2. & ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=3-4\cos 4\theta, & ① \\ x-y=4\sin 2\theta. & ② \end{cases}$

解　(1) ①+②，得

$$x+y=\csc^2\theta+\sec^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta-4$$
$$=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}-3=\frac{4}{\sin^2 2\theta}-3,$$

$$\therefore\quad \sin^2 2\theta=\frac{4}{x+y+3}. \qquad ③$$

①－②，得

$$x-y=\csc^2\theta-\sec^2\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta$$
$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$=\cos 2\theta\left(\frac{4}{\sin^2 2\theta}-1\right)$$
$$=\cos 2\theta(x+y+3-1),$$

$$\therefore\quad \cos 2\theta=\frac{x-y}{x+y+2}. \qquad ④$$

③$+$④^2，得

$$1=\frac{4}{x+y+3}+\left(\frac{x-y}{x+y+2}\right)^2.$$

化简得　　$xy(x+y+3)=1$.

(2) 从②得

$$\sin 2\theta=\frac{x-y}{4}.$$

利用它将①变形得

$$x+y=3-4(1-2\sin^2 2\theta)$$
$$=8\left(\frac{x-y}{4}\right)^2-1=\frac{(x-y)^2}{2}-1,$$

$$\therefore\quad (x-y)^2=2(x+y+1).$$

2580. 从下面的方程中消去 θ。

(1) $\begin{cases} \dfrac{x}{a}\cos\theta+\dfrac{y}{b}\sin\theta=1, & ① \\ \dfrac{x}{a}\sin\theta-\dfrac{y}{b}\cos\theta=1. & ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=3\cos\theta+\cos 3\theta, & ① \\ y=3\sin\theta-\sin 3\theta. & ② \end{cases}$

解　(1) ①$^2+$②^2，得

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$+\left(\frac{y}{b}\right)^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2,$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2.$$

(2) 从①得

$$x=3\cos\theta+4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\cos^3\theta,$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad ③$$

从②得

$$y=3\sin\theta-(3\sin\theta-4\sin^3\theta)=4\sin^3\theta,$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad ④$$

③$^2+$④^2，得

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

$$\therefore\quad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}.$$

2581. 从下面的方程中消去 θ。

(1) $\begin{cases} \sin\theta+\cos\theta=m, & ① \\ \operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta=n. & ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \operatorname{tg}\theta+\sin\theta=m, & ① \\ \operatorname{tg}\theta-\sin\theta=n. & ② \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \csc\theta-\sin\theta=m, & ① \\ \sec\theta-\cos\theta=n. & ② \end{cases}$

解　(1) 从②得

$$n=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}.$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{n}.\qquad ③$$

将①平方，得

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=m^2.$$

再由③得

$$1+\frac{2}{n}=m^2,\quad \therefore\quad n(m^2-1)=2.$$

(2) ①+②，得 $2\operatorname{tg}\theta=m+n$,

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{m+n}{2}.\qquad ③$$

①−②，得　$2\sin\theta=m-n$,

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{m-n}{2}.\qquad ④$$

又　$1+\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta=\dfrac{1}{1-\sin^2\theta}$,

$$(1+\operatorname{tg}^2\theta)(1-\sin^2\theta)=1,$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}^2\theta-\sin^2\theta-\operatorname{tg}^2\theta\sin^2\theta=0.$$

将③和④代入上式，得

$$\frac{1}{4}[(m+n)^2-(m-n)^2]-\frac{1}{16}(m+n)^2(m-n)^2=0,$$

$$4\times4mn-(m^2-n^2)^2=0,$$

$$\therefore\quad (m^2-n^2)^2=16mn.$$

(3) 从①得

$$m=\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=\operatorname{ctg}\theta\cos\theta.\qquad ③$$

从②得　$n=\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\operatorname{tg}\theta\sin\theta.$　④

③÷④，得

$$\frac{m}{n}=\frac{\operatorname{ctg}\theta\cos\theta}{\operatorname{tg}\theta\sin\theta}=\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta},$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\theta=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{3}},\quad \operatorname{tg}\theta=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

将这代入③、④，分别得

$$m=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\cos\theta,\quad\therefore\quad \cos\theta=m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{3}}.\qquad ⑤$$

$$n=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{3}}\sin\theta,\quad\therefore\quad \sin\theta=n\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{3}}.\qquad ⑥$$

从⑤、⑥消去 θ，得

$$n^2\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+m^2\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

2582. 从下面的方程中消去 θ.

(1) $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=a, & ①\\ \sin2\theta+\cos2\theta=b. & ②\end{cases}$

(2) $\begin{cases}-\sin\theta+\cos\theta=a, & ①\\ \sin^3\theta+\cos^3\theta=b. & ②\end{cases}$

解　(1) 将①平方得

$$1+2\sin\theta\cos\theta=a^2,$$

$$\therefore\quad \sin2\theta=a^2-1.\qquad ③$$

利用③，将②变形得

$$\cos2\theta=b-(a^2-1).\qquad ④$$

③²+④²，得

$$\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=(a^2-1)^2+(b-a^2+1)^2,$$

$$\therefore\quad 2(a^2-1)^2-2b(a^2-1)+b^2=1.$$

(2) 将①平方得

$$1-2\sin\theta\cos\theta=a^2,$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{1-a^2}{2}.$$

利用它将②变形得

$$(\sin\theta+\cos\theta)\times(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=b,$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)\left(1-\frac{1-a^2}{2}\right)=b,$$

$$\therefore\quad \sin\theta+\cos\theta=\frac{2b}{1+a^2}.\qquad ③$$

①²+③²，得

$$2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=a^2+\left(\frac{2b}{1+a^2}\right)^2,$$

$$\therefore\quad (2-a^2)(1+a^2)^2=4b^2.$$

2583. 若 $\sin x+\cos x=a$, $\cos2x=b$, 证明 $a^2+\dfrac{b^2}{a^2}=2$. 其中设 $a\neq0$.

解　$\sin x+\cos x=a,$　①

$\cos2x=b.$　②

将②变形得　$\cos^2x-\sin^2x=b,$

$$(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=b,$$

再由①得　$\cos x-\sin x=\dfrac{b}{a}.$　③

①²+③²，得

$$2(\sin^2x+\cos^2x)=a^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

$$\therefore\quad a^2+\frac{b^2}{a^2}=2.$$

2584. 从下面的方程中消去 θ.

(1) $\begin{cases} x=a\sec\theta, \\ y=b\csc\theta. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=b\sin^3\theta. \end{cases}$

解 (1) $\sec\theta=\dfrac{x}{a}$, $\therefore$ $\cos\theta=\dfrac{a}{x}$.

$$\csc\theta=\frac{y}{b},\quad \therefore\quad \sin\theta=\frac{b}{y}.$$

因此,代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 得

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{b}{y}\right)^2=1.$$

(2) $\cos^3\theta=\dfrac{x}{a}$, $\therefore$ $\cos\theta=\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$.

$$\sin^3\theta=\frac{y}{b},\quad \therefore\quad \sin\theta=\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

因此代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 得

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

2585. 若 $\sin\theta=a$, $\operatorname{tg}\theta=b$, 证明 $b^2=a^2(1+b^2)$.

解 $1+\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta=\dfrac{1}{1-\sin^2\theta}$.

将 $\sin\theta=a$, $\operatorname{tg}\theta=b$ 代入上式,得

$$1+b^2=\frac{1}{1-a^2}.$$

将上式变形得

$$(1-a^2)(1+b^2)=1,$$

$$\therefore\quad b^2=a^2(1+b^2).$$

2586. 从下面的方程中消去 α 和 β.

$$\begin{cases} a=\sin\alpha\cos\beta\sin\theta+\cos\alpha\cos\theta, & ① \\ b=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta, & ② \\ c=\sin\alpha\sin\beta\sin\theta. & ③ \end{cases}$$

解 ①^2+②^2,得

$$\begin{aligned} a^2+b^2&=\sin^2\alpha\cos^2\beta(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \\ &\quad+\cos^2\alpha(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\ &=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha \\ &=\sin^2\alpha\cos^2\beta+1-\sin^2\alpha \\ &=\sin^2\alpha(\cos^2\beta-1)+1 \\ &=1-\sin^2\alpha\sin^2\beta. \qquad ④ \end{aligned}$$

从③得 $\sin^2\alpha\sin^2\beta=\dfrac{c^2}{\sin^2\theta}$. ⑤

因此从④和⑤得

$$a^2+b^2=1-\frac{c^2}{\sin^2\theta},$$

$$\therefore\quad a^2+b^2+\frac{c^2}{\sin^2\theta}=1.$$

2587. 从下面两个式子中消去 φ, 用 a、b、c 表示 $\cos A$ 的值.

$$a=(b+c)\cos\varphi,$$

$$4bc\cos^2\frac{A}{2}=(b+c)^2\sin^2\varphi.$$

解 从第一个式子得 $\cos\varphi=\dfrac{a}{b+c}$,

因此

$$\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi=1-\frac{a^2}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{(b+c)^2}.$$

将上式代入第二个式子,得

$$2bc(1+\cos A)=b^2+c^2-a^2+2bc,$$

因此 $\qquad 2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$,

即 $\qquad \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

2588. 从 $\sin\varphi-\cos\varphi=m$ 及 $\sin 2\varphi=n$ 中消去 φ.

解 将第一式的两边平方得

$$\sin^2\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\varphi=m^2,$$

或 $\qquad 1-\sin 2\varphi=m^2$.

因此,根据第二式得

$$1-n=m^2.$$

2589. 从 $x\sin\theta+y\cos\theta=2a\sin 2\theta$,

$$x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta$$

中消去 θ.

解 解关于 x、y 的两个方程,得

$$\begin{aligned} x&=a(2\sin 2\theta\sin\theta+\cos 2\theta\cos\theta) \\ &=a(\cos^3\theta+3\cos\theta\sin^2\theta), \\ y&=a(2\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta) \\ &=a(3\cos^2\theta\sin\theta+\sin^3\theta). \end{aligned}$$

$$\therefore\quad x+y=a(\cos\theta+\sin\theta)^3,$$

$$x-y=a(\cos\theta-\sin\theta)^3.$$

$$\therefore\quad (x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}.$$

2590. 从 $x=\sec\theta-\cos\theta$,

$$y=\csc\theta-\sin\theta$$

中消去 θ.

解 从第一个式子得

$$x=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta,$$

即　　$x=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$.

又，从第二个式子得

$$y=\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta,$$

即　　$y=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$.

因此

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\frac{\sin^{\frac{4}{3}}\theta}{\cos^{\frac{2}{3}}\theta}+\frac{\cos^{\frac{4}{3}}\theta}{\sin^{\frac{2}{3}}\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^{\frac{2}{3}}\theta\sin^{\frac{2}{3}}\theta}.$$

因此　　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$,

即　　$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=1$.

2591. 从　$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$,　①

$$\frac{ax\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{by\cos\theta}{\sin^2\theta}=0 \quad ②$$

中消去 θ.

解　将②变形，利用①得

$$\frac{\frac{ax}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{-\frac{by}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta.$$

由此得　　$ax=(a^2-b^2)\cos^3\theta$

和　　$-by=(a^2-b^2)\sin^3\theta$.

从而　　$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$.

2592. 从 $(x-a\sin\theta)^2+(y-a\cos\theta)^2=(x\cos\theta-y\sin\theta)^2=a^2$ 中消去 θ.

解　从 $(x-a\sin\theta)^2+(y-a\cos\theta)^2=a^2$, 得

$$x^2+y^2-2a(x\sin\theta+y\cos\theta)=0. \quad ①$$

从

$$(x-a\sin\theta)^2+(y-a\cos\theta)^2=(x\cos\theta-y\sin\theta)^2,$$

得　$x^2\sin^2\theta+y^2\cos^2\theta+a^2-2ax\sin\theta-2ay\cos\theta+2xy\sin\theta\cos\theta=0$,

$$\therefore\ (x\sin\theta+y\cos\theta-a)^2=0,$$

$$\therefore\ x\sin\theta+y\cos\theta=a. \quad ②$$

将②代入①，得 $x^2+y^2=2a^2$.

2593. 从

$$\begin{cases}\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1, & ①\\ \frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1, & ②\\ \frac{1}{a^2}\cos\theta\cos\varphi+\frac{1}{b^2}\sin\theta\sin\varphi=0 & ③\end{cases}$$

中消去 θ、φ.

解　从①、②可知，θ、φ 满足

$$\frac{x}{a}\cos t+\frac{y}{b}\sin t=1.$$

将上式的两边平方，再除以 $\cos^2 t$，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2xy}{ab}\operatorname{tg}t+\frac{y^2}{b^2}\operatorname{tg}^2 t=\sec^2 t,$$

$$\therefore\ \left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)\operatorname{tg}^2 t+\frac{2xy}{ab}\operatorname{tg}t+\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=0.$$

因为 $\operatorname{tg}\theta$、$\operatorname{tg}\varphi$ 满足上面关于 $\operatorname{tg}t$ 的两次方程，所以

$$\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi=\frac{b^2(x^2-a^2)}{a^2(y^2-b^2)}.$$

又，从③得　$\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi=-\frac{b^2}{a^2}$,

因此从上面两式得

$$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

2594. (1) 从

$$x\cos^3\theta+y\sin^3\theta=a, \quad ①$$
$$y\sin\theta=x\cos\theta \quad ②$$

中消去 θ.

(2) 从

$$\sin x+\sin y=a, \quad ①$$
$$\cos x+\cos y=b, \quad ②$$
$$\cos(x+y)=c \quad ③$$

中消去 x、y.

解　(1) 由②设

$$\frac{x}{\sin\theta}=\frac{y}{\cos\theta}=k,$$

得　　$x=k\sin\theta$, $y=k\cos\theta$.

将这些代入①得

$$k\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a,$$

$$\therefore\ k=\frac{a}{\sin\theta\cos\theta},$$

$$\therefore\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}.$$

(2) ①^2+②^2，得

$$2+2\sin x\sin y+2\cos x\cos y=a^2+b^2,$$

$$\therefore\quad \cos(x-y)=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2). \qquad ④$$

②²－①², 得

$$(\cos^2 x-\sin^2 x)+2(\cos x\cos y-\sin x\sin y)+(\cos^2 y-\sin^2 y)=b^2-a^2,$$

$$\therefore\quad (\cos 2x+\cos 2y)+2\cos(x+y)=b^2-a^2,$$

$$\therefore\quad 2\cos(x+y)\cos(x-y)+2\cos(x+y)=b^2-a^2,$$

再利用③得

$$\cos(x-y)=\frac{b^2-a^2-2c}{2c}. \qquad ⑤$$

所以由④、⑤得

$$c(a^2+b^2)=b^2-a^2.$$

2595. 从下面的方程中消去α和β.

$$(1)\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=a, & ①\\ \cos\alpha+\cos\beta=b, & ②\\ \cos(\alpha-\beta)=c. & ③\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=a, & ①\\ \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=b, & ②\\ \alpha+\beta=C. & ③\end{cases}$$

解 (1) ①²+②², 得

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\beta+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=a^2+b^2,$$

$$2[1+\cos(\alpha-\beta)]=a^2+b^2.$$

将③代入上式, 得

$$2(1+c)=a^2+b^2,$$

$$\therefore\quad a^2+b^2-2c=2.$$

(2) 利用①将②变形, 得

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=b,\quad \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=b,$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{a}{b}. \qquad ④$$

又, 在③的两边取正切, 得

$$\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

将①和④代入上式, 变形得

$$\operatorname{tg}C=\frac{a}{1-\frac{a}{b}}=\frac{ab}{b-a},$$

即

$$\operatorname{ctg}C=\frac{b-a}{ab},$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}C=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

2596. 从$x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$中消去φ.

解 从所给的两个方程得

$$\frac{x}{a}=\cos\varphi \quad 和 \quad \frac{y}{b}=\sin\varphi.$$

将这两个式子分别平方, 相加得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

2597. 从$\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)=m$, $\operatorname{tg}(\alpha-\varphi)=n$中消去$\varphi$.

解 从所给的第一个方程得

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi}=m,$$

从而

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{m-\operatorname{tg}\alpha}{1+m\operatorname{tg}\alpha}.$$

同样, 从第二个方程得

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\alpha-n}{1+n\operatorname{tg}\alpha}.$$

因此从这两个式子得

$$\frac{m-\operatorname{tg}\alpha}{1+m\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-n}{1+n\operatorname{tg}\alpha},$$

去分母, 化成

$$(m+n)(\operatorname{tg}^2\alpha-1)=2(mn-1)\operatorname{tg}\alpha.$$

2598. 从$\sec\theta=a$, $\operatorname{tg}\theta=b$中消去$\theta$.

解 将$\sec\theta=a$平方, 得$\sec^2\theta=a^2$.

又因为 $1+\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta$,

所以上式变成

$$1+\operatorname{tg}^2\theta=a^2.$$

由第二个式子$\operatorname{tg}\theta=b$得

$$\operatorname{tg}^2\theta=b^2.$$

从上面两式消去θ, 得

$$1+b^2=a^2.$$

2599. 从$\sin\alpha=m\sin\beta$和$\operatorname{tg}\alpha=n\operatorname{tg}\beta$中消去$\beta$. $(m>0)$

解 $\dfrac{\sin\alpha}{m}=\sin\beta$, $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{n}=\operatorname{tg}\beta$.

因此

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{n}=\frac{\frac{\sin\alpha}{m}}{\pm\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{m^2}}}.$$

因此　$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{n}=\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{m^2-\sin^2\alpha}}$.

因此　$n\cos\alpha=\pm\sqrt{m^2-\sin^2\alpha}$.

2600. 在三角形 ABC 中，从

$$\cos A+\cos B+\cos C=p,$$

$$\frac{2a\sin B\sin C}{a+b+c}=q$$

中消去 A、B、C.

解　$$\frac{2a\sin B\sin C}{a+b+c}=\frac{2\sin B\sin C}{1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}$$

$$=\frac{2\sin B\sin C}{1+\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin C}{\sin A}}$$

$$=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$=\cos A+\cos B+\cos C-1,$$

因此

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{2a\sin B\sin C}{a+b+c},$$

即　$$p=1+q.$$

2601. 在三角形 ABC 中，若

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=x,$$

$$\sin B\sin C=y,$$

试从这两个式子中消去 A、B、C.

解　$a\cos A+b\cos B+c\cos C$

$$=a\cos A+a\frac{\sin B}{\sin A}\cos B+a\frac{\sin C}{\sin A}\cos C$$

$$=a\cos A+\frac{a(\sin 2B+\sin 2C)}{2\sin A}$$

$$=a\cos A+\frac{2a\sin(B+C)\cos(B-C)}{2\sin A}$$

$$=a\cos A+a\cos(B-C)$$

$$=-a\cos(B+C)+a\cos(B-C)$$

$$=2a\sin B\sin C.$$

$$\therefore\quad x=2ay.$$

2602. 从 $\cos(\theta-\alpha)=a$ 和 $\sin(\theta-\beta)=b$ 中消去 θ.

解　$$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=a,\qquad ①$$

$$\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta=b.\qquad ②$$

①$\times\sin\beta$，②$\times\cos\alpha$，相加得

$$\sin\theta\sin\alpha\sin\beta+\sin\theta\cos\alpha\cos\beta=a\sin\beta+b\cos\alpha,$$

因此

$$\sin\theta\cos(\alpha-\beta)=a\sin\beta+b\cos\alpha.\qquad ③$$

又，①$\times\cos\beta$，②$\times\sin\alpha$，相减得

$$\cos\theta\cos\alpha\cos\beta+\cos\theta\sin\alpha\sin\beta=a\cos\beta-b\sin\alpha,$$

因此

$$\cos\theta\cos(\alpha-\beta)=a\cos\beta-b\sin\alpha.\qquad ④$$

将③和④分别平方，相加得

$$\cos^2(\alpha-\beta)=(a\sin\beta+b\cos\alpha)^2+(a\cos\beta-b\sin\alpha)^2,$$

因此

$$\cos^2(\alpha-\beta)=a^2+b^2-2ab\sin(\alpha-\beta).$$

2603. 从 $\cos\theta-\sin\theta=b$，$\cos3\theta+\sin3\theta=a$ 中消去 θ.

解　因为　$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，

$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$，

所以 $4\cos^3\theta-3\cos\theta+3\sin\theta-4\sin^3\theta=a$，

$$\therefore\quad 4(\cos^3\theta-\sin^3\theta)-3(\cos\theta-\sin\theta)=a.$$

将 $\cos\theta-\sin\theta=b$ 代入上式，得

$$4b(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)-3b=a,$$

$$\therefore\quad 4b(1+\sin\theta\cos\theta)-3b=a,$$

$$\therefore\quad 4b\sin\theta\cos\theta=a-b.$$

另一方面，再将 $\cos\theta-\sin\theta=b$ 平方，得

$$1-2\sin\theta\cos\theta=b^2.$$

将上式和前面的 $4b\sin\theta\cos\theta=a-b$ 组合起来，从中消去 θ，得

$$2b(1-b^2)=a-b,$$

$$\therefore\quad 2b^3=3b-a.$$

2604. 在三角形 ABC 中，

$$\frac{\sin^2A-m\sin^2B}{a^2-mb^2}=x,\quad \frac{\sin^2C}{c^2}=y,$$

试从这两个式子中消去 A、B、C.

解　设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{1}{k}$，

则　$$\frac{\sin^2A-m\sin^2B}{a^2-mb^2}=\frac{k^2a^2-mk^2b^2}{a^2-mb^2}=k^2=x.$$

另一方面　$$\frac{\sin^2C}{c^2}=k^2=y,$$

$$\therefore\quad x=y.$$

2605. 从 $x=\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{tg}\theta$，$y=\csc\theta-\sin\theta$ 中消去 θ。

解 从第一个式子得

$$x=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta},$$

从第二个式子得

$$y=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta},$$

因此 $\cos^3\theta=\frac{y}{x}$，$\cos^2\theta=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$。

从而 $$y=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}},$$

因此 $$\sin^2\theta=\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}},$$

因此 $$\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}}=1,$$

化简得 $$y^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+1=x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}.$$

2606. 从 $a\sec\theta-x\operatorname{tg}\theta=y$，$b\sec\theta+y\operatorname{tg}\theta=x$ 中消去 θ。

解 将第一个式子乘以 b，第二个式子乘以 a，然后相减得

$$(ay+bx)\operatorname{tg}\theta=ax-by,$$

因此 $$\operatorname{tg}\theta=\frac{ax-by}{ay+bx}.$$

又，将第一个式子乘以 y，第二个式子乘以 x，然后相加得

$$(ay+bx)\sec\theta=x^2+y^2,$$

因此 $$\sec\theta=\frac{x^2+y^2}{ay+bx}.$$

将 $\operatorname{tg}\theta$ 和 $\sec\theta$ 的值代入 $\sec^2\theta-\operatorname{tg}^2\theta=1$，得

$$\left(\frac{x^2+y^2}{ay+bx}\right)^2-\left(\frac{ax-by}{ay+bx}\right)^2=1,$$

因此

$$(x^2+y^2)^2-(ax-by)^2=(ay+bx)^2.$$

由此得 $$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

2607. 从 $m\sec\varphi=1+\operatorname{tg}\varphi$，$n\sec\varphi=1-\operatorname{tg}\varphi$ 中消去 φ。

解 将所给的两个式子平方，然后相加得

$$\begin{aligned}&m^2\sec^2\varphi+n^2\sec^2\varphi\\&=(1+\operatorname{tg}\varphi)^2+(1-\operatorname{tg}\varphi)^2\\&=2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=2\sec^2\varphi,\end{aligned}$$

因此 $$m^2+n^2=2.$$

2608. 在三角形 ABC 中，证明

$$b\cos B+c\cos C-a\cos(B-C)=0.$$

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，

则 $a=k\sin A$，$b=k\sin B$，$c=k\sin C$，

所以

$$\begin{aligned}&b\cos B+c\cos C\\&=k(\sin B\cos B+\sin C\cos C)\\&=\frac{1}{2}k(\sin 2B+\sin 2C)\\&=k\sin A\cos(B-C)=a\cos(B-C).\end{aligned}$$

$\therefore\ b\cos B+c\cos C-a\cos(B-C)=0.$

2609. 若 $$\frac{x\cos3\theta+y\sin3\theta}{\cos^3\theta}=\frac{y\cos3\theta-x\sin3\theta}{\sin^3\theta}=x^2+y^2,$$

证明 $x^2+y^2+x=2$。

解 根据所给的式子和等比定理，得

$$(x^2+y^2)^2=\frac{(x\cos3\theta+y\sin3\theta)^2+(y\cos3\theta-x\sin3\theta)^2}{\cos^6\theta+\sin^6\theta},$$

因此 $$(x^2+y^2)^2=\frac{x^2+y^2}{1-3\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

因此

$$1-3\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{x^2+y^2}.\qquad①$$

又，从所给的等式得

$$\begin{aligned}x^2+y^2=&[(x\cos3\theta+y\sin3\theta)\cos3\theta\\&-(y\cos3\theta-x\sin3\theta)\sin3\theta]\\&\div(\cos^3\theta\cos3\theta-\sin^3\theta\sin3\theta)\\=&\frac{x}{1-6\sin^2\theta\cos^2\theta}.\end{aligned}$$

由上式和①得

$$x^2+y^2+x=2.$$

2610. 在三角形 ABC 中，从

$$\frac{1}{3}(b^2-c^2)\operatorname{ctg}A=x,$$

$$\frac{1}{4}(c^2-a^2)\operatorname{ctg}B=y,$$

$$\frac{1}{5}(a^2-b^2)\operatorname{ctg}C=z$$

中消去 A、B、C。

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，

则 $3x=(b^2-c^2)\operatorname{ctg}A$

$$=k^2(\sin^2B-\sin^2C)\operatorname{ctg}A$$

$$=k^2\sin(B+C)\sin(B-C)\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$=k^2\sin(B-C)\frac{\sin(B+C)\cos A}{\sin A}$$

$$=-k^2\sin(B-C)\cos(B+C)$$

$$=-\frac{1}{2}k^2(\sin 2B-\sin 2C). \quad ①$$

同样

$$4y=(c^2-a^2)\operatorname{ctg}B$$

$$=-\frac{k^2}{2}(\sin 2C-\sin 2A), \quad ②$$

$$5z=(a^2-b^2)\operatorname{ctg}C$$

$$=-\frac{k^2}{2}(\sin 2A-\sin 2B). \quad ③$$

①+②+③，得

$$3x+4y+5z=0.$$

2611. 从 $\sin\alpha=2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$，

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\varphi=\cos\gamma\cos\theta$$

中消去 θ 和 φ。

解 设 $\sin\frac{\theta}{2}=x$，$\sin\frac{\varphi}{2}=y$，

则

$$2xy=\sin\alpha,$$

$$\cos\alpha=\cos\beta(1-2y^2)=\cos\gamma(1-2x^2).$$

因此

$$x=\frac{\sin\alpha}{2y},$$

$$1-2x^2=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},$$

$$1-2y^2=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

因此

$$1-\frac{\sin^2\alpha}{2y^2}=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},$$

$$2y^2=\frac{(1-\cos^2\alpha)\cos\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha},$$

$$1-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{(1-\cos^2\alpha)\cos\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha}.$$

因此

$$\cos^2\alpha(1+\cos\beta\cos\gamma)=\cos\alpha(\cos\beta+\cos\gamma).$$

$$\cos\alpha(1+\cos\beta\cos\gamma)=\cos\beta+\cos\gamma.$$

2612. 从 $x=a\sin\varphi\cos\theta$，$y=b\sin\varphi\sin\theta$，$z=c\cos\varphi$ 中消去 θ 和 φ。

解 从所给的三个式子得

$$\frac{x}{a}=\sin\varphi\cos\theta,\quad \frac{y}{b}=\sin\varphi\sin\theta,$$

$$\frac{z}{c}=\cos\varphi.$$

将它们分别平方，相加得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2613. 从 $\operatorname{tg}\theta\operatorname{ctg}\varphi=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha'$，$\cos^2\theta=\cos\alpha\sec\beta$，$\cos^2\varphi=\cos\alpha'\sec\beta$ 中消去 θ 和 φ。

解 从第一个式子得

$$\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha'=\operatorname{tg}^2\theta\operatorname{ctg}^2\varphi. \quad ①$$

又，从第二个式子得

$$\operatorname{tg}^2\theta=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-\cos\alpha\sec\beta}{\cos\alpha\sec\beta}$$

$$=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\alpha},$$

从第三个式子得

$$\operatorname{ctg}^2\varphi=\frac{\cos^2\varphi}{1-\cos^2\varphi}=\frac{\cos\alpha'\sec\beta}{1-\cos\alpha'\sec\beta}$$

$$=\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta-\cos\alpha'}.$$

因此①是

$$\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha'}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha'}$$

$$=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta-\cos\alpha'},$$

化去分母，并约去公因式 $\cos\alpha\cos\alpha'$，得

$$\sin^2\alpha\cos\alpha'\cos\beta-\sin^2\alpha'\cos\alpha\cos\beta$$

$$=\sin^2\alpha\cos^2\alpha'-\sin^2\alpha'\cos^2\alpha.$$

从而

$$(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha'\cos\beta-(1-\cos^2\alpha')\cos\alpha\cos\beta$$

$$=(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha'-(1-\cos^2\alpha')\cos^2\alpha.$$

因此

$$\cos\beta(\cos\alpha'-\cos\alpha)+\cos\alpha\cos\alpha'\cos\beta(\cos\alpha'-\cos\alpha)$$

$$=\cos^2\alpha'-\cos^2\alpha.$$

$$\cos\beta+\cos\alpha\cos\alpha'\cos\beta=\cos\alpha'+\cos\alpha,$$

即 $\cos\beta(1+\cos\alpha\cos\alpha')=\cos\alpha'+\cos\alpha$.

2614. 从 $a\sin\varphi=b\sin\theta$，$c\sin\theta=a\sin(\theta+\varphi)$，$\cos\theta-\cos\varphi=2m$ 中消去 θ 和 φ。

解 从第二个式子得

$$c\sin\theta=a\sin\theta\cos\varphi+a\cos\theta\sin\varphi,$$

因此 $\sin\theta(c-a\cos\varphi)=a\sin\varphi\cos\theta$.

将第一个式子 $a\sin\varphi=b\sin\theta$ 代入上式，得

$$b\cos\theta+a\cos\varphi=c.$$

从上式和第三个式子求 $\cos\theta$ 和 $\cos\varphi$，得

$$\cos\theta=\frac{c+2am}{a+b},\quad \cos\varphi=\frac{c-2bm}{a+b}.$$

将它们代入由第一个式子得到的

$$b^2\cos^2\theta-a^2\cos^2\varphi=b^2-a^2$$

中，得

$$b^2\left(\frac{c+2am}{a+b}\right)^2-a^2\left(\frac{c-2bm}{a+b}\right)^2=b^2-a^2,$$

因此 $4abcm=(b-a)(a+b+c)(a+b-c)$.

2615. 从 $\cos(\alpha+x)=m$, $\cos(\alpha-x)=n$ 中消去 x.

解 从所给的两个式子得

$$\cos(\alpha+x)+\cos(\alpha-x)=m+n,$$
$$\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)=mn.$$

因此
$$2\cos\alpha\cos x=m+n,$$
$$\cos^2x-\sin^2\alpha=mn.$$

由上得 $4\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+mn)=(m+n)^2$.

因此 $(m+n)^2-4mn\cos^2\alpha=4\cos^2\alpha\sin^2\alpha$.

$$(m+n)^2\sin^2\alpha+(m+n)^2\cos^2\alpha-4mn\cos^2\alpha=4\cos^2\alpha\sin^2\alpha.$$

因此

$$(m+n)^2\sin^2\alpha+[(m+n)^2-4mn]\cos^2\alpha=4\cos^2\alpha\sin^2\alpha.$$
$$(m+n)^2\sin^2\alpha+(m-n)^2\cos^2\alpha=4\cos^2\alpha\sin^2\alpha.$$
$$\frac{(m+n)^2}{4\cos^2\alpha}+\frac{(m-n)^2}{4\sin^2\alpha}=1.$$

2616. 从 $x=\operatorname{tg}^2\theta(a\operatorname{tg}\theta-x)$,
$$y=\sec^2\theta(y-a\sec\theta)$$
中消去 θ.

解 从第一个式子得

$$x=a\operatorname{tg}^3\theta-x\operatorname{tg}^2\theta,$$

因此
$$x\sec^2\theta=a\operatorname{tg}^3\theta.$$

从第二个式子得

$$y=y\sec^2\theta-a\sec^3\theta,$$
$$y\operatorname{tg}^2\theta=a\sec^3\theta.$$

将所得的两个式子相乘，得

$$xy\sec^2\theta\operatorname{tg}^2\theta=a^2\operatorname{tg}^3\theta\sec^3\theta,$$

因此
$$xy=a^2\operatorname{tg}\theta\sec\theta,$$

及 $(x\sec^2\theta)(a\sec^3\theta)=(a\operatorname{tg}^3\theta)(y\operatorname{tg}^2\theta)$,

即
$$ax\sec^5\theta=ay\operatorname{tg}^5\theta,$$
$$x^{\frac{1}{5}}\sec\theta=y^{\frac{1}{5}}\operatorname{tg}\theta.$$

由上得 $xy\cdot x^{\frac{1}{5}}\sec\theta=a^2\operatorname{tg}\theta\sec\theta\cdot y^{\frac{1}{5}}\operatorname{tg}\theta$,

$$x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{4}{5}}=a^2\operatorname{tg}^2\theta,$$

及 $xy\cdot y^{\frac{1}{5}}\operatorname{tg}\theta=x^{\frac{1}{5}}\sec\theta\cdot a^2\operatorname{tg}\theta\sec\theta$,

$$y^{\frac{6}{5}}x^{\frac{4}{5}}=a^2\sec^2\theta.$$

从而

$$y^{\frac{6}{5}}x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{4}{5}}=a^2\sec^2\theta-a^2\operatorname{tg}^2\theta=a^2.$$

2617. 若 $x=r\sin\frac{\theta-\alpha}{2}$, $y=r\sin\frac{\theta+\alpha}{2}$, 证明 $x^2+y^2-2xy\cos\alpha=r^2\sin^2\alpha$.

解 $x=r\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$,

$$y=r\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

由此得
$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{x+y}{2r\cos\frac{\alpha}{2}},$$

及
$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{y-x}{2r\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

将上面两式分别平方，相加，得

$$1=\frac{(x+y)^2}{4r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{(y-x)^2}{4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

因此

$$4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=(x+y)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+(y-x)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

因此

$$r^2\sin^2\alpha=x^2+y^2-2xy\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=x^2+y^2-2xy\cos\alpha,$$

即 $x^2+y^2-2xy\cos\alpha=r^2\sin^2\alpha$.

2618. 若 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1+2c^2}{1-c^2}\operatorname{tg}\theta$,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{1+c}{1-c}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right),$$

证明或 $\sin\theta=\frac{2}{c}$, 或 $\cos\theta=0$.

解 从第二个式子得

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}=\frac{1+c}{1-c}\times\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}},$$

因此 $$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{c+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+c\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}.$$

将上式代入由第一个式子得到的

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{1+2c^2}{1-c^2}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}},$$

得 $$\frac{\left(c+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1+c\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+c\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^2-\left(c+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1+2c^2}{1-c^2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}},$$

因此 $$\frac{c+(1+c^2)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+c\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{(1-c^2)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{(1+2c^2)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{(1-c^2)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}.$$

因此 $$c+(1+c^2)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+c\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}$$

$$=(1+2c^2)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

或 $$1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=0.$$

从前一个式子得

$$\sin\theta=\frac{2}{c},$$

从后一个式子得

$$\cos\theta=0.$$

2619. 从

$$(a-b)\sin(\theta+\varphi)=(a+b)\sin(\theta-\varphi),$$

$$a\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-b\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=c$$

中消去 θ。

解 从第一个式子得

$$\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin(\theta-\varphi)}=\frac{a+b}{a-b},$$

$$\frac{\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi)}{\sin(\theta+\varphi)-\sin(\theta-\varphi)}=\frac{a}{b},$$

即 $$\frac{\sin\theta\cos\varphi}{\cos\theta\sin\varphi}=\frac{a}{b}.$$

$$a\operatorname{tg}\varphi=b\operatorname{tg}\theta.$$

由此得 $$\frac{a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{b\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}},$$

因此

$$a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-b\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(a\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-b\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=c\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

$$a^2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=a\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(b+c\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right).$$

将由第二个式子得到的

$$a\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=b\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+c$$

代入上面的式子，得

$$a^2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\left(b+c\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\left(c+b\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right).$$

2620. 若 $a\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{tg}\beta$，$a^2x^2=a^2-b^2$，证明 $(1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha)=1-x^2$。

解 从所给的两个式子得

$$x^2=1-\frac{b^2}{a^2} \quad 和 \quad \frac{b}{a}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

从而 $$x^2=1-\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta},$$

因此 $$x^2\operatorname{tg}^2\beta=\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha.$$

将正切用正弦和余弦来表示，然后去分母得

$$x^2\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\beta\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\beta,$$

$$x^2\cos^2\alpha\sin^2\beta$$

$$=\sin^2\beta\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)(1-\sin^2\beta).$$

因此 $$x^2\cos^2\alpha\sin^2\beta=-1+\sin^2\beta+\cos^2\alpha,$$

$$x^4\cos^2\alpha\sin^2\beta=-x^2+x^2\sin^2\beta+x^2\cos^2\alpha,$$

$$1-x^2\sin^2\beta-x^2\cos^2\alpha+x^4\cos^2\alpha\sin^2\beta$$

$$=1-x^2.$$

因此

$$(1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha)=1-x^2.$$

2621. 设 α、β 是适合 $\frac{1}{a}\cos\theta\cos\gamma+\frac{1}{b}\sin\theta\sin\gamma=\frac{1}{c}$ 的 θ 的两个值，证明 $(b^2+c^2-a^2)\cos\alpha\cos\beta+(a^2+c^2-b^2)\sin\alpha\sin\beta=a^2+b^2-c^2$。

解 $\frac{1}{a}\cos\alpha\cos\gamma+\frac{1}{b}\sin\alpha\sin\gamma=\frac{1}{c}$,

$\frac{1}{a}\cos\beta\cos\gamma+\frac{1}{b}\sin\beta\sin\gamma=\frac{1}{c}$.

从这两个式子求 $\cos\gamma$ 和 $\sin\gamma$,得

$$\cos\gamma=\frac{a(\sin\beta-\sin\alpha)}{c(\cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha)}=\frac{2a\sin\frac{(\beta-\alpha)}{2}\cos\frac{(\beta+\alpha)}{2}}{c\sin(\beta-\alpha)}=\frac{a\cos\frac{(\beta+\alpha)}{2}}{c\cos\frac{(\beta-\alpha)}{2}},$$

$$\sin\gamma=\frac{-b(\cos\beta-\cos\alpha)}{c(\cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha)}=\frac{2b\cdot\sin\frac{(\beta+\alpha)}{2}\sin\frac{(\beta-\alpha)}{2}}{c\sin(\beta-\alpha)}=\frac{b\sin\frac{(\beta+\alpha)}{2}}{c\cos\frac{(\beta-\alpha)}{2}}.$$

将这两个式子分别平方,然后相加得

$$1=\frac{a^2\cos^2\frac{(\beta+\alpha)}{2}+b^2\sin^2\frac{(\beta+\alpha)}{2}}{c^2\cos^2\frac{(\beta-\alpha)}{2}},$$

$$c^2[1+\cos(\beta-\alpha)]=a^2[1+\cos(\beta+\alpha)]+b^2[1-\cos(\beta+\alpha)].$$

因此 $(b^2+c^2-a^2)\cos\alpha\cos\beta+(a^2+c^2-b^2)\sin\alpha\sin\beta=a^2+b^2-c^2$.

2622. 求使 θ 的同一值适合 $a\sec^2\theta-b\cos\theta=2a$ 和 $b\cos^2\theta-a\sec\theta=2b$ 这两个方程的条件.

解 从 $a\sec^2\theta-b\cos\theta=2a$,

得 $a-b\cos^3\theta=2a\cos^2\theta$,

$b\cos^3\theta=a-2a\cos^2\theta$.

又,从 $b\cos^2\theta-a\sec\theta=2b$,

得 $b\cos^3\theta=2b\cos\theta+a$,

$a-2a\cos^2\theta=2b\cos\theta+a$.

因此 $\cos\theta=0$ 或 $-a\cos\theta=b$.

又因为 $\cos\theta=0$ 是将 $\sec\theta$ 写成 $\frac{1}{\cos\theta}$ 后,去分母所产生的增根,不适合原方程,所以只有

$$-a\cos\theta=b,\quad \cos\theta=-\frac{b}{a}.$$

将它代入第一式(第二式也可以),得

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^2}{a}=2a,$$

$$a^4+b^4-2a^2b^2=0.$$

因此 $a^2=b^2$.

这就是所要求的条件.

2623. 从 $a=\sin\alpha\cos\beta\sin\theta+\cos\alpha\cos\theta$,

$b=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta$,

$c=\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$

三个式子中消去 α、β.

解 $a^2+b^2=(\sin\alpha\cos\beta\sin\theta+\cos\alpha\cos\theta)^2+(\sin\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta)^2$

$=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha$.

又 $\frac{c^2}{\sin^2\theta}=\sin^2\alpha\sin^2\beta$,

因此

$$a^2+b^2+\frac{c^2}{\sin^2\theta}=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

2624. 从 $b+c\cos\alpha=u\cos(\alpha-\theta)$, $b+c\cos\beta=u\cos(\beta-\theta)$, $\alpha-\beta=2\sigma$ 三个式子消去 α、β,证明 $u^2-2uc\cos\theta+c^2=b^2\sec^2\sigma$.

解 将第一、第二个式子两边相加,得

$$2b+c(\cos\alpha+\cos\beta)=u\cos(\alpha-\theta)+u\cos(\beta-\theta),$$

$$b+c\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=u\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\theta\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

因此

$$b\sec\frac{\alpha-\beta}{2}=u\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\theta\right)-c\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \quad ①$$

又,将第一、第二个式子两边相减,得

$$c(\cos\alpha-\cos\beta)=u\cos(\alpha-\theta)-u\cos(\beta-\theta),$$

$$c\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$=u\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\theta\right).$$

因此 $0=u\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\theta\right)-c\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$. ②

将①和②分别平方，相加得

$$b^2\sec^2\sigma$$
$$=u^2+c^2-2uc\left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\theta\right)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\theta\right)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$
$$=u^2+c^2-2uc\cos\theta.$$

2625. 从 $\frac{a\,\mathrm{tg}^2\theta-x}{\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha'}=\frac{2a\,\mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{tg}\,2\alpha+\mathrm{tg}\,2\alpha'}=a-x$ 消去 x，推得 $\mathrm{tg}(2\alpha+2\alpha')=\mathrm{tg}\,2\theta$.

解 从所给的等式得

$$a-x=\frac{2a\,\mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{tg}\,2\alpha+\mathrm{tg}\,2\alpha'}$$

和 $$a\,\mathrm{tg}^2\theta-x=\frac{2a\,\mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha'}{\mathrm{tg}\,2\alpha+\mathrm{tg}\,2\alpha'}.$$

将这两个式子两边相减，得

$$a(1-\mathrm{tg}^2\theta)=\frac{2a\,\mathrm{tg}\,\theta(1-\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha')}{\mathrm{tg}\,2\alpha+\mathrm{tg}\,2\alpha'},$$
$$\frac{\mathrm{tg}\,2\alpha+\mathrm{tg}\,2\alpha'}{1-\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha'}=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\theta}{1-\mathrm{tg}^2\theta}.$$

因此 $$\mathrm{tg}(2\alpha+2\alpha')=\mathrm{tg}\,2\theta.$$

2626. 从 $x=\sin\theta+\cos\theta\sin 2\theta$, $y=\cos\theta+\sin\theta\sin 2\theta$ 中消去 θ.

解 因为 $x=\sin\theta(1+2\cos^2\theta)$,
$y=\cos\theta(1+2\sin^2\theta)$,

所以 $$x+y=(\sin\theta+\cos\theta)^3,$$
$$x-y=(\sin\theta-\cos\theta)^3.$$

因此 $$(x+y)^{\frac{2}{3}}=(\sin\theta+\cos\theta)^2,$$
$$(x-y)^{\frac{2}{3}}=(\sin\theta-\cos\theta)^2,$$

即 $$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2.$$

2627. 从 $x\cos\theta+y\sin\theta=a$,
$x\cos(\theta+2\varphi)-y\sin(\theta+2\varphi)=a$,
$b\sin(\theta+\varphi)=a\sin\varphi$
三个式子中消去 θ 和 φ.

解 由前面两个式子相减得

$$x[\cos\theta-\cos(\theta+2\varphi)]+y[\sin\theta+\sin(\theta+2\varphi)]=0,$$
$$x\sin(\theta+\varphi)\sin\varphi+y\sin(\theta+\varphi)\cos\varphi=0.$$

因此 $$x\sin\varphi+y\cos\varphi=0.$$ ①

又，由相加得

$$x[\cos\theta+\cos(\theta+2\varphi)]+y[\sin\theta-\sin(\theta+2\varphi)]=2a,$$
$$x\cos(\theta+\varphi)\cos\varphi-y\cos(\theta+\varphi)\sin\varphi=a.$$

因此 $$x\cos\varphi-y\sin\varphi=\frac{a}{\cos(\theta+\varphi)}.$$ ②

将①和②平方，相加得

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{\cos^2(\theta+\varphi)}=\frac{a^2}{1-\sin^2(\theta+\varphi)}$$
$$=\frac{a^2}{1-\frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi},$$
$$(x^2+y^2)\left(1-\frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi\right)=a^2.$$

又，从①得

$$x^2\sin^2\varphi=y^2\cos^2\varphi=y^2(1-\sin^2\varphi),$$
$$\sin^2\varphi=\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$
$$(x^2+y^2)\left[1-\frac{a^2y^2}{b^2(x^2+y^2)}\right]=a^2.$$

因此 $$x^2+y^2=a^2+\frac{a^2y^2}{b^2}.$$

2628. 在三角形 ABC 中，
$x=a(\cos B\cos C+\cos A)$,
$y=b(\cos A\cos C+\cos B)$,
$z=c(\cos A\cos B+\cos C)$,
从这三个式子中消去 A、B、C.

解 $$x=a(\cos B\cos C+\cos A)$$
$$=a[\cos B\cos C-\cos(B+C)]$$
$$=a\sin B\sin C$$
$$=\frac{a}{\sin A}(\sin A\sin B\sin C).$$

同样 $$y=b(\cos A\cos C+\cos B)$$
$$=\frac{b}{\sin B}(\sin A\sin B\sin C),$$
$$z=c(\cos A\cos B+\cos C)$$
$$=\frac{c}{\sin C}(\sin A\sin B\sin C).$$

因为 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

所以 $$x=y=z.$$

2629. 在三角形 ABC 中，
$x^2=a^2(\cos^2B-\cos^2C)$,

$$y^2=b^2(\cos^2 C-\cos^2 A),$$
$$z^2=c^2(\cos^2 A-\cos^2 B),$$

从这三个式子中消去 A、B、C。

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，

则
$$x^2=k^2\sin^2 A[(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 C)]$$
$$=k^2\sin^2 A(\sin^2 C-\sin^2 B)$$
$$=k^2(\sin^2 A\sin^2 C-\sin^2 A\sin^2 B). \quad ①$$

同样
$$y^2=k^2(\sin^2 B\sin^2 A-\sin^2 B\sin^2 C), \quad ②$$
$$z^2=k^2(\sin^2 C\sin^2 B-\sin^2 C\sin^2 A). \quad ③$$

①+②+③，得 $x^2+y^2+z^2=0$。

2630. 从 $(a+b)\operatorname{tg}(\theta-\varphi)=(a-b)\times\operatorname{tg}(\theta+\varphi)$ 和 $a\cos 2\varphi+b\cos 2\theta=c$ 中消去 θ。

解 从第一个式子得
$$(a+b)\sin(\theta-\varphi)\cos(\theta+\varphi)$$
$$=(a-b)\sin(\theta+\varphi)\cos(\theta-\varphi),$$
$$b[\sin(\theta+\varphi)\cos(\theta-\varphi)+\sin(\theta-\varphi)\cos(\theta+\varphi)]$$
$$=a[\sin(\theta+\varphi)\cos(\theta-\varphi)-\sin(\theta-\varphi)\cos(\theta+\varphi)].$$

因此 $$b\sin 2\theta=a\sin 2\varphi.$$

又，从第二个式子得
$$b\cos 2\theta=c-a\cos 2\varphi.$$

将上面两式平方，相加得
$$b^2=c^2+a^2-2ac\cos 2\varphi.$$

2631. 证明：从 $\frac{x^2}{a^2}\cos\theta-\frac{y^2}{a^2}\cos\theta+\frac{z^2}{b^2}\times\cos\theta'$ 和 $\frac{x}{\sin(\theta+\theta')}=\frac{y}{\sin(\theta-\theta')}=\frac{z}{\sin 2\theta}$ 中消去 x、y、z，得到 $\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\frac{b^2}{a^2}$。

解 从第二个式子得
$$x=\frac{z\sin(\theta+\theta')}{\sin 2\theta},\quad y=\frac{z\sin(\theta-\theta')}{\sin 2\theta}.$$

将这两个式子分别平方，代入第一个式子得
$$\frac{z^2\sin^2(\theta+\theta')}{a^2\sin^2 2\theta}\cos\theta$$
$$=\frac{z^2\sin^2(\theta-\theta')}{a^2\sin^2 2\theta}\cos\theta+\frac{z^2}{b^2}\cos\theta',$$
$$\frac{\sin^2(\theta+\theta')\cos\theta-\sin^2(\theta-\theta')\cos\theta}{a^2\sin^2 2\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta'}{b^2}.$$

因此
$$\{[(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')^2-(\sin\theta\cos\theta'-\cos\theta\sin\theta')^2]\div(4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta)\}\times\cos\theta$$
$$=\frac{\cos\theta'}{b^2},$$
$$\frac{4\sin\theta\cos^2\theta\cdot\sin\theta'\cos\theta'}{4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{\cos\theta'}{b^2},$$

因此 $$\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}=\frac{a^2}{b^2}.$$

2632. 若 $A+B+C=\pi$，从 $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}=l$，$\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}=m$，$\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}=n$ 中消去 A、B、C。

解
$$l=\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}$$
$$=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A}\cos^2\frac{A}{2}$$
$$=\frac{2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cos^2\frac{A}{2}$$
$$=\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}$$
$$=\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(\cos B-\cos C). \quad ①$$

同样
$$m=\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(\cos C-\cos A), \quad ②$$
$$n=\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(\cos A-\cos B). \quad ③$$

从①、②、③得
$$l+m+n=0.$$

2633. 在三角形 ABC 中，$(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=p$，$(c-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=q$，$(b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=r$，从这三个式子中消去 A、B、C。

解 设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，

则

$$(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=k(\sin A-\sin B)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$

$$=k\left(2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$=2k\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2},$$

$$\therefore\quad p=2k\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$=k(\cos B-\cos A).\qquad ①$$

同样　$q=k(\cos A-\cos C)$,　②

$r=k(\cos C-\cos B)$.　③

①+②+③,得 $p+q+r=0$.

2634. 从 $x\sin\theta-y\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$ 中消去 θ.

解　从第一个式子得

$$(x\sin\theta-y\cos\theta)^2=x^2+y^2,$$

$$x^2+y^2-(x\sin\theta-y\cos\theta)^2=0,$$

$$x^2\cos^2\theta+2xy\sin\theta\cos\theta+y^2\sin^2\theta=0,$$

$$(x\cos\theta+y\sin\theta)^2=0,$$

因此　$x\cos\theta+y\sin\theta=0$,

$$\operatorname{tg}\theta=-\frac{x}{y}.$$

由此得　$\cos^2\theta=\frac{y^2}{x^2+y^2}$,

$$\sin^2\theta=\frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

将它们代入所给的第二个式子,得

$$\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)=\frac{1}{x^2+y^2},$$

因此　$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$.

2635. 证明: 从 $a\sin^2\theta+a'\cos^2\theta=b$, $a'\sin^2\theta'+a\cos^2\theta'=b'$, $a\operatorname{tg}\theta=a'\operatorname{tg}\theta'$ 三个式子中消去 θ 和 θ', 得到 $\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}$.

解　从第一个式子得

$$a\sin^2\theta+a'(1-\sin^2\theta)=b,$$

$$\sin^2\theta=\frac{b-a'}{a-a'}.$$

从而　$\cos^2\theta=\frac{a-b}{a-a'}$,

于是　$\operatorname{tg}^2\theta=\frac{b-a'}{a-b}$.

同样,从第二个式子得

$$\operatorname{tg}^2\theta'=\frac{b'-a}{a'-b'}.$$

将这些代入由第三个式子得到的

$$a^2\operatorname{tg}^2\theta=a'^2\operatorname{tg}^2\theta'$$

中,得　$a^2\cdot\frac{b-a'}{a-b}=a'^2\cdot\frac{b'-a}{a'-b'}$,

$$a^2(b-a')(b'-a')=a'^2(b'-a)(b-a),$$

$$a^2[bb'-a'(b+b')]=a'^2[bb'-a(b+b')],$$

$$bb'(a^2-a'^2)=aa'(a-a')(b+b'),$$

$$bb'(a+a')=aa'(b+b'),$$

两边除以 $aa'bb'$, 得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}.$$

2636. 从 $x^2+y^2=a^2+b^2$, $xy=ab\sin\alpha$, $\frac{\cos^2\theta}{x^2}+\frac{\sin^2\theta}{y^2}=\frac{1}{a^2}$,证明 $\pm\operatorname{ctg}2\theta=\operatorname{ctg}2\alpha+\frac{a^2}{b^2}\csc 2\alpha$.

解　$y^2\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta=\frac{x^2y^2}{a^2}$

$$=\frac{a^2b^2\sin^2\alpha}{a^2}=b^2\sin^2\alpha,$$

$$\frac{y^2}{2}(1+\cos 2\theta)+\frac{x^2}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$=b^2\sin^2\alpha,$$

$$x^2+y^2+(y^2-x^2)\cos 2\theta=2b^2\sin^2\alpha,$$

$$a^2+b^2+[(y^2+x^2)^2-4y^2x^2]^{\frac{1}{2}}\cos 2\theta$$

$$=2b^2\sin^2\alpha,$$

$$a^2+b^2+[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\sin^2\alpha]^{\frac{1}{2}}\cos 2\theta$$

$$=2b^2\sin^2\alpha,$$

$$\cos 2\theta=\frac{2b^2\sin^2\alpha-b^2-a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\sin^2\alpha}},$$

$$\sin^2 2\theta=[-4a^2b^2\sin^2\alpha$$

$$+4b^2\sin^2\alpha(b^2+a^2)-4b^4\sin^4\alpha]$$

$$\div[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\sin^2\alpha]$$

$$=\frac{4b^4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\sin^2\alpha},$$

$$\pm\sin 2\theta=\frac{2b^2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\sin^2\alpha}}.$$

相除得

$$\pm\operatorname{ctg}2\theta=\frac{2b^2\sin^2\alpha-b^2-a^2}{2b^2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=-\frac{a^2+b^2\cos 2\alpha}{b^2\sin 2\alpha}$$
$$=-\operatorname{ctg}2\alpha-\frac{a^2}{b^2}\csc 2\alpha,$$

这又可以记成

$$\pm\operatorname{ctg}2\theta=\operatorname{ctg}2\alpha+\frac{a^2}{b^2}\csc 2\alpha.$$

2637. 从 $x\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=y\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ 和 $(x-y)\cos 2\alpha+(x+y)\cos 2\beta=z$ 中消去 α。

解 从第一个式子得

$$x\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$$
$$=y\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta),$$
$$x(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)=y(\sin 2\alpha+\sin 2\beta).$$
$$(x-y)\sin 2\alpha=(x+y)\sin 2\beta.$$

因此 $$\sin 2\alpha=\frac{(x+y)\sin 2\beta}{x-y},$$
$$\cos 2\alpha=\frac{z-(x+y)\cos 2\beta}{x-y}.$$

将上面两式分别平方，然后相加得

$$1=\frac{(x+y)^2\sin^2 2\beta}{(x-y)^2}+\frac{[z-(x+y)\cos 2\beta]^2}{(x-y)^2},$$

因此

$$(x-y)^2=(x+y)^2\sin^2 2\beta+[z-(x+y)\cos 2\beta]^2$$
$$=(x+y)^2+z^2-2z(x+y)\cos 2\beta.$$

因此 $$z^2+4xy=2z(x+y)\cos 2\beta.$$

2638. 从 $a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+b\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{c}{\sqrt{2}}$ 及 $a\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+b\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=c\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 中消去 θ。其中 $\sin\theta\pm\cos\theta\neq 0$。

解 将所给的两个方程两边相加，得

$$2a(\sin\theta+\cos\theta)=c(1+\sin 2\theta+\cos 2\theta)$$
$$=2c\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta),$$
$$a=c\cos\theta. \quad ①$$

又，两边相减得

$$2b(\sin\theta-\cos\theta)=c(1-\sin 2\theta-\cos 2\theta)$$
$$=2c\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta),$$
$$b=c\sin\theta. \quad ②$$

将①和②分别平方，相加得

$$a^2+b^2=c^2.$$

2639. 从 $c\sin\theta=a\sin(\theta+\varphi)$，$a\sin\varphi=b\sin\theta$，$\cos\theta-\cos\varphi=2m$ 三个方程中消去 θ 和 φ。

解 从第一个式子得

$$c\sin\theta=a\sin\theta\cos\varphi+a\cos\theta\sin\varphi.$$

将 $\sin\varphi=\frac{b}{a}\sin\theta$ 和 $\cos\varphi=\cos\theta-2m$

代入上面的式子，得

$$c\sin\theta=a(\cos\theta-2m)\sin\theta+a\cos\theta\left(\frac{b}{a}\sin\theta\right),$$
$$c=a(\cos\theta-2m)+b\cos\theta,$$
$$\cos\theta=\frac{c+2am}{a+b},$$

从而 $$\cos\varphi=\frac{c+2am}{a+b}-2m=\frac{c-2bm}{a+b}.$$

又，从第二个式子得

$$a^2(1-\cos^2\varphi)=b^2(1-\cos^2\theta),$$
$$a^2-b^2=a^2\cos^2\varphi-b^2\cos^2\theta.$$

将 $\cos^2\varphi$ 和 $\cos^2\theta$ 的值代入上式，得

$$a^2-b^2=a^2\left(\frac{c-2bm}{a+b}\right)^2-b^2\left(\frac{c+2am}{a+b}\right)^2$$
$$=\frac{(a-b)c^2-4abcm}{a+b}.$$

2640. 从 $a^2\cos^2\theta-b^2\cos^2\varphi=c^2$，$a\cos\theta+b\cos\varphi=r$，$a\operatorname{tg}\theta=b\operatorname{tg}\varphi$ 三个式子中消去 θ 和 φ。

解 第一式除以第二式，得

$$a\cos\theta-b\cos\varphi=\frac{c^2}{r},$$

因此 $$\cos\theta=\frac{1}{2a}\left(r+\frac{c^2}{r}\right),$$
$$\cos\varphi=\frac{1}{2b}\left(r-\frac{c^2}{r}\right).$$

第三式平方得

$$a^2\operatorname{tg}^2\theta=b^2\operatorname{tg}^2\varphi,$$

即 $$a^2(\sec^2\theta-1)=b^2(\sec^2\varphi-1).$$

将 $\cos\theta$ 和 $\cos\varphi$ 的值代入上式，得

$$a^2\left[\frac{4r^2a^2}{(r^2+c^2)^2}-1\right]=b^2\left[\frac{4r^2b^2}{(r^2-c^2)^2}-1\right].$$

2641. 从 $$\frac{a}{b}=\frac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin(\varphi+\theta)}, \quad ①$$
$$\frac{c}{x}=\cos(\varphi-\theta), \quad ②$$

$$\frac{b}{x}=\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} \qquad ③$$

三个式子中消去 θ 和 φ。

解　从①得

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\sin\theta\cos\varphi}=\frac{x\cos\theta}{b\cos\varphi}. \quad (根据③)$$

从②得

$$\frac{c}{x}=\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta$$

$$=\frac{b}{x}\cdot\frac{b+a}{b-a}\cos^2\varphi+\frac{b}{x}\sin^2\varphi.$$

因此　$\cos^2\varphi=\dfrac{(c-b)(b-a)}{2ab}$，

$$\cos^2\theta=\frac{(c-b)(a+b)^2}{2ab(b-a)}\cdot\frac{b^2}{x^2}.$$

又，由③得

$$\frac{b^2}{x^2}(1-\cos^2\varphi)=1-\cos^2\theta,$$

$$\frac{b^2}{x^2}-1=\frac{b^2}{x^2}\left[\frac{(c-b)(b-a)}{2ab}-\frac{(c-b)(a+b)^2}{2ab(b-a)}\right].$$

$$x^2-b^2=\frac{b^2(c-b)\cdot 4ab}{2ab(b-a)}=\frac{2b^2(c-b)}{b-a}.$$

因此　$x^2(b-a)=b^2(2c-a-b)$.

2642. 从 $n\sin\theta-m\cos\theta=2m\sin\varphi$，

$$n\sin 2\theta-m\cos 2\varphi=n$$

两个式子中消去 φ。

解　$\sin\varphi=\dfrac{n\sin\theta-m\cos\theta}{2m}$，

$$n\sin 2\theta=m(1-2\sin^2\varphi)+n.$$

$$n\sin 2\theta+2m\left(\frac{n\sin\theta-m\cos\theta}{2m}\right)^2=m+n.$$

$$2mn\sin 2\theta+(n\sin\theta-m\cos\theta)^2=2m(m+n).$$

因此　$(n\sin\theta+m\cos\theta)^2=2m(m+n)$.

2643. 从 $m\sin 2\theta=n\sin\theta$ 和 $p\cos 2\theta=q\cos\theta$ 中消去 θ。

解　由第一式 $2m\sin\theta\cos\theta=n\sin\theta$，

得　$\cos\theta=\dfrac{n}{2m}$.

将上式代入第二式，得

$$p\left[2\left(\frac{n}{2m}\right)^2-1\right]=\frac{qn}{2m},$$

因此　$p(n^2-2m^2)=qmn$.

2644. 证明适合 $\sin\theta+\sin\varphi=p$，$\cos\theta+\cos\varphi=q$ 的所有的 θ 值是 $n\pi-\alpha+(-1)^n\beta$，其中 α 和 β 是由 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{q}{p}$，

$$\sin\beta=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}$$

确定的角。

解　$\sin\varphi=p-\sin\theta$，$\cos\varphi=q-\cos\theta$。

将这两个式子分别平方，相加得

$$1=p^2+q^2-2p\sin\theta-2q\cos\theta+1,$$

$$2p\sin\theta+2q\cos\theta=p^2+q^2.$$

设 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{q}{p}$，则

$$\sin\alpha=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},\quad \cos\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

$$2\sqrt{p^2+q^2}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=p^2+q^2.$$

$$\sin(\theta+\alpha)=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}=\sin\beta.$$

因此　$\theta+\alpha=n\pi+(-1)^n\beta$，

$$\theta=n\pi-\alpha+(-1)^n\beta.$$

2645. 在三角形 ABC 中，$\dfrac{2a\sin C\sin B}{a+b+c}=x^2$，$\cos A+\cos B+\cos C=y^2+1$，从这两个式子中消去 A、B、C。

解

$$x^2=\frac{2a\sin B\sin C}{a+b+c}=\frac{2\sin B\sin C}{1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}}$$

$$=\frac{2\sin B\sin C}{1+\dfrac{\sin B}{\sin A}+\dfrac{\sin C}{\sin A}}$$

$$=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \qquad ①$$

另一方面

$$\cos A+\cos B+\cos C$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1=y^2+1, \quad ②$$

所以，从①和②得

$$x^2=y^2, \qquad \therefore\ x=\pm y.$$

2646. 从 $\sin^2\theta-p\sin\theta+m=0$ 和 $\cos^2\theta$

$-q\cos\theta+n=0$ 中消去 θ.

解 将所给的两个式子两边相加，得

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta-p\sin\theta-q\cos\theta+m+n=0,$$

$$1+m+n=q\cos\theta+p\sin\theta. \qquad ①$$

从第二式减去第一式，得

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta+p\sin\theta-q\cos\theta+n-m=0,$$

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta+n-m=q\cos\theta-p\sin\theta. \qquad ②$$

①×②，得

$$(1+m+n)(\cos^2\theta-\sin^2\theta+n-m)$$
$$=q^2\cos^2\theta-p^2\sin^2\theta,$$
$$(1+m+n)(1-2\sin^2\theta+n-m)$$
$$=q^2(1-\sin^2\theta)-p^2\sin^2\theta,$$
$$\sin^2\theta=\frac{q^2-(1+m+n)(1-m+n)}{p^2+q^2-2(1+m+n)}. \qquad ③$$

从第一式得

$$(\sin^2\theta+m)^2=p^2\sin^2\theta.$$

将③代入上式，去分母得

$$[mp^2+(m+1)q^2-(1+m+n)^2]^2$$
$$=p^2[q^2-(1+m+n)(1-m+n)]$$
$$\times[p^2+q^2-2(1+m+n)].$$

2647. 从 $a\operatorname{tg}\theta+b\sec\theta=h$ 和 $a\operatorname{ctg}\theta+b\cos\theta=k$ 中消去 θ.

解 从第一个式子得

$$a\sin\theta+b=h\cos\theta,$$
$$\cos\theta=\frac{a}{h}\sin\theta+\frac{b}{h},$$

或
$$\sin\theta=\frac{h}{a}\cos\theta-\frac{b}{a}.$$

从第二个式子得

$$\cos\theta(a+b\sin\theta)=k\sin\theta,$$
$$\left(\frac{a}{h}\sin\theta+\frac{b}{h}\right)(a+b\sin\theta)=k\sin\theta,$$
$$\sin^2\theta+\frac{a^2+b^2-hk}{ab}\sin\theta+1=0. \qquad ①$$

又
$$\cos\theta\left[a+b\left(\frac{h}{a}\cos\theta-\frac{b}{a}\right)\right]$$
$$=k\left(\frac{h}{a}\cos\theta-\frac{b}{a}\right),$$
$$\cos^2\theta+\frac{a^2-b^2-hk}{bh}\cos\theta+\frac{k}{h}=0. \qquad ②$$

设
$$\frac{hk-a^2-b^2}{ab}=p,$$
$$\frac{hk-a^2+b^2}{bh}=q, \quad \frac{k}{h}=n,$$

则①变成

$$\sin^2\theta-p\sin\theta+1=0,$$

②变成 $\quad \cos^2\theta-q\cos\theta+n=0.$

于是本题变成和上题同样的问题，从而可以和上题一样消去 θ.

2648. 从

$$a\cos^2\theta+b\sin^2\theta=m\cos^2\varphi, \qquad ①$$
$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=n\sin^2\varphi, \qquad ②$$
$$m\operatorname{tg}^2\theta-n\operatorname{tg}^2\varphi=0 \qquad ③$$

中消去 θ、φ. 并证明 $\operatorname{tg}^2\theta=1$.

解 将①乘以 n，②乘以 m，相加，得

$$a(n\cos^2\theta+m\sin^2\theta)+b(n\sin^2\theta$$
$$+m\cos^2\theta)=mn.$$

用 $\cos^2\theta$ 除上式，得

$$a(n+m\operatorname{tg}^2\theta)+b(n\operatorname{tg}^2\theta+m)$$
$$=mn\sec^2\theta=mn(1+\operatorname{tg}^2\theta),$$
$$(am+bn-mn)\operatorname{tg}^2\theta=mn-an-bm. \qquad ④$$

又，①+②，得

$$a+b=m\cos^2\varphi+n\sin^2\varphi,$$

用 $\cos^2\varphi$ 除上式，得

$$(a+b)\sec^2\varphi=m+n\operatorname{tg}^2\varphi,$$
$$(a+b)+(a+b)\operatorname{tg}^2\varphi=m+n\operatorname{tg}^2\varphi,$$

从而 $\quad (a+b-n)\operatorname{tg}^2\varphi=m-a-b. \qquad ⑤$

将从④、⑤所得的 $\operatorname{tg}^2\theta$、$\operatorname{tg}^2\varphi$ 的值代入③，得

$$m(mn-an-bm)(a+b-n)$$
$$=n(am+bn-mn)(m-a-b),$$

化简得

$$mn(m-n)(a+b)-amn(m-n)$$
$$-b(a+b)(m^2-n^2)+bmn(m-n)=0,$$
$$mn(a+b)-amn-b(a+b)(m+n)$$
$$+bmn=0,$$
$$2mn=(a+b)(m+n).$$

从 $(a+b)(m+n)=2mn$ 可得

$$am+bn-mn=mn-an-bm,$$

将上式代入④即得

$$\operatorname{tg}^2\theta=1.$$

2649. 从 $x=a\cos\theta(2\cos2\theta-1)$

和 $\qquad y=b\sin\theta(4\cos^2\theta-1)$

中消去 θ.

解 从所给的第一个式子得

$$x=a\cos\theta(1-4\sin^2\theta),$$
$$\frac{x^2}{a^2}=\cos^2\theta(1-4\sin^2\theta)^2.$$

从所给的第二个式子得

$$\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta(4\cos^2\theta-1)^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\theta(1-4\sin^2\theta)^2$$
$$+\sin^2\theta(4\cos^2\theta-1)^2$$
$$=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-2\times 8\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$+16\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$=1-16\sin^2\theta\cos^2\theta+16\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=1.$$

2650. 从 $\cos\theta+\cos\varphi=a$, $\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}\varphi=b$, $\csc\theta+\csc\varphi=c$ 中消去 θ 和 φ。

解 从第二、第三个式子得

$$b^2-c^2=(\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}\varphi)^2-(\csc\theta+\csc\varphi)^2$$
$$=-2+2(\operatorname{ctg}\theta\operatorname{ctg}\varphi-\csc\theta\csc\varphi)$$
$$=2\cdot\frac{\cos(\theta+\varphi)-2}{\sin\theta\sin\varphi}.$$

从第二个式子得

$$b=\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin\theta\sin\varphi},$$

因此　$4b^2+(b^2-c^2)^2$

$$=\frac{8}{\sin^2\theta\sin^2\varphi}[1-\cos(\theta+\varphi)]$$
$$=\frac{16}{\sin^2\theta\sin^2\varphi}\cdot\sin^2\frac{\theta+\varphi}{2}.$$

下面，从第一个式子得

$$2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=a,$$

$$a[4b^2+(b^2-c^2)^2]$$
$$=\frac{16}{\sin^2\theta\sin^2\varphi}\sin(\theta+\varphi)$$
$$\times\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$
$$=\frac{8\sin(\theta+\varphi)(\sin\theta+\sin\varphi)}{\sin^2\theta\sin^2\varphi}.$$

又　$8bc=8\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\varphi}\right)$

$$=\frac{8\sin(\theta+\varphi)(\sin\theta+\sin\varphi)}{\sin^2\theta\sin^2\varphi},$$

因此　$a[4b^2+(b^2-c^2)^2]=8bc.$

2651. 从

$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi=1$$

和　$a\operatorname{tg}\theta=b\operatorname{tg}\varphi$

中消去 θ、φ。

解　$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=1,$ ①

$a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi=1,$ ②

$a\operatorname{tg}\theta=b\operatorname{tg}\varphi.$ ③

用 $\cos^2\theta$ 除①，得

$$a\operatorname{tg}^2\theta+b=\sec^2\theta=1+\operatorname{tg}^2\theta,$$

$(1-a)\operatorname{tg}^2\theta=b-1.$ ④

同样，从②得

$(1-b)\operatorname{tg}^2\varphi=a-1.$ ⑤

从④得　$a^2\operatorname{tg}^2\theta=a^2\cdot\frac{b-1}{1-a},$

从⑤得　$b^2\operatorname{tg}^2\varphi=b^2\cdot\frac{a-1}{1-b},$

从③得　$a^2\cdot\frac{b-1}{1-a}=b^2\cdot\frac{a-1}{1-b}.$

$$a^2(1-b)^2=b^2(1-a)^2.$$
$$a^2-b^2=2a^2b-2ab^2.$$

用 $a-b$ 除上式，得

$$a+b=2ab.$$

2652. 从

$x\cos\theta+y\sin\theta=2a\sqrt{3},$ ①

$x\cos(\theta+\varphi)+y\sin(\theta+\varphi)=4a,$ ②

$x\cos(\theta-\varphi)+y\sin(\theta-\varphi)=2a$ ③

中消去 θ、φ。

解 将②、③两边相加，得

$$x[\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)]$$
$$+y[\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi)]=6a,$$

即　$x(2\cos\theta\cos\varphi)+y(2\sin\theta\cos\varphi)=6a,$

$$(x\cos\theta+y\sin\theta)\cos\varphi=3a.$$

将①代入上式得

$$2a\sqrt{3}\cos\varphi=3a,$$
$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\sin^2\varphi=\frac{1}{4}.$ ④

又，将②、③两边相乘，得

$$x^2\cos(\theta+\varphi)\cos(\theta-\varphi)$$
$$+xy[\sin(\theta+\varphi)\cos(\theta-\varphi)$$
$$+\cos(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)]$$
$$+y^2\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)=8a^2,$$

$x^2(\cos 2\theta+\cos 2\varphi)+2xy\sin 2\theta$

$+y^2(\cos 2\varphi-\cos 2\theta)=16a^2.$ ⑤

又，将①平方得

$$x^2\cos^2\theta+2xy\cos\theta\sin\theta+y^2\sin^2\theta=12a^2.$$

其中　$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2},$

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2},$$

$$x^2(1+\cos 2\theta)+2xy\sin 2\theta+y^2(1-\cos 2\theta)=24a^2,$$

即 $$(x^2+y^2)+x^2\cos 2\theta+2xy\sin 2\theta-y^2\cos 2\theta=24a^2.$$

根据上式和⑤得

$$(x^2+y^2)-x^2\cos 2\varphi-y^2\cos 2\varphi=8a^2,$$

即 $$(x^2+y^2)-(x^2+y^2)\cos 2\varphi=8a^2,$$

$$(x^2+y^2)(1-\cos 2\varphi)=8a^2,$$

$$2(x^2+y^2)\sin^2\varphi=8a^2.$$

又，从④得 $\sin^2\varphi=\frac{1}{4}$,

因此 $$x^2+y^2=16a^2.$$

2653. 从 $a\cos\theta-b\sin\theta=c$, ①

$$2ab\cos 2\theta+(a^2-b^2)\sin 2\theta=2c^2 \quad ②$$

中消去 θ. 设 $abc\neq 0$.

解 将①的两边平方，得

$$a^2\cos^2\theta-2ab\sin\theta\cos\theta+b^2\sin^2\theta=c^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta),$$

$$(a^2-c^2)\cos^2\theta-2ab\sin\theta\cos\theta+(b^2-c^2)\sin^2\theta=0. \quad ③$$

又，从②得

$$2ab(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta=2c^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta),$$

$$(ab-c^2)\cos^2\theta+(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta-(ab+c^2)\sin^2\theta=0. \quad ④$$

从③、④求 $\cos^2\theta:\sin\theta\cos\theta:\sin^2\theta$，得到下面的结果:

$$\frac{\cos^2\theta}{2ab(ab+c^2)-(a^2-b^2)(b^2-c^2)}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2ab(b^2-c^2)+(ab+c^2)(a^2-b^2)}=\frac{\sin^2\theta}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)+2ab(ab-c^2)},$$

即 $$\frac{\cos^2\theta}{b^2(a^2+b^2)+c^2(2ab+a^2-b^2)}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{ab(a^2+b^2)-c^2(2ab-a^2+b^2)}=\frac{\sin^2\theta}{a^2(a^2+b^2)-c^2(2ab+a^2-b^2)},$$

$$[b^2(a^2+b^2)+c^2(2ab+a^2-b^2)]\times[a^2(a^2+b^2)-c^2(2ab+a^2-b^2)]=[ab(a^2+b^2)-c^2(2ab-a^2+b^2)]^2.$$

因此 $$\begin{aligned}&a^2b^2(a^2+b^2)^2+a^2c^2(a^2+b^2)(2ab+a^2-b^2)\\&-b^2c^2(a^2+b^2)(2ab+a^2-b^2)-c^4(2ab+a^2-b^2)^2\\&=a^2b^2(a^2+b^2)^2-2abc^2(a^2+b^2)(2ab-a^2+b^2)\\&+c^4(2ab-a^2+b^2)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a^2c^2(a^2+b^2)(2ab+a^2-b^2)-b^2c^2(a^2+b^2)(2ab+a^2-b^2)\\&+2abc^2(a^2+b^2)(2ab-a^2+b^2)\\&=c^4(2ab+a^2-b^2)^2+c^4(2ab-a^2+b^2)^2,\end{aligned}$$

因此 $$c^2(a^2+b^2)^3=2c^4(a^2+b^2)^2.$$

又因为 $abc\neq 0$，所以 $c^2(a^2+b^2)^2\neq 0$. 因此用 $c^2(a^2+b^2)^2$ 除上式的两边，得

$$a^2+b^2=2c^2.$$

2654. 若 θ 是小于 $\frac{\pi}{2}$ 的正角，证明 $\frac{\theta}{\sin\theta}$ 随着 θ 的增大而增大.

解 设 $0<\theta<\theta+h<\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\theta+h}{\sin(\theta+h)}-\frac{\theta}{\sin\theta}=\frac{(\theta+h)\sin\theta-\theta\sin(\theta+h)}{\sin(\theta+h)\sin\theta},$$

并且 $$\begin{aligned}&(\theta+h)\sin\theta-\theta\sin(\theta+h)\\&=\theta\sin\theta(1-\cos h)+h\sin\theta-\theta\cos\theta\sin h\\&=\theta\sin\theta(1-\cos h)+\sin\theta\sin h\left(\frac{h}{\sin h}-\frac{\theta}{\operatorname{tg}\theta}\right).\end{aligned}$$

又，因为 $\cos h<1$,

所以 $$1-\cos h>0.$$

因为 $$\frac{h}{\sin h}>1,\quad \frac{\theta}{\operatorname{tg}\theta}<1,$$

所以 $$\frac{h}{\sin h}-\frac{\theta}{\operatorname{tg}\theta}>0.$$

因此 $$(\theta+h)\sin\theta-\theta\sin(\theta+h)>0.$$

从而 $$\frac{\theta+h}{\sin(\theta+h)}-\frac{\theta}{\sin\theta}>0,$$

$$\frac{\theta+h}{\sin(\theta+h)}>\frac{\theta}{\sin\theta}.$$

这就是说，$\frac{\theta}{\sin\theta}$ 随着 θ 的增大而增大.

2. 反三角函数

2655. 什么是反三角函数?

解　用 $y=\sin x$ 的反函数，即 $x=\sin y$ 定义的函数 y 叫做反正弦函数，记作 $y=\sin^{-1}x$ 或 $\arcsin x$ $(|x|\leq 1)$.

同样，$y=\cos x$，$y=\operatorname{tg}x$ 等的反函数分别记作

$$y=\cos^{-1}x$$

或 $$y=\arccos x,\quad (|x|\leq 1)$$

$$y=\operatorname{tg}^{-1}x$$

或 $$y=\operatorname{arctg}x,\quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$y=\operatorname{ctg}^{-1}x$$

或 $$y=\operatorname{arcctg}x,\quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$y=\sec^{-1}x$$

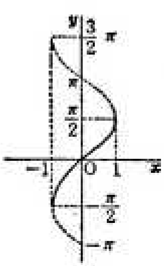
或 $$y=\operatorname{arcsec}x,\quad (|x|\geq 1)$$

$$y=\csc^{-1}x$$

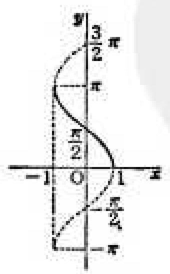
或 $$y=\operatorname{arccsc}x.\quad (|x|\geq 1)$$

以上这些函数统称为反三角函数.

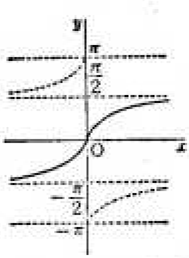
反三角函数的图象　反三角函数的图象和三角函数的图象由于存在着互为反函数的关系，所以关于 $\angle xOy$ 的平分线 $y=x$ 对称.



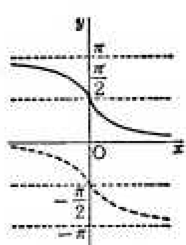
$y=\arcsin x$



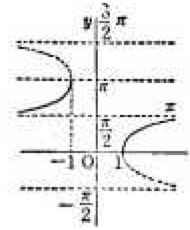
$y=\arccos x$



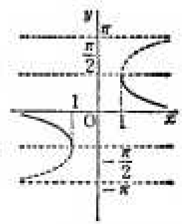
$y=\operatorname{arctg}x$



$y=\operatorname{arcctg}x$



$y=\operatorname{arcsec}x$



$y=\operatorname{arccsc}x$

2656. 什么叫反三角函数的主值.

解　虽然反三角函数是无限多值函数，但如果将值限制在下面的范围内，那么就变成单值函数. 这个值叫做反三角函数的主值.

$$-\frac{\pi}{2}\leq\arcsin x\leq\frac{\pi}{2},\quad 0\leq\arccos x\leq\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2},\quad 0<\operatorname{arcctg}x<\pi,$$

$$0\leq\operatorname{arcsec}x<\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2}<\operatorname{arcsec}x\leq\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2}\leq\operatorname{arccsc}x<0,\quad 0<\operatorname{arccsc}x\leq\frac{\pi}{2}.$$

特别，如果不取消限制的话，$\arcsin x$，$\arccos x$ 等表示主值.

2657. 已知 $\sin\theta=0.5$，求 θ 的值.

解　因为 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，所以 θ 的值是 $30°$，$150°$，$390°$，……，也就是

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6},\ \frac{17\pi}{6},\ \frac{25\pi}{6},\ \cdots\cdots$$

这些值可以写成

$$\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.\ (n\text{ 是整数})$$

一般地，对于 $\theta=\arcsin x$，假定 $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. 这样限定的函数叫做主值函数.

2658. 从 $\alpha=\arcsin x$

和 $$\beta=\arccos\sqrt{1-x^2},$$

能推得 $\alpha=\beta$ 吗?

解　不能. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,

$$\alpha=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-30°,$$

$$\beta=\arccos\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=30°,$$

α就不等于β。

2659. 求 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 时 θ 的值。

解 因为$\cos\theta=\frac{1}{2}$，所以

$$\theta=60°,\ 300°,\ 420°,\ \cdots\cdots$$

即　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3},\ \frac{11\pi}{3},\ \cdots\cdots$

这些值可以写成

$$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.\quad (n \text{ 是整数})$$

一般地限定 $\theta=\arccos x$ 是 $0\leq\theta\leq\pi$ 的主值函数。

2660. 证明 $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ (0\leq x<1)$。

解 因为 $0\leq x<1$，所以若设$\arcsin x=\alpha$，那么$0\leq\alpha<\frac{\pi}{2}$。因此$\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$。又，由$0\leq\alpha<\frac{\pi}{2}$得

$$\alpha=\arccos\sqrt{1-x^2},\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2661. 求 $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{3}$ 时 θ 的值。

解 从 $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{3}$ 得

$$\theta=60°,\ 240°,\ 420°,\ \cdots\cdots$$

即　$$\theta=n\pi+\frac{\pi}{3}.$$

一般地，对于反正切函数，主值函数限制在$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 的范围内。对应于x的主值函数的值叫做它的主值。

2662. 求 $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$的值。

解 适合 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ 的 θ 值，在 $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ 的范围内是$-\frac{\pi}{6}$。

因此 $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ 的值是 $-\frac{\pi}{6}$。

2663. 求 $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$的值。

解 $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi$。

2664. 从 $\theta=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$求 θ。

解 从 $\theta=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$得

$$\theta=\frac{3}{4}\pi.$$

2665. 求 $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}\right)$的值。

解 $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$。

因此　$\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}\right)=\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

2666. 求 $\lg\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$ 的值。其中 $\lg 2=0.30103$，$\lg 3=0.47712$。

解 $\lg\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\lg\cos\frac{\pi}{6}=\lg\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=\frac{1}{2}\lg 3-\lg 2$$

$$=\frac{1}{2}\times 0.47712-0.30103$$

$$=\bar{1}.93753.$$

2667. 求适合 $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\alpha$ 的 α。$(0\leq\alpha\leq\pi)$

解 从 $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\alpha$ 得 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$。因此$\alpha=\frac{\pi}{6}$。

2668. 从 $\arcsin\frac{13}{85}=\operatorname{arcctg}\frac{A}{13}$ 求 A 的值。其中的角是锐角。

解 从 $\arcsin\frac{13}{85}=x$ 得 $\sin x=\frac{13}{85}$。

因为　$$1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x},$$

所以　$\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1=\left(\frac{13}{85}\right)^{-2}-1$

$$=\frac{7225}{169}-1=\frac{7056}{169}=\left(\frac{84}{13}\right)^2.$$

又因为 x 是正的锐角，所以 $\operatorname{ctg}x>0$。

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}x=\frac{84}{13},$$

即　$$x=\operatorname{arcctg}\frac{84}{13}.$$

从而　$\arcsin\frac{13}{85}=\operatorname{arcctg}\frac{84}{13}$，　$A=84$。

2669. 在下面的叙述中，如有错误的话，请改正。$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\operatorname{arctg}x$

的真值分别是 $0\leqq y\leqq\pi$，$-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$，$0\leqq y\leqq\pi$，这时对于 x 的一个值，y 只有一个值与之对应。

解　不叫真值，叫主值。

$y=\arcsin x$ 的主值是 $-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$。

$y=\arccos x$ 的主值是 $0\leqq y\leqq\pi$。

$y=\operatorname{arctg} x$ 的主值是 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$。

2670. 证明 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，其中 $|x|\leqq1$，反三角函数表示主值。

解　设 $\arcsin x=\theta$，则

$$x=\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

因为 θ 表示主值，即 $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$，所以从 $\frac{\pi}{2}$ 减去这个不等式的各边得

$$\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\geqq\frac{\pi}{2}-\theta\geqq\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2},$$

即
$$\pi\geqq\frac{\pi}{2}-\theta\geqq0.$$

$\arccos x$ 也是主值

$$0\leqq\arccos x\leqq\pi.$$

从而，从 $x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 得

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\theta.$$

$$\therefore\quad \theta+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

因为 $\theta=\arcsin x$，所以

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

2671. 在下面各题的 $\boxed{}$ 里填充。

(1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2}=\boxed{}$；

(2) $\operatorname{arctg}(-1)+\arcsin\boxed{}=0$；

(3) $\arcsin\left(\sin\frac{5}{6}\pi\right)=\boxed{}$.

解　(1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2}$

$$=\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}=0.$$

(2) 从 $\operatorname{arctg}(-1)+\arcsin x=0$，得

$$\arcsin x=-\operatorname{arctg}(-1)=-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore\quad x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

即
$$\operatorname{arctg}(-1)+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

(3) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

2672. 在 $\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin2\alpha}{x+\cos2\alpha}$ 中，当 (1) $x=0$，(2) $x=1$，(3) $x=-1$ 时，用 α 表示角 θ。

解　$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin2\alpha}{x+\cos2\alpha}$.

(1) 若 $x=0$，因为

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha,$$

所以
$$\theta=n\pi+2\alpha.$$

(2) 若 $x=1$，则

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\therefore\quad \theta=n\pi+\alpha.$$

(3) 若 $x=-1$，则

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin2\alpha}{-1+\cos2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{-2\sin^2\alpha}$$
$$=-\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right),$$
$$\therefore\quad \theta=n\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha=\frac{1}{2}(2n+1)\pi+\alpha.$$

2673. 计算 $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.

解　一般地 $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a)=a$。

为什么呢？设 $\operatorname{arctg}a=x$，则

$$\operatorname{tg}x=a.$$

所以
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a)=\operatorname{tg}x=a.$$

因此，若设
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\alpha,$$
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\beta,$$

则
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

将 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$，$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$ 代入上式，得

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}=1.$$

2674. 计算 $\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)$ 的值.

解　一般地,因为

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}a)=a,$$

所以

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}=1.$$

适合 $\operatorname{tg}\theta=1$ 的 θ 值是

$$\theta=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

又因为主值 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$ 和 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$ 是第一象限的角,所以

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore\quad \sin\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2675. 若 $\sin x=y$, $y=\frac{1}{2}$, 求满足 $|x+y|\leq 8$ 的 n 的值. 设 $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\geqq 0$.

解　从 $\sin x=\frac{1}{2}$ 得 x 的主值是 $\frac{\pi}{6}$.

$$\therefore\quad x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

因此只要求适合

$$|x+y|=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\leq 8$$

的整数值就可以了. 根据题意有

$$n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\geqq 0,$$

所以　$0\leq n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\leq 8.$

从不等式的右边得

$$n\pi\leq 8-\frac{1}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{15}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{6},$$

$$n\leq\frac{15}{2\pi}-(-1)^n\frac{1}{6}<\frac{15}{6}+\frac{1}{6}<3.\qquad ①$$

从不等式的左边得

$$n\pi\geqq-(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2},$$

$$n\geqq-(-1)^n\frac{1}{6}-\frac{1}{2\pi}$$

$$>-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}.\qquad ②$$

从①、②得　$0\leq n<3.$

因此除去 $n=0, 1, 2$ 外没有其他可能的值.

如果 $n=0$, 则

$$x+y=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}=1.02,$$

如果 $n=1$, 则

$$x+y=\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}=3.12,$$

如果 $n=2$, 则

$$x+y=2\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}=7.30,$$

这些都适合所给的条件.

2676. 上题的补充说明: 若

$$n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\leq 0,$$

那么情况如何?

解　$0\leq-\left[n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right]\leq 8.$

从上式的右边得

$$n\pi\geqq-8-\frac{1}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

$$=-\frac{17}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{6},$$

$$n\geqq-\frac{17}{2\pi}-(-1)^n\frac{1}{6}>-\frac{17}{6}-\frac{1}{6}$$

$$=-3.\qquad ①$$

从左边得　$n\pi\leq-(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2},$

$$n\leqq-(-1)^n\frac{1}{6}-\frac{1}{2\pi}\leqq\frac{1}{6}-\frac{1}{2\pi}<1.\quad ②$$

从①、②得　$-3<n<1$.

所以 n 是 -2, -1, 0 中的某一个. $n=0$ 时 $x+y=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$, 它不适合 $x+y\leqq0$ 的条件. $n=-1$ 时

$$|x+y|=\left|-\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right|=3.17,$$

$n=-2$ 时

$$|x+y|=\left|-2\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right|=5.25.$$

综合上题的结果，得

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6},$$

$$(n=2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2).$$

2677. 证明下面两个等式.

(1) $\operatorname{arc\,tg}\frac{16}{63}=\arccos\frac{63}{65}$;

(2) $\arccos\frac{3}{5}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{3}{4}$.

解　(1) 设 $\operatorname{arc\,tg}\frac{16}{63}=\alpha$.

因为　$\operatorname{tg}\alpha=\frac{16}{63}$,

所以　$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{256}{3969}}}=\frac{63}{65}.$$

$$\therefore\quad \alpha=\arccos\frac{63}{65}.$$

(2) 设 $\arccos\frac{3}{5}=\alpha$.

因为　$\cos\alpha=\frac{3}{5}$,

所以　$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$

$$=\frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}=\frac{3}{4}.$$

$$\therefore\quad \alpha=\operatorname{arc\,ctg}\frac{3}{4}.$$

2678. 证明下列等式.

(1) $\operatorname{arc\,tg}x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\quad (x\geqq0)$$

(2) $2\arccos x=\arccos(2x^2-1)$.

$$\left(0\leqq\arccos x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

解　(1) 设 $\operatorname{arc\,tg}x=\beta$, 则 $\operatorname{tg}\beta=x$. 因为 $0\leqq\beta<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin\beta\geqq0$, $\cos\beta>0$, 并且

$$\cos^2\beta=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{1}{1+x^2},$$

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\beta.$$

又　$\sin\beta=\cos\beta\operatorname{tg}\beta=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$\therefore\quad \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\beta.$$

(2) 设 $\arccos x=\alpha$, 则 $\cos\alpha=x$. 因为 $0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$, 所以 $0\leqq2\alpha\leqq\pi$. 因此

$$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2x^2-1,$$

$$\therefore\quad 2\arccos x=\arccos(2x^2-1).$$

2679. 证明 $2\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}$.

这里　$-\frac{\pi}{4}<\operatorname{arc\,tg}x<\frac{\pi}{4}$.

解　设 $\operatorname{arc\,tg}x=\alpha$, 则 $\operatorname{tg}\alpha=x$. 因为

$$-\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4},$$

所以　$-\frac{\pi}{2}<2\alpha<\frac{\pi}{2}$.

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2x}{1-x^2},$$

$$\therefore\quad 2\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}.$$

2680. 若 $|x|\leqq1$, 证明

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

解　设 $\arcsin x=\alpha$, $\arccos x=\beta$, 则 $\sin\alpha=x$, $\cos\beta=x$.

$$x=\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\beta.$$

因为 $-\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$，$0\leq\beta\leq\pi$，

所以 $0\leq\frac{\pi}{2}-\alpha\leq\pi$，$\therefore\ \frac{\pi}{2}-\alpha=\beta$，

$\therefore\ \arcsin x+\arccos x=\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$。

2681. 证明

$$\sin\operatorname{arc}\cos\operatorname{tg}\operatorname{arc}\sec x=\sqrt{2-x^2}。$$

解 设 $\operatorname{arc}\sec x=\alpha$，则 $\sec\alpha=x$，

$$\operatorname{tg}\alpha=\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}=\pm\sqrt{x^2-1}。$$

$\therefore$ 原式的左边 $=\sin\arccos\operatorname{tg}\alpha$

$=\sin\arccos\ (\pm\sqrt{x^2-1})$。

再设 $\arccos(\pm\sqrt{x^2-1})=\beta$，则

$$\cos\beta=\pm\sqrt{x^2-1}。$$

$\therefore$ 原式的左边 $=\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}$

$=\sqrt{1-(x^2-1)}=\sqrt{2-x^2}$。

因此所要证明的等式成立。

2682. 证明

$$\cos\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sin\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x=\sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}。$$

解 设 $\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x=\alpha$，则 $\operatorname{ctg}\alpha=x$。因此

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}。$$

$\therefore$ 左边 $=\cos\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sin\alpha$

$=\cos\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$。

再设 $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\beta$，

则 $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$。

$\therefore$ 左边 $=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{1+x^2}}}=\sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}。$$

2683. 证明

$$\arcsin\frac{77}{85}=\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}。$$

解 设 $\arcsin\frac{3}{5}=\alpha$，$\arcsin\frac{8}{17}=\beta$，

则 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\frac{8}{17}$，

从而 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=\frac{15}{17}$。

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}+\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{77}{85}$。

$\therefore\ \arcsin\frac{77}{85}=\alpha+\beta$

$=\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}$。

2684. 证明

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{7}+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}。$$

解 设 $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{3}=\alpha$，$\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{5}=\beta$，

$\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{7}=\gamma$，$\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{8}=\delta$，

则 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{4}{7}$，

$\operatorname{tg}(\gamma+\delta)=\frac{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta}{1-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}=\frac{3}{11}$。

$\therefore\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

$=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}(\gamma+\delta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\gamma+\delta)}=1$。

因此 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{\pi}{4}$。

$\therefore\ \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{7}$

$+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$。

2685. 证明

$\arccos x\pm\arccos y$

$=\arccos\ (xy\mp\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$。

其中 $0\leq\arccos x+\arccos y\leq\pi$。

解 设 $\arccos x=\alpha$，$\arccos y=\beta$，

则 $\cos\alpha=x$，$\cos\beta=y$。

因为 $\sin\alpha\geqq0$，$\sin\beta\geqq0$，

所以 $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$=xy\mp\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$。

考虑到 $0\leq\alpha\pm\beta\leq\pi$，所以

$\arccos x\pm\arccos y$

$=\arccos\ (xy\mp\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$。

2686. 证明下列等式.

(1) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$;

(2) $\arcsin(\sqrt{2}\sin\theta)+\arcsin\sqrt{\cos 2\theta}=\frac{\pi}{2}$. $\left(\text{其中 } 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\right)$

解 (1) 设 $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\alpha$,

则 $$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{3}{4}.$$

$$\therefore\quad 2\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

(2) 设 $\arcsin(\sqrt{2}\sin\theta)=\alpha$,

$$\arcsin\sqrt{\cos 2\theta}=\beta,$$

于是 $$0\leq\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\theta\leq 1,$$

$$0\leq\sin\beta=\sqrt{\cos 2\theta}\leq 1.$$

因此 $$\cos\alpha=\sqrt{1-2\sin^2\theta}=\sqrt{\cos 2\theta},$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\cos 2\theta}=\sqrt{2\sin^2\theta}=\sqrt{2}\sin\theta.$$

$$\therefore\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sqrt{2}\sin\theta\cdot\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{\cos 2\theta}\sqrt{\cos 2\theta}=2\sin^2\theta+\cos 2\theta=1.$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=\arcsin(\sqrt{2}\sin\theta)+\arcsin\sqrt{\cos 2\theta}=\frac{\pi}{2}.$$

2687. 若 $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$, 证明

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\{2\operatorname{tg}[\theta+\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^3\theta)]\}=\theta.$$

解 设 $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^3\theta)=\alpha$, 则 $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}^3\theta$.

$$\operatorname{tg}[\theta+\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^3\theta)]=\operatorname{tg}(\theta+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}^3\theta}{1-\operatorname{tg}^4\theta}=\frac{\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}.$$

$$\therefore\quad \text{左边}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}2\theta).$$

因为 $$-\frac{\pi}{2}<2\theta<\frac{\pi}{2},$$

所以 $$\text{左边}=\frac{1}{2}\times 2\theta=\theta.$$

2688. 若 $0<\theta<\pi$, $b^2<a^2$, 证明

$$2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=\arccos\left(\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}\right).$$

解 设 $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=\alpha$,

则 $$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

$$\therefore\quad \cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}=\frac{a+b-(a-b)\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{a+b+(a-b)\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{b\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)+a\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{b\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)+a\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{b+a\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}}{a+b\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}.$$

$$\therefore\quad 2\alpha=2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=\arccos\left(\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}\right).$$

2689. 证明 $2\operatorname{arcctg}\frac{5}{4}=\operatorname{arctg}\frac{40}{9}$.

解 设 $\operatorname{arcctg}\frac{5}{4}=\theta$,

则 $$\operatorname{ctg}\theta=\frac{5}{4},$$

$$2\operatorname{arcctg}\frac{5}{4}=2\theta,$$

$$\operatorname{ctg} 2\theta=\frac{\operatorname{ctg}^2\theta-1}{2\operatorname{ctg}\theta}=\frac{\frac{25}{16}-1}{2\times\frac{5}{4}}$$

$$=\frac{\frac{9}{16}}{\frac{10}{4}}=\frac{9}{40}.$$

$$\therefore\quad 2\operatorname{arcctg}\frac{5}{4}=\operatorname{arcctg}\frac{9}{40}$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{40}{9}.$$

2690. 若

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y+\operatorname{arctg} z=180°,$$

证明 $$x+y+z=xyz.$$

解 设 $\operatorname{arctg} x=A$, $\operatorname{arctg} y=B$, $\operatorname{arctg} z=C$, 则 $A+B+C=180°$, 且 $\operatorname{tg} A=x$, $\operatorname{tg} B=y$, $\operatorname{tg} C=z$, 所以 $x+y+z=xyz$.

2691. 求 $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} 2-\operatorname{arcctg} 2)$ 的值.

解 原式 $=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2^2-1}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$

$$=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)$$

$$=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}\right)$$

$$=\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(5\sqrt{3}-8)]$$

$$=5\sqrt{3}-8.$$

2692. 证明

$$\arcsin x+\arcsin y$$
$$=\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right),$$

其中 $-\frac{\pi}{2}\leq\arcsin x+\arcsin y\leq\frac{\pi}{2}$.

解 设 $\arcsin x=\alpha$, $\arcsin y=\beta$, 则有 $\sin\alpha=x$, $\sin\beta=y$, $-\frac{\pi}{2}\leq\alpha$、$\beta\leq\frac{\pi}{2}$, 因此有 $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$, $\cos\beta=\sqrt{1-y^2}$. 故

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2},$$

因为 $-\frac{\pi}{2}\leq\alpha+\beta\leq\frac{\pi}{2}$, 所以

$$\alpha+\beta=\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right).$$

2693. 证明 $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}$.

其中

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}<\frac{\pi}{2}.$$

解 设 $\operatorname{arctg} x=\alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\beta$, 则 $\operatorname{tg}\alpha=x$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1-x}{1+x}$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$,

因为 $$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$=\frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-\frac{x(1-x)}{1+x}}=1,$$

由假设 $-\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ 知, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

2694. (1) 证明

$$2\arcsin x=\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right),$$

其中 $$-\frac{\pi}{4}\leq\arcsin x\leq\frac{\pi}{4}.$$

(2) 证明

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\quad(|x|<1).$$

解 (1) 设 $\arcsin x=\alpha$, 则 $\sin\alpha=x$, $-\frac{\pi}{4}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{4}$, 因此 $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$,

$$\therefore\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2x\sqrt{1-x^2},$$

$$-\frac{\pi}{2}\leq 2\alpha\leq\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad 2\alpha=\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

(2) 设 $\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\alpha$, 则 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2x}{1-x^2}$,

$$\sec^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2},$$

$$\therefore\quad \cos^2\alpha=\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2},$$

因为 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos\alpha=\frac{1-x^2}{1+x^2}\ (>0)$,

$$\therefore\quad \alpha=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

2695. 证明

$$\operatorname{arcctg} a\pm\operatorname{arcctg} b=\operatorname{arcctg}\frac{ab\mp1}{b\pm a}.$$

$$(b>a>0)$$

解　设 $\operatorname{arcctg} a=A$，$\operatorname{arcctg} b=B$．则 $a=\operatorname{ctg} A$，$b=\operatorname{ctg} B$，且 $0<B<A<\pi/2$．

因为　$\operatorname{ctg}(A\pm B)=\dfrac{\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B\mp 1}{\operatorname{ctg} B\pm\operatorname{ctg} A}$，

从而　$A\pm B=\operatorname{arcctg}\dfrac{\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B\mp 1}{\operatorname{ctg} B\pm\operatorname{ctg} A}$．

用上面所设的值代入，则

$$\operatorname{arcctg} a\pm\operatorname{arcctg} b=\operatorname{arcctg}\frac{ab\mp 1}{b\pm a}.$$

2696．证明

$$\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}=135°.$$

解　两边取余切，则

$$原式的左边=\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}\right)$$

$$=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}-1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}=-1.$$

在 0° 到 180° 之间，只有 $-1=\operatorname{ctg}135°$，故得证．

2697．证明

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\operatorname{arcctg}3=45°.$$

解　设 $\alpha=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\beta=\operatorname{arcctg}3$，则

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \operatorname{ctg}\beta=3.$$

故 α、β 都是第一象限的角，且

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

显然 α、β 都小于 45°，所以 $\alpha+\beta<90°$，

$$\therefore\quad \alpha+\beta=45°.$$

2698．证明 $2\operatorname{arcctg} a=\operatorname{arcctg}\dfrac{a^2-1}{2a}$，$a>0$．

解　设 $\operatorname{arcctg} a=A$，则 $a=\operatorname{ctg} A$，代入

$$\operatorname{ctg}2A=\frac{\operatorname{ctg}^2 A-1}{2\operatorname{ctg} A}$$

后，因为 $a>0$，所以 $0<A<\dfrac{\pi}{2}$，$0<2A<\pi$．故有

$$2A=\operatorname{arcctg}\frac{\operatorname{ctg}^2 A-1}{2\operatorname{ctg} A},$$

$$2\operatorname{arcctg} a=\operatorname{arcctg}\frac{a^2-1}{2a}.$$

2699．证明

$$\arccos\frac{20}{29}-\operatorname{arctg}\frac{16}{63}=\arccos\frac{1596}{1885}.$$

解　设 $\alpha=\arccos\dfrac{20}{29}$，$\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{16}{63}$，则 α、β 都是第一象限的角，

$$\sin\alpha=\frac{21}{29},\quad \cos\alpha=\frac{20}{29},$$

$$\sin\beta=\frac{16}{65},\quad \cos\beta=\frac{63}{65}.$$

把原式左边取余弦，即把上述值代入

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

有　$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1596}{1885}.$$

易知 $\alpha>\beta$，

$$\therefore\quad \alpha-\beta=\arccos\frac{1596}{1885}.$$

2700．证明

$$2\operatorname{arcctg}7+\arccos\frac{3}{5}=\operatorname{arccsc}\frac{125}{117}.$$

解　设 $\alpha=\operatorname{arcctg}7$，$\beta=\arccos\dfrac{3}{5}$，则在

$$\cos(2\alpha+\beta)=\cos2\alpha\cos\beta-\sin2\alpha\sin\beta$$

中用 $\left(\because\ \alpha<\dfrac{\pi}{4},\ \therefore\ 2\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\sin2\alpha=\frac{7}{25},\quad \cos2\alpha=\frac{24}{25},$$

$$\sin\beta=\frac{4}{5},\quad \cos\beta=\frac{3}{5}$$

代入，有　$$\cos(2\alpha+\beta)=\frac{44}{125},$$

因此　$$\csc(2\alpha+\beta)=\frac{125}{117},$$

$$\therefore\quad 2\alpha+\beta=\operatorname{arccsc}\frac{125}{117}.$$

2701．证明

$$\frac{2b}{a}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)$$

$$+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right).$$

解　设 $\arccos\dfrac{a}{b}=\theta$，则 $\cos\theta=\dfrac{a}{b}$，从而

原式右边$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}+\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\left(1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^2+\left(1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^2}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{2\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{2}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{2}{\cos\theta}=\frac{2b}{a}.$$

2702. 在0°至90°范围中求方程

$$89524.67\cos x+24508.75\sin x=89785$$

的根。

解 设 $\frac{24508.75}{89524.67}=\operatorname{tg}\varphi$，则

$$\lg\operatorname{tg}\varphi=\lg 24508.75-\lg 89524.67$$
$$=4.3893212-4.9519427$$
$$=\bar{1}.4373785,$$

所以 $\varphi=15°18'37.68''$。

由 $\cos x+\operatorname{tg}\varphi\sin x=\frac{89785}{89524.67}$

乘上 $\cos\varphi$ 后得

$$\cos(\varphi-x)=\frac{89785}{89524.67}\cdot\cos\varphi.$$

从而 $\cos(15°18'37.68''-x)$

$$=\frac{89785}{89524.67}\cdot\cos 15°18'37.68''$$

或 $\lg\cos(15°18'37.68''-x)$

$$=\lg 89785+\lg\cos 15°18'37.68''$$
$$-\lg 89524.67$$
$$=4.9532038+\bar{1}.9843063$$
$$-4.9519427$$
$$=\bar{1}.9855674.$$

从而先有

$$15°18'37.68''-x=14°41'22.53'',$$

由此得一解 $x=37'15.16''$。再由这个角的相反角得另一解

$$x-15°18'37.68''=14°41'22.53'',$$

由此得 $x\approx30°$。

2703. 设 $\operatorname{tg}3x=\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta-1}}$,

$$\alpha=27°43'17'',\quad \beta=49°18'36'',$$

试求0°至180°间所有满足上式的 x。

解 $\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta-1}}$

$$=\sqrt{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\beta-\cos^2\beta}\cdot\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}}$$

$$=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{\cos2\alpha}{-\cos2\beta}},$$

因此

$$\operatorname{tg}3x=\frac{\cos 49°18'36''}{\cos 27°43'17''}\cdot\sqrt{\frac{\cos 55°26'34''}{\cos 81°22'48''}}.$$

从而

$$\lg\operatorname{tg}3x=\lg\cos 49°18'36''$$
$$-\lg\cos 27°43'17''$$
$$+\frac{1}{2}(\lg\cos 55°26'34''-\lg\cos 81°22'48'')$$
$$=\bar{1}.8142250-\bar{1}.9470512$$
$$+\frac{1}{2}(\bar{1}.7537585-\bar{1}.1757451)$$
$$=0.1561805.$$

因为现在 x 比180°小，故只要求出满足

$$\lg\operatorname{tg}3x=0.1561805$$

中小于540°的角 $3x$ 即可，为

55°5'13.86''，235°5'13.86''，415°5'13.86''，

即 x 为

$$18°21'44.62'',\quad 78°21'44.62'',$$
$$138°21'44.62''.$$

2704. 解方程 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$。

解 给出的方程为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta=1,$$

把前一个 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 换以 $\cos45°$，后一个 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 换以 $\sin45°$，则

$$\cos45°\sin\theta+\sin45°\cos\theta=1,$$
$$\sin(\theta+45°)=1,$$
$$\theta+45°=180°n+(-1)^n90°,$$
$$\therefore\quad \theta=180°n+(-1)^n90°-45°$$
$$=(4n-1)45°+(-1)^n90°.$$

2705. 证明

$$\sin^3\alpha+\sin^3(120^\circ+\alpha)-\sin^3(120^\circ-\alpha)$$
$$=-\frac{3}{4}\sin 3\alpha.$$

解 $\sin(120^\circ-\alpha)$
$$=-\sin[360^\circ-(120^\circ-\alpha)]$$
$$=-\sin(240^\circ+\alpha).$$

而 $\sin\alpha+\sin(120^\circ+\alpha)+\sin(240^\circ+\alpha)=0.$

因此用

$$A^3+B^3+C^3-3ABC$$
$$=\frac{1}{2}(A+B+C)(A^2+B^2+C^2$$
$$-AB-BC-CA)$$

可得

$$\text{原式左边}=3\sin\alpha\sin(120^\circ+\alpha)\sin(240^\circ+\alpha)$$
$$=-\frac{3}{4}(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)$$
$$=-\frac{3}{4}\sin 3\alpha.$$

2706. 证明三角形 ABC 中

$$a(\cos C-\cos B)=2(b-c)\cos^2\frac{A}{2}.$$

解 由正弦定理，欲证之式相当于

$$\sin A(\cos C-\cos B)$$
$$-(\sin B-\sin C)(\cos A+1)=0. \quad ①$$

①的左边 $=\sin A\cos C-\sin A\cos B$
$$-\sin B\cos A+\cos A\sin C$$
$$-\sin B+\sin C$$
$$=\sin(A+C)-\sin(A+B)$$
$$-\sin B+\sin C$$
$$=\sin B-\sin C+\sin B+\sin C=0.$$

2707. 证明 $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{a}}.$

解 设 $k=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}$，

则 $\sin k=\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}$，$\sin^2 k=\dfrac{x}{x+a}$，

$$\cos^2 k=1-\sin^2 k=1-\frac{x}{x+a}=\frac{a}{x+a},$$

从而 $\operatorname{tg}^2 k=\dfrac{\sin^2 k}{\cos^2 k}=\dfrac{x}{a}.$

因为 k 是第一象限的角，$\operatorname{tg}k\geq 0$. 所以

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}=k.$$

2708. 证明：若 a、b 为正数，则

$$\frac{a^3}{2}\csc^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)$$
$$+\frac{b^3}{2}\sec^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)$$
$$=(a+b)(a^2+b^2).$$

解 设 $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$，$\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$，则

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1.$$
$$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\text{或}-\frac{\pi}{2}.$$

另外，
$$\frac{a^2}{\sin^2\alpha}=\frac{b^2}{\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{a^2+b^2}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=a^2+b^2.$$

$$\text{原式左边}=\frac{a^3}{1-\cos\alpha}+\frac{b^3}{1\pm\sin\alpha}$$
$$=\frac{a^3(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}+\frac{b^3(1\mp\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{ab^2(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha}+\frac{b^3(1\mp\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$$
$$=(a^2+b^2)[a(1+\cos\alpha)$$
$$+b(1\mp\sin\alpha)]$$
$$=(a^2+b^2)[(a+b)$$
$$+(a\cos\alpha\mp b\sin\alpha)].$$

由于 $a\cos\alpha=b\sin\alpha$，所以当取 $-$ 号时欲证式成立．又由于 $a>0$，$b>0$，α、β 都是第一象限的角，$\alpha+\beta$ 只能是 $\dfrac{\pi}{2}$，所以实际上排除了最后式中取 $+$ 号的可能性．

2709. 若 $\operatorname{tg}^2\theta=\operatorname{tg}(\theta-\alpha)\operatorname{tg}(\theta-\beta)$，$-90^\circ<2\theta<90^\circ$，证明

$$2\theta=\operatorname{arctg}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

解 由已知条件知

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)},$$
$$\therefore\ \frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)},$$
$$\therefore\ \frac{1}{\cos 2\theta+1}=\cos(\alpha-\beta)$$
$$\div[\cos(\alpha-\beta)+\cos 2\theta\cos(\alpha+\beta)$$
$$+\sin 2\theta\sin(\alpha+\beta)].$$
$$\therefore\ \cos 2\theta(2\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=\sin 2\theta\sin(\alpha+\beta),$$
$$\therefore\ 2\theta=\operatorname{arctg}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

2710. 证明

$$3\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{20}=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{1985}.$$

解 设 $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$, $\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{20}$，则

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4^3}}{1-\frac{3}{4^2}}=\frac{47}{52}.$$

把原式左边取正切，则

$$\operatorname{tg}(3\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{47}{52}+\frac{1}{20}}{1-\frac{47}{52\times20}}=\frac{992}{993}.$$

又设 $\gamma=\operatorname{arctg}\frac{1}{1985}$，则原式右边取正切后，有

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\gamma\right)=\frac{1-\frac{1}{1985}}{1+\frac{1}{1985}}=\frac{1984}{1986}=\frac{992}{993}.$$

故 $$3\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}-\gamma.$$

2711. 如果 θ 是锐角，$\sec\theta-\csc\theta=\frac{4}{3}$.

证明 $$\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}.$$

解 因为 $\sec\theta-\csc\theta=\frac{4}{3}$,

即 $$\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{4}{3},$$

故 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{4}{3}\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{3}\sin2\theta$.

由此可知 $\sin\theta-\cos\theta>0$, $\theta>\frac{\pi}{4}$.

两边平方，$1-\sin2\theta=\frac{4}{9}\sin^22\theta$.

解这个两次方程，得 $\sin2\theta=\frac{3}{4}$ 或 -3（舍去），但 $2\theta>\frac{\pi}{2}$，所以

$$2\theta=\pi-\arcsin\frac{3}{4},$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}.$$

2712. 如果 $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$，$\theta$ 是锐角，证明

$$\theta=\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}.$$

解 设 $\pi\cos\theta=\alpha$, $\pi\sin\theta=\beta$，则由 $\sin\alpha=\cos\beta$，有 $\frac{\pi}{2}\pm\beta=\alpha$，所以有

$$\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta=\pi\cos\theta,$$

$$\therefore\quad \pm\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2},$$

两边平方，得

$$1\pm\sin2\theta=\frac{1}{4},\quad \therefore\quad \sin2\theta=\pm\frac{3}{4},$$

因为 θ 是锐角，

$$\therefore\quad \theta=\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}.$$

2713. 证明

$$\arcsin\frac{2b+a-c}{a+c}\pm2\arcsin\sqrt{\frac{a+b}{a+c}}$$

有一个值为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍.

解 取 $\alpha=\arcsin\frac{2b+a-c}{a+c}$,

$$\beta=\arcsin\sqrt{\frac{a+b}{a+c}},$$

则 $$\sin\alpha=2\frac{a+b}{a+c}-\frac{a+c}{a+c}=2\sin^2\beta-1=-\cos2\beta,$$

从而 $$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm2\beta)&=\sin\alpha\cos2\beta\pm\cos\alpha\sin2\beta\\&=-\cos^22\beta\pm\sin2\beta\sqrt{1-\cos^22\beta}\\&=-\cos^22\beta\pm\sin^22\beta.\end{aligned}$$

若取一号，则 $\sin(\alpha\pm2\beta)=-1$，故 $\alpha\pm2\beta$ 的一个值为 $\frac{(2n+1)}{2}\pi$，其中 n 为某个整数.

2714. 证明

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=\operatorname{arctg}\frac{c_1x-y}{c_1y+x}+\operatorname{arctg}\frac{c_2-c_1}{c_2c_1+1}+\operatorname{arctg}\frac{c_3-c_2}{c_3c_2+1}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{c_n-c_{n-1}}{c_nc_{n-1}+1}+\operatorname{arctg}\frac{1}{c_n},$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为任意数。

解 $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{c_1x-y}{c_1y+x}$

$$=\operatorname{arc\,tg} \frac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{c_1}}{1+\dfrac{x}{c_1y}}$$

$$=\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}-\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{c_1}.$$

同理可得

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{c_2-c_1}{c_2c_1+1}=\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{c_1}-\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{c_2},$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{c_3-c_2}{c_3c_2+1}=\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{c_2}-\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{c_3}.$$

…………

如此继续，可知原式右边各项的和为 $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$。

2715. 证明，若干个形如 $\arcsin \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$，$\arcsin \dfrac{2a'b'}{a'^2+b'^2}$ 的角的和，其正弦可以表成 $\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ 的形式，其中 m、n 是 a、b、a'、b' 的有理式。

解 设 $\alpha=\arcsin \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$，

$$\beta=\arcsin \frac{2a'b'}{a'^2+b'^2},$$

则
$$\cos\alpha=\pm\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

$$\cos\beta=\pm\frac{a'^2-b'^2}{a'^2+b'^2}.$$

代入 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，考虑到正负号的不同搭配，有

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab(a'^2-b'^2)\pm 2a'b'(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}$$

或

$$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{2ab(a'^2-b'^2)\pm 2a'b'(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}.$$

其中分子除去因子 2 为

$$aba'^2-abb'^2\pm a^2a'b'\mp b^2a'b'$$
$$=(aa'\mp bb')(a'b\pm ab').$$

而分母为

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$$
$$=(aa'\mp bb')^2+(a'b\pm ab')^2.$$

因此 $\sin(\alpha+\beta)$ 确实与 $\sin\alpha$、$\sin\beta$ 有类似的构成形式，对于更多的角则可以依次进行。

2716. 求 $\arcsin \dfrac{(-1)^m}{2}$ 的值，其中 m 为整数。

解 设 $\alpha=\arcsin \dfrac{(-1)^m}{2}$，

则
$$\sin\alpha=\frac{(-1)^m}{2},$$

当 m 为偶数时答案为 $\dfrac{1}{2}$，当 m 为奇数时答案为 $-\dfrac{1}{2}$。因此，

$$\alpha=(-1)^m\frac{\pi}{6}.$$

2717. 求 $\arccos \dfrac{(-1)^m}{2}$，其中 m 为整数。

解 设 $\alpha=\arccos \dfrac{(-1)^m}{2}$，

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{(-1)^m}{2},$$

象上题一样，知

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-(-1)^m\frac{\pi}{6}.$$

2718. 求 $\operatorname{arc\,tg}(-1)^m$，其中 m 为整数。

解 与前类似，

$$\operatorname{arc\,tg}(-1)^m=(-1)^m\frac{\pi}{4}.$$

3. 反三角方程

2719. 解反三角方程 $\arcsin x=\arccos x$。

解 设 $\arcsin x=\alpha$，$\arccos x=\beta$，则 $\sin\alpha=x$，$\cos\beta=x$，$\alpha=\beta$，因此 $x=\sin\alpha=\cos\beta=\pm\sqrt{1-\sin^2\beta}=\pm\sqrt{1-x^2}$。两边平方，

$$x^2=1-x^2,\quad 2x^2=1,\quad \therefore\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

但 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 不适合原方程，所以解为

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2720. 解方程 $\arcsin x+\arcsin \dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}$。

解 设 $\arcsin x=\alpha$，$\arcsin \dfrac{x}{2}=\beta$，则 $\sin\alpha=x$，$\sin\beta=\dfrac{x}{2}$，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$。可证明 α，β 都是正的锐角，且

$$\frac{x}{2}=\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}x,$$
$$(\sqrt{2}+1)x=\sqrt{2(1-x^2)}, \qquad ①$$
$$(3+2\sqrt{2})x^2=2(1-x^2).$$
$$\therefore\quad x^2=\frac{2}{5+2\sqrt{2}}=\frac{2(5-2\sqrt{2})}{17}.$$
$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{2})}{17}}.$$

其中负值不满足①，故所求的解为
$$x=\sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{2})}{17}}.$$

2721. 解方程
$$\arcsin 2x-\arcsin\sqrt{3}x=\arcsin x.$$

解 设 $\arcsin 2x=\alpha$，$\arcsin\sqrt{3}x=\beta$，则 $\sin\alpha=2x$，$\sin\beta=\sqrt{3}x$，$\sin(\alpha-\beta)=x$，
$$\therefore\quad x=\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$=2x\sqrt{1-3x^2}-\sqrt{3}x\sqrt{1-4x^2}.$$

由此可得 $x=0$，以及
$$1=2\sqrt{1-3x^2}-\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}.$$

把后一个式子变形、平方，
$$3-12x^2=1+4(1-3x^2)-4\sqrt{1-3x^2},$$
$$4\sqrt{1-3x^2}=2,\ 4(1-3x^2)=1,$$
$$x^2=\frac{1}{4},\quad\therefore\quad x=\pm\frac{1}{2},$$

故所求的解是 $x=0$，$\pm\frac{1}{2}$.

2722. 解方程
$$\operatorname{arctg}2x+\operatorname{arctg}4x=\operatorname{arctg}3.$$

解 设 $\operatorname{arctg}2x=\alpha$，$\operatorname{arctg}4x=\beta$，则 $\operatorname{tg}\alpha=2x$，$\operatorname{tg}\beta=4x$，$\alpha+\beta=\operatorname{arctg}3$.

两边取正切，则
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=3=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{6x}{1-8x^2}.$$

因此 $3-24x^2=6x$，$8x^2+2x-1=0$，
$$(4x-1)(2x+1)=0.$$
$$\therefore\quad x=\frac{1}{4},\quad x=-\frac{1}{2}.$$

其中 $x=-\frac{1}{2}$ 不适合原方程，故所求的解为 $x=\frac{1}{4}$.

2723. 解方程
$$\operatorname{arctg}(x-1)+\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}(x+1)=\operatorname{arctg}3x.$$

解 设 $\operatorname{arctg}(x-1)=\alpha$，$\operatorname{arctg}x=\beta$，$\operatorname{arctg}(x+1)=\gamma$，$\operatorname{arctg}3x=\delta$.

则 $\operatorname{tg}\alpha=x-1$，$\operatorname{tg}\beta=x$，
$\operatorname{tg}\gamma=x+1$，$\operatorname{tg}\delta=3x$.

在 $\alpha+\beta=\delta-\gamma$ 的两边取正切，则
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\delta-\operatorname{tg}\gamma}{1+\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\gamma}.$$

把上述值代入，
$$\frac{2x-1}{1-x(x-1)}=\frac{2x-1}{1+3x(x+1)},$$

故 $2x-1=0$ 或
$$\frac{1}{1-x(x-1)}=\frac{1}{1+3x(x+1)}. \qquad ①$$

把①式去分母，整理，得
$$x(2x+1)=0,\quad\therefore\quad x=0,\ -\frac{1}{2}.$$

这些值不使①的分母为0，
$$\therefore\quad x=0,\quad x=\pm\frac{1}{2}.$$

2724. 解方程
$$\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\operatorname{arcsec}5x=\frac{\pi}{4}.$$

解 设 $\operatorname{arctg}x=\alpha$，$\operatorname{arcsec}5x=\beta$，

则 $\operatorname{tg}\alpha=x$，$\sec\beta=5x$，$\alpha+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$.

从而 $5x=\sec\beta=\sec\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\csc 2\alpha$
$$=\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1+x^2}{2x}.$$

因此 $10x^2=1+x^2$，

即 $9x^2=1$，$\therefore\quad x=\pm\frac{1}{3}$.

2725. 解方程
$$\arcsin\frac{2a}{1+a^2}+\arcsin\frac{2b}{1+b^2}=2\operatorname{arctg}x.$$

其中设 $|a|\leq 1$，$|b|\leq 1$.

解 设 $\operatorname{arctg}a=\theta$，则 $\operatorname{tg}\theta=a$，$|\theta|\leq\frac{\pi}{4}$.

因此

$$\sin 2\theta=\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}=\frac{2a}{1+a^2},$$

$$\therefore\quad \arcsin\frac{2a}{1+a^2}=2\theta=2\operatorname{arctg} a.$$

同理，$\arcsin\dfrac{2b}{1+b^2}=2\operatorname{arctg} b$，

因此原方程为

$$\operatorname{arctg} a+\operatorname{arctg} b=\operatorname{arctg} x,$$

其中 $|\operatorname{arctg} a+\operatorname{arctg} b|\leq\dfrac{\pi}{2}$.

两边取正切，则

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a+\operatorname{arctg} b)=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x),$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} b)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} b)}=x,$$

$$\therefore\quad x=\frac{a+b}{1-ab}.$$

2726. 解方程

$$\arcsin\frac{a}{x}+\arcsin\frac{b}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

解　设 $\arcsin\dfrac{a}{x}=\alpha$，$\arcsin\dfrac{b}{x}=\beta$，则

$$\sin\alpha=\frac{a}{x},\quad \sin\beta=\frac{b}{x},\quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}.$$

因此

$$\frac{a}{x}=\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

$$=\cos\beta=\sqrt{1-\left(\frac{b}{x}\right)^2}.$$

$$\frac{a^2}{x^2}=1-\frac{b^2}{x^2},\quad \frac{a^2+b^2}{x^2}=1,$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{a^2+b^2}.$$

(i) 当 $ab\neq0$ 时，$a>0$、$b>0$ 有

$$x=\sqrt{a^2+b^2}.$$

$a<0$、$b<0$ 有 $x=-\sqrt{a^2+b^2}$.

$ab<0$ 无解.

(ii) 当 $ab=0$ 时，$a=0$ 有 $x=b$. $b=0$ 有 $x=a$. $a=b=0$ 无解.

2727. 设 $\arcsin a=m\ (a>0)$，求

$$\arcsin a+2\arccos\sqrt{1-a^2}$$

$$+3\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

解　因为 $\arcsin a=m$，故 $\sin m=a$.

$$\therefore\quad 1-a^2=1-\sin^2 m=\cos^2 m,$$

从而 $\arccos\sqrt{1-a^2}=m.$　①

又 $\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}=\dfrac{\sin m}{\cos m}=\operatorname{tg} m.$

因此 $\operatorname{arctg}\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}=m.$　②

由 $\arcsin a=m$ 和①、②得

$$\text{原式}=m+2m+3m=6m.$$

2728. 设 $\operatorname{arctg} a=k\ (a>0)$，由

$$5\arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+8\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$-2\operatorname{arcsec}\sqrt{1+a^2}=33,$$

求 k 的值.

解　因为 $\operatorname{tg} k=a$，所以

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{\operatorname{tg} k}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 k}}=\sin k.$$

$$\therefore\quad \arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=k.\qquad ①$$

又 $\sqrt{1+a^2}=\sqrt{1+\dfrac{\sin^2 k}{\cos^2 k}}=\dfrac{1}{\cos k}=\sec k.$

$$\therefore\quad \operatorname{arcsec}\sqrt{1+a^2}=k.\qquad ②$$

从而 $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{1}{\sec k}=\cos k,$

$$\therefore\quad \arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=k.\qquad ③$$

把①、②、③代入原式，有

$$5k+8k-2k=33.$$

所以 $k=3.$

2729. 解方程

$$\operatorname{arctg} 2x+\operatorname{arctg} 3x=\frac{3\pi}{4}.$$

解　左边 $=\operatorname{arctg}\dfrac{2x+3x}{1-6x^2}=\dfrac{3\pi}{4}$，

从而 $\dfrac{2x+3x}{1-6x^2}=\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}=-1,$

故有 $6x^2-5x-1=0,$

即 $(6x+1)(x-1)=0,$

$$x=1\quad 或\quad x=-\frac{1}{6}.$$

检验后知，只有 $x=1$ 是根. $-\dfrac{1}{6}$ 是增根.

2730. 解

$$\arcsin x+\arcsin(1-x)=\arccos x.$$

解　把原方程改写成

$$\arcsin(1-x)=\arccos x-\arcsin x,$$

令 $\arccos x=\alpha$，$\arcsin x=\beta$，则

$$\arcsin(1-x)=\alpha-\beta.$$

故 $$1-x=\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

因为 $\cos\alpha=x$, 所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-x^2}$, 又因为 $\sin\beta=x$, 所以 $\cos\beta=\sqrt{1-x^2}$. 故

$$1-x=(1-x^2)-x^2=1-2x^2,$$
$$2x^2-x=0.$$

故 $$x=0 \quad 或 \quad x=\frac{1}{2}.$$

2731. 解方程

$$2\operatorname{arctg} x=\arcsin\frac{2a}{1+a^2}+\arcsin\frac{2b}{1+b^2}.$$

解 若设 $\operatorname{arctg} x=\alpha$, $\arcsin\frac{2a}{1+a^2}=A$, $\arcsin\frac{2b}{1+b^2}=B$, 则 $2\alpha=A+B$.

$$x=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$
$$=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)+1}$$
$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B+1}$$

$$\because\quad \sin A=\frac{2a}{1+a^2},\quad \cos A=\pm\frac{1-a^2}{1+a^2};$$
$$\sin B=\frac{2b}{1+b^2},\quad \cos B=\pm\frac{1-b^2}{1+b^2}.$$

$$\therefore\quad x=\pm[2a(1-b^2)+2b(1-a^2)]$$
$$\div[(1-a^2)(1-b^2)-4ab+(1+a^2)(1+b^2)],$$

或 $$x=\pm[2a(1-b^2)-2b(1-a^2)]$$
$$\div[-(1-a^2)(1-b^2)-4ab+(1+a^2)(1+b^2)].$$

当 $\cos A$、$\cos B$ 都取 + 时,

$$x=\frac{2a(1-b^2)+2b(1-a^2)}{(1-a^2)(1-b^2)-4ab+(1+a^2)(1+b^2)}$$
$$=\frac{a+b}{1-ab}.$$

注 x 有四种可能的表达式, 这是和 A、B 所在象限有关的.

2732. 证明

$$\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

其中 $0<x\leqq 1$.

解 设 $\arccos x=\alpha$, 则 $\cos\alpha=x$, $0<x\leqq 1$. 因此 $0\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}$. 在这个范围内, $\sin\alpha\geqq 0$, $\operatorname{tg}\alpha\geqq 0$. 从而

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-x^2},$$
$$\therefore\quad \arcsin\sqrt{1-x^2}=\alpha,$$

又 $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$
$$\therefore\quad \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\alpha,$$

从而 $$\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$$
$$=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

2733. 若

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{a-1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}\frac{1}{a^2-x+1},$$

求 x.

解 在 $$\operatorname{arctg}\frac{1}{a-1}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}\frac{1}{a^2-x+1},$$

两边取正切, 则

$$\frac{\frac{1}{a-1}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{(a-1)x}}=\frac{1}{a^2-x+1},$$
$$\frac{x-a+1}{ax-x+1}=\frac{1}{a^2-x+1}.$$

因此

$$(x-a+1)(a^2-x+1)=ax-x+1,$$
$$-x^2+x(a^2+a)-a^3+a^2-a+1$$
$$=ax-x+1,$$
$$x^2-x(a^2+1)+a^3-a^2+a=0.$$

解这个二次方程得

$$x=a \quad 或 \quad x=a^2-a+1.$$

2734. 解方程

$$\operatorname{arcctg} x+\operatorname{arcctg}(n^2-x+1)=\operatorname{arcctg}(n-1).$$

解 在公式

$$\operatorname{ctg}(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha_1\operatorname{ctg}\alpha_2-1}{\operatorname{ctg}\alpha_1+\operatorname{ctg}\alpha_2}$$

中设 $\operatorname{ctg}\alpha_1=x$, $\operatorname{ctg}\alpha_2=n^2-x+1$, 则

$$\alpha_1+\alpha_2=\operatorname{arcctg}\frac{x(n^2-x+1)-1}{x+(n^2-x+1)},$$

即　$\operatorname{arcctg} x+\operatorname{arcctg}(n^2-x+1)$

$$=\operatorname{arcctg}\frac{n^2x-x^2+x-1}{n^2+1}.$$

从而　$\frac{n^2x-x^2+x-1}{n^2+1}=n-1.$

$$n^2x-x^2+x-1=n^3-n^2+n-1.$$

因而得　$x=n,\ x=n^2-n+1.$

2735. 设 $x\neq\pm\frac{1}{2}$，求适合

$$\arcsin x+\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}=60^\circ$$

的 x。

解　取 $\alpha=\arcsin x,\ \beta=\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$，则 $\alpha=60^\circ-\beta$.

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta-\frac{1}{2}\sin\beta.\qquad ①$$

因为 $x=\sin\alpha$，所以

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}=\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-4\sin^2\alpha}}.$$

因此（$\because\ \cos\beta\geq0$）

$$\sin\beta=2\sin\alpha,\ \cos\beta=\sqrt{1-4\sin^2\alpha}$$

代入①式，并注意到 $\sin\alpha=x,\ x\neq\pm\frac{1}{2}$，则

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-4x^2}-x,$$

$$\therefore\quad 4x=\sqrt{3(1-4x^2)}.$$

平方、化简得

$$x^2=\frac{3}{28},\quad \therefore\quad x=\pm\frac{\sqrt{21}}{14}$$

（负值不适合，舍去）。

2736. 解方程

$$\operatorname{arcctg}\frac{1}{x+1}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{x-1}=\operatorname{arctg}3x-\operatorname{arctg}x.$$

解　设

$$\alpha=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x+1},\quad \beta=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x-1},$$

$$\gamma=\operatorname{arctg}3x,\ \delta=\operatorname{arctg}x,$$

则由　$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(\gamma-\delta)$，

得　$\frac{2x}{1-(x^2-1)}=\frac{2x}{1+3x^2},$

由此解得 $x=0,\ \pm\frac{1}{2}$. 经检验，全部是增根。

2737. 由

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{6}+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{1}{4}\pi,$$

求 x。

解　设 $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\alpha,\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\beta,$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{6}=\gamma,$$

则原方程为

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{4}-(\alpha+2\beta+\gamma).$$

从而　$\frac{1}{x}=\frac{1-\operatorname{tg}(\alpha+2\beta+\gamma)}{1+\operatorname{tg}(\alpha+2\beta+\gamma)},$

又　$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}}=\frac{9}{19},$

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}}=\frac{11}{29},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\beta+\gamma)=\frac{\frac{9}{19}+\frac{11}{29}}{1-\frac{9}{19}\times\frac{11}{29}}=\frac{470}{452}.$$

从而

$$\frac{1}{x}=\frac{1-\frac{470}{452}}{1+\frac{470}{452}}=-\frac{18}{922}=-\frac{9}{461},$$

故　$x=-\frac{461}{9}.$

2738. 由 $\sin[2\arccos(\operatorname{ctg}2\operatorname{arctg}x)]=0$ 求 x。

解　设 $\operatorname{arctg}x=\theta$，则 $\operatorname{tg}\theta=x$，

$$\operatorname{ctg}2\theta=\frac{1}{\operatorname{tg}2\theta}=\frac{1-x^2}{2x},$$

即给出的方程为

$$\sin\left(2\arccos\frac{1-x^2}{2x}\right)=0.$$

因为 $2\arccos\frac{1-x^2}{2x}$ 的正弦为 0，则必为 $n\pi$ 的形式，即

$$2\arccos\frac{1-x^2}{2x}=n\pi,$$

故　$$\arccos\frac{1-x^2}{2x}=\frac{n\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{1-x^2}{2x}=\cos\frac{n\pi}{2}.$$

因为 n 可为任意整数，故 $\cos\frac{n\pi}{2}=0$ 或 ±1。当 $\frac{1-x^2}{2x}=0$ 时 $x=\pm1$，当 $\frac{1-x^2}{2x}=1$ 时 $x^2+2x=1$ 即 $x=-1\pm\sqrt{2}$，当

$$\frac{1-x^2}{2x}=-1$$

时 $x^2-2x=1$ 即 $x=1\pm\sqrt{2}$，把上述结果综合起来有 $x=\pm1$，$-1\pm\sqrt{2}$，$1\pm\sqrt{2}$。

2739. 由

$$3\operatorname{arctg}\frac{1}{2+\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$$

求 x。

解　设 $\operatorname{arctg}\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\theta$，

则　$$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2+\sqrt{3}},$$

因此　$$\operatorname{tg}3\theta=\frac{\frac{3}{2+\sqrt{3}}-\frac{1}{(2+\sqrt{3})^3}}{1-\frac{3}{(2+\sqrt{3})^2}}$$

$$=\frac{3(2+\sqrt{3})^2-1}{(2+\sqrt{3})^3-3(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{20+12\sqrt{3}}{20+12\sqrt{3}}=1,$$

所以 $3\theta=\operatorname{arctg}1$。原方程成为

$$\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

两边取正切，则

$$\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{x},$$

故　$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$，　即　$x=2$。

2740. 求 $\cos 4(\operatorname{arctg}a)$ 的值。

解　设 $\theta=\operatorname{arctg}a$，则要求的就是 $\cos 4\theta$。因

$$\operatorname{tg}\theta=a,\quad \cos2\theta=\frac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta},$$

所以

$$\cos4\theta=2\cos^2 2\theta-1=\frac{2(1-a^2)^2}{(1+a^2)^2}-1$$

$$=\frac{1-6a^2+a^4}{(1+a^2)^2}.$$

2741. 如果 $\sin^2\theta+\sin^2\varphi=\frac{1}{2}$，证明，$\pm\frac{\pi}{2}$ 是满足

$$\psi=\arcsin(\sin\theta+\sin\varphi)+\arcsin(\sin\theta-\sin\varphi)$$

的 ψ 值。

解　若设 $\alpha=\arcsin(\sin\theta+\sin\varphi)$，

则　$$\sin\alpha=\sin\theta+\sin\varphi.$$

设　$$\beta=\arcsin(\sin\theta-\sin\varphi),$$

则　$$\sin\beta=\sin\theta-\sin\varphi.$$

因此当 $\sin^2\theta+\sin^2\varphi=\frac{1}{2}$ 时，

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}-2\sin\theta\sin\varphi},$$

$$\cos\beta=\sqrt{\frac{1}{2}+2\sin\theta\sin\varphi}.$$

$$\therefore\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta=1.$$

因为　$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1,$$

所以　$$\sin^2\alpha=\cos^2\beta.$$

$$\therefore\quad \cos2\alpha+\cos2\beta=0,$$

$$2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=0.$$

显然 $\alpha+\beta=\pm\frac{\pi}{2}$ 是满足上述等式的。故得证。

2742. 求所有满足 $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y=\operatorname{arctg}3$ 的正整数 x、y。

解　原式为 $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{y}=\operatorname{arctg}3$，两边取正切后，有

$$\frac{x+\frac{1}{y}}{1-\frac{x}{y}}=3.$$

故　$$3(y-x)=yx+1,$$

即　$$x=\frac{3y-1}{y+3}=\frac{3y+9-10}{y+3}=3-\frac{10}{y+3}.$$

因为 x，y 都取正整数，所以 $y+3$ 必须是 10 的正约数。依次使 $y+3$ 等于 1, 2, 5, 10, 检

验后知只有 5、10 才有解．由 $y+3=5$ 解出 $y=2$, $x=1$．由 $y+3=10$ 解出 $y=7$, $x=2$.

2743. 若 c 为正整数．试求能给出

$$\operatorname{arcctg} x+\operatorname{arcctg} y=\operatorname{arcctg} c$$

的正整数解 x、y 的公式．

解 设 $\alpha=\operatorname{arcctg} x$, $\beta=\operatorname{arcctg} y$, $\gamma=\operatorname{arcctg} c$, 则 $\operatorname{ctg}\alpha=x$, $\operatorname{ctg}\beta=y$, $\operatorname{ctg}\gamma=c$, $\alpha+\beta=\gamma$.

$$\therefore\quad \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=c,$$

$$\therefore\quad \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=c,$$

即
$$\frac{xy-1}{x+y}=c,$$

因此
$$xy-c(x+y)-1=0.$$

$$(x-c)(y-c)=c^2+1,$$

$$\therefore\quad y-c=\frac{c^2+1}{x-c}.$$

设上式为 A，则 A 应为整数（A 正负不定）：

$$\frac{c^2+1}{x-c}=A,\quad \therefore\quad c^2+1=Ax-Ac.$$

$$\therefore\quad x=c+\frac{c^2+1}{A}.$$

故 A 应取 c^2+1 的约数．当 $A<0$ 时，要取能使 x 为正的那些值．而且因为 $y-c=A$,

$$\therefore\quad y=c+A>0,\quad \therefore\quad A>-c.$$

即 A 还需大于 $-c$．当 $A>0$ 时，x、y 显然都大于 0，这时只需取 A 为 c^2+1 的约数即可．

2744. 求满足下列各方程式的所有小于 $360°$ 的正角．

(1) $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;　　(2) $\operatorname{tg}\theta=-\sqrt{3}$;

(3) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;　　(4) $\operatorname{tg}\theta=-1$.

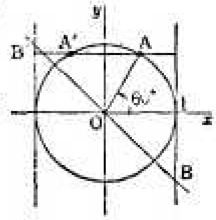
解 (1) 因为 $\cos\theta>0$，在 y 轴的右侧作一条 y 轴的平行线且与 y 轴相距 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，考察与单位圆交点，得 $\theta=45°$, $315°$.

(2) 考察过单位圆上 $(1, 0)$ 点的切线上一点 $(1, -\sqrt{3})$，得 $\theta=120°$, $300°$.

(3) 在 x 轴上方，作水平线 AA' 与单位圆 O 相交，AA' 的方程式为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．得

$$\theta=60°,\ 120°.$$

(4) 考察 $y=-x$ 与 $x=1$ 的交点 B，得 $\theta=135°$、$315°$.



2745. 求适合方程

$$2\cos\theta=\sec\theta$$

的 θ 值．

解 用 $\dfrac{1}{\cos\theta}$ 代替 $\sec\theta$．则 $2\cos^2\theta=1$,

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2},\quad \cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

从而 $\theta=45°$ 或 $\theta=135°$．因为在角没有限制时解三角方程应求出一般角，故解为

$$\theta=180°n\pm45°.$$

2746. 求适合方程 $3\operatorname{tg}\theta=\operatorname{ctg}\theta$ 的 θ 值．

解 因为 $\operatorname{ctg}\theta=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta}$，去分母后，有

$$3\operatorname{tg}^2\theta=1,\quad \operatorname{tg}^2\theta=\frac{1}{3},\quad \operatorname{tg}\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

从而 $\theta=30°$ 或 $-30°$．所求的一般角为

$$\theta=180°n\pm30°.$$

2747. 若 $0°<A<90°$，求满足方程

$$\sec 5A=\csc A$$

的 A 值．

解 显然 $0°<5A<540°$．若 $5A=90°-A$，则 $6A=90°$，从而 $A=15°$，又从 $5A=360°+(90°-A)$ 得 $A=75°$．从 $5A=360°-(90°-A)$ 得 $A=67.5°$．故共有 $A=15°$, $67.5°$, $75°$ 三个解．

2748. 若 $0°<A<180°$，问适合方程 $\operatorname{ctg}A=\operatorname{tg}A$ 的 A 是多少？

解 由 $\operatorname{ctg}A=\operatorname{tg}A$ 得 $\operatorname{tg}^2A=1$, $\operatorname{tg}A=\pm1$，所以 $A=45°$，或 $A=135°$.

2749. 给出满足方程 $\sin 2A=\cos 4A$ 的 A 值．

解 $\sin 2A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-4A\right)$，故

$$\frac{\pi}{2}-4A=n\pi+(-1)^n 2A,$$

$$\therefore\quad 2[2+(-1)^n]A=\frac{1-2n}{2}\pi,$$

$$\therefore\quad A=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1-2n}{2+(-1)^n},$$

$n=0$ 时 $A=\frac{\pi}{12}$, $n=-1$ 时 $A=\frac{3\pi}{4}$, …。

2750. 给出满足方程 $2\sin A=\csc A$ 的 A 值。

解 用 $\frac{1}{\sin A}$ 代替 $\csc A$ 并去分母，则有 $2\sin^2 A=1$, 从而 $\sin^2 A=\frac{1}{2}$, $\sin A=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $A=\frac{\pi}{4}$ 或 $-\frac{\pi}{4}$，它的一般解为 $A=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$。

2751. 求满足下列方程的角 θ。

(1) $4\sin\theta=\csc\theta$;

(2) $4\sin\theta-3\csc\theta=0$;

(3) $\sin 5\theta=\cos 4\theta$;

(4) $4\cos\theta-3\sec\theta=0$;

(5) $\operatorname{tg}3\theta=\operatorname{ctg}2\theta$;

(6) $\operatorname{tg}\theta+3\operatorname{ctg}\theta=4$;

(7) $2\sin^2\theta+\sqrt{2}\cos\theta=2$;

(8) $\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta+\frac{3}{4}=0$。

解 (1) $\sin^2\theta=\frac{1}{4}$, $\therefore\ \sin\theta=\pm\frac{1}{2}$.

$$\therefore\ \theta=n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

(2) $4\sin^2\theta=3$, $\therefore\ \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore\ \theta=n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{3}.$$

(3) $\sin 5\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\theta\right)$,

$$\therefore\ \frac{\pi}{2}-4\theta=n\pi+(-1)^n 5\theta.$$

因此 $[4+(-1)^n\cdot 5]\theta=\frac{1-2n}{2}\pi$,

$$\therefore\ \theta=\frac{1-2n}{2[4+(-1)^n\cdot 5]}\pi.$$

(4) $4\cos^2\theta=3$, $\therefore\ \cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\therefore\ \theta=n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

(5) $\operatorname{tg}3\theta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$, 因此

$$\frac{\pi}{2}-2\theta=n\pi+3\theta,$$

$$\therefore\ \theta=\frac{1-2n}{10}\pi.$$

(6) $\operatorname{tg}^2\theta-4\operatorname{tg}\theta+3=0$, 因此

$$(\operatorname{tg}\theta-1)(\operatorname{tg}\theta-3)=0.$$

$$\therefore\ \operatorname{tg}\theta-1=0,\ \text{即}\ \theta=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

或 $\operatorname{tg}\theta-3=0$, 即 $\theta=n\pi+\operatorname{arctg}3$。

(7) $2\cos^2\theta-\sqrt{2}\cos\theta=0$,

由 $\cos\theta=0$ 得 $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$, 由 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$。

(8) $4\cos^2\theta-4\sqrt{3}\cos\theta+3=0$,

$$\therefore\ (2\cos\theta-\sqrt{3})^2=0.$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad\therefore\ \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

2752. 求满足方程

$$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=1$$

的角 θ，θ 是不大于 360° 的非负角。

解 因为 $\sqrt{3}=\operatorname{tg}60^\circ$，所以把方程变形，有

$$\cos\theta+\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\sin\theta=1.$$

$$\cos 60^\circ\cos\theta+\sin 60^\circ\sin\theta=\cos 60^\circ.$$

$$\cos(\theta-60^\circ)=\cos 60^\circ.$$

所以 $\theta-60^\circ=-60^\circ, 60^\circ, 300^\circ, \cdots$.

故当 θ 只取不大于 360° 的非负角时，应有 $\theta=0^\circ, 120^\circ, 360^\circ$。

2753. 在 360° 以内适合方程

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

的正角 θ 是哪些？

解 原式可化成

$$\sqrt{2}\sin(45^\circ+\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore\ \sin(45^\circ+\theta)=\frac{1}{2}.$$

$$45^\circ+\theta=30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ, \cdots.$$

故当 θ 只取 360° 以内的正值时有 $\theta=105^\circ$ 或 345°。

2754. 求满足下列方程的不超过 360° 的正角。

(1) $2\sin^2\theta+3\cos\theta-3=0$;

(2) $\cos\theta+\operatorname{tg}\theta=\sec\theta$;

(3) $\sec^3\theta-2\,\mathrm{tg}^2\theta=2$.

解　(1) 由给出的方程得

$$2-2\cos^2\theta+3\cos\theta-3=0.$$

即
$$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0,$$
$$(2\cos\theta-1)(\cos\theta-1)=0,$$
$$2\cos\theta-1=0\quad 或\quad \cos\theta-1=0,$$

从而
$$\cos\theta=\frac{1}{2}\quad 或\quad \cos\theta=1.$$

由第一个式子得 $\theta=60°,\ 300°$，由第二个关系式得 $\theta=360°$.

(2) 把 $\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$ 去分母，得

$$\cos^2\theta+\sin\theta=1,\ 1-\sin^2\theta+\sin\theta=1.$$
$$\sin^2\theta-\sin\theta=0,$$
$$\sin\theta(\sin\theta-1)=0.$$

从而 $\sin\theta=0$，$\sin\theta-1=0$. 由 $\sin\theta=0$ 得 $\theta=180°,\ 360°$. 由 $\sin\theta-1=0$ 得 $\theta=90°$.

(3) 由给出的方程得

$$\sec^3\theta-2(1+\mathrm{tg}^2\theta)=0,$$

即
$$\sec^3\theta-2\sec^2\theta=0.$$

两边除以 $\sec^2\theta$($\sec^2\theta$ 不会为 0) 得 $\sec\theta=2$. 故得 $\theta=60°,\ 300°$.

2755. 在 360° 内适合方程 $\csc\theta-4\sin\theta=2$ 的正角有哪些?

解　由给出的方程得

$$\frac{1}{\sin\theta}-4\sin\theta=2,$$
$$1-4\sin^2\theta=2\sin\theta.$$
$$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0.$$

因此 $\sin\theta=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}$. 当 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 时有 $\theta=18°,\ 162°$. 当 $\sin\theta=\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$ 时，

$$\theta=234°、306°.$$

2756. 证明下列等式.

(1) $\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

$$=\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.\qquad (x>0)$$

(2) $\mathrm{arctg}\,x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\qquad (x\geqq 0)$$

解　(1) 设 $\arccos x=\alpha$，则因为 $0<x\leqq 1$，所以 $0\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}$ 在这个范围内

$$\sin\alpha\geqq 0,\ \mathrm{tg}\,\alpha\geqq 0.$$
$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}.$$
$$\therefore\quad \arcsin\sqrt{1-x^2}=\alpha.$$

又
$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$
$$\therefore\quad \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\alpha.$$

(2) 设 $\mathrm{arctg}\,x=\beta$，则因 $\mathrm{tg}\,\beta=x$，$x\geqq 0$，故 $0\leqq\beta<\frac{\pi}{2}$. 因此

$$\sin\beta\geqq 0,\ \cos\beta>0.$$

从而
$$\cos^2\beta=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\beta}=\frac{1}{1+x^2}.$$
$$\therefore\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\beta.$$

又因
$$\sin\beta=\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\beta=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\therefore\quad \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\beta.$$

第八章　棣莫佛定理，复数，向量

1. 棣莫佛(De Moivre)定理

2757. 证明下列等式成立.

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha.$$

解

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2i\cos\alpha\sin\alpha,$$

其中
$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha,$$
$$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha,$$

所以

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha.$$

2758. 证明

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta.$$

解

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta,$$

因此

$$(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=(\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta)$$
$$+i(\cos 2\theta\sin\theta+\sin 2\theta\cos\theta)$$
$$=\cos 3\theta+i\sin 3\theta.$$

2759. 证明：若 n 为正整数，则

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

解　设对于整数 k，有

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta.$$

两边乘上 $\cos\theta+i\sin\theta$，得

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^k(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta$$
$$+i(\cos k\theta\sin\theta+\sin k\theta\cos\theta)$$
$$=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta.$$

$$\therefore\quad(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}$$
$$=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta.$$

因为

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

当 $n=1$ 时成立，若当 $n=k$ 时成立可推得 $n=k+1$ 时也成立，所以这个式子对任意正整数 n 成立.

这就称作为棣莫佛定理.

2760. 当 n 为负整数时，证明

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

解　设 $n=-m$，则

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}$$
$$=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^m}=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta},$$

分子、分母同乘以 $\cos m\theta-i\sin m\theta$ 得，

$$\text{上式}=\frac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta+\sin^2 m\theta}$$
$$=\cos m\theta-i\sin m\theta.$$

因为
$$\cos m\theta=\cos(-m\theta),$$
$$\sin(m\theta)=-\sin(-m\theta),$$

故　$\text{上式}=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)$，

即当 n 为负整数时，欲证之式成立.

2761. 证明棣莫佛定理当 n 为分数时也是成立的.

解　在 $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ 中，设

$$n=\frac{p}{q},\quad\alpha=\frac{p}{q}\theta,$$

则

$$\left(\cos\frac{p}{q}\theta+i\sin\frac{p}{q}\theta\right)^q=\cos p\theta+i\sin p\theta$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^p.$$

从而 $\cos\frac{p}{q}\theta+i\sin\frac{p}{q}\theta$ 是

$$[(\cos\theta+i\sin\theta)^p]^{\frac{1}{q}}$$

即 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ 的一个可取值．因此当 n 是分数时棣莫佛定理也成立.

2762. 证明棣莫佛定理当 n 是无理数时也是成立的.

解　一般地，无理数可以看成是有理数数列的极限，由于棣莫佛定理对任意有理数都成立，对于作为有理数列极限的无理数该定理也成立.

2763. 证明：当 n 为正整数时

$$(\cos\theta-i\sin\theta)^n=\cos n\theta-i\sin n\theta.$$

解　在棣莫佛定理中，设 θ 为 $-\theta$，则

$$[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^n$$
$$=\cos n(-\theta)+i\sin n(-\theta)$$

中因为　$\cos(-n\theta)=\cos n\theta$,

$\sin(-n\theta)=-\sin n\theta$.

所以上式为 $\cos n\theta-i\sin n\theta$,

$$\therefore\quad (\cos\theta-i\sin\theta)^n=\cos n\theta-i\sin n\theta.$$

2764. 用棣莫佛定理证明下面的等式.

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta;$$
$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta.$$

解　由棣莫佛定理知

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta,$$

把上式左边展开，有

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta=\cos 2\theta+i\sin 2\theta.$$

两边的实部和虚部分别相等，则有

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta,$$
$$2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta.$$

2765. 用棣莫佛定理证明

(1) $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$;

(2) $\sin 3\theta=3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$.

解　(1)

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta,$$

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\, i\sin\theta+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3\\&=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta\\&=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta),\end{aligned}$$

$$\text{右边}=\cos 3\theta+i\sin 3\theta.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \cos 3\theta&=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta\\&=\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)\\&=4\cos^3\theta-3\cos\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\quad \sin 3\theta&=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\\&=3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta\\&=3\sin\theta-4\sin^3\theta.\end{aligned}$$

2766. 用棣莫佛定理推导倍角公式.

解　先由三角函数的加法定理得到棣莫佛定理，

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.\quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)\qquad ①$$

当 n 为自然数时，把上式左边用二项式定理展开，有

$$\begin{aligned}&\cos^n\theta+C_n^1\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta)+C_n^2\cos^{n-2}\theta(i\sin\theta)^2+C_n^3\cos^{n-3}\theta(i\sin\theta)^3+\cdots\\&=\cos^n\theta+in\sin\theta\cos^{n-1}\theta-C_n^2\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta-iC_n^3\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta+C_n^4\sin^4\theta\cos^{n-4}\theta+\cdots\end{aligned}$$

比较 ① 式左右两边的实部与虚部，则有

$$\begin{cases}\cos n\theta=\cos^n\theta-C_n^2\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta+C_n^4\sin^4\theta\cos^{n-4}\theta-\cdots\\ \sin n\theta=n\sin\theta\cos^{n-1}\theta-C_n^3\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta+\cdots\end{cases}\qquad ②$$

从而可得

$$\operatorname{tg} n\theta=\frac{n\operatorname{tg}\theta-C_n^3\operatorname{tg}^3\theta+C_n^5\operatorname{tg}^5\theta-\cdots}{1-C_n^2\operatorname{tg}^2\theta+C_n^4\operatorname{tg}^4\theta-\cdots}.\qquad ③$$

特别地当 $n=2,\ 3$ 时，② 式分别为

$$\begin{cases}\cos 2\theta=\cos^2\theta-C_2^2\sin^2\theta\cos^0\theta\\ \qquad=\cos^2\theta-\sin^2\theta,\\ \sin 2\theta=2\sin\theta\cos^1\theta\\ \qquad=2\sin\theta\cos\theta.\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}\cos 3\theta=\cos^3\theta-C_3^2\sin^2\theta\cos^1\theta\\ \qquad=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta\\ \qquad=4\cos^3\theta-3\cos\theta.\\ \sin 3\theta=3\sin\theta\cos^2\theta-C_3^3\sin^3\theta\cos^0\theta\\ \qquad=3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta\\ \qquad=3\sin\theta-4\sin^3\theta.\end{cases}$$

与以前得出的公式是一致的.

2767. 试给出 $\sin n\theta$、$\cos n\theta$ 的展开公式，并以此把 $\operatorname{tg} n\theta$ 表示成 $\operatorname{tg}\theta$ 的分式函数.

解　由棣莫佛定理，

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,$$

设 $f=\sin\theta$，$g=\cos\theta$，把左边作二项式展开，

$$\begin{aligned}&(g+if)^n\\&=g^n+\frac{n}{1!}fg^{n-1}i-\frac{n(n-1)}{2!}f^2g^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1!}f^3g^{n-3}i+\cdots+(if)^n.\end{aligned}$$

把右边的实部、虚部分别设为 g_n, f_n，即右边 $=g_n+if_n$，则 $\cos n\theta=g_n$，$\sin n\theta=f_n$．另一方面

$$f_n=nfg^{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}f^3g^{n-3}+\cdots,$$

$$g_n=g^n-\frac{n(n-1)}{2!}f^2g^{n-2}+\cdots.$$

因为　$\operatorname{tg} n\theta=\frac{f_n}{g_n}$,

分子、分母除以 g^n 以后，有

$$\operatorname{tg} n\theta=\frac{n\operatorname{tg}\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\operatorname{tg}^3\alpha+\cdots}{1-\frac{n(n-1)}{2!}\operatorname{tg}^2\theta+\cdots}.$$

2768. 证明，若 n 为整数，则

$$\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n=\cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right).$$

解

$$1+\sin\theta+i\cos\theta=\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2+i\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)\times\left[\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)+i\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$=\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right],$$

同理，

$$1+\sin\theta-i\cos\theta=\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\times\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

因此

$$\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

$$\therefore\quad\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]^n$$

$$=\cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right).$$

2769. 证明，若 n 为整数，则

$$[(\cos\theta+\cos\varphi)+i(\sin\theta+\sin\varphi)]^n+[(\cos\theta+\cos\varphi)-i(\sin\theta+\sin\varphi)]^n=2^{n+1}\left(\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^n\cos\frac{n(\theta+\varphi)}{2}.$$

解

$$(\cos\theta+\cos\varphi)+i(\sin\theta+\sin\varphi)=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\left(\cos\frac{\theta+\varphi}{2}+i\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right).$$

$$(\cos\theta+\cos\varphi)-i(\sin\theta+\sin\varphi)=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\left(\cos\frac{\theta+\varphi}{2}-i\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right).$$

再用棣莫佛定理即得证。

2. 复数

2770. 什么叫做复数？

解　当 x、y 是实数，$i=\sqrt{-1}$ 为虚数单位时，用 $x+yi$ 形式表示的数叫复数。当且仅当 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ 时有 $x_1+y_1i=x_2+y_2i$. 当 $y=0$ 时，$x+yi$ 成为实数 x。当且仅当 $x=y=0$ 时有 $x+yi=0$.

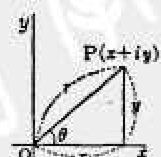
复数的运算法则为

$$(x_1+y_1i)\pm(x_2+y_2i)=(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)i.$$

$$(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i.$$

$$\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}.$$

2771. 什么叫做复平面(Gauss 平面)。



解　在平面上取直角坐标系，把点 (x, y) 与一个复数 $z=x+iy$ 对应，则平面上的所有点和全部复数是一一对应的。象这样用复数表示平面上的点时，这个平面就叫复平面或高斯(Gauss)平面。在右图中设 $OP=r$，则 $\sqrt{x^2+y^2}=r$. 因此若 $\angle POx=\theta$，则

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta.$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 叫做 $z=x+iy$ 的模，θ 叫做

z 的辐角(参见下题)。

2772. 什么叫复数的模? 什么叫复数的三角函数表示?

解　设复数 $x+iy$ 表示的点为 P, 如前题图, 设 $OP=r$, $\angle xOP=\theta$, 则

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta.$$

$$\therefore\quad x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

这就叫做复数的三角函数表示, 其中 r 叫做这个复数的模, θ 叫做这个复数的辐角.

注　(i) 复数 $x+iy$ 与 $x-iy$ 叫做互为共轭的. 它们表示的两点关于 x 轴对称.

因为 x 轴上的点都有 $y=0$. 所以 x 轴上的点为全体实数. 又因为 y 轴上的点都有 $x=0$, 所以 y 轴上的点为全体纯虚数 iy. 因此, x 轴、y 轴分别称为实轴和虚轴.

(ii) 从 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 中解出 r、θ, 有

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}.$$

而用 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x}$ 求 θ 时, 要依照 $x+iy$ 所在的象限来确定 θ.

2773. 在复平面上表示出下列复数.

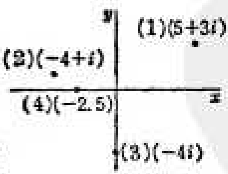
(1) $5+2i$;

(2) $-4+i$;

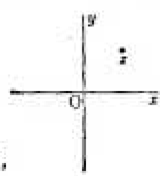
(3) $-4i$;

(4) -2.5.

解　如右图.



2774. 复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示. 如下图那样给出点 z, 求下列复数所表示的点.



(1) $\bar{z}$;

(2) $-z$;

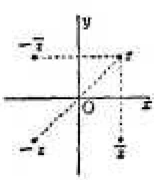
(3) $-\bar{z}$.

解　设 $z=a+bi$, 则

$$\bar{z}=a-bi,\ -z=-a-bi,$$

$$-\bar{z}=-(a-bi)$$

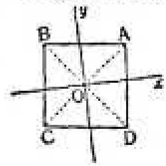
$$=-a+bi,$$



因而点 z 和点 $\bar{z}$ 关于 x 轴对称, 点 z 和点 $-z$ 关于原点对称, 点 z 和点 $-\bar{z}$ 关于 y 轴对称. 点 $\bar{z}$, $-z$, $-\bar{z}$ 如右图所示.

2775. 设有复数 $a+bi=z$, 依次连结 z, zi, $-z$, $-zi$ 所表示的四点, 问得到一个怎样的四边形.

解　设复数 z, zi, $-z$, $-zi$ 表示的四点为 A、B、C、D, 设 $z=a+bi$, 则



$$zi=(a+bi)i=-b+ai,$$

$$-z=-a-bi,$$

$$-zi=(-a-bi)i$$

$$=b-ai,$$

因此在直角坐标系中考察, 得四点坐标为

$$A(a,\ b),\ B(-b,\ a),$$

$$C(-a,\ b),\ D(b,\ -a)$$

且　$OA=OB=OC=OD=\sqrt{a^2+b^2}$.

所以四边形 $ABCD$ 是矩形. 又若设 OA、OB 的斜率分别为 m, m'. 则

$$m=\frac{b}{a},\ m'=-\frac{a}{b}.$$

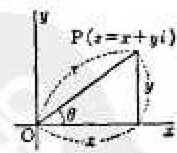
$$\therefore\quad mm'=-1,\quad \therefore\quad OA\perp OB.$$

因此矩形 $ABCD$ 的对角线是正交的, 即 $ABCD$ 是正方形.

2776. 设坐标平面上对应于复数 $z=x+yi$ 的点为 $P(x,\ y)$, 试问

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

中 r、θ 表示点 P 的什么性质, 其中设 $z\neq0$.



解　因为

$$x^2+y^2=OP^2,$$

所以　　　$r=OP$.

又因为　　$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$,

所以　　　$\theta=\angle xOP$.

如前所述, i 称为虚数单位, $a+bi$(a、b 为实数)型的数叫复数. 作复数的加、减、乘、除时, i 可当作为一个实数情况下的字母来处理, 只是 i^2 为 -1. $a+bi$ 只有当 $a=0$, $b=0$ 时才等于 0. 从而

$$a+bi=a'+b'i \rightleftarrows a=a',\ b=b'.$$

当用平面上的点表示复数时, 这个平面叫高斯平面或复平面, x 轴叫实轴, y 轴叫虚轴. 实轴上的点表示实数, 虚轴上的点表示纯虚数.

当复数 $z=x+yi$ 用 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 表出时, 叫作复数用三角函数式表示. r 叫 z 的模, 用 $r=|z|$ 表示, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 而 θ 叫

作 z 的幅角.

例如 $1+i$, $-\sqrt{3}-i$ 的模分别为 $\sqrt{2}$、2, 幅角分别为 $45°$、$210°$. 不仅复数可用平面上的点表示, 反过来平面上的点也可用复数表示. 于是许多几何问题就可以用复数来解答.

2777. 求下列复数的模和幅角.

(1) $1+i$, (2) $-1-\sqrt{3}i$,

(3) $2i$, (4) -3, (5) $-2.5i$.

解 设复数 z 的模为 $|z|$, 幅角的主值为 θ,

(1) $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

又因为点 z 在第一象限,所以由

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{1}=1 \quad 得 \quad \theta=\frac{\pi}{4}.$$

(2) $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$.

又因为点 z 在第三象限,所以由

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$$

得 $$\theta=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi.$$

(3) $|z|=2$, $\theta=\frac{\pi}{2}$.

(4) $|z|=3$, $\theta=\pi$.

(5) $|z|=2.5$, $\theta=\frac{3\pi}{2}$.

2778. 证明, 如果两个虚数的积与和都是实数时,这两个虚数是共轭的.

解 设两个虚数为 $a+bi$, $c+di(bd\neq 0)$, 则

$$a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i,$$

因为这两个答数都是实数,所以

$$b+d=0, \quad ① \qquad ad+bc=0, \quad ②$$

由 ① 得 $d=-b$, 代入 ②, 有

$$-ab+bc=0,$$

因为 $b\neq 0$, 得 $a=c$. 从而 $c+di=a-bi$, 即 $c+di$ 与 $a+bi$ 共轭.

2779. 把下列复数用三角函数形式表示.

(1) $-1-i$, (2) $-\sqrt{3}+i$,

(3) i, (4) $-i$,

(5) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, (6) $3+4i$.

解 设复数 z 的模为 $|z|$, 幅角的主值为 θ,

(1) $$|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},$$
$$\theta=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4},$$
$$-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

(2) $|z|=\sqrt{1+3}=2$, $\operatorname{tg}\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$,
$$\therefore\quad \theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6},$$
$$\therefore\quad -\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

(3) $$|z|=1,\ \theta=\frac{\pi}{2},$$
$$\therefore\quad i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}.$$

(4) $$|z|=1,\ \theta=\frac{3}{2}\pi,$$
$$\therefore\quad -i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}.$$

(5) $$|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1,$$
$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3},$$
$$\therefore\quad \theta=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}.$$
$$\therefore\quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

(6) $|z|=\sqrt{9+16}=5$, $\operatorname{tg}\theta=\frac{4}{3}$,
$$\therefore\quad 3+4i=5(\cos\theta+i\sin\theta),$$

其中 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$.

2780. 若复平面上有 z_1, z_2, z_3 三点, 设三角形 $z_1z_2z_3$ 的重心为 z, 证明

$$z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

解 设三个复数

$z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, $z_3=x_3+iy_3$

在复平面上表示的点分别为 A、B、C, 这些点的直角坐标为

$$A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2),\ C(x_3,\ y_3).$$

从而三角形 ABC 的重心 $G(x,\ y)$ 为

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad z&=x+iy\\&=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}+i\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\\&=\frac{1}{3}\Big[(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)\\&\quad+(x_3+iy_3)\Big]\\&=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}.\end{aligned}$$

2781. 计算:

(1) $(1+i)^5$,　　　(2) $(1-i)^8$,

(3) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3$.　　(4) $(3+\sqrt{3}i)^4$.

解　设复数 z 的模为 $|z|$，幅角的主值为 θ。

(1) 设 $z=1+i$，则

$$|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\ \operatorname{tg}\theta=1,$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad (1+i)^5&=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^5\\&=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)\\&=4\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\&=-4(1+i).\end{aligned}$$

(2) 设 $z=1-i$，则

$$|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\ \operatorname{tg}\theta=-1,$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &(1-i)^8\\&=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^8\\&=16(\cos 14\pi+i\sin 14\pi)\\&=16\times1=16.\end{aligned}$$

(3) 设 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则

$$|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1,\ \operatorname{tg}\theta=\sqrt{3},$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3&=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3\\&=\cos\pi+i\sin\pi=-1.\end{aligned}$$

(4) 设 $z=3+\sqrt{3}i$，则

$$|z|=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3},\ \operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{6}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &(3+\sqrt{3}i)^4\\&=\left[2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^4\\&=144\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\&=144\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\&=72(-1+\sqrt{3}i).\end{aligned}$$

2782. 求满足 $\sqrt{3}+i=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的最小正角 θ。并以此计算 $(\sqrt{3}+i)^6$ 的值。

解　由 $\sqrt{3}+i=2\cos\theta+2i\sin\theta$ 得

$$2\cos\theta=\sqrt{3},\ 2\sin\theta=1,$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta=\frac{1}{2}.$$

满足这两个式子的最小正角 θ 为 $\theta=\frac{\pi}{6}$,

$$\begin{aligned}\therefore\quad &(\sqrt{3}+i)^6\\&=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6\\&=2^6\left[\cos\left(6\times\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(6\times\frac{\pi}{6}\right)\right]\\&=64(\cos\pi+i\sin\pi)=-64.\end{aligned}$$

2783. 若 p 为奇数，求

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}.$$

解　$\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$,

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4},$$

所以

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}\\&=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2p}\\&\quad+\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)^{2p}\end{aligned}$$

$$=\left(\cos\frac{p\pi}{2}+i\sin\frac{p\pi}{2}\right)$$
$$+\left(\cos\frac{7p\pi}{2}+i\sin\frac{7p\pi}{2}\right)$$
$$=\cos\frac{p\pi}{2}+i\sin\frac{p\pi}{2}$$
$$+\cos\left(4p\pi-\frac{p\pi}{2}\right)+i\sin\left(4p\pi-\frac{p\pi}{2}\right)$$
$$=\cos\frac{p\pi}{2}+i\sin\frac{p\pi}{2}+\cos\frac{p\pi}{2}-i\sin\frac{p\pi}{2}$$
$$=2\cos\frac{p\pi}{2}.$$

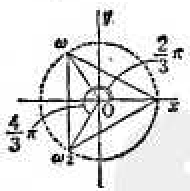
因为 p 是奇数，

$$\cos\frac{p\pi}{2}=0.$$

$$\therefore\quad\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}=0.$$

2784. (1) 把 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ 表示成三角函数形式.

(2) 证明 1、ω、ω^2 表示的点构成一个正三角形的三个顶点.



解　(1) 设 ω 的模为 $|\omega|$，幅角的主值为 θ，则

$$|\omega|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1,$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3},\quad\therefore\quad\theta=\frac{2\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

(2) 把 1、ω^2 用三角函数形式表出，为

$$1=\cos 0+i\sin 0,$$

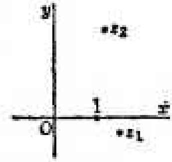
$$\omega^2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2$$
$$=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3},$$

所以 1、ω、ω^2 的模都是 1，幅角则依次递增 $\dfrac{2\pi}{3}$，因此 1、ω、ω^2 表示的点是正三角形的三个顶点.

2785. 设复数 z_1、z_2 的幅角分别为 θ_1、θ_2，积 z_1z_2 的幅角为 θ，证明

$$|z_1|\cdot|z_2|=|z_1\cdot z_2|,\ \theta=\theta_1+\theta_2.$$

又若给出 z_1、z_2 如下图，试在图上标出 z_1z_2.



解　设 $|z_1|=r_1$，$|z_2|=r_2$，则

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2).$$
$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

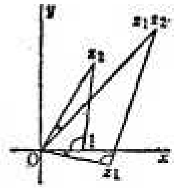
因此

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1|\cdot|z_2|.$$

z_1z_2 的幅角为

$$\theta=\theta_1+\theta_2.$$

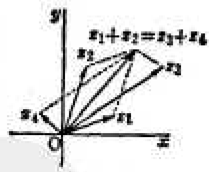
于是得图如右. 其中以 z_2、O、1 为顶点的三角形，与以 z_1z_2、O、z_1 为顶点的三角形是同走向相似的.



2786. 四个复数 z_1、z_2、z_3、z_4 间有关系

$$z_1+z_2=z_3+z_4.$$

问 z_1、z_2、z_3、z_4 在复平面上的位置如何. 设这四个复数代表的点不在同一直线上.



解　设

$$z_k=x_k+iy_k\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

由条件知

$$x_1+x_2+(y_1+y_2)i=x_3+x_4+(y_3+y_4)i,$$

$$\therefore\quad x_1+x_2=x_3+x_4,\ y_1+y_2=y_3+y_4.$$

$$\therefore\quad\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_3+x_4}{2},\quad\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_3+y_4}{2}.$$

因此，z_1、z_2 连线的中点与 z_3、z_4 连线的中点重合. 即 z_1、z_2、z_3、z_4 是平行四边形的四个顶点.

注　画出上图有助于理解。又变形为

$$z_1-z_3=z_4-z_2$$

后，本题还可作为向量来考察.

2787. 满足下列条件的复数 z 在复平面上描绘出怎样的图形.

(1) $|z-i|^2+|z+1|^2=4$;

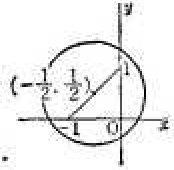
(2) $\left|\dfrac{z-2}{z+1}\right|=2$.

解　因为(1)中的 z 是与 i、-1 距离的平方和为 4 的点的轨迹，所以是一个以 $\dfrac{i-1}{2}$ 为圆心的圆. 因为(2)中的 z 是与 2、-1 距

离之比为 2:1 的点的轨迹，所以是一个阿波罗尼斯圆。

(1) 设 $z=x+yi$，则

$$x^2+(y-1)^2$$
$$+(x+1)^2+y^2=4,$$
$$x^2+x+y^2-y=1,$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}.$$



(2) $|z-2|^2=4|z+1|^2$,

$$(x-2)^2+y^2=4(x+1)^2+4y^2,$$
$$3x^2+12x+3y^2=0,\ x^2+4x+y^2=0,$$
$$(x+2)^2+y^2=4.$$

2788. $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$n$ 为任意整数，证明 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$。

解　当 $n=0$，$n=1$ 时显然成立。设 $n=k$（k 为正整数）时有 $z^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$，两边乘上 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则

$$\begin{aligned}z^{k+1}&=r^{k+1}(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)\\&\quad+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)\\&=r^{k+1}[\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta].\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 也成立，由数学归纳法，对于任意正整数 n 都成立。

当 n 为负整数时，设 $n=-m$，则 m 为正整数。

$$\begin{aligned}z^n=z^{-m}&=\frac{1}{z^m}=\frac{1}{r^m(\cos m\theta+i\sin m\theta)}\\&=r^{-m}\frac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta+\sin^2 m\theta}\\&=r^n[\cos(-n\theta)-i\sin(-n\theta)]\\&=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).\end{aligned}$$

故命题对于任何整数都成立。

注　$z^0=1$，$z^{-n}=\frac{1}{z^n}$ 是作为定义的。

2789. 求下式的值。

(1) $(1-\sqrt{3}i)^6$；　　(2) $(1+i)^{-7}$。

解　(1)

$$\begin{aligned}1-\sqrt{3}\,i&=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\&=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{3}i)^6&=2^6\left(\cos\frac{30\pi}{3}+i\sin\frac{30\pi}{3}\right)\\&=2^6=64.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}1+i&=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(1+i)^{-7}\\&=\frac{1}{(\sqrt{2})^7}\left(\cos\frac{-7}{4}\pi+i\sin\frac{-7}{4}\pi\right)\\&=\frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1+i}{16}.\end{aligned}$$

2790. 求

(1) 1 的 6 次方根；

(2) $2-2\sqrt{3}\,i$ 的平方根。

解　设所求之值为 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $0\leq\theta<2\pi$。

(1) 因为 $r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=1$，两边取模，知 $r=1$。因此

$$\cos 6\theta+i\sin 6\theta=\cos 0+i\sin 0.$$
$$\therefore\quad 6\theta=2n\pi.$$

因为 $0\leq\theta<2\pi$，得 $\theta=0$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$，π，$\frac{4\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{3}$。从而答案为

$$1,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$-1,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

(2) 因为

$$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=2-2\sqrt{3}\,i,$$

两边取模，知 $r^2=16$，$\therefore r=4$。

$$4(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

从而　　$2\theta=\frac{4\pi}{3}+2n\pi$，

因为　　$0\leq\theta<2\pi$，

所以　　$\theta=\frac{2\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{3}$。

从而答案为

$$2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$
$$2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right),$$

即　　$-1+\sqrt{3}\,i$，$1-\sqrt{3}\,i$。

2791. 试在复平面上标出七次方程

$$x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1+1=0$$

的所有根。

解　$x=1$ 不是根，故可在两边乘上 $x-1$，得 $x^8-1=0$。所以只要求出 1 的除 1 以外

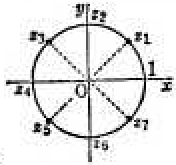
的所有八次方根就行了。因为1的八次方根的模为1，所以可设为

$$\cos\theta+i\sin\theta,$$

且

$$\cos 8\theta+i\sin 8\theta=1.$$

$$\therefore\quad 8\theta=2n\pi.$$

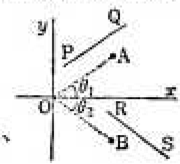


在 $\theta=\dfrac{2n\pi}{8}$ 中用各种整数代入 n，θ 为如图所示的单位圆的八个等分点(1除外)z_1、z_2、z_3、z_4、…、z_7。

2792．设 z_1、z_2、z_3、z_4 所代表的点为 P、Q、R、S。证明 $\dfrac{z_2-z_1}{z_4-z_3}$ 的模为 $\dfrac{PQ}{RS}$，幅角为 PQ、RS 的一个夹角。

解　设 $z_2-z_1=w_1$，$z_4-z_3=w_2$，w_1、w_2 所代表的点为 A、B，则 $PQ\stackrel{\parallel}{=}OA$，$RS\stackrel{\parallel}{=}OB$。

$$\left|\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}\right|=\left|\frac{w_1}{w_2}\right|=\frac{OA}{OB}=\frac{PQ}{RS},$$

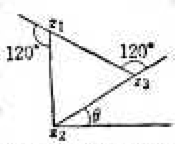


设 w_1、w_2 的幅角为 θ_1、θ_2，则

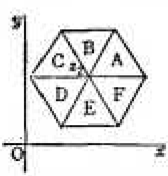
$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{|w_1|(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{|w_2|(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\left|\frac{w_1}{w_2}\right|[\cos(\theta_1-\theta_2)-i\sin(\theta_1-\theta_2)],$$

故 $\dfrac{w_1}{w_2}$ 的幅角为 $\theta_1-\theta_2$，它也是 OA 与 OB 所夹的角，亦即 PQ、PS 所夹的角。

2793．若复平面上正三角形的三个顶点设为 z_1、z_2、z_3，$(z_3-z_2)(z_1-z_3)(z_2-z_1)$ 是实数，证明这个三角形有一边和轴平行或重合。



解　z_3-z_2、z_1-z_3、z_2-z_1 的模相等，设为 r，设 z_3-z_2 的幅角为 θ，则 z_1-z_3、z_2-z_1 的幅角为 $120°+\theta$，$240°+\theta$，因此



$$\begin{aligned}(z_3-z_2)(z_1-z_3)(z_2-z_1)&=r(\cos\theta+i\sin\theta)\\&\quad\times r[\cos(120°+\theta)+i\sin(120°+\theta)]\\&\quad\times r[\cos(240°+\theta)+i\sin(240°+\theta)]\\&=r^3[\cos(360°+3\theta)+i\sin(360°+3\theta)]\\&=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta).\end{aligned}$$

因为上式是实数，所以 $\sin 3\theta=0$，

$$\therefore\quad 3\theta=n\times180°,$$

$$\theta=n\times60°\ (n\text{ 为正整数}).$$

当 z_2 固定时，这个正三角形总是在下图中 A 至 F 中的一个，其中每一个都有一条边平行于轴。

2794．四个复数 z_1、z_2、z_3、z_4 之间存在着关系式 $z_2-z_1=z_4-z_3$。在复平面上表示这四个复数的点 P_1、P_2、P_3、P_4 满足什么关系。

解　设 $z_k=x_k+iy_k$ $(k=1,2,3,4)$，因为 $z_2-z_1=z_4-z_3$，所以

$$x_2-x_1=x_4-x_3,\ y_2-y_1=y_4-y_3.\qquad①$$

从而

$$x_3-x_1=x_4-x_2,\ y_3-y_1=y_4-y_2.\qquad②$$

由①知当 $x_2\neq x_1$ 时，有 $x_4\neq x_3$。

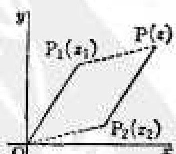
$$\because\quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3},\quad\therefore\quad P_1P_2\parallel P_3P_4.$$

当 $x_2=x_1$ 时有 $x_4=x_3$，从而 P_1P_2、P_3P_4 都垂直于实轴，故 $P_1P_2\parallel P_3P_4$。

由②式同理可知 $P_1P_3\parallel P_2P_4$。

故 $P_1P_2P_3P_4$ 为平行四边形。作为特例，这四点也可能在同一直线上，P_1P_2、P_3P_4 等长并且同方向。

2795．在复平面上作出两个复数 z_1、z_2 之和所表示的点，该怎样作。



解　设 $z_1+z_2=z$。设 z_1、z_2、z 表示的点为复平面上的 P_1、P_2、P。因为 $z_1-0=z-z_2$，所以四边形 OP_2PP_1 是平行四边形，因此已知 P_1、P_2 要作出 P 时，只要从 P_2 出发作 P_2P 与 OP_1 平行相等即可。

2796．设复数 z_1、z_2 的幅角分别为 θ_1、θ_2。证明

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2|\cos(\theta_2-\theta_1).$$

解　$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$|z_1|=r_1$，

$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，$|z_2|=r_2$。

从而

$$z_1+z_2=r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2+i(r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2),$$

因此

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2)^2\\&\quad+(r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2)^2\\&=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\\&\quad\times(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1),\end{aligned}$$

$$\therefore\quad |z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2|\cdot\cos(\theta_2-\theta_1).$$

2797．把复数 z_1、z_2 所表示的点连结起来，问所得线段的中点用什么数表示？

解　设 $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$，则表示 z_1 的点 P_1 的坐标为 (a_1, b_1)，表示 z_2 的点 P_2 的坐标为 (a_2, b_2)．因为 P_1P_2 中点 P 的坐标为

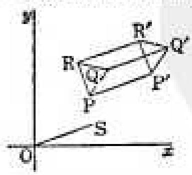
$$\left(\frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{b_1+b_2}{2}\right),$$

从而 P 所表示的复数 z 为

$$z=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{b_1+b_2}{2}i=\frac{1}{2}[(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)],$$

即　　$$z=\frac{1}{2}(z_1+z_2).$$

2798．在复平面上，以 z_1、z_2、z_3 所表示的点为顶点的三角形，与以 z_1+z, z_2+z, z_3+z 所表示的点为顶点的三角形有怎样的位置关系．

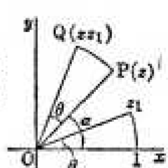


解　设 z_1、z_2、z_3、z 表示的点分别为 P、Q、R、S, z_1+z, z_2+z, z_3+z 所表示的点 P'、Q'、R'，分别是由 P、Q、R 沿 OS 方向平移 OS 的长度而得到的，所以 $\triangle PQR$ 沿 OS 方向平移 OS 的长度就得到了 $\triangle P'Q'R'$．

2799．用点 $P(a, b)$ 表示任一复数 $z=a+bi$．设

$$z_1=\cos\theta+i\sin\theta,$$

则表示 zz_1 的点 Q，可由表示 z 的点 P 绕原点旋转 θ 而得．



解　设

$$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$

α 为原点 O 与 P 所连线段与 x 轴的夹角，r 为这条线段的长．则

$$zz_1=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\theta+i\sin\theta)=r[\cos(\alpha+\theta)+i\sin(\alpha+\theta)].$$

因为　　$OQ=r=OP$,

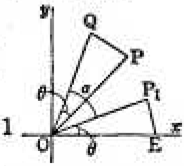
$$\angle POQ=\angle xOQ-\angle xOP=(\alpha+\theta)-\alpha=\theta,$$

因此 Q 是 P 绕原点旋转 θ 后得到的点．

当 $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $z_1=r_1(\cos\theta+i\sin\theta)$ 时，

$$zz_1=rr_1[\cos(\alpha+\theta)+i\sin(\alpha+\theta)].$$

设表示 z、z_1、zz_1 的点为 P、P_1、Q，则



$\angle P_1OQ=\alpha$,

$\therefore$　$\angle P_1OQ=\angle xOP_1$,

$OQ:OP_1=rr_1:r_1=r:1$,

设点 $(1, 0)$ 为 E,

则　$OQ:OP_1=OP:OE$,

$\therefore$　$\triangle OP_1Q\backsim\triangle OEP$.

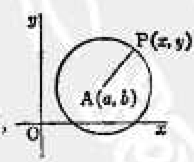
因此当 $\triangle OEP$ 绕 O 旋转 θ，并以 O 为位似中心把 $\triangle OEP$ 放大 r_1 倍后，就可由 P 得到 Q．

2800．若 α 为确定的复数，复数 z 满足 $|z-\alpha|=1$．试问当 z 变化时点 z 在复平面上画出怎样的图形？

解　设复平面上 α、z 表示的点为 A、P，则由

$$|z-\alpha|=AP,\ |z-\alpha|=1,$$

得　　$AP=1$.



设　$\alpha=a+bi$,

$z=x+yi$,

因为

$z-\alpha=(x-a)+(y-b)i$,

所以

$$|z-\alpha|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

由 $|z-\alpha|=1$ 得 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$．这是以点 (a, b) 为圆心、以 1 为半径的圆的方程．

2801．设 $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数．在复平面上，z 表示的点 P 和下列各数表示的点有什么关系．

(1) $-z$;　(2) $-\bar{z}$;　(3) $\dfrac{1}{z}$;　(4) z^2.

解　(1) 设 $z=x+yi$，则

$$-z=(-x)+(-y)i,$$

因此 $-z$ 表示的点与 P 关于原点对称。

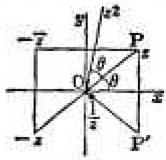
(2) $-\bar{z}=-(x-yi)=-x+yi$,

因此 $-\bar{z}$ 表示的点与 P 关于虚轴对称。

(3) 设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 则

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta),$$

因此 $\frac{1}{z}$ 表示的点 P' 与 P 关于实轴对称, 但 $OP'=\frac{1}{OP}$.

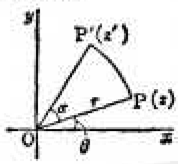


(4) $z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$, 因此 z^2 表示的点, 是在 OP 旋转一个与 $\angle xOP$ 相等角后所形成的半直线上, 且与 O 距离 OP^2.

2802. 把复数 z 所表示的点 P 绕原点 O 旋转 α 后得到 P', P' 表示什么数?

解　设 $OP=r$, $\angle xOP=\theta$, 则

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$



因为 $\angle POP'=\alpha$, 所以 $\angle xOP'=\theta+\alpha$, $OP'=r$, 因此 P' 表示的数 z' 为

$$\begin{aligned}z'&=r[\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha)]\\&=r(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\alpha+i\sin\alpha),\end{aligned}$$

$$\therefore\quad z'=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z.$$

2803. 对于复数 z_1、z_2, 证明下列不等式:

$$|z_1|-|z_2|\leqq|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|.$$

解　设 z_1、z_2 的幅角分别为 θ_1、θ_2, 则

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2=&|z_1|^2+|z_2|^2\\&+2|z_1|\cdot|z_2|\cos(\theta_2-\theta_1),\end{aligned}$$

因为 $-1\leqq\cos(\theta_2-\theta_1)\leqq1$, 所以

$$\begin{aligned}&|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1|\cdot|z_2|\\&\leqq|z_1|^2+|z_2^2|+2|z_1||z_2|\cos(\theta_2-\theta_1)\\&\leqq|z_1|^2+|z_2^2|+2|z_1|\cdot|z_2|.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad(|z_1|-|z_2|)^2\leqq|z_1+z_2|^2\leqq(|z_1|+|z_2|)^2,$$

从而　$|z_1|-|z_2|\leqq|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|$.

2804. 设复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$. 证明下列等式.

(1) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$,　(2) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$,

(3) $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)}=\frac{1}{\bar{z}_1}$　$(z_1\neq0)$.

解　设 $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$.

(1) 左边为

$$\overline{x_1+x_2+(y_1+y_2)i}=x_1+x_2-(y_1+y_2)i,$$

右边为

$$\begin{aligned}\overline{x_1+y_1i}+\overline{x_2+y_2i}&=x_1-y_1i+x_2-y_2i\\&=x_1+x_2-(y_1+y_2)i,\end{aligned}$$

故命题成立。

(2) 左边为

$$\begin{aligned}&\overline{x_1x_2-y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)i}\\&=x_1x_2-y_1y_2-(x_1y_2+y_1x_2)i,\end{aligned}$$

右边为

$$\begin{aligned}\overline{x_1+y_1i}\cdot\overline{x_2+y_2i}&=(x_1-y_1i)(x_2-y_2i)\\&=x_1x_2-y_1y_2-(x_1y_2+x_2y_1)i.\end{aligned}$$

故欲证之式成立。

(3) 左边为

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{1}{x_1+y_1i}\right)}&=\overline{\frac{x_1-y_1i}{x_1^2+y_1^2}}\\&=\frac{x_1+y_1i}{x_1^2+y_1^2}\quad(\text{分母为实数}).\end{aligned}$$

右边为

$$\frac{1}{\overline{x_1+y_1i}}=\frac{1}{x_1-y_1i}=\frac{x_1+y_1i}{x_1^2+y_1^2},$$

故欲证之式成立。

注　由(2)、(3)可得

$$\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}.$$

又(1)也可用复平面上的图形来考察。

2805. 用记号 $e^{i\theta}$ 表示 $\cos\theta+i\sin\theta$ 时, 证明下列等式, 其中 n 为任意整数.

(1) $e^{i(\theta+2n\pi)}=e^{i\theta}$,　(2) $e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi}=e^{i(\theta+\varphi)}$,

(3) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}}=e^{i(\theta-\varphi)}$.

解　(1)

$$\begin{aligned}e^{i(\theta+2n\pi)}&=\cos(\theta+2n\pi)+i\sin(\theta+2n\pi)\\&=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi}&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\varphi+i\sin\varphi)\\&=\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)\\&=e^{i(\theta+\varphi)}.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}}&=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\varphi+i\sin\varphi}\\&=\cos(\theta-\varphi)+i\sin(\theta-\varphi)\\&=e^{i(\theta-\varphi)}.\end{aligned}$$

2806．证明下列等式：

(1) $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$；

(2) $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

解　(1) 在

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \quad ①$$

中用 $-\theta$ 代替 θ，则

$$e^{i(-\theta)}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta),$$

$$\therefore\quad e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta. \quad ②$$

①＋②，得 $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$，

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}.$$

(2) 由 ①－②，得

$$e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta,$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

2807．在 $\zeta=\dfrac{1}{2}z(z+1)$ 中，z 在一个单位圆上运动，问 ζ 描出了怎样的图形？

解　设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，$\zeta=u+iv$，则

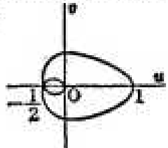
$$\zeta=\frac{1}{2}z(z+1)=\frac{1}{2}(z^2+z)$$

$$=\frac{1}{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta+\cos\theta+i\sin\theta).$$

$$\therefore\quad u=\frac{1}{2}(\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta+\cos2\theta),$$

$$v=\frac{1}{2}(\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta)=\frac{1}{2}(\sin\theta+\sin2\theta).$$

以 u、v 为坐标的点，描出的曲线叫做帕斯卡(Pascal)蜗线(Limaçon)。



现在，为了求该曲线与 u 轴的交点，设 $v=0$，则

$$\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta=0,$$

所以

$$\sin\theta=0 \quad 或 \quad \cos\theta=-\frac{1}{2},$$

当 $\sin\theta=0$ 时 $\cos\theta=\pm1$，故 $u=1$ 或 0.

当 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ 时 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$，

$$\therefore\quad u=-\frac{1}{2}.$$

2808．在 $\zeta=\dfrac{4}{(1+z)^2}$ 中，z 在单位圆上运动，问 ζ 描出了怎样的图形？

解　因为 z 在单位圆上运动，故可设

$$z=\cos\theta+i\sin\theta,$$

$$\zeta=u+iv=\frac{4}{(1+z)^2}=\frac{4}{(1+\cos\theta+i\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{2}{(1+\cos\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{2(\cos\theta-i\sin\theta)}{1+\cos\theta}.$$

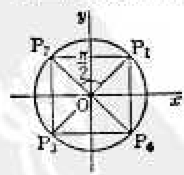
$$\therefore\quad u=\frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta},\quad v=\frac{-2\sin\theta}{1+\cos\theta}.$$

由这两个式子消去 θ，得 $v^2=4(1-u)$．这是一条抛物线。

2809．把复平面上由复数 z，zi，$-z$，$-zi$ 代表的四点依次连结，构成了一个怎样的四边形，其中 $z\neq0$.

解　z、zi，$-z=zi^2$，$-zi=zi^3$ 是在 z 上依次乘上

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$



而得到，因此，若设这四点分别为 P_1，P_2，P_3，P_4，则这四点是由 P_1 绕 O 旋转一个直角、二个直角、三个直角后得到的．从而把这四点连结起来就成为一个以原点为中心的正方形．

2810．在 $\triangle ABC$ 的边 AB、CA 上向外侧作正方形 $ABDE$，$ACFG$，证明 $BG=EC$，且 $BG\perp EC$.

解　设表示 A、B、C 的复数为 z_1、z_2、z_3，则

$$\overrightarrow{AB}=z_2-z_1.$$

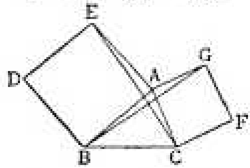
因为 $AB\perp AE$，所以 $\overrightarrow{AE}=-i(z_2-z_1)$，故表示点 E 的复数为 $z_1-i(z_2-z_1)$，设为 α，同理表示点 G 的复数为 $z_1+i(z_3-z_1)$，设为 β．故有

$$z_3-\alpha=z_3-[z_1-i(z_2-z_1)],$$

$$z_2-\beta=z_2-[z_1+i(z_3-z_1)],$$

$$\therefore\quad i(z_2-\beta)=iz_2-i[z_1+i(z_2-z_1)]$$
$$=z_3-[z_1-i(z_2-z_1)],$$

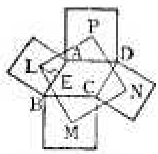
$\therefore$ $z_3-\alpha$
$=i(z_2-\beta)$.
$\therefore$ $|z_3-\alpha|$
$=|z_2-\beta|$.
即
$EC=BG$,



$(z_3-\alpha)$的幅角$=(z_2-\beta)$的幅角$+\dfrac{\pi}{2}$,

$$\therefore\quad BG\perp EC.$$

2811. 以平行四边形的各边为一边，分别向外作正方形，证明这四个正方形的中心构成另一个正方形的顶点.



解　设平行四边形$ABCD$的四个顶点由复数z_1、z_2、z_3、z_4表示，四个中心L、M、N、P(如图)由复数为α、β、γ、δ表示.

设AB的中点为E，表示E的复数为$\dfrac{z_1+z_2}{2}$，由已知条件知$EL\perp AB$，$EL=BE$，所以当EB向负方向旋转$\dfrac{\pi}{2}$后B就到了L的位置，即

$$\overrightarrow{EL}=-i\left(z_2-\frac{z_1+z_2}{2}\right),$$

故表示L的复数为

$$\alpha=\frac{z_1+z_2}{2}-i\left(z_2-\frac{z_1+z_2}{2}\right),$$

同理，

$$\beta=\frac{z_2+z_3}{2}-i\left(z_3-\frac{z_2+z_3}{2}\right),$$

$$\gamma=\frac{z_3+z_4}{2}-i\left(z_4-\frac{z_3+z_4}{2}\right),$$

$$\delta=\frac{z_4+z_1}{2}-i\left(z_1-\frac{z_4+z_1}{2}\right).$$

为了证明$LP\perp LM$，只要证明

$$\frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}=\left[\frac{z_4+z_1}{2}-i\left(z_1-\frac{z_4+z_1}{2}\right)-\frac{z_1+z_2}{2}+i\left(z_2-\frac{z_1+z_2}{2}\right)\right]$$
$$\div\left[\frac{z_2+z_3}{2}-i\left(z_3-\frac{z_2+z_3}{2}\right)-\frac{z_1+z_2}{2}+i\left(z_2-\frac{z_1+z_2}{2}\right)\right]\quad ①$$

是纯虚数即可．因为$ABCD$是平行四边形，

$$AB=CD,\quad\therefore\quad z_2-z_1=z_3-z_4,$$

代入①后，可得

$$\frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}=i,$$

从而$LP\perp LM$且$LP=LM$，同理，$MN\perp NP$，所以$LMNP$是正方形.

2812. 如果z_1、z_2、z_3、z_4在一个圆周上，则由$z'_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}$ $(k=1, 2, 3, 4)$给出的四点z'_1，z'_2，z'_3，z'_4也在一个圆周上.

解

$$\frac{z'_1-z'_3}{z'_2-z'_3}=\frac{\dfrac{az_1+b}{cz_1+d}-\dfrac{az_3+b}{cz_3+d}}{\dfrac{az_2+b}{cz_2+d}-\dfrac{az_3+b}{cz_3+d}}$$
$$=\frac{\dfrac{(bc-ad)(z_3-z_1)}{(cz_1+d)(cz_3+d)}}{\dfrac{(bc-ad)(z_3-z_2)}{(cz_2+d)(cz_3+d)}}$$
$$=\frac{(z_3-z_1)(cz_2+d)}{(cz_1+d)(z_3-z_2)},$$

$$\frac{z'_1-z'_4}{z'_2-z'_4}=\frac{\dfrac{az_1+b}{cz_1+d}-\dfrac{az_4+b}{cz_4+d}}{\dfrac{az_2+b}{cz_2+d}-\dfrac{az_4+b}{cz_4+d}}$$
$$=\frac{(z_4-z_1)(cz_2+d)}{(cz_1+d)(z_4-z_2)},$$

$$\therefore\quad\frac{z'_1-z'_3}{z'_2-z'_3}:\frac{z'_1-z'_4}{z'_2-z'_4}$$
$$=\frac{(z_3-z_1)(cz_2+d)}{(cz_1+d)(z_3-z_2)}:\frac{(z_4-z_1)(cz_2+d)}{(cz_1+d)(z_4-z_2)}$$
$$=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}:\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}$$
$$=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4},$$

因为假设z_1、z_2、z_3、z_4共圆，所以$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\dfrac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$是实数，从而$\dfrac{z'_1-z'_3}{z'_2-z'_3}:\dfrac{z'_1-z'_4}{z'_2-z'_4}$也是实数，即$z'_1$、$z'_2$、$z'_3$、$z'_4$也共圆.

2813. 如果两个复数的积为0，证明其中

至少有一个为 0。

解　设两个复数为 $a+ib$, $c+id$, 由假设

$$(a+ib)\cdot(c+id)=0,$$

$$\therefore\quad ac-bd+i(bc+ad)=0.$$

故实部、虚部都为 0，即

$$ac-bd=0,\quad bc+ad=0.$$

$$\therefore\quad (ac-bd)^2+(bc+ad)^2=0,$$

$$\therefore\quad a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2=0,$$

$$\therefore\quad (a^2+b^2)(c^2+d^2)=0.$$

由于 a、b、c、d 都是实数，

$$\therefore\quad a^2+b^2=0\quad 或\quad c^2+d^2=0.$$

$$\therefore\quad a=0、b=0\quad 或\quad c=0、d=0.$$

从而 $a+ib=0$ 或 $c+id=0$。

2814. 设 $f(\alpha)=p\alpha^2+q\alpha+r$, p、q、r 为实数，证明 $f(\alpha)$ 与 $f(\overline{\alpha})$ 互为共轭。

解　设 $\alpha=a+ib$, 则 $\overline{\alpha}=a-ib$。

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(\alpha)&=p(a+ib)^2+q(a+ib)+r\\&=pa^2-pb^2+qa\\&\quad+r+i(2pab+qb),\\ f(\overline{\alpha})&=p(a-ib)^2+q(a-ib)+r\\&=pa^2-pb^2+qa\\&\quad+r-i(2pab+qb).\end{aligned}$$

故 $f(\alpha)$ 与 $f(\overline{\alpha})$ 共轭。

注　设 $f(\alpha)=0$ 的根为复数 $a+ib$, 现设 $f(\alpha)=f(a+ib)=u+iv$, 则有

$$u=0,\ v=0.$$

因为 $f(\overline{\alpha})=f(a-ib)=u-iv$, 所以还有

$$f(\overline{\alpha})=0.$$

这就是说若 $a+ib$ 是 $f(\alpha)=0$ 的根，$a-ib$ 亦是 $f(\alpha)=0$ 的根。一般地可有结果如下题。

2815. 证明：如果实系数方程

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

有一个虚数根，则这个根的共轭虚数也是根。

解　设 $f(z)=0$ 的一个复数根为 $\alpha+i\beta$ $(\beta\neq0)$, 则有 $f(\alpha+i\beta)=0$。现在把 $f(z)$ 除以

$$[z-(\alpha+i\beta)][z-(\alpha-i\beta)]=(z-\alpha)^2+\beta^2$$

后的商设为 $\varphi(z)$, 余式设为 $lz+m$, 则有

$$f(z)=[(z-\alpha)^2+\beta^2]\varphi(z)+lz+m,\quad ①$$

因为 $\varphi(z)$ 是实系数多项式，故 l、m 都是实数。在恒等式两边以 $\alpha+i\beta$ 代入，有

$$f(\alpha+i\beta)=l(\alpha+i\beta)+m,$$

由假设知 $f(\alpha+i\beta)=0$,

$$\therefore\quad l(\alpha+i\beta)+m=0,$$

$$\therefore\quad l\alpha+m+i\beta l=0.$$

故实部、虚部都为 0，即

$$l\alpha+m=0,\qquad ②$$

$$\beta l=0.\qquad ③$$

因为 $\beta\neq0$, 由 ③ 得 $l=0$, 代入 ②, 得 $m=0$。

$$\therefore\quad lz+m=0.$$

从而 $f(z)$ 也能被 $\alpha-i\beta$ 整除，即

$$f(\alpha-i\beta)=0.$$

2816. 设 $z^3+2pz+q=0$ 有一个虚数根，证明这个根的实部是 $8x^3+4px-q=0$ 的根，且与 q 有相同的符号，其中 p、q 为实数。

解　由上题，$z^3+2pz+q=0$ 有两个形如 $\alpha+i\beta$、$\alpha-i\beta$ 的根，设第三个根为实数 γ, 则由根与系数的关系得

$$(\alpha+i\beta)+(\alpha-i\beta)+\gamma=0,\qquad ①$$

$$(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)+\gamma(\alpha+i\beta)+\gamma(\alpha-i\beta)=2p,\qquad ②$$

$$\gamma(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)=-q.\qquad ③$$

由 ① 得

$$\gamma=-2\alpha.\qquad ④$$

把 ④ 代入 ②, 有

$$\beta^2=3\alpha^2+2p.\qquad ⑤$$

把 ④ 代入 ③, 有

$$2\alpha(\alpha^2+\beta^2)=q.\qquad ⑥$$

由 ⑤、⑥ 得

$$8\alpha^3+4\alpha p-q=0.$$

故 α 是 $8x^3+4px-q=0$ 的根。又由于

$$\alpha^2+\beta^2>0,$$

故由 ⑥ 知 α 与 q 同号。

本题还可以证明如下。

因为 $\alpha+i\beta$ 是 $z^3+2pz+q=0$ 的根，

$$(\alpha+i\beta)^3+2p(\alpha+i\beta)+q=0.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\alpha^3-3\alpha\beta^2+2p\alpha+q\\&+i(3\alpha^2\beta-\beta^3+2p\beta)=0.\end{aligned}$$

设实部、虚部分别为 0，则有

$$\alpha^3-3q\beta^2+2p\alpha+q=0,\qquad ①$$

$$3\alpha^2\beta-\beta^3+2p\beta=0.\qquad ②$$

由 ② 知 $3\alpha^2-\beta^2+2p=0$（显然只有 $\beta\neq0$ 时原方程才会有虚数根），

$$\therefore\quad \beta^2=3\alpha^2+2p,$$

代入①，有

$$\alpha^3-3\alpha(3\alpha^2+2p)+2p\alpha+q=0.$$

$$\therefore\quad 8\alpha^3+4p\alpha-q=0.$$

因此 α 为 $8x^3+4px-q=0$ 的根。

2817．当 n 为 4 的倍数时，证明

$$1+2i+3i^2+\cdots+ni^{n-1}=-\frac{n(1+i)}{2}.$$

解　注意到 $i^2=-1$，则

$$\begin{aligned}&1+2i+3i^2+4i^3+5i^4+\cdots\\&\quad+(n-1)i^{n-2}+ni^{n-1}\\&=1+2i-3-4i+5+6i-7-\cdots\\&\quad-(n-1)-ni\\&=[1-3+5-7+\cdots-(n-1)]\\&\quad+i(2-4+6-8+\cdots-n)\\&=\{(1-3)+(5-7)+\cdots\\&\quad+[(n-3)-(n-1)]\}\\&\quad+i\{(2-4)+(6-8)+\cdots\\&\quad+[(n-2)-n]\}.\end{aligned}$$

第一个大括号中的项数为

$$\frac{(n-1)+1}{4}=\frac{n}{4},$$

第二个大括号中的项数也是 $\frac{n}{4}$，故

$$(-2)\times\frac{n}{4}+i\times(-2)\times\frac{n}{4}=-\frac{n(1+i)}{2}.$$

2818．z_1、z_2 为复数，证明

$$|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|.$$

解　设 $z_1=\alpha_1+i\beta_1$，$z_2=\alpha_2+i\beta_2$，则

$$|z_1|=\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2},\ |z_2|=\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2},$$

$$z_1+z_2=\alpha_1+\alpha_2+i(\beta_1+\beta_2),$$

从而只要证明

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|&=\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2}\\&\leqq\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}+\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}\end{aligned}$$

成立就行了。

现设如果上述不等式不成立，即有

$$\begin{aligned}&\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2}\\&\quad>\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}+\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2},\end{aligned}$$

两边平方，有

$$\begin{aligned}&(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2\\&\quad>\alpha_1^2+\beta_1^2+2\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\alpha_2^2+\beta_2^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad&\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2\\&\quad>\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2},\end{aligned}$$

再平方，有

$$(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)^2>(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2),$$

$$\therefore\quad(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2<0.$$

但因为 α_1、β_1、α_2、β_2 为实数时恒有

$$(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2\geqq0,$$

故矛盾，因此原式成立。

注　一般地，对于 n 个复数 z_1、z_2、…、z_n，有

$$\begin{aligned}&|z_1+z_2+\cdots+z_n|\\&\quad\leqq|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.\end{aligned}$$

这可以用数学归纳法给以证明。

当 $n=2$ 时上式成立。

现设 $n=m$ 时成立，即有

$$\begin{aligned}&|z_1+z_2+\cdots+z_m|\\&\quad\leqq|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_m|.\qquad ①\end{aligned}$$

因此在

$$\begin{aligned}&|z_1+z_2+\cdots+z_m+z_{m+1}|\\&\quad\leqq|z_1+z_2+\cdots+z_m|+|z_{m+1}|\end{aligned}$$

上用①，有

$$\begin{aligned}&|z_1+z_2+\cdots+z_m|+|z_{m+1}|\\&\quad\leqq|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_m|+|z_{m+1}|.\end{aligned}$$

故当 $n=m+1$ 时也成立。从而对于任何正整数 n 原式都成立。同理还可有

$$|z_1-z_2|\leqq|z_1|+|z_2|.$$

$$\begin{aligned}&|z_1\pm z_2\pm z_3\pm\cdots\pm z_n|\\&\quad\leqq|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.\end{aligned}$$

2819．证明 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

解　设 $z_1=\alpha_1+i\beta_1$，$z_2=\alpha_2+i\beta_2$，则

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(\alpha_1+i\beta_1)(\alpha_2+i\beta_2)\\&=\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2+i(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad&|z_1z_2|\\&=\sqrt{(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)^2},\end{aligned}$$

$$|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\cdot\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2},$$

故只要证明

$$\begin{aligned}&(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)^2\\&\quad=(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)\end{aligned}$$

成立即可。而这个等式的证明是容易的。

注　一般地，容易证明有

$$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1||z_2|\cdots|z_n|.$$

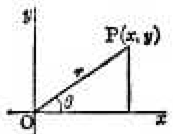
及

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

2820．说明什么是复数的几何表示。

解　在平面上取直角坐标系 xOy，以坐标为 $(x,\ y)$ 的点表示复数 $x+iy$，则一个复数就可以确定一个平面上的点，反之平面上的一

个点也可以确定一个复数．我们说这样平面上的点就和复数之间建立了一个一一对应．象这样用平面上的点表示复数时，这个平面就叫做一个复平面或高斯(Gauss)平面，x 轴叫实轴，y 轴叫虚轴．现在设复数 $z=x+iy$ 表示的点的极坐标是 (r,θ)．则



$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases} \qquad ①$$

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}\geqq 0, \\ \operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x}. \end{cases} \qquad ②$$

从而 $z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，这叫做 z 的三角函数表示式，而把 $x+iy$ 叫做 z 的代数表示式．其中 r 叫复数 z 的模，θ 叫 z 的幅角．给出一个复数后，它的幅角可有无数多个．这些幅角相差 2π 的整倍数．今后如不加说明总规定 $0\leqq z$ 的幅角 $<2\pi$．

又因为

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots,$$

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots,$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots.$$

所以

$$\begin{aligned}&\cos\theta+i\sin\theta\\ &=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\right)\\ &\quad+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\right)\\ &=1+\frac{i\theta}{1!}+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}\\ &\quad+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\cdots.\end{aligned}$$

如果假定展开式

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

中用虚数 $i\theta$ 作为指数代入 x 仍然成立，则有

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}.$$

及　　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$．

复数的这种形式也是常常用到的．

2821． 在复平面上求

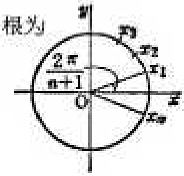
$$x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$$

的根．

解　设 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$，构造函数

$$\begin{aligned}F(x)&=(x-1)f(x)\\ &=(x-1)(x^n+y^{n-1}+\cdots+x+1)\\ &=x^{n+1}-1.\end{aligned}$$

则 $F(x)=x^{n+1}-1=0$ 的根为



$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1},$$

$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,n)$

即 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 就是

$$f(x)=0$$

的根．这些根的模都是 1，而幅角分别为

$$\frac{2\pi}{n+1},\ \frac{4\pi}{n+1},\ \frac{6\pi}{n+1},\ \cdots,\ \frac{2n\pi}{n+1}.$$

因此这些根所表示的点如上图所示，是单位圆上除去 $x_0=1$ 外的 n 个 $(n+1)$ 等分点．

2822． 试在复平面上作出

$$x^n-x^{n-1}+x^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}x+(-1)^n=0$$

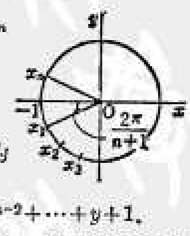
的根．

解　设

$$f(x)=x^n-x^{n-1}+x^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}x+(-1)^n,$$

则

$$\begin{aligned}(-1)^nf(x)&=(-1)^nx^n-(-1)^nx^{n-1}\\ &\quad+(-1)^nx^{n-2}-\cdots\\ &\quad+(-1)^{2n-1}x+(-1)^{2n}\\ &=(-x)^n+(-x)^{n-1}\\ &\quad+(-x)^{n-2}+\cdots\\ &\quad+(-x)+1.\end{aligned}$$



设 $-x=y$，则上式可设为 $g(y)$，

$$g(y)=y^n+y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1.$$

故 $f(x)=0$ 的根就是 $g(y)=0$ 的根关于原点的对称点．

3．向量

A．基本事项

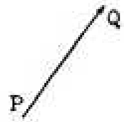
2823． 什么叫做向量．

在处理各种各样的量时，我们常常会遇到

不仅有大小，而且有方向的量的问题．例如

速度：向东北方向每小时 20 公里，

力：在铅垂方向受到 10 千克重力．



为了能一般地处理这种问题，我们引进向量的概念：既有大小又有方向的量叫向量(vector)，在用图表示时，可象上图那样画一个带有箭头的有向线段，箭头表示向量的方向，线段的长表示向量的大小．P 称为起点，Q 称为终点．

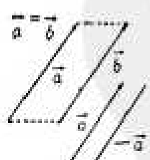
表示向量的记号有：用一个黑体字母如 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{a}$，或者在普通字母上加箭头如 A、$\vec{a}$，或者使用起点、终点的字母写成如 $\overrightarrow{PQ}$．

向量的大小写成 $|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{PQ}|$．

注　1．从 P 到 Q 的有向距离(正负符号要考虑进去)常用 PQ 表示，两点 P、Q 间的距离(不考虑符号)常常写成 $\overline{PQ}$．

2．与向量相反，只计及大小的量(如时间、长度、温度等)叫做标量(scalar)．

3．因为向量有“大小”、“方向”两个要素，所以光是“大小”相等，或是单有“方向”相同，都不能说两个向量相等．特别是“方向”，必须正确地区分起点与终点．



4．因为向量不同于普通的数，所以其计算规则都必须重新定义．现依次说明如下．

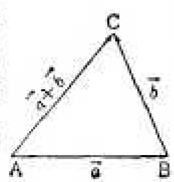
1) (相等) $\vec{a}=\vec{b}$：$\vec{a}$、$\vec{b}$ 的大小、方向都相同．因为不涉及起点在哪里，所以一个向量平移之后，都和原来的向量相等．

2) $-\vec{a}$：是与 $\vec{a}$ 方向相反、大小相同的一个向量．由此得　$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$．

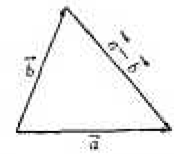
把速度、力的合成方法一般化，就是向量的加法法则．

3) 加法 $\vec{a}+\vec{b}$：

若 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$(即 $\vec{b}$ 的起点是 $\vec{a}$ 的终点)，则 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$．(可以理解成“先从 A 走到 B 然后再从 B 走到 C，与从 A 走到 C 的结果是一样的”)．



4) 减法 $\vec{a}-\vec{b}$：加法的逆运算，即使 $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ 成立的 $\vec{c}$ 就是 $\vec{a}-\vec{b}$．当 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的起点相同时，从 $\vec{b}$ 的终点到 $\vec{a}$ 的终点的向量就是 $\vec{a}-\vec{b}$．



5) 零向量：大小为 0 的向量．只有这个向量不考虑方向(或方向不定)．用记号 0 表示零向量．

6) $l\vec{a}$(向量的数乘)．

$$l\vec{a}\text{ 的方向}\begin{cases} l>0 \text{ 时与 } \vec{a} \text{ 相同，}\\ l<0 \text{ 时与 } \vec{a} \text{ 相反．}\end{cases}$$

$l\vec{a}$ 的大小为 $|\vec{a}|$ 的 $|l|$ 倍，即

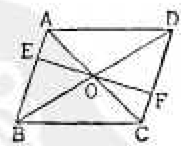
$$l|\vec{a}|=\begin{cases} l|\vec{a}|, & (l\geq 0),\\ -l|\vec{a}|, & (l\leq 0).\end{cases}$$

(l 的符号决定 $l\vec{a}$ 的方向，$|l|$ 决定 $l\vec{a}$ 的大小)．

由以上的规则，可以证明下列三个等式．

$$l\vec{a}=(-l)(-\vec{a}),\ (l+m)\vec{a}=l\vec{a}+m\vec{a},$$
$$l(\vec{a}+\vec{b})=l\vec{a}+l\vec{b}.$$

2824．设有如右图那样的 $ABCD$．试指出下列向量中相等的向量，以及大小相等符号相反的向量：$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{CO}$，$\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FC}$．



解　在图中，长度相等的线段有好几组，重要的是方向如何．只要在图中按给出向量终点的方向加上箭头即可解答．

相等的向量：

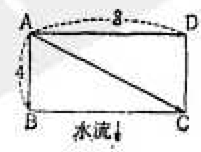
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC},$$

符号相反、大小相等的向量：

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{CO}.$$

2825．在水流速率为每小时 4 km 的河流中，有一只静水速率为每小时 8 km 的船，沿与水流垂直的方向前进，问船的实际速率和行进的方向．

解　静水船速与水速的合成就是实际的船速．



在图中，矩形 $ABCD$ 里有

$$AC=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5},$$

所以船实际上是沿 $\overrightarrow{AC}$ 方向以每小时 $4\sqrt{5}$ km 的速率行进.

B. 向量的和与差

2826. 证明：关于向量的和，有下列交换律、结合律成立.

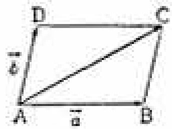
(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$[交换律]；

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$[结合律].

解　(1)设有

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,

$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$,



以 AB、AD 为两边作平行四边形 $ABCD$，则

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b},\ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \quad ①$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}, \quad ②$$

$$\therefore\quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}. \quad ③$$

(2) 设有 $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{BC}=b$, $\overrightarrow{CD}=c$，则

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

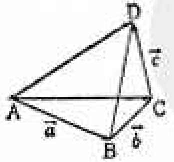
$$\therefore\quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}. \quad ④$$

又 $$\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD},$$

$$\therefore\quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}. \quad ⑤$$

由④、⑤得

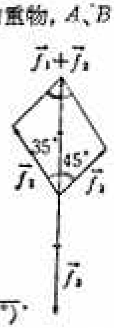
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}). \quad ⑥$$



注　在(1)中，当 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 与同一直线平行时，A、B、C、D 在同一直线上. 这时①、②仍然成立，从而③成立.

在(2)中，当 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 中有二个或三个与同一直线平行时，④、⑤同理亦成立，故⑥亦成立.

2827. 一根绳吊有30公斤的重物，A、B 两人提住绳子上端，且他们分别与铅垂方向成35°、45°的角. A、B 分别用了多少力?



解　设 A、B 的牵引力分别为 $\vec{f}_1$、$\vec{f}_2$，重物所受的重力为 $\vec{f}_3$，则由三个力的合成知

$$\vec{f}_1+\vec{f}_2=-\vec{f}_3.$$

如右图，

$$\frac{|\vec{f}_1|}{\sin 45^\circ}=\frac{|\vec{f}_2|}{\sin 35^\circ}=\frac{|\vec{f}_3|}{\sin(180^\circ-80^\circ)}.$$

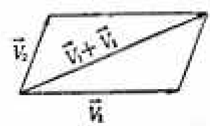
$$|\vec{f}_3|=30,\ \sin(180^\circ-80^\circ)=\sin 80^\circ,$$

$$\therefore\quad |\vec{f}_1|=\frac{30\sin 45^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{30\times0.7071}{0.9848}=21.54,$$

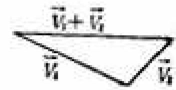
$$|\vec{f}_2|=\frac{30\sin 35^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{30\times0.5736}{0.9848}=17.47.$$

即 A 用的力为21.5公斤，B 用的力为17.5公斤.

2828. 叙述什么是向量的和与差.



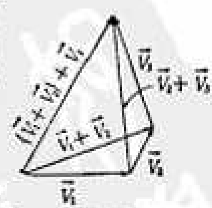
解　以原点为起点，给出代表向量 $\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$ 的带箭头线段，以这两条线段作平行四边形. 从原点到相对顶点的向量称为 $\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$ 的和，记为 $\vec{V}_1+\vec{V}_2$. 由此立即可知



$$\vec{V}_1+\vec{V}_2=\vec{V}_2+\vec{V}_1,$$

$$\vec{V}_1+(\vec{V}_2+\vec{V}_3)=(\vec{V}_1+\vec{V}_2)+\vec{V}_3.$$

设 $\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$ 的分量为 $(v_{1x},\ v_{1y},\ v_{1z})$, $(v_{2x},\ v_{2y},\ v_{2z})$. 则 $\vec{V}_1+\vec{V}_2$ 的分量可以证明为



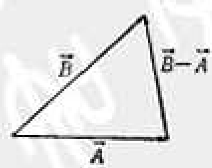
$$(v_{1x}+v_{2x},\ v_{1y}+v_{2y},\ v_{1z}+v_{2z}).$$

若 $\vec{A}+\vec{X}=\vec{B}$，则向量 $\vec{X}$ 可表示为 $\vec{B}-\vec{A}$. 设 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 的分量为

$$(a_x,\ a_y,\ a_z)、(b_x,\ b_y,\ b_z),$$

则 $\vec{B}-\vec{A}$ 的分量为

$$(b_x-a_x,\ b_y-a_y,\ b_z-a_z).$$



长度为0的向量其分量为(0, 0, 0)，这个向量用0表示. 则

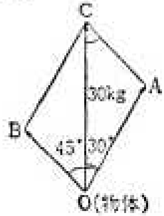
$$\vec{A}\pm0=0+\vec{A}=\vec{A}.$$

由于0向量长度为0，所以它的图示是一个点.

2829. 一个重为30公斤的物体，由两条与铅垂线分别成30°、45°角的绳子吊着，问

两条绳子上各需化多少力.

解　只要在图中平行四边形$OACB$里求出OA、$OB(=AC)$就行了. 因为



$$\angle OCA=\angle COB=45°,$$

所以在$\triangle OAC$中已知两角一边, 可以求出其余两边的长. 只要使用正弦定理即可.

$$\angle OAC=180°-(45°+30°)=105°,$$

$$\therefore\quad \frac{OA}{\sin 45°}=\frac{AC}{\sin 30°}=\frac{30}{\sin 105°}. \qquad ①$$

$$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin 30°=\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}\sin 105°&=\sin(60°+45°)\\&=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

代入①, 求OA、AC, 得

$$\begin{aligned}OA&=\frac{30\sin 45°}{\sin 105°}=\frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\\&=\frac{60\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}\\&=30(\sqrt{3}-1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AC&=\frac{30\sin 30°}{\sin 105°}=\frac{60}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\\&=\frac{60(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}\\&=15(\sqrt{6}-\sqrt{2}).\end{aligned}$$

因此, 在与铅垂方向成30°角的绳子上需化$30(\sqrt{3}-1)$kg力. 在成45°角的绳子上要化$15(\sqrt{6}-\sqrt{2})$kg力.

2830. 在边长为1的正方形$ABCD$中, 已知$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=c$. 作出下列向量, 并算出这些向量的大小.

(1) $\vec{a}+\vec{b}+c$;　　(2) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;

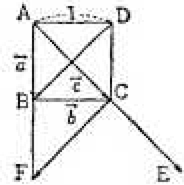
(3) $-\vec{a}-\vec{b}+c$.

解　(1) 因为$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, 所以, 设$AC$向$C$方向延长一倍, 得到终点$E$, 则

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AE},\ |\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{2}.$$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

若过C作DB的平行线, 交AB的延长线于F, 则因为



$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CF},$$

所以

$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}&=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF},\ |\overrightarrow{AF}|=2.\end{aligned}$$

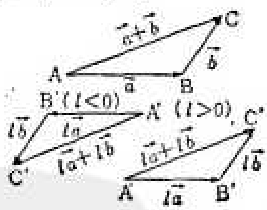
(3) $$\begin{aligned}-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}&=(\vec{c}-\vec{a})-\vec{b}\\&=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}=0,\end{aligned}$$

这个向量的大小为0.

2831. 设l为实数, 证明

$$l(\vec{a}+\vec{b})=l\vec{a}+l\vec{b}.$$

解　设



$$\overrightarrow{AB}=\vec{a},$$
$$\overrightarrow{BC}=\vec{b},$$
$$\overrightarrow{A'B'}=l\vec{a},$$
$$\overrightarrow{B'C'}=l\vec{b}.$$

则

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b},$$

$$\overrightarrow{A'C'}=l\vec{a}+l\vec{b},$$

$$A'B'\parallel AB,\ B'C'\parallel BC,$$

$$\therefore\quad \triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC.$$

(i) 当$l>0$时,

$$\overline{A'B'}=l\,\overline{AB},$$

$$\therefore\quad \overline{A'C'}=l\,\overline{AC}.$$

因为$\overrightarrow{A'C'}$、$\overrightarrow{AC}$方向相同, 所以

$$\overrightarrow{A'C'}=l\,\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore\quad l\vec{a}+l\vec{b}=l(\vec{a}+\vec{b}).$$

(ii) 当$l<0$时,

$$\overline{A'B'}=-l\,\overline{AB},$$

$$\therefore\quad \overline{A'C'}=-l\,\overline{AC},$$

因为$\overrightarrow{A'C'}$、$\overrightarrow{AC}$方向相反, 所以

$$\overrightarrow{A'C'}=-(-l)\overrightarrow{AC}=l\,\overrightarrow{AC},$$

于是可与(i)类似地论证原式成立.

(iii) 当$l=0$时,

$$l(\vec{a}+\vec{b})=0,\ l\vec{a}+l\vec{b}=0.$$

原式也成立.

2832. 兄弟两人用绳子吊住15kg的重

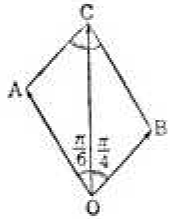
物，吊重物的绳子与铅垂线分别成 $\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{4}$ 的角度，兄弟两人各用力多少？

解　设兄弟两人各用力 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$，其合力为 $\overrightarrow{OC}$，则在 $\triangle AOC$ 中，有

$$\frac{OA}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{AC}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{OC}{\sin\frac{5}{12}\pi},$$

$$\because\quad OC=15,\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \sin\frac{5}{12}\pi=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$$



$$\therefore\quad OA=15\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=15(\sqrt{3}-1)=10.98,$$

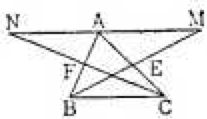
$$AC=15\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{15(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}=7.76.$$

因此哥哥用力 10.98 kg，弟弟用力 7.76 kg。

2833．已知 $\triangle ABC$ 两边 AC、AB 的中点为 E、F，在 BE 延线上取点 M 使 $EM=BE$，在 CF 延线上取点 N 使 $FN=CF$，试用向量方法证明 M、A、N 这三点在一条直线上。

解

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BE}\\&=\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})\\&=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\&=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CF}\\&=\overrightarrow{AC}+2(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC})\\&=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AF}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\overrightarrow{AM}.\end{aligned}$$

所以 A 是 MN 的中点，M、A、N 三点在一条直线上。

2834．设过定点 A 的直线 l 上有点 P，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，与这条直线平行的向量设为 c。证明 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{c}$，其中 t 为实数。又在直线 AB 上取点 P，设

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OP}=\vec{p},$$

利用上述结论证明：存在着实数 m、n 使

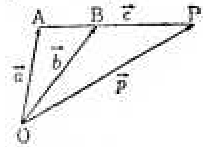
$$\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b},\ m+n=1.$$

解　因为

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{AP}=tc,$$

所以 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{c}$，当这条直线通过 B 时，

$$\vec{c}=k\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}),$$



因此

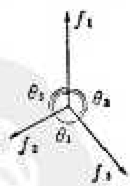
$$\vec{p}=\vec{a}+tk(\vec{b}-\vec{a})=(1-tk)\vec{a}+tk\vec{b},$$

设 $tk=n$，$1-tk=m$，于是有

$$m+n=1,\qquad \vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}.$$

注　这叫做直线 l 的向量方程。

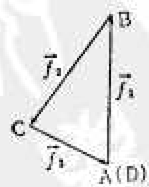
2835．若作用于一点 O 的三个力 f_1、f_2、f_3 平衡，每两个力的夹角分别如图所示为 θ_1，θ_2，θ_3，证明



$$\frac{f_1}{\sin\theta_1}=\frac{f_2}{\sin\theta_2}=\frac{f_3}{\sin\theta_3}.$$

解　设力 f_1、f_2、f_3 用 $\vec{f}_1$、$\vec{f}_2$、$\vec{f}_3$ 表示。因为三力平衡，所以

$$\vec{f}_1+\vec{f}_2+\vec{f}_3=0.\quad ①$$



取 $\vec{f}_1=\overrightarrow{AB}$，$\vec{f}_2=\overrightarrow{BC}$，$\vec{f}_3=\overrightarrow{CD}$，则

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{f}_1+\vec{f}_2+\vec{f}_3,$$

由 ① 知 $\overrightarrow{AD}=\vec{0}$，因此 A、D 重合，即形成一个三角形 ABC。

在这个三角形中，因为 $\angle C$ 的外角等于 $\vec{f}_2$ 与 $\vec{f}_3$ 的夹角，所以 $\angle C=\pi-\theta_1$。同理有 $\angle A=\pi-\theta_2$，$\angle B=\pi-\theta_3$，故由正弦定理，

$$\frac{|\vec{f}_1|}{\sin(\pi-\theta_1)}=\frac{|\vec{f}_2|}{\sin(\pi-\theta_2)}=\frac{|\vec{f}_3|}{\sin(\pi-\theta_3)}.\quad ②$$

因为 $\sin(\pi-\theta_i)=\sin\theta_i\ (i=1, 2, \cdots, 3)$。

$|\vec{f}_1|$、$|\vec{f}_2|$、$|\vec{f}_3|$ 是各个力的大小，若以 f_1，

f_2, f_3 表示，则由 ② 可得

$$\frac{f_1}{\sin\theta_1}=\frac{f_2}{\sin\theta_2}=\frac{f_3}{\sin\theta_3}.$$

注 本题的关系式叫拉密定理.

2836. 证明，对于任意向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和任意实数 m、n，有

(1) $1\vec{a}=\vec{a}$, $0\vec{a}=\vec{0}$.

(2) $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$.

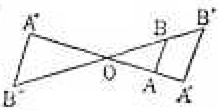
解 (1) 当 $m>0$ 时，$m\vec{a}$ 是这样的一个向量：它与 $\vec{a}$ 同方向，大小是 $\vec{a}$ 的大小的 m 倍. 当 $m<0$ 时，$m\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 相反，大小是 $\vec{a}$ 的大小的 $|m|$ 倍.

$$\therefore\quad 1\vec{a}=\vec{a},\ 0\vec{a}=\vec{0}.$$

(2) 设 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$，则

$$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}.$$

当 $m>0$ 时，设有 $\triangle OA'B'$ 相似于 $\triangle OAB$，且相似的位置(O 为相似的外心)如图. 设 $\overrightarrow{OA'}$ 是 $\overrightarrow{OA}$ 的 m 倍，则



$$\overrightarrow{OA'}=m\vec{a},\ \overrightarrow{A'B'}=m\vec{b},$$

从而 $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B'}=m\vec{a}+m\vec{b}$.

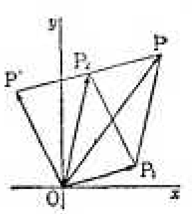
又因为 $\overrightarrow{OB'}=m\,\overrightarrow{OB}=m(\vec{a}+\vec{b})$,

所以 $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$.

当 $m<0$ 时，象图中那样取 $\triangle OA''B''$(O 为相似的内心)，就可得到同样的结果.

2837. 当用复平面上的点 P 表示复数 z，而又用原点 O 为起点、P 为终点确定向量 $\overrightarrow{OP}$ 时，我们就可以用这个向量表示复数 z，证明：复数的和、差分别可用代表这些复数的向量的和、差表示出来.

解 设复平面上表示两个复数 z_1、z_2 的点分别是 P_1、P_2. 作以 OP_1、OP_2 为两边的平行四边形 OP_1PP_2，则 P 表示复数 $z=z_1+z_2$. 再作以 OP_1、P_1P_2 为两边的平行四边形 OP_1P_2P'，则点 P' 表示复数 $z'=z_2-z_1$.



在这个图中，因为

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P},\ \overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP_2},$$

所以 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}$.

故表示 $z=z_1+z_2$ 的向量，等于表示 z_1、z_2 的向量之和.

又 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}$,

从而 $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$.

因为 $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{P_1P_2}$,

所以 $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$.

故表示 $z'=z_2-z_1$ 的向量，等于表示 z_2、z_1 的向量之差.

2838. 若 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为任意向量，证明满足 $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ 的向量 $\vec{x}$ 等于 $\vec{b}+(-\vec{a})$.

解 在 $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ 的两边加上 $-\vec{a}$，得

$$(\vec{a}+\vec{x})+(-\vec{a})=\vec{b}+(-\vec{a}),$$

用结合律、交换律可将左边变形为

$$[\vec{a}+(-\vec{a})]+\vec{x}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x},$$

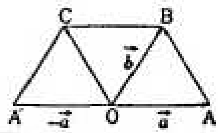
$$\therefore\quad \vec{x}=\vec{b}+(-\vec{a}).$$

研究 现用图来研究本题.

以 O 为起点，取

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$,

$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$,



则因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$,

$$\therefore\quad \vec{a}+\overrightarrow{AB}=\vec{b},$$

$$\therefore\quad \vec{x}=\overrightarrow{AB}. \qquad ①$$

现以 O 为起点取向量 $\overrightarrow{OA'}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 大小相等方向相反. 作平行四边形 $OBCA'$，则

$$\overrightarrow{OA'}=-\overrightarrow{OA}=-\vec{a}.$$

$$\because\quad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA'},$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OC}=\vec{b}+(-\vec{a}).$$

因为 $CB=A'O=OA$, $CB\parallel OA$，四边形 $OABC$ 也是平行四边形,

$$\therefore\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}.$$

因此

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}+(-\vec{a}). \qquad ②$$

由 ①、② 得 $\vec{x}=\vec{b}+(-\vec{a})$.

注 $\vec{x}$ 叫做 $\vec{b}$ 减 $\vec{a}$ 的差，用 $\vec{b}-\vec{a}$ 表示. 由以上的证明知

$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a}).$$

2839. 有四点 $A(1,\ 0)$、$B(2,\ -1)$、$C(0,\ 2)$、$D(-1,\ 0)$，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$. 试把下列各向量以 O 为起点表示在图上.

(1) $2\vec{a}$;　　　(2) $-\frac{3}{2}\vec{b}$;

(3) $\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$;　(4) $2\vec{a}-2\vec{b}$.

解　在下图中，P、Q、R、S 分别是(1)、(2)、(3)、(4)中向量的终点。作法简述如下。

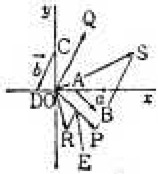
(1) $OP \parallel AB$,

$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{AB}$.

(2) $OQ \parallel DC$,

$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.

(3) E 为 OP 的中点 $(\overrightarrow{OE}=\vec{a})$，$ER \parallel CD$,



$$\overrightarrow{ER}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{ER}=\frac{1}{2}\vec{b}\right).$$

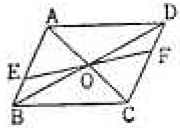
(4) $PS \parallel DC$，$\overrightarrow{PS}=2\overrightarrow{DC}$ $(\overrightarrow{PS}=-2\vec{b})$.

2840. 在下图中的平行四边形里，O 是对角线的交点，设

$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$,

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,　$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.

试把下列各向量用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示出来。



$$\overrightarrow{EB},\ \overrightarrow{CF},\ \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{OE}.$$

解　$\overrightarrow{EB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\vec{a}$,

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}=-\frac{2}{3}\vec{a}.$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+(-\overrightarrow{AB})=\vec{b}-\vec{a}.$$

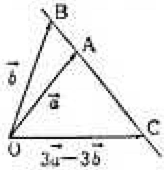
$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BO}=-\overrightarrow{EB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

$$=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}.$$

2841. 证明起点相同的三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$3\vec{a}-2\vec{b}$ 的终点在一直线上。

解　所谓不同的点 A、B、C 在同一直线上，就是指以这些点为起点、终点的两个向量，例如 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 的方向相同或相反。即



$$\overrightarrow{AB}=l\,\overrightarrow{AC}\quad (l\text{ 为实数}).$$

当三点中有重合的点时上述关系也成立。

设 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$3\vec{a}-2\vec{b}$ 的终点分别是 A、B、C，则

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a},$$

$$\overrightarrow{AC}=3\vec{a}-2\vec{b}-\vec{a}=2(\vec{a}-\vec{b}).$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}.$$

因此，A、B、C 三点在一条直线上。

注　易知本题中 A 内分 BC 成 $1:2$.

2842. 在图上作出向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的和、差。

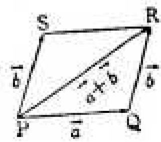
解　设有 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 两个向量，取

$\overrightarrow{PQ}=\vec{a}$,

再以 Q 为起点取

$\overrightarrow{QR}=\vec{b}$.

连结 P、R 得到向量 $\overrightarrow{PR}$，这就是 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的和。



取两个向量

$\overrightarrow{OP}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\vec{b}$.

在 QO 延长线上取 R 使

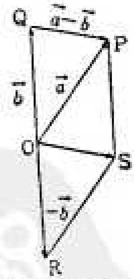
$OR=QO$,

则　$\overrightarrow{OR}=-\vec{b}$,

以 OP、OR 为两邻边作平行四边形 $OPSR$，则

$\overrightarrow{OS}=\vec{a}+(-\vec{b})$

$=\vec{a}-\vec{b}$.



又因为 $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OS}$，因此把 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ 终点连结起来得到的向量 $\overrightarrow{QP}$ 就是 $\vec{a}-\vec{b}$.

2843. 在线段 AB 上取 $m:n$ 的内分点 P，设坐标原点为 O，$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OP}$ 分别为 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{p}$，证明

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}.$$

解　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\vec{p}-\vec{a}$,

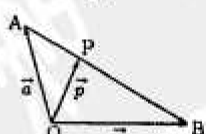
$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=\vec{b}-\vec{p}$,

由　$\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\dfrac{m}{n}$

有　$n\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{PB}$,

$\therefore$　$n(\vec{p}-\vec{a})$

$=m(\vec{b}-\vec{p})$,



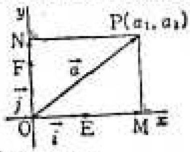
$$\therefore\ (m+n)\vec{p}=m\vec{b}+n\vec{a},$$

$$\therefore\ \vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}.$$

注　本题可作为公式使用．特别地，当 P 是 AB 的中点时，有 $\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$。

C．向量的分量

2844． 向量 $\vec{a}$ 以直角坐标系的原点为起点，终点 P 的坐标设为 (a_1, a_2)．又在坐标轴上取点 $E(1, 0)$，$F(0, 1)$，记



$\overrightarrow{OE}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OF}=\vec{j}$,

试把 $\vec{a}$ 用 a_1, a_2, $\vec{i}$, $\vec{j}$ 表示出来．

解　设从 P 向 x 轴、y 轴所作垂线的垂足为 M、N，则

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}.$$

因为　$\overrightarrow{OM}=a_1\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{ON}=a_2\overrightarrow{OF}$,

所以

$$\vec{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=a_1\overrightarrow{OE}+a_2\overrightarrow{OF}$$
$$=a_1\vec{i}+a_2\vec{j},$$
$$\therefore\quad \vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}. \qquad ①$$

$\vec{i}$、$\vec{j}$ 叫基向量．

由于在平移下向量不变，所以不管始点在哪里，向量总可表成 ① 的形式．

这种表示中，a_1、a_2 分别叫 $\vec{a}$ 的 x 分量（或坐标）、y 分量（或坐标），统称为分量（或坐标），并可写为

$$\vec{a}=(a_1, a_2). \qquad ②$$

② 式叫做 $\vec{a}$ 的分量（或坐标）表示，而 ① 叫做 $\vec{a}$ 的基向量表示．

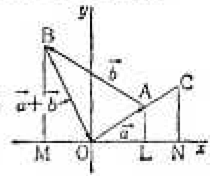
向量的分量还可以象下面的 1) 那样简单地叙述．又从分量的定义可知，下面的 4) 是显然的．

> **向量的分量表示**
>
> 1) 一个向量在 x 轴、y 轴上的正投影是有向线段，这些有向线段的长是向量的 x 分量和 y 分量．
>
> 2) 设 $\vec{a}$ 的分量为 a_1、a_2，基向量为 $\vec{i}$, $\vec{j}$，则　$\vec{a}=(a_1, a_2)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$.
>
> 3) 在 $\vec{a}$ 的分量表示式中，基向量的系数是分量．
>
> 4) 若 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$，则　$\vec{a}=\vec{b} \rightleftarrows a_1=b_1$　及　$a_2=b_2$.

2845． 设 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$, m 为实数，用图或是用基向量表示，证明：

$m\vec{a}=(ma_1, ma_2)$,

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$.



解　(1) 用图．设图中

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,

$\overrightarrow{OC}=m\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$,

由 A、B、C 向 x 轴所作垂线的垂足为 L、M、N，则

$$\vec{a}\text{ 的 }x\text{ 分量}=a_1=OL,$$
$$\vec{b}\text{ 的 }x\text{ 分量}=b_1=LM,$$
$$m\vec{a}\text{ 的 }x\text{ 分量}=ON,$$
$$\vec{a}+\vec{b}(=\overrightarrow{OB})\text{ 的 }x\text{ 分量}=OM,$$

作为 x 轴上的有向线段，有

$$ON=m\,OL,\quad OM=OL+LM,$$
$$\therefore\quad m\vec{a}\text{ 的 }x\text{ 分量}=ma_1,$$
$$\vec{a}+\vec{b}\text{ 的 }x\text{ 分量}=a_1+b_1.$$

关于 y 分量，可由 A、B、C 向 y 轴作垂线类似地给以证明．

(2) 用基向量表示．设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$, $\vec{i}$、$\vec{j}$ 是基向量，则

$$m\vec{a}=m(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})=(ma_1)\vec{i}+(ma_2)\vec{j}$$
$$=(ma_1, ma_2).$$
$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})+(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})$$
$$=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}$$
$$=(a_1+b_1, a_2+b_2).$$

2846． 若 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$, $c=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}$，利用基向量表示求下列各个向量的分量．

(1) $\vec{a}-\vec{b}$;　　(2) $3\vec{a}+2\vec{b}$;

(3) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

解　(1)

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})-(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})$$
$$=(c_1-b_1)\vec{i}+(a_2-b_2)\vec{j},$$
$$\therefore\quad \vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2).$$

(2) $3\vec{a}+2\vec{b}=3(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})+2(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})$
$$=(3a_1+2b_1)\vec{i}+(3a_2+2b_2)\vec{j},$$
$$\therefore\quad 3\vec{a}+2\vec{b}=(3a_1+2b_1, 3a_2+2b_2).$$

(3) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})+(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})$
$$-(c_1\vec{i}+c_2\vec{j})$$
$$=(a_1+b_1-c_1)\vec{i}$$
$$+(a_2+b_2-c_2)\vec{j},$$

$\therefore\ \ \vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=(a_1+b_1-c_1,\ a_2+b_2-c_2)$.

一般地，把向量施行加法、减法、乘以实数后所得结果的分量，等于把各个向量的分量施行相同运算后所得结果.

2847. 设 $\vec{a}=(2,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 5)$，求 $\vec{b}-\vec{a}$ 的大小与方向角 θ.

解　因为

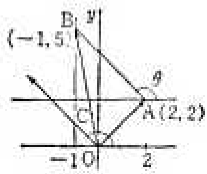
$$\vec{b}-\vec{a}=(-1-2,\ 5-2)=(-3,\ 3),$$

所以　$|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$,

因为　$\cos\theta=\dfrac{-3}{\sqrt{(-3)^2+3^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{(-3)^2+3^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,



$\therefore$　$\operatorname{tg}\theta=-1$,

$\therefore$　$\theta=135°$.

注　在右图中设 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. 研究直角三角形 ABC，可有 C 的坐标为 $(-1,\ 2)$. 所以

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(-3)^2+3^2}$$
$$=3\sqrt{2}.$$

又设 $\angle CAB=\alpha(=\pi-\theta)$，则

$$\cos\alpha=\frac{AC}{AB},\quad \sin\alpha=\frac{BC}{AB},$$

即可得　　$\operatorname{tg}\theta=-1,\ \theta=135°$.

2848. 若 $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ -7)$，求 $\vec{a}+\vec{b}$ 的大小和方向角 θ.

解　$\vec{a}+\vec{b}=(1+3,\ 3-7)=(4,\ -4)$.

$\therefore$　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$.

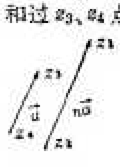
$$\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\sin\theta=\frac{-4}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

故方向角　$\theta=2\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7}{4}\pi$.

2849. z_1、z_2、z_3、z_4 是复数. 若 $\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_4}$ 是实数，则过 z_1、z_2 点的直线 l 和过 z_3、z_4 点的直线 m 的斜率相等.

解　设 $z_k=x_k+y_ki$，$(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. 因为



$$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i}{(x_3-x_4)+(y_3-y_4)i}$$

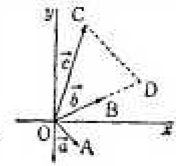
是实数，故虚部为0. 从而

$$(x_1-x_2)(y_3-y_4)-(x_3-x_4)(y_1-y_2)=0.$$

由此式易证 $l\parallel m$.

注　由 $z_1-z_2=n(z_3-z_4)$ 知，上图中的两个向量是方向相同或方向相反的，因而这两个向量所在直线平行. 又易知 $\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_4}$ 的幅角为 $n\pi$.

2850. 若两个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分量为 $(1,\ -1)$、$(2,\ 1)$，证明任何向量 $\vec{c}$ 可表成 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$，其中 m、n 为实数. 并用图形说明这一点.



解　设 $\vec{c}$ 的分量为 x、y，则有

$$\begin{cases}m\cdot1+n\cdot2=x,\\ m(-1)+n\cdot1=y.\end{cases}$$

解出得 $n=\dfrac{x+y}{3}$，$m=\dfrac{x-2y}{3}$. 从而不管 x、y 是什么数，总可定出 m、n.

在图中，设 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 为 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，过 C 与 OA 平行的直线与 OB 交于点 D，又设

$$\frac{DC}{OA}=m,\quad \frac{OD}{OB}=n,$$

则　　$OC=OD+DC=m\vec{a}+n\vec{b}$.

D. 向量的标积

2851. 试说明什么是向量的标积.

解　大小为 f 的一个力作用于物体上，使物体移动 s，力的作用方向与物体移动方向构成角度 θ. 这样，这个力所作的功是 $fs\cos\theta$.

把这一例子推广到一般，向量的标积可定义如下.

向量的标积：若两个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 间的夹角为 θ，则 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 叫 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的标积. 用记号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 或 $(\vec{a},\ \vec{b})$ 表示（在本书中多使用 $\vec{a}\cdot\vec{b}$），即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

注　1. 始边与终边所成的角有无数多种表示方式，这些角的差是 2π 的整数倍. 所以这时 $\cos\theta$ 的值不变. 而当 θ 从0到 π 变化时，$\cos\theta$ 的值从 $+1$ 变到 -1. 所以今后一

般假定

$$0\leq\theta\leq\pi\quad(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ).$$

又起点不同的向量所夹的角，可把向量平移到起点重合后再考察，这时就比较容易讨论.

2. 当$\vec{a}$、$\vec{b}$至少有一个为0时，θ就没有定义. 这时我们定义$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

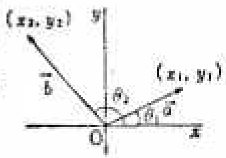
3. $|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$、$\cos\theta$是数量，所以内积$\vec{a}\cdot\vec{b}$不是向量而是数量. 由于这一点，标积也叫数量积.

2852. 设两个向量

$$\vec{a}=(x_1,\ y_1),\ \vec{b}=(x_2,\ y_2)$$

所夹的角为θ，证明

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2.$$



解 设向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的方向角为θ_1、θ_2，则

$$\theta=|\theta_2-\theta_1|,$$

又因为x_1、y_1、x_2、y_2分别为

$$|\vec{a}|\cos\theta_1,\ |\vec{a}|\sin\theta_1,\ |\vec{b}|\cos\theta_2,\ |\vec{b}|\sin\theta_2.$$

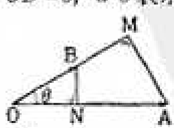
从而

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\theta_2-\theta_1)$$
$$=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\ (\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2),$$

因此　$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2.$

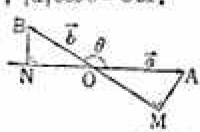
注 由余弦定理和两点距离公式也可证明.

2853. 设图中$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$表示什么？又当$\theta$为钝角时$\vec{a}\cdot\vec{b}$表示什么？



解

$$\because\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$
$$=|\vec{a}|\,(|\vec{b}|\cos\theta)=|\vec{b}|\,(|\vec{a}|\cos\theta),$$
$$|\vec{a}|=OA,\quad |\vec{b}|=OB,$$
$$\therefore\quad |\vec{b}|\cos\theta=ON,\ |\vec{a}|\cos\theta=OM.$$
$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=OA\cdot ON=OB\cdot OM.$$

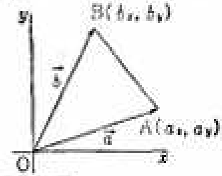


其次，当θ为钝角时，$\cos\theta<0$. 若把OA、OB看作有向直线，则$OM<0$，$ON<0$. 上式仍然成立.

注 当A、M、B、N四点在同一圆周上时，$OA\cdot ON=OB\cdot OM$都可看成是$\vec{a}$与$\vec{b}$的内积，其中

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\quad \vec{b}=\overrightarrow{OB}.$$

2854. 求两个向量$\vec{a}=(a_x,\ a_y)$，$\vec{b}=(b_x,\ b_y)$的内积.



解 设两个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$所成的角为$\theta(0\leq\theta<\pi)$，$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$叫做$\vec{a}$、$\vec{b}$的内积并记成$\vec{a}\cdot\vec{b}$. 现在设$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，在$\triangle OAB$中，由余弦定理得

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\theta,$$
$$\therefore\quad (a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2$$
$$=a_x^2+a_y^2+b_x^2+b_y^2$$
$$-2OA\cdot OB\cos\theta,$$
$$\therefore\quad OA\cdot OB\cos\theta=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y.$$

因为$OA=|\vec{a}|$，$OB=|\vec{b}|$，所以

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y.$$

2855. 什么时候$\vec{a}\cdot\vec{b}$为正、负、0？

解 因为$|\vec{a}|\geqq0$，$|\vec{b}|\geqq0$，所以

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

的符号与$\cos\theta$的符号相同. 从而

当$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$时，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\geqq0,$$

当$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$时，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq0.$$

当$\vec{a}=0$或$\vec{b}=0$或$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

2856. 证明下列等式：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$;　　(2) $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$;

(3) $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$.

解 (1) 因为$\vec{a}$与$\vec{a}$所夹的角为0，所以$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\,|\vec{a}|\cos0=|\vec{a}|\,|\vec{a}|=|\vec{a}|^2$.

(2) 作为(1)的特例，因为$|\vec{i}|=1$，所以

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1^2=1.$$

(3) 因为基向量$\vec{i}$、$\vec{j}$所成的角为90°，所以

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=|\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cos90^\circ=1\cdot1\cdot0=0.$$

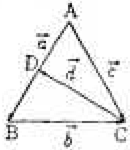
2857. 三角形ABC是边长为2的正三角形，边AB的中点为D，设

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{BC}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c},\ \overrightarrow{CD}=\vec{d},$$

求下列各个内积的值。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; (2) $\vec{b}\cdot\vec{c}$; (3) $\vec{a}\cdot\vec{d}$; (4) $\vec{b}\cdot\vec{d}$.

解

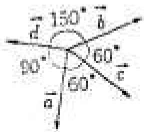


$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|c|=2$,

$|\vec{d}|=\sqrt{3}$.

(1)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 120^\circ=2\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2.$$



(2)

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|\,|\vec{c}|\cos 60^\circ=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=2.$$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{d}=|\vec{a}|\,|\vec{d}|\cos 90^\circ=0$.

(4) $\vec{b}\cdot\vec{d}=|\vec{b}|\,|\vec{d}|\cos 150^\circ$

$$=2\cdot\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3.$$

关于内积有下列等式:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.\ \text{(交换律)}$$

$$(l\vec{a})\cdot\vec{b}=l(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ l\text{ 是实数。}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.\ \text{(分配律)}$$

由内积的定义容易得出交换律成立，后两个等式则放在下面的问题中进行研究。

2858. 记两个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的内积为 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，证明下列等式。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

(2) $l(\vec{a}\cdot\vec{b})=(l\vec{a})\cdot\vec{b}$;

(3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

解　内积可以用分量表示出来，也可以用两个向量的夹角表示。可以根据具体的情况选用一种表示法。

取 $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$, $|\vec{c}|=c$.

(1) 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所夹的角为 θ，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cos\theta=ba\cos\theta=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

(2) 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所夹的角为 θ，则

$$l(\vec{a}\cdot\vec{b})=lab\cos\theta.$$

当 $l>0$ 时，$l\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 所夹的角是 θ。因为 $la>0$，所以

$$(l\vec{a})\cdot\vec{b}=lab\cos\theta.$$

$$\therefore\ l(\vec{a}\cdot\vec{b})=(l\vec{a})\cdot\vec{b}.$$

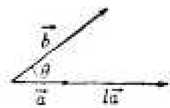
当 $l<0$ 时，$l\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 所夹的角是 $\pi-\theta$，因为 $la<0$，所以

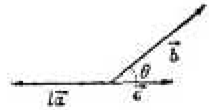
$$(l\vec{a})\cdot\vec{b}=(-la)b\cos(\pi-\theta)=lab\cos\theta,$$

$$\therefore\ l(\vec{a}\cdot\vec{b})=(l\vec{a})\cdot\vec{b}.$$

当 $l=0$ 时两边显然都为 0。所以不管在什么情况下，都有

$$l(\vec{a}\cdot\vec{b})=(l\vec{a})\cdot\vec{b}.$$





(3) 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 分别为

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3).$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot c&=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)\cdot(x_3,\ y_3)\\&=(x_1+x_2)x_3+(y_1+y_2)y_3\\&=x_1x_3+x_2x_3+y_1y_3+y_2y_3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=(x_1,\ y_1)\cdot(x_3,\ y_3)+(x_2,\ y_2)\cdot(x_3,\ y_3)\\&=x_1x_3+y_1y_3+x_2x_3+y_2y_3.\end{aligned}$$

$$\therefore\ (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

2859. 用关于内积的分配律证明下列等式:

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})$
$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}$.

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$
$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$.

解　(1) 设 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{e}$，则

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})&=\vec{e}\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{e}\cdot\vec{c}+\vec{e}\cdot\vec{d}\\&=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{d}\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}.\end{aligned}$$

(2) 因为本题就是上一小题中设 $\vec{c}=\vec{a}$, $\vec{d}=-\vec{b}$ 的特殊情况，所以

$$\begin{aligned}&(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}\quad(\because\ \vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2.\end{aligned}$$

所以，从结果看，这个式子可以象数一样地去括号。

2860. 有 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 两个向量 $(\vec{a}\neq0,\ \vec{b}\neq0)$。试用内积表示出下列情况成立的条件:

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$;

(2) $\vec{a}\parallel\vec{b}$（包括两个向量在同一直线上的情况）。

解　设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所成的角为 θ。

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}\rightleftarrows\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

(2) $\vec{a}\parallel\vec{b}\rightleftarrows\theta=0$ 或 $\theta=\pi$.

当 $\theta=0$ 时

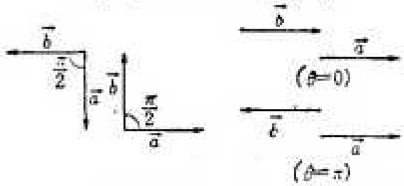
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 0=|\vec{a}||\vec{b}|.$$

当 $\theta=\pi$ 时

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\pi=-|\vec{a}||\vec{b}|.$$

$$\therefore\quad \vec{a}\perp\vec{b}\rightleftarrows\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\rightleftarrows\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|.$$



2861. 给出复数 $\alpha=x_1+y_1i$, $\beta=x_2+y_2i$, 并设 $\vec{a}=(x_1, y_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2)$。考察下列等式是否成立。

(1) $|\alpha|=|\vec{a}|$;　(2) $|\alpha+\beta|=|\vec{a}+\vec{b}|$;

(3) $|\alpha\beta|=|\vec{a}\cdot\vec{b}|$.

解 (1) $|\alpha|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=|\vec{a}|$, 即等式成立。

(2) $\alpha+\beta=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$,

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2).$$

$$\therefore\quad |\alpha+\beta|=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}=|\vec{a}+\vec{b}|,$$

即等式成立。

(3) $\alpha\beta=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)i$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

当 $x_1=x_2=1$, $-y_1=y_2=1$ 时有 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\alpha\beta\neq0$, 所以该式不成立。

2862. 求下列两个向量所成的角 θ。

(1) $\vec{a}=(-1, 2)$, $\vec{b}=(1, 3)$;

(2) $\vec{a}=(\sqrt{3}, -1)$, $\vec{b}=(1, -\sqrt{3})$.

解 (1) $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,

$$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\times1+2\times3=5.$$

又

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{50}\cos\theta=5\sqrt{2}\cos\theta,$$

$$\therefore\quad 5\sqrt{2}\cos\theta=5,\quad\therefore\quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因为 $0\leq\theta<\pi$, 所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

(2) 用和(1)一样的方法，得

$$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2,$$

$$\sqrt{3}\times1+(-1)\times(-\sqrt{3})=\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cos\theta.$$

$$2\sqrt{3}=4\cos\theta,\quad\therefore\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

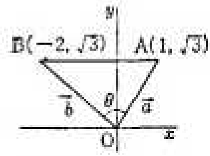
因为 $0\leq\theta<\pi$, 所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

2863. 求下列两个向量所成的角的余弦值。

(1) $\vec{a}=(1, \sqrt{3})$, $\vec{b}=(-2, \sqrt{3})$.

(2) $\vec{a}=\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}$, $\vec{b}=2\sqrt{2}\vec{i}-\vec{j}$.

解 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所成的角为 θ,



(1) 在图中,

$$\overline{OA}=\sqrt{1+3}=2,$$

$$\overline{OB}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7},$$

$$AB=3.$$

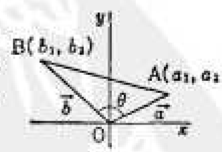
$$\cos\theta=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{AB}^2}{2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}}=\frac{4+7-9}{2\cdot2\cdot\sqrt{7}}=\frac{2}{2\cdot2\cdot\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

(2) $\vec{a}=(1, \sqrt{2})$, $\vec{b}=(2\sqrt{2}, -1)$, 所以

$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+2}\sqrt{8+1}}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

2864. 用余弦定理，把 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ 所成角 θ 的余弦用分量 a_1、a_2、b_1、b_2 表示出来。

解 取原点 O 作为 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的起点，终点分别为 A、B, 则 A、B 的坐标是 (a_1, a_2), (b_1, b_2).



设 $\angle AOB=\theta$, 在 $\triangle AOB$ 中用余弦定理，则

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\,\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\theta,$$

其中 $\overline{OA}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $\overline{OB}=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$,

$$\overline{AB}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2},$$

$$\therefore\quad (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}\cos\theta,$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}\cos\theta=2a_1b_1+2a_2b_2.$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

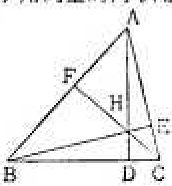
2865. 设向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 试用

$\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示 △OAB 的面积。

解　设 △OAB 的面积为 S，$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 所成的角为 θ，因为 $OA=|\vec{a}|$，$OB=|\vec{b}|$，所以

$$S=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{OA^2\cdot OB^2\sin^2\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cos^2\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}.$$

2866. 由 △ABC 各顶点向对边所作高的垂足分别记为 D、E、F，用向量的内积证明 AD、BE、CF 交于一点。



解　设 BE、CF 的交点为 H，因为 $BH\perp AC$，所以

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0,$$
$$\therefore\quad(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=0.$$
$$\therefore\quad\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}.\qquad①$$

同理，由 $CH\perp AB$ 可得

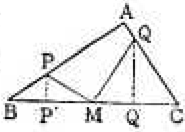
$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}.\qquad②$$

由①、②得

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB},$$
$$\therefore\quad\overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0.$$
$$\therefore\quad\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0.$$

所以有 $AH\perp BC$ 或是 A 与 H 重合。结果总得到 AD 通过 H。

2867. 设直角三角形 ABC 的斜边 BC 的中点为 M，在边 AB、AC 上分别取点 P、Q，设由 P、Q 向 BC 所作垂线的垂足是 P'、Q'，如果 P、Q 取得能使



$$P'Q'=\frac{1}{2}BC,$$

问 (1) 当 $\overrightarrow{MP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{MQ}=\vec{q}$，$\overrightarrow{MC}=\vec{c}$ 时，$\vec{c}$、$\vec{p}$、$\vec{q}$ 满足什么关系？

(2) 证明 MP 与 MQ 垂直。

解　(1)

$$\vec{p}\cdot\vec{c}=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MP}\cdot(-\overrightarrow{MB})$$
$$=-MP\cdot MB\cos\angle PMB$$
$$=-(MP\cos\angle PMB)\times MC$$
$$=-MP'\cdot MC.$$

又

$$\vec{q}\cdot\vec{c}=MQ\cdot MC\cos\angle QMC$$
$$=(MQ\cos\angle QMC)\cdot MC$$
$$=MQ'\cdot MC.$$
$$\therefore\quad\vec{q}\cdot\vec{c}-\vec{p}\cdot\vec{c}=(MQ'+MP')\cdot MC$$
$$=P'Q'\cdot MC=MC^2$$
$$=\vec{c}\cdot\vec{c}.$$
$$\therefore\quad(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{c}.$$

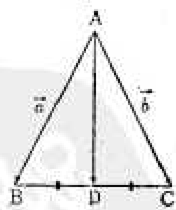
(2) 因为 $\angle A$ 是 $90°$，所以

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=0.$$
$$\therefore\quad[\vec{p}-(-\vec{c})](\vec{q}-\vec{c})=0.$$
$$\therefore\quad\vec{p}\cdot\vec{q}+(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{c}=0.$$

由(1)知　$(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{c}.$

$$\therefore\quad(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{c}=0.$$
$$\therefore\quad\vec{p}\cdot\vec{q}=0.\quad\therefore\quad MP\perp MQ.$$

2868. 试用内积证明，等腰三角形底边 BC 上的中线 AD 垂直于底边。



解　设

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a},$$
$$\overrightarrow{AC}=\vec{b},$$
$$\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{a}.$$
$$\therefore\quad\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}),$$
$$\therefore\quad\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{a}).$$
$$\therefore\quad\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=\frac{1}{2}(|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2).$$

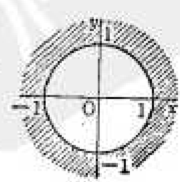
但由于　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$,

$$\therefore\quad|\vec{a}|=|\vec{b}|.$$
$$\therefore\quad\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0.\quad\therefore\quad AD\perp BC.$$

2869. 当实数 a、b、x、y 满足下列等式

$$a^2+b^2=1,\quad ax+by=1$$

时，试用向量的内积来出点 $(x,\ y)$ 的存在范围。



解　设

$$\vec{a}=(a,\ b),$$
$$\vec{p}=(x,\ y),$$

$\vec{a}$、$\vec{p}$ 的交角为 θ，则

$$ax+by=\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\theta$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta,$$

而 $\qquad a^2+b^2=1,\ ax+by=1,$

$$\therefore\quad 1=\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta.$$

因为 $x^2+y^2\neq0$（若 $x^2+y^2=0$ 则 $ax+by=0$，与假设矛盾）。

$$\therefore\quad -1\leq\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq1.$$

$$\therefore\quad \sqrt{x^2+y^2}\geq1,\quad \therefore\quad x^2+y^2\geq1.$$

故点 $(x,\ y)$ 在以原点为圆心，半径为 1 的圆周上及圆周外。

2870. 已知 $x^2+y^2=4$，$a^2+b^2=1$。试用向量的内积求出 $ax-by$ 的取值范围。

解 设 $\vec{a}=(a,\ -b)$，$\vec{p}=(x,\ y)$，$\vec{a}$、$\vec{p}$ 的交角为 θ，若 $\vec{a}=0$ 则 $a=b=0$，与 $a^2+b^2=1$ 矛盾，故 $\vec{a}\neq0$，同理 $\vec{p}\neq0$。

$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{p}=(a,\ -b)\cdot(x,\ y)=ax-by,$$

又

$$\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}|\cdot|\vec{p}|\cos\theta$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta$$
$$=\sqrt{1}\sqrt{4}\cos\theta=2\cos\theta,$$
$$\therefore\quad ax-by=2\cos\theta.$$

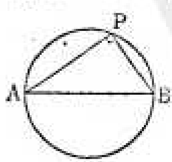
因为 $\qquad -1\leq\cos\theta\leq1,$

$$\therefore\quad -2\leq ax-by\leq2.$$

E. 其他

2871. 求圆的向量方程式，又求圆的切线的方程。

解 设 P 为圆上任意一点，则圆心为 A、半径为 r 的圆方程是



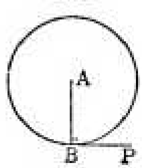
$$|\vec{p}-\vec{a}|=r,$$

即

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=r^2.$$

如果已知以 AB 为直径，则因为 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，所以

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0.$$



又在圆心为 A、半径为 r 的圆上，点 B 处的切线方程为

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=r^2.$$

兹证明如下：

设 P 为切线上任意一点。因为 $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{AB}$，所以 $(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$。

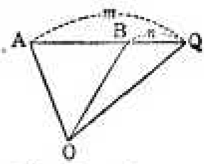
$$\therefore\quad [(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{a}-\vec{b})]\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0.$$
$$\therefore\quad (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{b}-\vec{a}|^2=r^2.$$

2872. 设以原点为起点，A、B 为终点的两个向量为 $\vec{a}$，$\vec{b}$。又设线段 AB 的 $m:n$ 外分点为 Q，$\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$。证明

$$\vec{q}=\frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}.$$

解 因为 $\overrightarrow{AQ}:\overrightarrow{BQ}=m:n$，所以

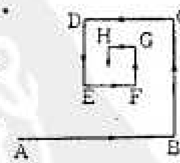
$$n\overrightarrow{AQ}=m\overrightarrow{BQ}.$$



$$\therefore\quad n(\vec{q}-\vec{a})=m(\vec{q}-\vec{b}).$$
$$\therefore\quad n\vec{q}-n\vec{a}=m\vec{q}-m\vec{b}.$$
$$\therefore\quad -m\vec{q}+n\vec{q}=n\vec{a}-m\vec{b}.$$
$$\therefore\quad (-m+n)\vec{q}=n\vec{a}-m\vec{b}.$$
$$\therefore\quad \vec{q}=\frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}.$$

注 对于内分的情况，只要在外分的公式中用 $-m$ 代替 m，或用 $-n$ 代替 n 即可。

2873. 有首项为 1，公比为 $\frac{3}{4}$ 的无穷等比数列 P_0，P_1，P_2，…。现以 A 为起点前进 P_0，然后向左转 90° 再前进 P_1，再向左转 90° 后前进 P_2，如此继续，问无限地趋近什么点？



解 以 AB 为实轴，A 为原点，则

$$\overrightarrow{AB}=1,\ \overrightarrow{BC}=\frac{3}{4}i,$$

$$\overrightarrow{CD}=\frac{3}{4}i\cdot\frac{3}{4}i=\left(\frac{3}{4}i\right)^2,\ \cdots$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\cdots$$
$$=1+\frac{3}{4}i+\left(\frac{3}{4}i\right)^2+\left(\frac{3}{4}i\right)^3+\cdots$$

这是一个首项为 1，公比为

$$\frac{3}{4}i\left(\left|\frac{3}{4}i\right|<1\right)$$

的无穷等比级数，所以其值为

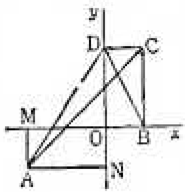
$$\frac{1}{1-\frac{3}{4}i}=\frac{16}{25}+\frac{12}{25}i.$$

无限趋近的就是这个值所表示的点。

2874. 有四点 $A(-2,\ -1)$，$B(1,\ 0)$，$C(1,\ 2)$，$D(0,\ 2)$。求下列各向量的分量：

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}.$$

解 由 A 向 x 轴、y 轴分别作垂线，垂足设为 M、N，由 C 向 x 轴、y 轴所作垂线的垂足为 B、D，则



$\overrightarrow{AB}$：x 分量 $=MB=3$，y 分量 $=AM=1$.

$\overrightarrow{BC}$：x 分量 $=0$，y 分量 $=BC=2$.

$\overrightarrow{CD}$：x 分量 $=CD=-1$，y 分量 $=0$.

$\overrightarrow{DA}$：x 分量 $=NA=-2$，y 分量 $=DN=-3$.

$\overrightarrow{AC}$：x 分量 $=MB=3$，y 分量 $=ND=3$.

$\overrightarrow{BD}$：x 分量 $=BO=-1$，y 分量 $=OD=2$.

2875. 平面上有点 P 及 $\triangle ABC$，且

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}.$$

试问 P 与 $\triangle ABC$ 的位置关系如何.

解 设 P、A、B、C 四点的坐标分别为

$$(x,\ y),\ (a_1,\ a_2),\ (b_1,\ b_2),\ (c_1,\ c_2).$$

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(a_1-x,\ a_2-y)+(b_1-x,\ b_2-y)+(c_1-x,\ c_2-y)$$
$$=(a_1+b_1+c_1-3x,\ a_2+b_2+c_2-3y).$$

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2).$$

$$\therefore\quad a_1+b_1+c_1-3x=b_1-a_1,$$
$$a_2+b_2+c_2-3y=b_2-a_2.$$

$$\therefore\quad x=\frac{2a_1+c_1}{3},\quad y=\frac{2a_2+c_2}{3}.$$

故点 P 在 CA 边上，且把 CA 内分成 2:1. 这还可以如下推知：

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA},$$

$$\therefore\quad 2\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PC}.$$

2876. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的平分线交 BC 于 D，证明

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

解 取 A 为原点，

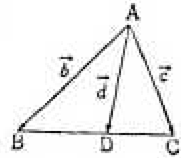
$$\overrightarrow{AB}=\vec b,\quad \overrightarrow{AC}=\vec c,$$

$\angle A$ 的平分线 AD 的方程为(参见第 2880 题)

$$\vec d=t\left(\frac{\vec b}{|\vec b|}+\frac{\vec c}{|\vec c|}\right). \qquad ①$$

因 B、D、C 在同一条直线上，所以

$$\vec d+\lambda\vec b+\mu\vec c=0,\qquad ②$$
$$\lambda+\mu+1=0.\qquad ③$$



把 ① 代入 ②，得

$$t\left(\frac{\vec b}{|\vec b|}+\frac{\vec c}{|\vec c|}\right)+\lambda\vec b+\mu\vec c=0.$$

$$\therefore\quad \vec b\left(\frac{t}{|\vec b|}+\lambda\right)+\vec c\left(\frac{t}{|\vec c|}+\mu\right)=0.\qquad ④$$

因为 AB 不平行于 AC，所以向量 $\vec b$、$\vec c$ 线性无关，

$$\therefore\quad \frac{t}{|\vec b|}+\lambda=0,\quad \frac{t}{|\vec c|}+\mu=0.$$

$$\therefore\quad \lambda=-\frac{t}{|\vec b|},\quad \mu=-\frac{t}{|\vec c|}.$$

代入 ③，有

$$t=\frac{|\vec b|\,|\vec c|}{|\vec b|+|\vec c|}.\qquad ⑤$$

把 ⑤ 代入 ①，有

$$\vec d=\frac{|\vec b|\cdot|\vec c|}{|\vec b|+|\vec c|}\left(\frac{\vec b}{|\vec b|}+\frac{\vec c}{|\vec c|}\right)$$
$$=\frac{|\vec c|}{|\vec b|+|\vec c|}(\vec d+\overrightarrow{DB})+\frac{|\vec b|}{|\vec b|+|\vec c|}(\vec d+\overrightarrow{DC})$$
$$=\vec d+\frac{|\vec c|\cdot\overrightarrow{DB}+|\vec b|\cdot\overrightarrow{DC}}{|\vec b|+|\vec c|}.$$

$$\therefore\quad |\vec c|\cdot\overrightarrow{DB}+|\vec b|\cdot\overrightarrow{DC}=0.$$

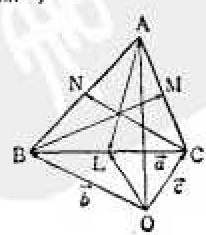
$$\therefore\quad \frac{AB}{AC}=\frac{|\vec b|}{|\vec c|}=\frac{BD}{DC}.$$

2877. 在 $\triangle ABC$ 中，设边 BC、CA、AB 的中点分别为 L、M、N，证明

$$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=0.$$

解 在平面上取一点 O，

$$\overrightarrow{OA}=\vec a,\quad \overrightarrow{OB}=\vec b,\quad \overrightarrow{OC}=\vec c,$$



则 $\overrightarrow{OL}=\dfrac{\vec b+\vec c}{2}$,

$$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OA}=\frac{\vec b+\vec c}{2}-\vec a,$$

同理

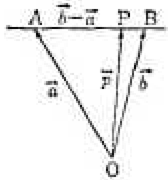
$$\overrightarrow{BM}=\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}-\vec{b},\ \overrightarrow{CN}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\vec{c},$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-a+\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}-\vec{b}+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\vec{c}=0.$$

2878. 设对于原点 O 来说，A、B 的位置向量为 $\vec{a}$、$\vec{b}$. 证明过 A、B 两点的直线方程为

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a}),$$

t 为任意实数.



解 在直线 AB 上取任意点 P，因为

$$\overrightarrow{AB}=(\vec{b}-\vec{a}),$$

所以

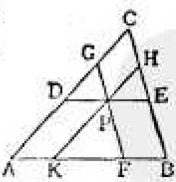
$$\overrightarrow{AP}=t(\vec{b}-\vec{a}),$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a}).$$

$$\therefore\quad \vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a}).$$

2879. 过三角形 ABC 内任意一点 P 作平行于边 AB、BC、CA 的平行线 DE、FG、HK，证明

$$\frac{DE}{AB}+\frac{FG}{BC}+\frac{HK}{CA}=2.$$



解 因为 $DE\parallel AB$，所以

$$\frac{DE}{AB}=\frac{|\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PE}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{FB}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

同理，因为 $FG\parallel BC$，$HK\parallel CA$，所以

$$\frac{FG}{BC}=\frac{|\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KF}|}{|\overrightarrow{AB}|},$$

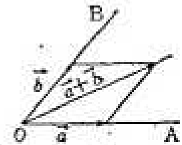
$$\frac{HK}{CA}=\frac{|\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{FB}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

因为 A、K、F、B在同一条直线上，

$$\begin{aligned}\therefore\quad &|\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KF}|+|\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{FB}|\\&=|\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{FB}|\\&=2|\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{FB}|\\&=2|\overrightarrow{AB}|,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{DE}{AB}+\frac{FG}{BC}+\frac{HK}{CA}=\frac{2|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}=2.$$

2880. 求角 AOB 的角平分线的向量方程.



解 取角的顶点 O 为原点，OA、OB 方向的单位向量是 $\vec{a}$、$\vec{b}$，则以 O 为起点的向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 把角 AOB 二等分，所以所求的角平分线向量方程为 $\vec{r}=t(\vec{a}+\vec{b})$，其中 t 为变量，$\vec{r}$ 表示出角平分线上一个任意点关于 O 的位置向量.

现设 OA、OB 方向的任意两个向量为 $\vec{a}$、$\vec{b}$，则单位向量是 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$，所以角 AOB 的角平分线方程是

$$\vec{r}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right).$$

注 当 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为单位向量时，BO 延线与 OA 所成角的角平分线为

$$\vec{r}=t(\vec{a}-\vec{b}).$$

2881. 在 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上分别取 L、M、N 点，若

$$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=0,$$

证明 $BL:BC=CM:CA=AN:AB$.

解 设 $BL:BC=k_1$，$CM:CA=k_2$，

$$AN:AB=k_3,$$

则 $\overrightarrow{BL}=k_1\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CM}=k_2\overrightarrow{CA}$，

$$\overrightarrow{AN}=k_3\overrightarrow{AB}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}&=(\overrightarrow{AB}+k_1\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}+k_2\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA}+k_3\overrightarrow{AB})\\&=(1+k_1)(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\\&\quad+(k_2-k_1)\overrightarrow{CA}+(k_3-k_1)\overrightarrow{AB}=0.\end{aligned}$$

因为 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=0$，

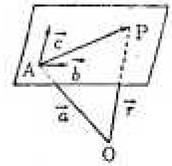
所以 $k_2-k_1=0$，$k_3-k_1=0$，

$$\therefore\quad k_1=k_2=k_3,$$

$$\therefore\quad BL:BC=CM:CA=AN:AB.$$

2882. 求空间中平面的向量方程式.

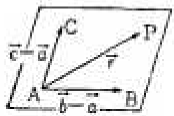
解　(i) 求过定点 A 且与 $\vec{b}$、c 平行的平面的方程.



在平面上任取一点 P，设 A、P 关于原点 O 的位置向量是 $\vec{a}$、$\vec{r}$. 则

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP},$$

又因为 $\vec{b}$、$\vec{c}$、$\overrightarrow{AP}$ 共面，所以对于适当的变量 s、t 可以有



$$\overrightarrow{AP}=s\vec{b}+tc,$$

$$\therefore\quad \vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}.$$

这就是过 A 且与 $\vec{b}$、$\vec{c}$ 平行的平面的方程.

(ii) 求过 A、B、C 三定点的平面的方程.

因为 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$，故由 (i) 的结果，若设平面上任意一点 P 的位置向量是 $\vec{r}$，则

$$\vec{r}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a}),$$

$$\therefore\quad \vec{r}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c},$$

其中如果设 $1-s-t=\lambda$，$s=\mu$，$t=\nu$，则所求的平面方程为

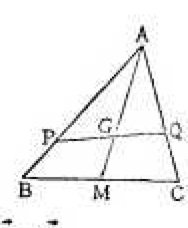
$$\vec{r}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c},\ \lambda+\mu+\nu=1.$$

注　当向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、…与同一个平面平行时，称这些向量是共面的. $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面的充要条件是有不全为 0 的 l、m、n 使

$$l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=0$$

成立.

2883. 过三角形 ABC 重心 G 的一条任意直线与边 AB、AC 交于点 P、Q，证明 $\dfrac{AB}{AP}+\dfrac{AC}{AQ}$ 为一常数.



解　取 A 为原点，B、C、G、M、P、Q 的位置向量分别为 $\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{g}$、$\vec{m}$、$\vec{p}$、$\vec{q}$，设

$$\frac{AB}{AP}=\lambda,\quad \frac{AC}{AQ}=\mu,$$

则　　$\vec{b}=\lambda\vec{p}$，　$\vec{c}=\mu\vec{q}$，

此外因为 $\dfrac{AM}{AG}=\dfrac{3}{2}$，有 $2\vec{m}=3\vec{g}$.

$$\because\quad \vec{b}+\vec{c}=2\vec{m},\quad \therefore\quad \lambda\vec{p}+\mu\vec{q}=3\vec{g}.$$

因为 P、G、Q 在同一条直线上，所以

$$\lambda+\mu=3.$$

2884. 试叙述向量的向量积(外积).

解　$\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$ 的向量积或外积用 $[\vec{V}_1,\vec{V}_2]$ 或 $\vec{V}_1\times\vec{V}_2$ 表示. $\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$ 的向量积是满足如下条件的一个向量：

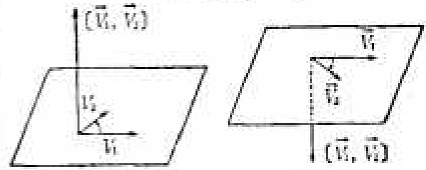
(i) $|[\vec{V}_1,\vec{V}_2]|=|\vec{V}_1||\vec{V}_2|\sin\theta$，其中 θ 是 $\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$ 所成的角度(即向量积的大小等于以 $\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$ 为两相邻边的平行四边形的面积).

(ii) $[\vec{V}_1,\vec{V}_2]$ 与 $\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$ 垂直，即垂直于含 $\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$ 的平面.

(iii) $[\vec{V}_1,\vec{V}_2]$ 的指向，是在把通常的螺丝钉从 $\vec{V}_1$ 旋到 $\vec{V}_2$ 时的旋进方向上.

当 $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ 有相同方向时，因为 $\theta=0,\ \pi$，

$$\therefore\quad [\vec{V}_1,\vec{V}_2]=0.$$



这样定义的向量积有下列性质.

$$[\vec{V}_1,\vec{V}_2]=-[\vec{V}_2,\vec{V}_1],$$

$$[a\vec{V}_1,\vec{V}_2]=a[\vec{V}_1,\vec{V}_2]=[\vec{V}_1,a\vec{V}_2],$$

$$[\vec{V}_1,a\vec{V}_2+b\vec{V}_3]=a[\vec{V}_1,\vec{V}_2]+b[\vec{V}_1,\vec{V}_3],$$

$$[a\vec{V}_2+b\vec{V}_3,\vec{V}_1]=a[\vec{V}_2,\vec{V}_1]+b[\vec{V}_3,\vec{V}_1].$$

又设 x 轴正向、y 轴正向、z 轴正向的大小为 1 的向量是 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$，即 $\vec{i}=(1,0,0)$，$\vec{j}=(0,1,0)$，$\vec{k}=(0,0,1)$，则有

$$[\vec{j},\vec{k}]=\vec{i},\ [\vec{k},\vec{i}]=\vec{j},\ [\vec{i},\vec{j}]=\vec{k},$$

$$[\vec{k},\vec{j}]=-\vec{i},\ [\vec{i},\vec{k}]=-\vec{j},\ [\vec{j},\vec{i}]=-\vec{k},$$

$$[\vec{i},\vec{i}]=[\vec{j},\vec{j}]=[\vec{k},\vec{k}]=0.$$

又若　$\vec{V}_1=v_{1x}\vec{i}+v_{1y}\vec{j}+v_{1z}\vec{k}$,

　　　$\vec{V}_2=v_{2x}\vec{i}+v_{2y}\vec{j}+v_{2z}\vec{k}$.

现用上述关系式计算 $[\vec{V}_1,\vec{V}_2]$：

$$\begin{aligned}[\vec{V}_1,\vec{V}_2]&=[v_{1x}\vec{i}+v_{1y}\vec{j}+v_{1z}\vec{k},\\&\qquad v_{2x}\vec{i}+v_{2y}\vec{j}+v_{2z}\vec{k}]\\&=v_{1x}v_{2x}[\vec{i},\vec{i}]+v_{1x}v_{2y}[\vec{i},\vec{j}]\\&\quad+v_{1x}v_{2z}[\vec{i},\vec{k}]\\&\quad+v_{1y}v_{2x}[\vec{j},\vec{i}]+v_{1y}v_{2y}[\vec{j},\vec{j}]\\&\quad+v_{1y}v_{2z}[\vec{j},\vec{k}]\\&\quad+v_{1z}v_{2x}[\vec{k},\vec{i}]+v_{1z}v_{2y}[\vec{k},\vec{j}]\\&\quad+v_{1z}v_{2z}[\vec{k},\vec{k}]\\&=0+v_{1x}v_{2y}\vec{k}-v_{1x}v_{2z}\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-v_{1y}v_{2x}\vec{k}+0+v_{1y}v_{2z}\vec{i}\\&+v_{1z}v_{2x}\vec{j}-v_{1z}v_{2y}\vec{i}+0\\=&(v_{1y}v_{2z}-v_{1z}v_{2y})\vec{i}\\&+(v_{1z}v_{2x}-v_{1x}v_{2z})\vec{j}\\&+(v_{1x}v_{2y}-v_{1y}v_{2x})\vec{k}.\end{aligned}$$

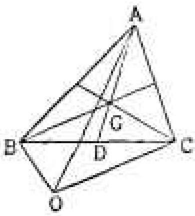
这还可以用行列式写成

$$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\v_{1x}&v_{1y}&v_{1z}\\v_{2x}&v_{2y}&v_{2z}\end{vmatrix}.$$

换一句话说，就是$[\vec{V}_1,\vec{V}_2]$的分量形式是

$$(v_{1y}v_{2z}-v_{1z}v_{2y},\ v_{1z}v_{2x}-v_{1x}v_{2z},\ v_{1x}v_{2y}-v_{1y}v_{2x}).$$

2885. 证明三角形ABC的三条中线交于一点。



解　取O为原点，设

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\quad \overrightarrow{OB}=\vec{b},\quad \overrightarrow{OC}=\vec{c},$$

因为$\overrightarrow{OD}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$，

所以AD的2:1内分点G的位置向量是

$$\frac{1\cdot\vec{a}+2\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{1+2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

同理，从B、C出发的中线上，2:1内分点的位置向量也都是$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})/3$。所以三条中线交于一点。

2886. 有一个六边形$ABCDEF$，AB、CD、EF边的中点分别为L、M、N，BC、DE、FA边的中点分别为P、Q、R，证明$\triangle LMN$的重心与$\triangle PQR$的重心重合。

解　取O为原点，A、B、C、D、E、F的位置向量分别为$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$、$\vec{e}$、$\vec{f}$，则L、M、N的位置向量分别是

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2},\quad \frac{\vec{e}+\vec{f}}{2}.$$

从而$\triangle LMN$的重心位置向量为

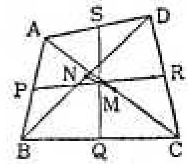
$$\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}+\frac{\vec{e}+\vec{f}}{2}\right)=\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}).$$

同理可得$\triangle PQR$的重心位置向量也是

$$\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}).$$

所以两个三角形的重心重合。

2887. 设四边形$ABCD$的AB、BC、CD、DA边的中点分别是P、Q、R、S，对角线AC、BD的中点分别是M、N，证明线段PR、QS、MN的中点重合。



解　设A、B、C、D的位置向量分别为$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$，则P、Q、R、S、M、N的位置向量分别为

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2},$$
$$\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2},\quad \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2},\quad \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}.$$

从而PR的中点是

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

QS的中点是

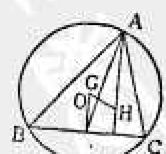
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

MN的中点是

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

故PR、QS、MN的中点重合。

2888. 圆心为O的圆有内接三角形ABC。若OA、OB、OC用向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$表示，证明，若$\triangle ABC$的垂心为H，则OH可用向量$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$表示。



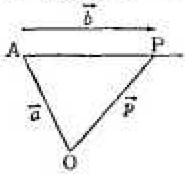
解　一个三角形的重心是外心与垂心所连线段的2:1内分点。现设外心O为原点，A、B、C的位置向量是$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，则重心G的位置向量是$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})/3$。从而垂心$H$的位置向量$\vec{x}$满足

$$\frac{2\cdot\overrightarrow{OO}+1\cdot\vec{x}}{2+1}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3},$$
$$\therefore\quad \vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

2889. 求过定点A且与向量$\vec{b}$平行的直线方程式。

解　取O为原点，在直线上取一任意点P，则$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$。设$A$、$P$两点的位置向

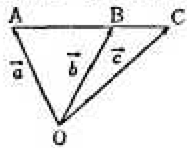
量是 $\vec{a}$、$\vec{p}$. 因为 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\vec{b}$ 平行，所以只要取适当的实数 t 便有 $\overrightarrow{AP}=t\vec{b}$. 因此有 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$. 当 t 变化时，$\vec{p}$ 向量的终点 P 就描画出通过 A 且平行于 $\vec{b}$ 的直线，故



$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$$

就是直线的向量方程.

2890. 设 A、B、C 三点的位置向量是 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，证明 A、B、C 三点在一条直线上的充要条件是，有不全为 0 的实数 l、m、n 使



$$l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=0,$$
$$l+m+n=0.$$

解　过 A、B 的直线方程是

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a}).\qquad ①$$

若 A、B、C 在同一条直线上，C 必然在直线 ① 上，故

$$\vec{c}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$$
$$\therefore\quad (1-t)\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}=0.\qquad ②$$

现设 $1-t=l$, $t=m$, $-1=n$, 故 ② 成为

$$l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=0,$$
$$l+m+n=0.\qquad ③$$

反之，若 ③ 成立，用 $n=-l-m$ 代入

$$l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=0,$$

得
$$l\vec{a}+m\vec{b}-(l+m)\vec{c}=0,$$
$$\therefore\quad m(\vec{c}-\vec{b})=-l(\vec{c}-\vec{a}).$$

从而 A、B、C 在同一条直线上.

因此 A、B、C 在同一直线上的充要条件是有不全为 0 的 l、m、n，使

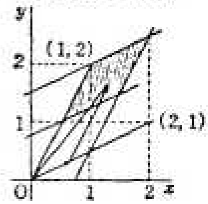
$$l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=0,\quad l+m+n=0.$$

2891. $P(x, y)$ 的坐标由下式给出.

$$\begin{cases} x=2\sin\alpha+\cos\beta,\\ y=\sin\alpha+2\cos\beta.\end{cases}$$

试用向量给出 $P(x, y)$ 的存在范围. 其中

$$0°\leqq\alpha\leqq30°,$$
$$0°\leqq\beta\leqq60°.$$



解

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=(x, y)\\&=(2\sin\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+2\cos\beta)\\&=(2\sin\alpha,\ \sin\alpha)\\&\quad+(\cos\beta,\ 2\cos\beta)=\sin\alpha\cdot(2, 1)\\&\quad+\cos\beta\cdot(1, 2).\end{aligned}$$

因为 $0\leqq\sin\alpha\leqq\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\leqq\cos\beta\leqq1$. 所以点 P 在上图中的阴影范围(包括边界)里.

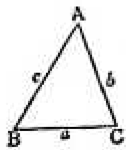
第九章　解三角形的理论及应用

1．理论

A．三角形

2892．什么叫做解三角形．

在三角形的6个元素中，已知一边和另外两个元素时，可以求出其他的元素．这就叫做解三角形．



例如在 $\triangle ABC$ 中，已知 $BC=a$, $B=\alpha$, $C=\beta$, 则

$$A=180^\circ-(\alpha+\beta),$$

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

这样就求出了 A, b, c, 即解出了这个三角形．

2893．试叙述解直角三角形的方法．

因为一个角是直角，所以只要再知道两个元素(其中一个是边)，就可以解出这个三角形．设 $C=90^\circ$．

(1) 已知斜边 c 和一个锐角 A 时，

$$B=90^\circ-A,\ a=c\sin A,\ b=c\cos A.$$

(2) 已知一边 a 和一个锐角 A 时，

$$B=90^\circ-A,\ b=a\operatorname{ctg} A,\ c=\frac{a}{\sin A}.$$

(3) 已知斜边 c 和一条直角边 a 时，由 $\sin A=\dfrac{a}{c}$ 可求出 A, $B=90^\circ-A$, $b=c\cos A$.

或者把 $\cos B=\dfrac{a}{c}$ 代入 $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos B}{1+\cos B}}$, 得 $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{c-a}{c+a}}$, 于是可求出 B, 再得 $A=90^\circ-B$, 由 $a^2+b^2=c^2$ 得

$$b=\sqrt{(c+a)(c-a)}.$$

这种解法中，在计算 $\lg\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}$, $\lg b$ 时可以利用一些相同数的对数，从而带来便利．

(4) 已知 a、b 时，

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b},\ B=90^\circ-A,\ c=\frac{a}{\sin A}.$$

2894．证明：三角形 ABC 的面积 S 为

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}.$$

解
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A. \qquad ①$$

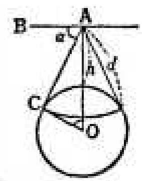
由正弦定理，有

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}. \qquad ②$$

把②代入①，并注意到 $A=180^\circ-(B+C)$, $\sin A=\sin(B+C)$．所以

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{a^2\sin B\sin C}{\sin(B+C)}.$$

2895．什么叫做视野半径？并叙述测定方法．



解　把地球的表面看成球面，半径设为 R．从高出地面 h 的 A 处观察地面，所能看到的范围是，由 A 向地球球面作切线，切点 C 的轨迹所围成的部分．这些切点的轨迹是一个小圆．$AC=d$ 就叫做对应于高为 h 的视野半径．AC 和过 A 的水平面所构成的角叫视野俯角．

在 $\triangle AOC$ 中，

$$\cos\alpha=\frac{R}{R+h}=\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1}$$
$$=1-\frac{h}{R}+\frac{h^2}{R^2}-\cdots.$$

因为 R 与 h 相差很大，所以可以舍去 $\dfrac{h}{R}$ 的二次及二次以上项，得

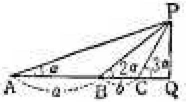
$$\cos\alpha\approx1-\frac{h}{R},$$

又
$$d=\sqrt{(R+h)^2-R^2}=\sqrt{2Rh+h^2}$$
$$=R\sqrt{\frac{2h}{R}+\left(\frac{h}{R}\right)^2}.$$

$$\therefore\ d\approx R\sqrt{\frac{2h}{R}}=\sqrt{2hR}.$$

2896．PQ 是直立的物体，在过底部 Q 的水平线上三点 A、B、C，测得顶点 P 的仰角分别是 α、2α、3α．设 $AB=a$, $BC=b$,

求物体 PQ 的高.



解　因为

$$\angle APB=\angle PAB=\alpha,$$

所以　$PB=AB=a$.

$$PQ=a\sin 2\alpha.$$

因为 $\angle BPC=\angle PCQ-\angle PBQ=\alpha$，所以在 $\triangle PBC$ 中

$$\frac{a}{\sin(\pi-2\alpha)}=\frac{b}{\sin\alpha}.$$

$$\therefore\quad a\sin\alpha=b\sin 3\alpha.$$

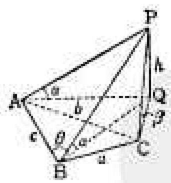
$$\therefore\quad a=b(3-4\sin^2\alpha).$$

因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3b-a}{b}}$.

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+b}{b}}.$$

$$\therefore\quad PQ=2a\sin\alpha\cos\alpha=\frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}.$$

2897. A、B、C 是同一水平面上的三点.在 A、B 测得塔 PQ 顶点 P 的仰角都是 α，在 C 测得顶点 P 的仰角是 β，且 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，证明



$$[h^2(\operatorname{ctg}^2\beta-\operatorname{ctg}^2\alpha)-ab\cos C]^2=b^2\sin^2 A(4h^2\operatorname{ctg}^2\alpha-c^2).$$

解　$AQ=BQ=h\operatorname{ctg}\alpha$，$CQ=h\operatorname{ctg}\beta$.

在 $\triangle ABQ$ 中，设 $\angle ABQ=\theta$，则

$$c=2BQ\cos\theta=2h\operatorname{ctg}\alpha\cos\theta.$$

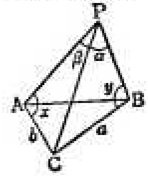
从 $\triangle BCQ$ 得

$$(h\operatorname{ctg}\beta)^2=a^2+(h\operatorname{ctg}\alpha)^2-2ah\operatorname{ctg}\alpha\cos(B-\theta),$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & h^2(\operatorname{ctg}^2\beta-\operatorname{ctg}^2\alpha)\\ &=a^2-a\cdot\frac{c}{\cos\theta}(\cos B\cos\theta+\sin B\sin\theta)\\ &=a^2-ac(\cos B+\sin B\operatorname{tg}\theta)\\ &=a(a-c\cos B)-ac\sin B\operatorname{tg}\theta\\ &=ab\cos C-bc\sin A\operatorname{tg}\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & [h^2(\operatorname{ctg}^2\beta-\operatorname{ctg}^2\alpha)-ab\cos C]^2\\ &=b^2c^2\sin^2 A\left(\frac{4h^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{c^2}-1\right)\\ &=b^2\sin^2 A(4h^2\operatorname{ctg}^2\alpha-c^2).\end{aligned}$$

2898. 有一个三角形 ABC，从平面上的一点 P，看边 BC、CA 的视角分别是 α、β，求 AP、BP、CP 的长度.



解　设 $\angle PAC=x$，$\angle PBC=y$，则

$$x+y=2\pi-(\alpha+\beta+C). \qquad ①$$

在 $\triangle ACP$、$\triangle BCP$ 中

$$PC=\frac{b\sin x}{\sin\beta}=\frac{a\sin y}{\sin\alpha},$$

$$\therefore\quad \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}.$$

设上式的右边是 $\operatorname{tg}\varphi$，则

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\operatorname{tg}\varphi-1}{\operatorname{tg}\varphi+1},$$

$$\therefore\quad \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-y)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x+y)}=\operatorname{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right).$$

因此

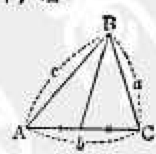
$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-y)=-\operatorname{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta+C). \qquad ②$$

因为从 ①、② 可求出 $x+y$、$x-y$，所以 x、y 也可以求出.因此

$$AP=\frac{b\sin(x+\beta)}{\sin\beta},\quad BP=\frac{a\sin(y+\alpha)}{\sin\alpha},$$

$$CP=\frac{a\sin y}{\sin\alpha}.$$

2899. 在三角形 ABC 中，若 $a=7$，$b=8$，$c=9$，求连结 B 和对边中点线段的长度.



解　连结 B 和对边中点的线段的长度是

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos B}. \qquad ①$$

又，从 $\triangle ABC$ 得

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$

从而　$2ac\cos B=a^2+c^2-b^2$.

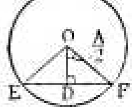
将上式代入①，得所要求的线段的长度是

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+a^2+c^2-b^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2},$$

即是　$\frac{1}{2}\sqrt{2(7^2+9^2)-8^2}=7$。

2900. 有一个半径为 a 的圆，求度数为 A 的圆心角所对的弦的长度。



解　设度数为 A 的圆心角所对的弦是 EF，从圆心 O 向弦作垂线 OD，则

$$\angle EOD=\frac{A}{2},$$

从 $\triangle EOD$ 得

$$ED=OE\sin\angle EOD,$$

从而　$ED=a\sin\frac{A}{2}$。

因此所要求的弦长是 $2a\sin\frac{A}{2}$。

2901. 在三角形 ABC 中，证明

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}。$$

解　$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{\Delta^2}{\Delta s}=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s\Delta}$

$$=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)\cdot 4R}{abc}$$

$$=4R\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

$$\times\sqrt{\frac{(s-b)(s-a)}{ab}}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}。$$

2902. 将三角形的各个顶点分别和对边上旁切圆的切点连结起来，证明这样得到的三条直线相交于同一点。

解　设 A、B、C 所对的切点分别是 A'、B'、C'，则

$$AB'=r_2\operatorname{ctg}\frac{\pi-A}{2}=r_2\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

$$BC'=r_3\operatorname{tg}\frac{B}{2},\quad CA'=r_1\operatorname{tg}\frac{C}{2}。$$

因此

$$AB'\cdot BC'\cdot CA'=r_1r_2r_3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}。$$

同样

$$AC'\cdot BA'\cdot CB'=r_1r_2r_3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}。$$

因此根据齐瓦 (Ceva) 定理，AA'、BB' 和 CC' 相交于同一点。

2903. 在直角三角形中，设夹直角的两条边的差是 h，它的面积是 S，证明外接圆的直径等于 $\sqrt{h^2+4S}$。

解　设一条直角边是 a，另外一条直角边是 $a+h$，于是斜边是

$$\sqrt{a^2+(a+h)^2}=\sqrt{h^2+2a(a+h)}。$$

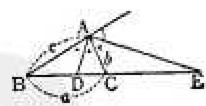
又因为 $S=\frac{1}{2}a(a+h)$，所以

$$4S=2a(a+h)。$$

因此斜边是 $\sqrt{h^2+4S}$。由于斜边等于外接圆的直径，所以 $\sqrt{h^2+4S}$ 又是外接圆直径的长度。

2904. 设三角形 ABC 的角 A 的内角和外角的平分线与 BC 边分别交于 D、E，证明

$$DE=\frac{2abc}{|b^2-c^2|}。$$



解　右图中　$\frac{CD}{BD}=\frac{b}{c}$，

$$\therefore\ \frac{CD}{BD+CD}=\frac{b}{b+c},$$

或　$CD=\frac{ab}{b+c}$。

又　$\frac{CE}{BE}=\frac{b}{c}$，

$$\therefore\ \frac{CE}{BE-CE}=\frac{b}{c-b},$$

或　$CE=\frac{ab}{c-b}$。

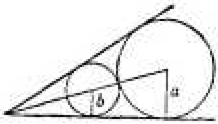
因此　$DE=\frac{ab}{b+c}+\frac{ab}{c-b}=\frac{2abc}{c^2-b^2}$。

这里 $BE-CE$，$c-b$ 在 $b>c$ 的时候变成 $CE-BE$，$b-c$。

2905. 半径为 a 和 b 的两个圆互相外切。作这两圆的两条外公切线，设它们的夹角是 θ，证明 $\sin\theta=\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$。

解　设大圆的半径是 a，小圆的半径是 b，

从大圆的圆心到切线交点的距离是x，则从小圆的圆心到切线交点的距离是$x-a-b$。这时



$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{a}{x},$$

或 $$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{b}{x-a-b}.$$

$$x=\frac{a}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

或 $$x-a-b=\frac{b}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

因此 $$a+b=\frac{a-b}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

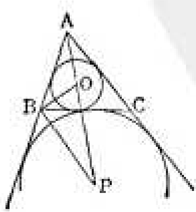
$$\therefore\ \sin\frac{\theta}{2}=\frac{a-b}{a+b},$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.$$

因此

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}.$$

2906. 证明：从三角形三个旁切圆的圆心到内切圆圆心的距离分别是 $a\sec\frac{A}{2}$, $b\sec\frac{B}{2}$, $c\sec\frac{C}{2}$.



解 设O是内切圆的圆心，P是角A所对的旁切圆的圆心，则O和P都在角A的平分线上。

$$\angle OBP=\frac{B}{2}+\frac{\pi-B}{2}=\frac{\pi}{2},$$

因此

$$OP=\frac{OB}{\cos\angle BOP}=\frac{OB}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$=\frac{OB}{\sin\frac{C}{2}}.$$

又

$$OB=\frac{AB\sin\frac{A}{2}}{\sin\left(\pi-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)}=\frac{c\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}$$

$$=\frac{c\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

因此

$$OP=\frac{c\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{2c\sin\frac{A}{2}}{\sin C}$$

$$=\frac{2a\sin\frac{A}{2}}{\sin A}=\frac{a}{\cos\frac{A}{2}}=a\sec\frac{A}{2}.$$

同样，也可以证得其他两个距离等于$b\sec\frac{B}{2}$和$c\sec\frac{C}{2}$。

2907. 在三角形ABC中，证明

$$r_1+r_2+r_3-r=4R.$$

解 $r_1+r_2+r_3-r$

$$=\frac{\Delta}{s-a}+\frac{\Delta}{s-b}+\frac{\Delta}{s-c}-\frac{\Delta}{s}$$

$$=\Delta\left[\frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)}+\frac{s-(s-c)}{s(s-c)}\right]$$

$$=c\Delta\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}+\frac{1}{s(s-c)}\right]$$

$$=c\Delta\left[\frac{s(s-c)+(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right]$$

$$=c\Delta\left[\frac{2s^2-s(a+b+c)+ab}{\Delta^2}\right]$$

$$=\frac{abc}{\Delta}=4R.$$

2908. 在三角形中，证明

$$(4R+r)(4R+r+s\sqrt{3})(4R+r-s\sqrt{3})$$
$$=r_1^3+r_2^3+r_3^3-3r_1r_2r_3.$$

解 所给式子的左边

$$=(4R+r)[(4R+r)^2-3s^2]$$

$$=(r_1+r_2+r_3)[(r_1+r_2+r_3)^2-3(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)]$$

$$=(r_1+r_2+r_3)(r_1^2+r_2^2+r_3^2-r_1r_2-r_2r_3-r_1r_3)$$

$$=r_1^3+r_2^3+r_3^3-3r_1r_2r_3.$$

2909. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{1}{Rr}=\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}.$$

解

$$\frac{1}{Rr}=\frac{4\Delta}{abc}\times\frac{s}{\Delta}=\frac{4s}{abc}=\frac{2(a+b+c)}{abc}$$
$$=\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}.$$

2910. 若三角形 ABC 外接圆的半径是 R，证明

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C.$$

解 $a\cos A+b\cos B+c\cos C$

$$=2R\sin A\cos A+2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C$$
$$=R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$
$$=2R\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$
$$=4R\sin A\sin B\sin C.$$

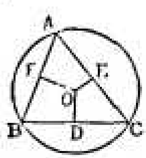
2911. 在三角形 ABC 中，证明

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=4R\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{s}{r}.$$

解 所给式子的左边

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}+\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}+\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$
$$=[(s-b)(s-c)+(s-a)(s-c)+(s-a)(s-b)]\div\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\frac{3s^2-2s(a+b+c)+ab+bc+ca}{\Delta}$$
$$=\frac{ab+bc+ca-s^2}{\Delta}$$
$$=\frac{ab+bc+ca}{\frac{abc}{4R}}-\frac{s^2}{rs}$$
$$=4R\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{s}{r}.$$

2912. 设三角形 ABC 外接圆的圆心是 O，从 O 到各边引垂线 OD、OE、OF，证明



$$4(OD^2+OE^2+OF^2)=a^2\operatorname{ctg}^2A+b^2\operatorname{ctg}^2B+c^2\operatorname{ctg}^2C.$$

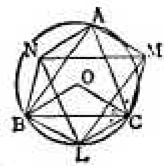
解

$$OD^2=R^2\cos^2A=\frac{a^2}{4\sin^2A}\cos^2A=\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2A,$$
$$OE^2=R^2\cos^2B=\frac{b^2}{4\sin^2B}\cos^2B=\frac{b^2}{4}\operatorname{ctg}^2B,$$
$$OF^2=R^2\cos^2C=\frac{c^2}{4\sin^2C}\cos^2C=\frac{c^2}{4}\operatorname{ctg}^2C.$$

因此

$$4(OD^2+OE^2+OF^2)=a^2\operatorname{ctg}^2A+b^2\operatorname{ctg}^2B+c^2\operatorname{ctg}^2C.$$

2913. 以锐角三角形的各边为底，向三角形外侧作等腰三角形，并使各腰的长度等于外接圆的半径，证明连结三个等腰三角形的顶点，得到和原三角形相似且等积的新三角形。



解 设在 BC、AC、AB 上所作的三角形的顶点分别是 L、M、N。因为三角形 CLB 全等于三角形 COB，所以 $\angle BCL$ 等于 $\angle OCB$，即等于 $\frac{\pi}{2}-A$。因此，

$$\angle BCL=\frac{\pi}{2}-A.$$

同样，$\quad\angle OCA=\frac{\pi}{2}-B,$

因此 $\quad\angle ACM=\frac{\pi}{2}-B.$

于是得到

$$\angle LCM=\frac{\pi}{2}-A+\frac{\pi}{2}-B+C=2C.$$

这时

$$LM^2=R^2+R^2-2R^2\cos 2C=2R^2(1-\cos 2C)=4R^2\sin^2C.$$

因此 $\quad LM=2R\sin C=c.$

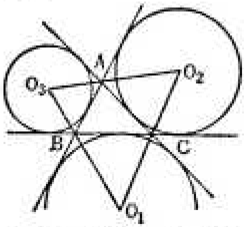
同样可得 $\quad MN=a,\quad NL=b,$

所以，三角形 LMN 全等于三角形 ABC。

2914. 设三角形 ABC 的旁切圆的圆心

是 O_1、O_2、O_3. 证明三角形 $O_1O_2O_3$ 的面积等于三角形 ABC 的面积与 $1+\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}$ 的乘积.

解 O_2、O_3 和 A 在同一直线上,同样 O_3、O_1 和 B 在同一直线上,O_1、O_2 和 C 也在同一直线上. 三角形 $O_1O_2O_3$ 可分成四个三角形,即 $\triangle ABC$、$\triangle O_1BC$、$\triangle O_2CA$ 和 $\triangle O_3AB$. 设 $\triangle ABC$ 的面积是 S, 则



$$\triangle O_1BC\text{ 的面积}=\frac{ar_1}{2}=\frac{aS}{2(s-a)}$$
$$=\frac{aS}{b+c-a}.$$

对于 $\triangle O_2CA$ 和 $\triangle O_3AB$ 的面积也可得到同样的式子. 因此

$$\triangle O_1O_2O_3\text{ 的面积}$$
$$=S\left(1+\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\right).$$

2915. 在三角形 ABC 中,证明

$$a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\csc\frac{A}{2}=s.$$

解 所给式子的左边

$$=\left(a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\div\sin\frac{A}{2}.$$

将
$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},$$
$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

代入上式,即得

$$a\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\times\sqrt{\frac{bc}{(s-b)(s-c)}}=s.$$

2916. 从三角形各顶点分别向对边引垂线 h_1、h_2、h_3, 证明

$$2h_3(ab\cos C+bc\cos A+ca\cos B)$$
$$=ab(a\sin A+b\sin B+c\sin C).$$

解 所给式子的左边

$$=h_3(a^2+b^2-c^2+b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2)$$
$$=h_3(a^2+b^2+c^2).$$

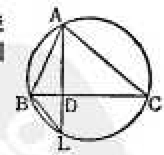
因为 $h_3=\frac{2S}{c}$, 所以

$$\text{上式}=\frac{2Sa^2}{c}+\frac{2Sb^2}{c}+2Sc$$
$$=\frac{bc(\sin A)a^2}{c}+\frac{ca(\sin B)b^2}{c}+abc\sin C$$
$$=ab(a\sin A+b\sin B+c\sin C).$$

2917. 从锐角三角形的各顶点 A、B、C 向对边引垂线, 并延长垂线使它们和外接圆相交. 设各延长的线段分别是 α、β、γ, 证明

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=2(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C).$$

解 从 A 向 BC 引垂线 AD, 延长 AD 和外接圆相交于 L. 于是



$$\angle ALB=\angle ACB=C,$$
$$\alpha=DL=BD\cdot\operatorname{ctg}\angle ALB=BD\cdot\operatorname{ctg}C$$
$$=\frac{c\cos B\cos C}{\sin C}=\frac{a\cos B\cos C}{\sin A}.$$

因此

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{\sin A}{\cos B\cos C}=\frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}$$
$$=\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C.$$

同样
$$\frac{b}{\beta}=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}C,$$
$$\frac{c}{\gamma}=\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}A.$$

因此

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=2(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C).$$

2918. 在三角形 ABC 中,证明

$$r(\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$=2R\sin A\sin B\sin C.$$

解 $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

因此

$$4r\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=16R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$\times\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

又因为

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=\sin A+\sin B+\sin C,$$

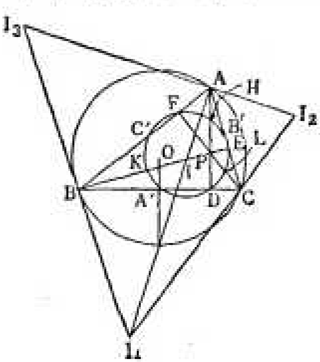
所以

$$r(\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$=2R\sin A\sin B\sin C.$$

2919．推出过三角形三个旁心的圆的半径 R' 的公式：

$$R'=\frac{a}{\sin A}=\frac{abc}{2S}.$$

解　从三角形 ABC 的顶点 A、B、C 向对边引垂线．设垂足分别是 D、E、F，垂心是 P．又设 A'、B'、C' 分别是边 BC、CA、AB 的中点，H、K、L 分别是 PA、PB、PC 的中点．通过 H、K、L 的圆也通过 D、E、F 和 A'，B'，C'，这是三角形 ABC 的九点圆，它的直径等于三角形 ABC 外接圆的半径．现设 I、I_1、I_2、I_3 是三角形 ABC 的内切圆和旁切圆的圆心．因为 AI 平分角 A，AI_2 将它的外角二等分，所以 $\angle IAI_2$ 是直角．同样 $\angle IAI_3$ 也是直角，因此 I_2AI_3 是一直线．用同样的方法可得 I_2IB 是 I_1I_3 的垂线，I_3IC 是 I_1I_2 的垂线．因此 I 是三角形 $I_1I_2I_3$ 的垂心，A、B、C 分别是从 I_1、I_2、I_3 向对边



引垂线的垂足．因而圆 $I_1I_2I_3$ 的半径 R' 等于圆 ABC 的直径 $2R$．即

$$R'=2R=\frac{a}{\sin A}$$

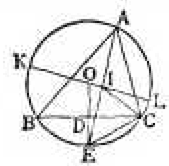
或 $$R'=2R=\frac{abc}{2S}.$$

2920．设 O 是三角形 ABC 的外心，I 是内心，J 是旁心，证明

$$OI^2=R^2-2Rr,\quad OJ^2=R^2+2Rr_1.$$

其中 r_1 是旁切圆的半径．

解　从 O 向 BC 作垂线并延长与圆相交于 E．因为弧 BE 等于弧 CE，所以直线 AE 是角 BAC 的平分线．因此内切圆的圆心 I 在直线 AE 上，连结 OI 和 IC，得



$$\angle EIC=\frac{A+C}{2},$$

并且

$$\angle ECI=\angle ECB+\angle BCI=\frac{A+C}{2},$$

因此 $\angle EIC$ 和 $\angle ECI$ 相等．由此得

$$EI=EC,$$

并且 $$EC=2R\sin\frac{A}{2},$$

$$\therefore\quad EI=2R\sin\frac{A}{2}.$$

从而

$$EI\cdot IA=2R\sin\frac{A}{2}\left(\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\right)=2Rr,$$

$$(R-OI)(R+OI)=EI\cdot IA=2Rr.$$

因此 $$OI^2=R^2-2Rr.$$

如果将 IE 通过 E 延长到 J，并使 EJ 等于 IE，那么 J 就是 $\angle A$ 所对的旁切圆的圆心．并且由圆的割线定理得

$$OJ^2=R^2+2Rr_1.$$

2921．设半径为 r 的圆内接正多边形的一边为 a，圆的另一个边数是前者两倍的正多边形的一边为 b，证明

$$b=\sqrt{r\left(r+\frac{a}{2}\right)}-\sqrt{r\left(r-\frac{a}{2}\right)}.$$

解　设第一个正多边形的边数为 n，则

$$a=2r\sin\frac{\pi}{n},\ b=2r\sin\frac{\pi}{2n}.$$

又因为 $\frac{\pi}{n}$ 在 0 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间，所以

$$2\sin\frac{\pi}{2n}=\sqrt{1+\sin\frac{\pi}{n}}-\sqrt{1-\sin\frac{\pi}{n}}.$$

因此 $$\frac{b}{r}=\sqrt{1+\frac{a}{2r}}-\sqrt{1-\frac{a}{2r}}.$$

在上式的两边同时乘上 r，即得所要证明的结果。

2922．证明三角形的三条角平分线相交于同一点。

解　设角 A、B、C 的平分线和对边的交点分别是 A'、B'、C'，则

$$\frac{AB'}{BB'}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin A},\quad \frac{BC'}{CC'}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin B},$$

$$\frac{CA'}{AA'}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin C}.$$

因此

$$AB'\cdot BC'\cdot CA'$$

$$=AA'\cdot BB'\cdot CC'\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin A\sin B\sin C}.$$

这个结果是关于 AA'、BB'、CC' 和 A、B、C 对称的。对于 AC'、BA'、CB' 也能得到同样的结果。因此，根据齐瓦(Ceva)定理，直线 AA'、BB' 和 CC' 相交于同一点。

2923．在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{s^2}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}=S.$$

解

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}$$

$$\times\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{s^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

因此所给式子的左边

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=S.$$

2924．从三角形 ABC 的各顶点向对边引垂线，设垂足三角形是 $A'B'C'$，证明 $B'C'$ 等于 $R\sin 2A$ 的绝对值。其中 R 是三角形外接圆的半径。

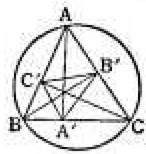
解　设 A 是锐角，则

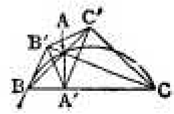
$$AB'=c\cos A,\quad AC'=b\cos A,$$

$$B'C'^2=AB'^2+AC'^2-2AB'\cdot AC'\cos A$$

$$=\cos^2 A(c^2+b^2-2cb\cos A)$$

$$=a^2\cos^2 A.$$





因此

$$B'C'=a\cos A=2R\sin A\cos A=R\sin 2A.$$

如果 A 是钝角，那么

$$AB'=c\cos(\pi-A),\quad AC'=b\cos(\pi-A),$$

同样可得　$B'C'^2=a^2\cos^2 A$.

因此就绝对值来说，$B'C'$ 和 $R\sin 2A$ 总是相等的。

2925．设从三角形 ABC 的顶点 A 到内切圆的圆心，以及角 A 所对的旁切圆圆心的距离分别是 α、α_1，同样，对于角 B 是 β、β_1，对于角 C 是 γ、γ_1，证明

$$\alpha\beta\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1=(abc)^2.$$

解　$\alpha=r\csc\frac{A}{2},\quad \alpha_1=r_1\csc\frac{A}{2},$

$$\beta=r\csc\frac{B}{2},\quad \beta_1=r_2\csc\frac{B}{2},$$

$$\gamma=r\csc\frac{C}{2},\quad \gamma_1=r_3\csc\frac{C}{2}.$$

因此

$$\alpha\beta\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1$$

$$=r^3r_1r_2r_3\csc^2\frac{A}{2}\csc^2\frac{B}{2}\csc^2\frac{C}{2}$$

$$=\frac{S^3}{s^3}\times\frac{S^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}\times\frac{bc}{(s-c)(s-b)}$$

$$\times\frac{ca}{(s-a)(s-c)}\times\frac{ab}{(s-a)(s-b)}$$

$$=\frac{S^6a^2b^2c^2}{S^6}=a^2b^2c^2.$$

2926. 在三角形 ABC 中，证明

$$Rr(\sin A+\sin B+\sin C)=\Delta.$$

解 $Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$

$$=r(R\sin A+R\sin B+R\sin C)$$

$$=r\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)=rs=\Delta.$$

2927. 设三角形 ABC 的旁切圆的圆心是 A'、B'、C'，并且三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的内切圆的半径分别是 r 和 r'，证明

$$\frac{r'}{r}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}.$$

解 $r'=\dfrac{\triangle A'B'C'\text{ 的面积}}{\triangle A'B'C'\text{ 的半周长}}$

$$=\frac{\frac{abc}{2r}}{2R\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)}$$

$$=\frac{abc}{4Rr\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)}$$

$$=\frac{S}{r\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)}$$

$$=\frac{s}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}.$$

又 $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}=\dfrac{s^2}{S}=\dfrac{s}{r}$，

因此 $r'=\dfrac{r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}$，

即 $\dfrac{r'}{r}=\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}.$

2928. 过三角形 ABC 的各顶点作等分它的外角的直线，设由此得到新三角形的面积是 S'，原三角形的面积是 S，证明

$$S'=\frac{S}{2}\csc\frac{A}{2}\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}.$$

解 等分外角的直线和连结旁切圆圆心的直线是重合的．因此

$$S'=\frac{abc}{2r}.$$

因此 $\dfrac{S'}{S}=\dfrac{abc}{2rS}=\dfrac{sabc}{2S^2}$

$$=\frac{abc}{2(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{1}{2}\csc\frac{A}{2}\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}.$$

2929. 设三角形 ABC 的内切圆的半径是 r，它的各边的和是 $2s$．又设连结它的旁心而得到的三角形同样是 r' 和 $2s'$，证明

$$\frac{rs}{r's'}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

解 $r'=\dfrac{\triangle A'B'C'\text{ 的面积}}{s'}$，

$$r's'=\triangle A'B'C'\text{ 的面积}=\frac{abc}{2r}.$$

又 $rs=\triangle ABC\text{ 的面积}=S,$

因此 $\dfrac{rs}{r's'}=\dfrac{2rS}{abc}=\dfrac{2S^2}{abcs}.$

从而

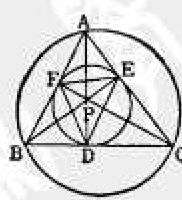
$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\cdot\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$$

$$\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$=\frac{2S^2}{abcs}=\frac{rs}{r's'}.$$

2930. 从三角形 ABC 的各顶点向对边作垂线，垂足是 D、E、F．设三角形 ABC 和 DEF 的外接圆的半径是 R 和 R_1，且三角形 DEF 的内切圆的半径是 r_1，证明



$$R_1=\frac{R}{2}$$

和 $\qquad r_1=2R\cos A\cos B\cos C.$

解 设 AD 和 BE 的交点是 P．因为 $\angle PEC$ 和 $\angle PDC$ 都是直角，所以可以画出 $PECD$ 的外接圆．因此

$$\angle PDE=\angle PCE=\frac{\pi}{2}-A.$$

同样 $\angle PDF=\frac{\pi}{2}-A$,

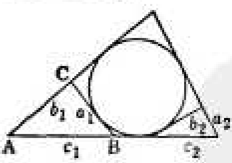
因而 $\angle FDE=\pi-2A$,

$$R_1=\frac{FE}{2\sin\angle FDE}=\frac{FE}{2\sin 2A}$$
$$=\frac{R\sin 2A}{2\sin 2A}=\frac{R}{2}.$$

并且 $r_1=\frac{\triangle FDE\text{ 的面积}}{\triangle FDE\text{ 的半周长}}$
$$=\frac{FD\cdot ED\sin 2A}{R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)}$$
$$=\frac{R\sin 2A\sin 2B\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$
$$=\frac{R\sin 2A\sin 2B\sin 2C}{4\sin A\sin B\sin C}$$
$$=2R\cos A\cos B\cos C.$$

2931. 若两个相似三角形有一个公共的旁切圆，这个旁切圆和两个三角形相切于不对应的两条边 a_1、b_2，证明
$$a_1:a_2=(\sin B+\sin C-\sin A):(\sin A+\sin C-\sin B).$$

解 设一个三角形的边是 a_1、b_1、c_1，另一个三角形的边是 a_2、b_2、c_2，前一个三角形的面积是 S_1，后一个三角形的面积是 S_2，于是得到下式，即



$$\frac{S_1}{b_1+c_1-a_1}=\frac{S_2}{a_2+c_2-b_2}.$$

因此 $$\frac{S_1}{S_2}=\frac{b_1+c_1-a_1}{a_2+c_2-b_2}$$
$$=\frac{\frac{a_1\sin B}{\sin A}+\frac{a_1\sin C}{\sin A}-a_1}{a_2+\frac{a_2\sin C}{\sin A}-\frac{a_2\sin B}{\sin A}}$$
$$=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{\sin B+\sin C-\sin A}{\sin A+\sin C-\sin B}.$$

又，相似三角形的面积之比等于对应边之比的平方，所以
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}.$$

因此 $$\frac{a_1}{a_2}=\frac{\sin B+\sin C-\sin A}{\sin A+\sin C-\sin B}.$$

2932. 在三角形 ABC 中，证明
$$r=2R\left(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right).$$

解 $r=(s-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{2}(c+a-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}$
$$=\frac{1}{2}(2R\sin C+2R\sin A-2R\sin B)\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$
$$=R(\sin C+\sin A-\sin B)\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$
$$=R\left(2\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}-2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$
$$=2R\left(\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)$$
$$=2R\left(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right).$$

2933. 在三角形 ABC 中，证明
$$a^2+b^2+c^2=8R^2(1+\cos A\cos B\cos C).$$

解 $a^2+b^2+c^2$
$$=4R^2\sin^2A+4R^2\sin^2B+4R^2\sin^2C$$
$$=4R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)$$
$$=4R^2(2+2\cos A\cos B\cos C)$$
$$=8R^2(1+\cos A\cos B\cos C).$$

2934. 在三角形 ABC 中，证明
$$r_1-r=4R\sin^2\frac{A}{2}\text{ 和 }r_2+r_3=4R\cos^2\frac{A}{2}.$$

解 $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$,
$$r_1=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$
$$\therefore\ r_1-r=4R\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}=4R\sin^2\frac{A}{2}.$$

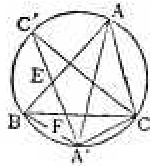
用与上同样的方法得
$$r_2+r_3=4R\cos^2\frac{A}{2}.$$

2935. 设将三角形 ABC 的角 A 和角 C 二等分的直线，和外接圆的交点分别是 A'、C'，证明 $A'C'$ 被 CB 和 BA 分成的三部分的

比是

$$\sin^2\frac{A}{2}:2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}:\sin^2\frac{C}{2}.$$

解　设 $C'A'$ 和 AB 交于 E，和 CB 交于 F，$\angle A'FC$ 等于 $\angle FC'C$ 和 $\angle FCC'$ 的和，即等于 $\angle A'AC$ 和 $\angle FCC'$ 的和，也就是等于 $\frac{A}{2}+\frac{C}{2}$．并且 $\angle BCA'$ 等于 $\angle BAA'$，即等于 $\frac{A}{2}$．因此



$$\frac{FA'}{CA'}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A+C}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}.$$

设 R 是圆的半径，则

$$A'C=2R\sin\frac{A}{2}.$$

因此　$$FA'=\frac{2R\sin^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}.$$

同理得　$$EC'=\frac{2R\sin^2\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}.$$

又　$$A'C'=2R\sin\frac{A+C}{2}=2R\cos\frac{B}{2}.$$

因此

$$EF=2R\cos\frac{B}{2}-\frac{2R\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{2R}{\cos\frac{B}{2}}\left(\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$=\frac{R}{\cos\frac{B}{2}}[(1+\cos B)-(1-\cos A)-(1-\cos C)]$$

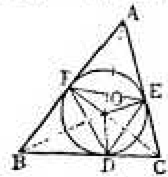
$$=\frac{R}{\cos\frac{B}{2}}(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$

$$=\frac{2R}{\cos\frac{B}{2}}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

$\therefore$　$FA':EF:EC'$

$$=\sin^2\frac{A}{2}:2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}:\sin^2\frac{C}{2}.$$

2936． 作三角形的内切圆，连结各个切点得到一个新的三角形，在新三角形内再作内切圆，连结所得的切点又得到一个新的三角形．这样依次作下去，证明最后得到的三角形将变成是等边的．



解　图中，D、E、F 是内切圆的切点，连结 FD、DE 和 EF，则

$$\angle FDB=\frac{\pi-B}{2},\quad \angle EDC=\frac{\pi-C}{2}.$$

$$\angle FDE=\frac{B+C}{2}.$$

同样

$$\angle DEF=\frac{A+C}{2},\quad \angle EFD=\frac{A+B}{2}.$$

设角 A、B、C 的大小是顺次增大的，那么 $\frac{A+B}{2}$、$\frac{A+C}{2}$、$\frac{B+C}{2}$ 的大小也是顺次增大的．又

$$\frac{B+C}{2}-\frac{A+B}{2}=\frac{C-A}{2},$$

因此第一个新三角形的最大角和最小角的差等于原三角形最大角和最小角差的一半．同样，第二个新三角形的最大角和最小角的差，等于第一个新三角形的最大角和最小角差的一半，即等于原三角形最大角和最小角差的四分之一．这样，由于三角形的最大角和最小角的差逐次减小，所以到极限时，三角形最终变成是等边的．

2937． 锐角三角形 ABC 的外心是 O，连结 AO 并延长，设它和 BC 交于 D 点，证明

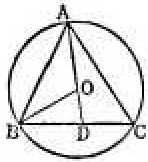
$$DO\cos(B-C)=AO\cos A.$$

解　$$\angle ABO=\angle BAO=\frac{\pi}{2}-C.$$

$$\angle BOD=\pi-2C$$

$$\angle OBD=\frac{\pi}{2}-A.$$

$$\angle BDO = 2C + A - \frac{\pi}{2}$$
$$= A + C + B + C - B - \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi}{2} + C - B.$$



因此
$$\frac{DO}{BO} = \frac{\sin\angle DBO}{\sin\angle BDO}$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + C - B\right)}$$
$$= \frac{\cos A}{\cos(C-B)}.$$

又因为 $BO = AO$, 且 $\cos(B-C) \neq 0$, 所以
$$DO\cos(B-C) = AO\cos A.$$

2938. ABC 是直角三角形(设 C 是直角), E 是它的内切圆和 BC 的切点. 延长 CA 与 CB, 与 CB、AB 相切的圆与边 CA 的切点是 F, 证明三角形 FEC 的面积是三角形 ABC 面积的一半.

解　由题意得 $CF = s$, $CE = r$,

$$\therefore\quad \triangle CEF \text{ 的面积} = \frac{rs}{2},$$
$$\triangle ABC \text{ 的面积} = rs.$$

因此,三角形 CEF 的面积是三角形 ABC 面积的一半.

2939. 在三角形 ABC 中,证明
$$R = \frac{(r_1+r_2)(r_2+r_3)(r_3+r_1)}{4(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)}.$$

解
$$r_1 + r_2 = \frac{\Delta}{s-a} + \frac{\Delta}{s-b}$$
$$= \frac{c\Delta}{(s-a)(s-b)},$$
$$r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = s^2.$$

因此,所给式子的右边
$$= \frac{abc\Delta^3}{(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2} \times \frac{1}{4s^2}$$
$$= \frac{abc\Delta^3}{4\Delta^4} = \frac{abc}{4\Delta} = R.$$

2940. 在三角形 ABC 中,证明
$$\frac{1}{r_1 - r} + \frac{1}{r_2 + r_3} = \frac{4R}{a^2}.$$

解
$$\frac{1}{r_1 - r} + \frac{1}{r_2 + r_3}$$
$$= \frac{1}{4R\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{4R\cos^2\frac{A}{2}}$$
$$= \frac{1}{4R\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{1}{R\sin^2 A}$$
$$= \frac{1}{R}\left(\frac{2R}{a}\right)^2 = \frac{4R}{a^2}.$$

2941. 在三角形 ABC 中,证明
$$\frac{r}{R} = 4\left(\frac{s}{a} - 1\right)\left(\frac{s}{b} - 1\right)\left(\frac{s}{c} - 1\right).$$

解
$$\frac{r}{R} = \frac{\Delta}{s} \times \frac{4\Delta}{abc}$$
$$= \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$$
$$= 4\left(\frac{s-a}{a}\right)\left(\frac{s-b}{b}\right)\left(\frac{s-c}{c}\right)$$
$$= 4\left(\frac{s}{a} - 1\right)\left(\frac{s}{b} - 1\right)\left(\frac{s}{c} - 1\right).$$

2942. 在三角形 ABC 中,证明
$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + \frac{r}{2R}.$$

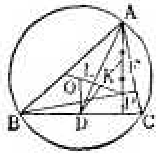
解
$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(3 + \cos A + \cos B + \cos C)$$
$$= \frac{1}{2}\left(4 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$= 2 + \frac{r}{2R}.$$

2943. 在三角形 ABC 中,证明
$$\frac{r}{R} = \frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a+b+c}.$$

解　所给式子的右边
$$= \frac{1}{2s}\left(a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + b\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$
$$= \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4abcs}$$
$$= \frac{4\Delta^2}{abcs} = \frac{\frac{\Delta}{s}}{\frac{abc}{4\Delta}} = \frac{r}{R}.$$

2944. 设三角形 ABC 的外心是 O, 垂心

是 P，AP、BC 的中点是 F、D，证明 PO 将 DA 分成的两部分的比是 1:2。



解　设 PO 和 AD 的交点是 L，则三角形 ALP 和 DLO 相似。因此

$$\frac{LD}{OD}=\frac{LA}{PA}.$$

因此 $$\frac{LD}{LA}=\frac{OD}{PA}=\frac{FA}{PA}=\frac{1}{2}.$$

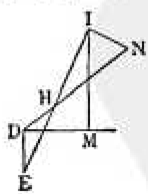
2945. 在上题的图中，证明 PO 和 DF 互相平分。

解　设 PO 和 FD 交于点 K，由于

$$PA=2PF,$$

所以从相似三角形得 $OA=2FK$。又 $DF=OA$，所以 $DF=2FK$。因此 DF 被点 K 二等分。同样由相似三角形可知，PO 也被点 K 二等分。

2946. EDH 是 ED 和 DH 相等的等腰三角形。现将 DH 任意延长到 N，然后将 EH 延长到 I，使 $EI^2=4DH\cdot DN$。再作垂直于 DE 的 DM 和平行于 DE 的 IM。证明以 I 为圆心，以 IM 为半径的圆，和以 N 为圆心、以 ND 为半径的圆相切。



解　设 $DH=h$，$EI=i$，$DN=n$，$\angle DEH=\theta$。这时

$$EH=2h\cos\theta,$$

并且从三角形 IHN 得

$$\begin{aligned}IN^2&=(i-2h\cos\theta)^2+(n-h)^2\\&\quad-2(n-h)(i-2h\cos\theta)\cos\theta\\&=i^2+(n-h)^2-2i(n+h)\cos\theta\\&\quad+4nh\cos^2\theta\\&=(n+h)^2-2i(n+h)\cos\theta+i^2\cos^2\theta\\&=(n+h-i\cos\theta)^2.\end{aligned}$$

因此 $IN=DN-IM$。这就是本题的证明。因为这两个圆的圆心距等于半径的差。

2947. 证明三角形的内切圆半径，不大于它的外接圆半径的一半。

解　$$\frac{r}{R}=\frac{\dfrac{S}{s}}{\dfrac{abc}{4S}}=\frac{4S^2}{sabc}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{sabc}\\&=4\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\times\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\&\quad\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}\\&=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

又

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\sin^2\frac{A+B}{4}-\sin^2\frac{A-B}{4},$$

因此 $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}$ 的值在 $A=B$ 时最大。为什么呢？因为 $\sin\dfrac{A+B}{4}$ 在 C 不变时，不管 A、B 怎样变化，它的值是不变的。因此

$$4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

变成最大是在 $A=B=C$ 的时候。这时

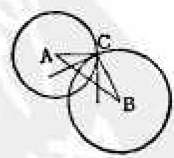
$$4\sin^3\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

因此 $$4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

决不会大于 $\dfrac{1}{2}$。由此可得 r 不大于 $\dfrac{1}{2}R$。

2948. 半径为 a 和 b 的两个圆相交，交角是 γ，证明它们的公共弦的长是

$$\frac{2ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2+2ab\cos\gamma+b^2}}.$$



解　设 A 和 B 是两个圆的圆心，C 是它们的一个交点，C 点的两条切线的夹角是 γ。

$$\angle ACB=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\gamma=\pi-\gamma.$$

这时

$$\begin{aligned}AB^2&=a^2+b^2-2ab\cos(\pi-\gamma)\\&=a^2+b^2+2ab\cos\gamma.\end{aligned}$$

设 x 是公共弦的长，则三角形 ABC 的面积是

$$\frac{1}{2}\times\frac{x}{2}AB.$$

又因为三角形 ABC 的面积也等于

$$\frac{1}{2}AC\cdot CB\sin\angle ACB,$$

所以

$$x=\frac{2AC\cdot CB\sin\angle ACB}{AB}$$
$$=\frac{2ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\gamma}}.$$

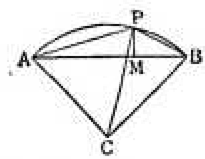
2949. 有三个两两外切的圆，它们的半径分别是 a、b、c，若各个切点间的弧所对的弦是 α、β、γ，证明
$$\frac{8}{\alpha\beta\gamma}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right).$$

解　设 A、B、C 是三个圆的圆心，那么
$$\alpha=2a\sin\frac{A}{2},\ \beta=2b\sin\frac{B}{2},\ \gamma=2c\sin\frac{C}{2},$$
$$\cos A=\frac{a^2+a(b+c)-bc}{(a+b)(a+c)},$$
因此　$$1-\cos A=\frac{2bc}{(a+b)(a+c)},$$
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}.$$
从而　$$\alpha=2a\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}.$$
对于 β 和 γ 也可得到同样的式子．因此
$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{8abc}\left[\frac{(a+b)(a+c)}{bc}\times\frac{(b+a)(b+c)}{ac}\times\frac{(c+a)(c+b)}{ab}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8a^2b^2c^2}.$$
因此
$$\frac{8}{\alpha\beta\gamma}=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right).$$

2950. 半径为 a、b、c 的三个圆两两外切，证明过这些切点的切线相交于一点，这点离开任意一个切点的距离是 $\left(\frac{abc}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{2}}$.

解　设 A、B、C 是三个圆的圆心，其中圆 A 的两条切线相交于 T，于是从一个切点到 T 的距离是 $a\operatorname{tg}\frac{A}{2}$．又
$$\cos A=\frac{(a+c)^2+(a+b)^2-(b+c)^2}{2(a+c)(a+b)}$$
$$=\frac{a^2+a(b+c)-bc}{(a+c)(a+b)},$$
因此　$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{bc}{a(a+b+c)},$$
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{bc}{a(a+b+c)}}.$$
从而　$$a\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}.$$
对于从各个切点到任意两条切线的交点的距离，都能得到同样的对称式子，因此三条切线相交于同一点是明显的．

2951. 在不大于四分之一圆的圆弧上任取一点，从这点作两条直线，一条连结此弧的一个端点，另一条和此弧所对的弦垂直．证明这两条线段的和不大于此弧所对的弦．



解　设 AB 是不大于四分之一圆的圆弧，C 是圆心．在弧 AB 上任取一点 P，连结 PA，并作 PM 垂直 AB．再设
$$\angle BCA=2\gamma,\ \angle PCA=2\theta,\ AC=r,$$
于是　$AB=2r\sin\gamma$，　$AP=2r\sin\theta$，
$$PM=AP\sin\angle PAB=AP\sin(\gamma-\theta).$$
现在只要证明 $2r\sin\theta[1+\sin(\gamma-\theta)]$ 小于 $2r\sin\gamma$ 就可以了．如果这是真的，那么 $\sin(\gamma-\theta)\sin\theta$ 小于 $\sin\gamma-\sin\theta$，即 $2\sin\frac{\gamma-\theta}{2}\cos\frac{\gamma-\theta}{2}\sin\theta$ 小于 $2\sin\frac{\gamma-\theta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\theta}{2}$，即 $\cos\frac{\gamma-\theta}{2}\sin\theta$ 小于 $\cos\frac{\gamma+\theta}{2}$．最后一个推论显然是成立的．因为 $\cos\frac{\gamma-\theta}{2}\sin\theta$ 小于 $\sin\theta$，即小于 $\sin\gamma$，同时由 $\frac{\gamma+\theta}{2}<\gamma$ 得 $\cos\frac{\gamma+\theta}{2}$ 大于 $\cos\gamma$，而在 γ 小于 $\frac{\pi}{4}$ 时 $\cos\gamma$ 大于 $\sin\gamma$．因此 AP 和 PM 的和小于 AB．

2952. 若半径为 a 的三个等圆两两外切，证明三个圆中间的面积是 $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)a^2$.

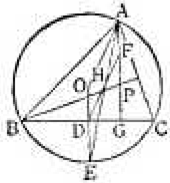
解　连结各个圆的圆心，得到边长为 $2a$ 的等边三角形，它的面积是 $\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}$，即 $\sqrt{3}a^2$．又，由半径和圆弧所组成的三个扇形的面积各是 $\frac{a^2}{2}\times\frac{2\pi}{6}$，即是 $\frac{\pi a^2}{6}$，因此三

个扇形的面积是 $\frac{\pi a^2}{2}$，从而求得中间的面积是

$$\sqrt{3}\,a^2-\frac{\pi a^2}{2}=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)a^2.$$

2953. 任意三角形的九点圆和它的内切圆及旁切圆相切。

解　设三角形 ABC 的垂心是 P，过 PA、PB、PC 的中点的圆，也过各个垂足及三角形各边的中点（这个圆叫做三角形的九点圆）。



又，设三角形 ABC 的外心是 O，D 是 BC 的中点，AG 是 BC 上的高，F 是 PA 的中点。延长 OD 和外接圆交于 E 点，连结 OA、AE、FD。因为九点圆通过 D、F、G，且 $\angle DGF=90°$，所以可知 DF 是它的直径。

因为 $OD=AF$，且 $OD\parallel AF$，所以 $ODFA$ 是平行四边形。从而得 $DF=OA=R$，$OA\parallel DF$。进一步还可推得 $\triangle HDE\backsim\triangle AOE$，因为 $OA=OE$，所以 $DH=DE$。

设内心是 I，DF 的中点、即九点圆的圆心是 N，则 I、N 和 H、D、E 等的位置关系可用第 2946 题的图来表示。其中

$$DN=\frac{1}{2}DF=\frac{R}{2},$$

同时由第 2920 题可知，

$$EI=EC=2R\sin\frac{A}{2},$$

且　$$DH=DE=EC\sin\frac{A}{2}=2R\sin^2\frac{A}{2}.$$

因为

$$EI^2=4R^2\sin^2\frac{A}{2}=4\cdot 2R\sin^2\frac{A}{2}\cdot\frac{R}{2}$$
$$=4DH\cdot DN,$$

所以由第 2946 题推得，以 N 为圆心的九点圆和以 I 为圆心的内切圆相切。

延长 IE 到 J，使 $EI=EJ$，于是由第 2920 题可知，J 是 $\angle A$ 所对的旁切圆的圆心。由于 $EJ=EI$，所以 $EJ^2=EI^2=4DH\cdot DN$。因而用第 2946 题的方法，同样可以证得以 N 为圆心的九点圆和以 J 为圆心的 $\angle A$ 所对的旁切圆相切。

因为九点圆通过 AB、BP、PA 的中点，所以它又是三角形 APB 的九点圆。因此该圆和三角形 APB 的内切圆及旁切圆相切。考虑三角形 BPC 和 CPA，也有同样的结果。

2954. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{r_1}{bc}+\frac{r_2}{ca}+\frac{r_3}{ab}=\frac{1}{r}-\frac{1}{2R}.$$

解　$$\frac{r_1}{bc}=\frac{s\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}}{bc}=\frac{as\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}}{abc}$$
$$=\frac{s(2R\sin A)\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}}{abc}=\frac{4sR\sin^2\frac{A}{2}}{abc}.$$

用同样的方法，也可求得 $\frac{r_2}{ca}$、$\frac{r_3}{ab}$。因此

$$\frac{r_1}{bc}+\frac{r_2}{ca}+\frac{r_3}{ab}$$
$$=\frac{4sR}{abc}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$$
$$=\frac{4sR}{abc}\left(1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$=\frac{4sR}{abc}\left[1-\frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\right]$$
$$=\frac{4sR}{abc}\left(1-\frac{2\Delta^2}{abcs}\right)=\frac{4sR}{abc}-\frac{8R\Delta^2}{a^2b^2c^2}$$
$$=\frac{4sR}{4\Delta R}-\frac{8R\Delta^2}{(4\Delta R)^2}=\frac{s}{\Delta}-\frac{1}{2R}$$
$$=\frac{1}{r}-\frac{1}{2R}.$$

2955. 求圆的扇形和弓形的面积。

解　设扇形的圆心角是 θ 弧度，则

$$\frac{\text{扇形的面积}}{\text{圆的面积}}=\frac{\theta}{2\pi}.$$

因此扇形的面积是

$$\pi r^2\times\frac{\theta}{2\pi}=\frac{r^2\theta}{2}.$$

又因为 θ 是扇形圆心角的弧度数，所以扇形的弧长是 $r\theta$。因此扇形的面积等于它的弧长和半径之积的一半。下面来求圆的弓形的面积。因为小于半圆的弓形面积是扇形的面积和三角形的面积之差，所以若设 θ 是扇形的圆心角的弧度数，则 $\frac{r^2}{2}(\theta-\sin\theta)$ 就是弓形的面积。另外，大于半圆的弓形的面积，等于圆的面积和小于半圆的弓形面积之差。

2956. 求圆的面积.

解　半径为 r 的圆的外切正多边形的面积是 $nr^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$. 若使 n 无限地增大，那么正多边形的面积就逐渐接近圆的面积. 因此圆的面积应该等于上式的极限. 当 n 无限大时 $n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}=\pi$，因此半径为 r 的圆的面积是 πr^2.

2957. 若三角形的三边是

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z},\quad \frac{y}{z}+\frac{z}{x},\quad \frac{z}{x}+\frac{x}{y},$$

证明它的面积

$$S=\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}.$$

解　$s=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$，因此 $s-c$、$s-b$、$s-c$ 分别是 $\frac{z}{x}$、$\frac{x}{y}$、$\frac{y}{z}$. 从而由

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

得

$$S=\sqrt{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\times\frac{z}{x}\times\frac{x}{y}\times\frac{y}{z}}$$
$$=\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}.$$

2958. 在三角形 ABC 中，若 $a=35$，$b=84$，$c=91$，证明 $S=1470$.

解　$s=\frac{1}{2}(35+84+91)=105$，从而 $s-a=70$，$s-b=21$，$s-c=14$. 因此

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\sqrt{105\times70\times21\times14}=1470.$$

2959. 在三角形 ABC 中，$\angle B=45^\circ$，$\angle C=60^\circ$，$a=2(\sqrt{3}+1)$，证明

$$S=6+2\sqrt{3}.$$

解　从　$S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$，

得

$$S=\frac{4(\sqrt{3}+1)^2\sin45^\circ\sin60^\circ}{2\sin(45^\circ+60^\circ)}$$
$$=\frac{4(3+2\sqrt{3}+1)\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\times\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$
$$=6+2\sqrt{3}.$$

2960. 证明三角形 ABC 的面积(S 或 Δ)公式是 $\frac{1}{2}ac\sin B$，$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，或 $\dfrac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}$，或 $\dfrac{b^2\sin A\sin C}{2\sin(A+C)}$ 等.

解　三角形的面积是具有同底同高的矩形面积的一半. 设 ABC 是任意的三角形，AD 是从 A 向对边 BC 所作的垂线，则三角形 ABC 的面积 $=\frac{1}{2}\times BC\times AD$，又因为 $AD=AB\sin B$，所以

$$\text{三角形 }ABC\text{ 的面积}=\frac{1}{2}ac\sin B. \quad ①$$

因此三角形的面积等于两边和夹角正弦乘积的一半. 又

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\sqrt{1-\frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{(2ac)^2}}$$
$$=\frac{1}{2ac}\sqrt{(2ac-a^2-c^2+b^2)}$$
$$\times\sqrt{(2ac+a^2+c^2-b^2)}$$
$$=\frac{1}{2ac}\sqrt{[b^2-(a-c)^2][(a+c)^2-b^2]}$$
$$=\frac{4}{2ac}\sqrt{\frac{(b+a-c)}{2}\times\frac{(b-a+c)}{2}}$$
$$\times\sqrt{\frac{(a+c+b)}{2}\times\frac{(a+c-b)}{2}}$$
$$=\frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

将上式代入①得

$$\text{三角形的面积}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad ②$$

这对于已知各边求面积是必要的公式. $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 这个式子经常简略地用 $S(\Delta)$ 来表示. 又，

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B},\quad c=\frac{b\sin C}{\sin B},$$

将这些代入①，即得

三角形 ABC 的面积

$$=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin(A+C)}. \quad ③$$

这是已知一边和两角求面积的公式. 因为如果已知两个角，那么第三个角也就马上可以求出来.

2961. 从三角形两个锐角 A 和 B 的顶点作 AD 垂直于 AC，BD 垂直于 BC. 设 ρ 是

三角形 ABD 内切圆的半径，证明

$$AB=\rho(\sec A+\sec B+\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B).$$

解　$\rho\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\angle DAB}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\angle DBA}{2}\right)=AB.$

$$\operatorname{ctg}\frac{\angle DAB}{2}=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\frac{\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}{2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}$$

$$=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}=\frac{1+\sin A}{\cos A}$$

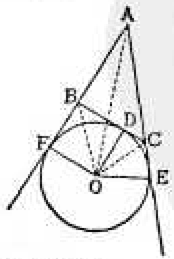
$$=\sec A+\operatorname{tg} A.$$

同理　$\operatorname{ctg}\dfrac{\angle DBA}{2}=\sec B+\operatorname{tg} B.$

因此

$$\rho(\sec A+\operatorname{tg} A+\sec B+\operatorname{tg} B)=AB.$$

2962. 如图，O 是三角形 ABC 的一个旁心，从 O 向 BC、AC 和 AB 的延长线分别作垂线 OD、OE、OF，证明 BE、CF 和 AD 相交于同一点。



解　这里 $AE=AF$，$CE=CD$，$BD=BF$，

因此　$AE\cdot BF\cdot CD=AF\cdot BD\cdot CE$，

因此 AD、BE 和 CF 相交于同一点。

2963. 在三角形 ABC 中，证明

$$\sqrt{abc}\left(\sqrt{\frac{a}{r_1}}+\sqrt{\frac{b}{r_2}}+\sqrt{\frac{c}{r_3}}\right)=16Rr^{\frac{1}{2}}\cos\frac{180^\circ-A}{4}\cos\frac{180^\circ-B}{4}\times\cos\frac{180^\circ-C}{4}.$$

解　$\dfrac{a}{r_1}=\dfrac{2R\sin A}{s\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\dfrac{4R\cos^2\frac{A}{2}}{s}$，

$$\therefore\quad \sqrt{abc}\left(\sqrt{\frac{a}{r_1}}+\sqrt{\frac{b}{r_2}}+\sqrt{\frac{c}{r_3}}\right)$$

$$=\sqrt{4R\Delta}\left(2\cos\frac{A}{2}\sqrt{\frac{R}{s}}+2\cos\frac{B}{2}\sqrt{\frac{R}{s}}+2\cos\frac{C}{2}\sqrt{\frac{R}{s}}\right)$$

$$=4R\sqrt{\frac{\Delta}{s}}\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$=4R\sqrt{r}\left(4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\times\cos\frac{A+B}{4}\right)$$

$$=16Rr^{\frac{1}{2}}\cos\frac{180^\circ-A}{4}\cos\frac{180^\circ-B}{4}\times\cos\frac{180^\circ-C}{4}.$$

2964. 若直角三角形的内切圆和外接圆的圆心距的两倍，是斜边和内切圆直径的比例中项，证明内切圆的半径等于斜边的 $\dfrac{1}{6}$。

解　在 C 为直角的直角三角形中

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c).$$

在本题中

$$2\sqrt{R^2-2Rr}=\sqrt{c(a+b-c)},$$

此外　$R=\dfrac{c}{2}$，

所以　$4\left(\dfrac{c^2}{4}-cr\right)=c(a+b-c)$，

$$c-4r=a+b-c,$$
$$4r=2c-a-b,$$
$$2(a+b-c)=2c-a-b,$$
$$a+b=\frac{4c}{3}.$$

因此　$r=\dfrac{c}{6}.$

2965. 圆内接正多边形的面积，是边数等于它一半的内接正多边形和外切正多边形面积的比例中项。试证明。

解　设圆的半径是 R，正多边形的边数是 n。这个正多边形是由 n 个三角形构成的，因此它的面积是 $n\dfrac{R^2}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$。边数是它一半的内接正多边形的面积是 $\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{R^2}{2}\sin\dfrac{4\pi}{n}$。

$\frac{n}{2}$ 边的圆的外切正多边形的面积是 $\frac{n}{2}R^2\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$。因此只要证明

$$\left(\frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2=\frac{n}{4}R^2\sin\frac{4\pi}{n}\times\frac{n}{2}R^2\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n},$$

即 $$\sin^2\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$$

就可以了。而上式成立是明显的，因为

$$\sin\frac{4\pi}{n}=2\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}.$$

2966. 证明三角形 ABC 的面积是 $\frac{a^2-b^2}{2}\times\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$。

解 $$\frac{a^2-b^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$$
$$=\frac{\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}\left(\frac{c^2\sin^2 A}{\sin^2 C}-\frac{c^2\sin^2 B}{\sin^2 C}\right)$$
$$=\frac{c^2\sin A\sin B(\sin^2 A-\sin^2 B)}{2\sin(A-B)\sin^2 C}$$
$$=\frac{c^2\sin A\sin B\sin(A+B)\sin(A-B)}{2\sin(A-B)\sin^2 C}$$
$$=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C},$$

这就是三角形 ABC 的面积。

2967. 在三角形 ABC 中，证明

$$a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}=s+\frac{S}{R}.$$

解 $$a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c+a\cos A+b\cos B+c\cos C)$$
$$=s+\frac{1}{2}R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$
$$=s+2R\sin A\sin B\sin C$$
$$=s+2R\cdot\frac{8S^3}{a^2b^2c^2}=s+\frac{4S^2}{abc}=s+\frac{S}{R}.$$

2968. 证明三角形 ABC 的内切圆和外接圆直径的和等于

$$a\operatorname{ctg}A+b\operatorname{ctg}B+c\operatorname{ctg}C.$$

解 $$a\operatorname{ctg}A+b\operatorname{ctg}B+c\operatorname{ctg}C$$
$$=\frac{a\cos A}{\sin A}+\frac{b\cos B}{\sin B}+\frac{c\cos C}{\sin C}$$
$$=2R(\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$=2R+2R(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$
$$=2R+8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$=2R+8R\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$
$$=2R+\frac{8R}{abc}\times\frac{S^2}{s}=2R+\frac{2S}{s}$$
$$=2R+2r.$$

2969. 在三角形 ABC 中，证明

$$(s-a)^2\sin A+(s-b)^2\sin B+(s-c)^2\sin C=4r(2R-r)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

解 $$(s-a)^2\sin A+(s-b)^2\sin B+(s-c)^2\sin C$$
$$=r\left[(s-a)\sin A\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+(s-b)\sin B\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+(s-c)\sin C\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right]$$
$$=2r\left[(s-a)\cos^2\frac{A}{2}+(s-b)\cos^2\frac{B}{2}+(s-c)\cos^2\frac{C}{2}\right]$$
$$=2r\left[\left(2+\frac{r}{2R}\right)s-\left(s+\frac{S}{R}\right)\right]$$
$$=2r\left(s+\frac{S}{2R}-\frac{S}{R}\right)=2r\left(s-\frac{S}{2R}\right)$$
$$=2r\left(\frac{S}{r}-\frac{S}{2R}\right)=\frac{S(2R-r)}{R}.$$

又 $$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{Ss}{abc}=\frac{s}{4R},$$

因此

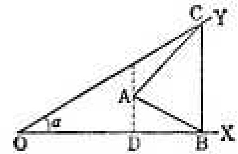
$$4r(2R-r)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=4r(2R-r)\frac{s}{4R}=\frac{S(2R-r)}{R}.$$

从而左、右两边相等。

2970. 作已知角一边的垂线，使以垂线为底、以已知点为顶点的三角形面积等于已知的面积。讨论这个问题。

解 设 A 是已知点，三角形的底 BC 是垂

直于 OX 的。从右面两个图来考虑。现设 $\triangle ABC$ 的面积是 p^2，从 A 向 OX 作垂线的垂足是 D，OD 等于 a，OB 等于 x，则

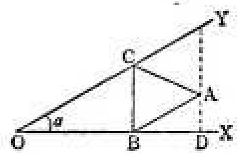


$BC=x\operatorname{tg}\alpha$,

$DB=|x-a|$,

且

$p^2=\frac{1}{2}BC\cdot DB$,



所以根据上图或下图的情况，有

$$\frac{1}{2}x(x-a)\operatorname{tg}\alpha=\pm p^2.$$

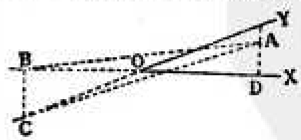
为了化简，设 $\mp 2p^2$ 为 m，于是

$$x^2\operatorname{tg}\alpha-ax\operatorname{tg}\alpha+m=0. \qquad ①$$

OB 即 x 可以解这个二次方程而求得。现讨论这个式子。为使 x 是实数，必须

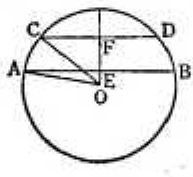
$$a^2\operatorname{tg}^2\alpha-4m\operatorname{tg}\alpha\geqq 0.$$

上面这个不等式当 $m<0$ 时总是成立的，并且这时 x 的两个值异号，用 a 代入 x，则①的左边是负的，由于 x^2 项的系数和这个符号相反，因此 a 在两根之间，且是正的。正根比 a 大。x 为



负的情况如上图所示。$m=0$ 的时候，得到 $x=0$ 或 $x=a$，这是显然的，无需再作讨论。下面讨论 $m>0$ 的情况，这时必须 $m\leqq\frac{1}{4}a^2\operatorname{tg}\alpha$，$x$ 才有根。而且这个条件成立时，两个根的积 $\frac{m}{\operatorname{tg}\alpha}$ 和 a 都是正的，因此两个根都是正的，且都比 a 小。

2971. 在圆心的同侧有两条平行的弦，它们所对的圆心角分别是 72°、144°，证明两弦的距离等于半径的一半。



解 设 AB 是 144° 的圆心角所对的弦，CD 是 72° 的圆心角所对的弦。从圆心 O 向两条弦作共同的垂线 OEF，则

$$OE=R\cos\frac{144^\circ}{2},$$

$$OF=R\cos\frac{72^\circ}{2}.$$

(R 是圆的半径)

所以两条弦的距离是 $R\cos 36^\circ-R\cos 72^\circ$。因此只要证明

$$R\cos 36^\circ-R\cos 72^\circ=\frac{1}{2}R,$$

或

$$\cos 36^\circ-\cos 72^\circ=\frac{1}{2}$$

就可以了。事实上

$$\begin{aligned}\cos 36^\circ-\cos 72^\circ&=2\sin 54^\circ\sin 18^\circ\\&=2\cos 36^\circ\sin 18^\circ\\&=\frac{2\cos 36^\circ\sin 18^\circ\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}\\&=\frac{\cos 36^\circ\sin 36^\circ}{\cos 18^\circ}=\frac{\sin 72^\circ}{2\cos 18^\circ}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2972. 设从三角形各顶点 A、B、C 向对边所引的垂线分别是 h_1、h_2、h_3，证明

$$(h_1\sin A+h_2\sin B+h_3\sin C)^2=18S\sin A\sin B\sin C.$$

解 因为 $ah_1=bh_2=ch_3=2S$，所以

$$2Rh_1\sin A=2Rh_2\sin B=2Rh_3\sin C=2S.$$

因此

$$R^2(h_1\sin A+h_2\sin B+h_3\sin C)^2=9S^2. \qquad ①$$

又

$$\begin{aligned}R&=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{2bc\sin A}=\frac{abc}{4S}\\&=\frac{(2R\sin A)(2R\sin B)(2R\sin C)}{4S},\end{aligned}$$

或

$$R^2=\frac{S}{2\sin A\sin B\sin C}.$$

所以将上式代入①就立即得证。

2973. 设从三角形各顶点 A、B、C 向对边所引的垂线依次是 h_1、h_2、h_3，证明

$$\frac{h_1^2}{h_2h_3}+\frac{h_2^2}{h_1h_3}+\frac{h_3^2}{h_1h_2}=\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}.$$

解 $ah_1=bh_2=ch_3=2\Delta$,

因此 $h_1=\frac{2\Delta}{a}$, $h_2=\frac{2\Delta}{b}$, $h_3=\frac{2\Delta}{c}$.

因此 $$\frac{h_1^2}{h_2h_3}=\frac{cb}{a^2}.$$

对于其他两项也得到同样形式的式子。

2974. 设三角形 ABC 的垂心是 O, $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$, 证明

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{xyz}.$$

解 从三角形 OAB 得

$$\frac{OA}{AB}=\frac{\sin\angle OBA}{\sin\angle AOB}=\frac{\cos A}{\sin C},$$

$$x=\frac{c\cos A}{\sin C}=\frac{a\cos A}{\sin A}.$$

同理 $$y=\frac{b\cos B}{\sin B},\quad z=\frac{c\cos C}{\sin C}.$$

因此只要证明

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

就可以了。而上式我们已在前面证明过。

2975. 若四个角 A、B、C、D 的和是 $360°$, 且它们的正切成等比数列, 证明这个数列的公比是 -1, 或

$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}D=\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=1.$$

解 设等比数列的公比是 r, 则

$$\operatorname{tg}B=r\operatorname{tg}A,\ \operatorname{tg}C=r\operatorname{tg}B,\ \operatorname{tg}D=r\operatorname{tg}C,$$
$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}D=\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C.$$

现 $A+D=360°-B-C$, 所以

$$\operatorname{tg}(A+D)=-\operatorname{tg}(B+C),$$

$$\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}D}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}D}=-\frac{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{1-\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}.$$

$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}D=\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=1$$

或 $$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}D=-(\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C).$$

从第二个式子得

$$(1+r^3)\operatorname{tg}A=-(r+r^2)\operatorname{tg}A,$$
$$1+r^3+r+r^2=0,$$

即 $$(1+r)(1+r^2)=0.$$

因此 $$1+r=0,\quad r=-1.$$

其中从 $1+r^2=0$ 解得 r 是虚数,所以这种情况是不可能的。

2976. P 是以 AB 为直径, 以 C 为圆心的半圆上的任意一点. 向 AB 作垂线 PM, 连结 PA、PB, 试根据角 BPM 和 PAM 是角 PCB 的一半, 推导公式

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

解 设 $\angle PCB=\alpha$, 则

$$\angle BPM=\frac{\alpha}{2},$$

及 $$\angle PAM=\frac{\alpha}{2},$$

又 $$\frac{MB}{PM}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\quad \frac{PM}{AM}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

因此

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{MB}{PM}\cdot\frac{PM}{AM}=\frac{MB}{AM}$$
$$=\frac{CB-CM}{CA+CM}=\frac{CP-CM}{CP+CM}$$
$$=\frac{1-\dfrac{CM}{CP}}{1+\dfrac{CM}{CP}}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

2977. 从三角形三个顶点 A、B、C 作过内部任意一点 P 的三条直线, 和对边分别交于 A'、B'、C', 证明

$$AB'\cdot BC'\cdot CA'=AC'\cdot BA'\cdot CB'.$$

解 $$\frac{AB'}{AP}=\frac{\sin\angle APB'}{\sin\angle AB'P},$$

$$AB'=\frac{AP\sin\angle APB'}{\sin\angle AB'P}.$$

同理 $$BC'=\frac{BP\sin\angle BPC'}{\sin\angle BC'P},$$

及 $$CA'=\frac{CP\sin\angle CPA'}{\sin\angle CA'P}.$$

因此

$$AB'\cdot BC'\cdot CA'=AP\cdot BP\cdot CP\times\frac{\sin\angle APB'\sin\angle BPC'\sin\angle CPA'}{\sin\angle AB'P\sin\angle BC'P\sin\angle CA'P}.$$

同理

$$AC'\cdot BA'\cdot CB'=AP\cdot BP\cdot CP\times\frac{\sin\angle APC'\sin\angle BPA'\sin\angle CPB'}{\sin\angle AC'P\sin\angle BA'P\sin\angle CB'P}.$$

又 $$\sin\angle APB'=\sin\angle BPA',$$
$$\sin\angle BPC'=\sin\angle B'PC,$$
$$\sin\angle CPA'=\sin\angle C'PA,$$

且 $$\sin\angle AB'P=\sin\angle CB'P,$$
$$\sin\angle BC'P=\sin\angle AC'P,$$
$$\sin\angle CA'P=\sin\angle BA'P,$$

所以上面两个式子相等。

2978. 证明三角形的三条高相交于同一点。

解　从 A、B、C 向对边引垂线，设垂足分别是 A'、B'、C'．如果各个角都是锐角，那么下面的式子成立．

$$AB'=c\cos A,\quad BC'=a\cos B,$$
$$CA'=b\cos C,\quad AC'=b\cos A,$$
$$BA'=c\cos B,\quad CB'=a\cos C.$$

因此

$$AB'\cdot BC'\cdot CA'=AC'\cdot BA'\cdot CB'.$$

根据齐瓦定理，AA'、BB' 和 CC' 相交于同一点．假定一个角是钝角，且钝角是 C．这时

$$CA'=b\cos(180°-C),$$
$$CB'=a\cos(180°-C),$$

其他各式和前面一样．因此得到和前面一样的结果．

2979．在三角形 ABC 中，设 a、b、c 上的高是 h_1、h_2、h_3，证明

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{s}{S}.$$

解　因为

$$S=\frac{ah_1}{2}=\frac{bh_2}{2}=\frac{ch_3}{2},$$

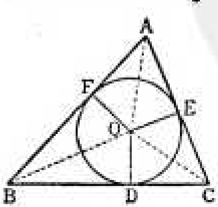
所以

$$\frac{1}{h_1}=\frac{a}{2S},\quad \frac{1}{h_2}=\frac{b}{2S},\quad \frac{1}{h_3}=\frac{c}{2S}.$$

将这三个等式的两边相加，得

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2s}{2S}=\frac{s}{S}.$$

2980．证明三角形内切圆的半径 $r=\dfrac{S}{s}$．



解　设三角形 ABC 内切圆的圆心是 O，且各边上的切点是 D、E、F．连结 OD、OE、OF，则它们分别垂直于边 BC、CA、AB．设圆的半径是 r，于是

$$\text{三角形 } BOC \text{ 的面积}=\frac{BC\cdot OD}{2}=\frac{ar}{2},$$

$$\text{三角形 } COA \text{ 的面积}=\frac{CA\cdot OE}{2}=\frac{br}{2},$$

$$\text{三角形 } AOB \text{ 的面积}=\frac{AB\cdot OF}{2}=\frac{cr}{2}.$$

由加法得

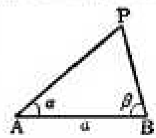
$$\text{三角形 } ABC \text{ 的面积 } S=(a+b+c)\frac{r}{2},$$

即

$$rs=S,\quad \therefore\quad r=\frac{S}{s}.$$

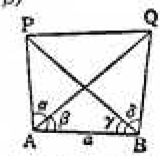
因此内切圆的半径等于这个三角形的面积除以各边和的一半．如果运用前面已经得出的求三角形面积的各个公式，那么就可以用各种形式来表示它的内切圆的半径．

2981．叙述测量已知两点间的距离的方法．



解　(i) 求点 A 和不可到达的点 P 之间的距离．在 A、P 所在的平面上，取能够到达的基线 AB，如果测得 $AB=a$，$\angle BAP=\alpha$，$\angle ABP=\beta$，那么从 $\triangle ABP$ 得

$$AP=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$



(ii) 求不可到达的两点 P、Q 间的距离．在适当的地方取基线 AB，如果测得 $AB=a$，$\angle BAP=\alpha$，$\angle BAQ=\beta$，$\angle ABP=\gamma$，$\angle ABQ=\delta$，那么从 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ABQ$ 得

$$AP=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)},\quad AQ=\frac{a\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}.$$

这样在 $\triangle APQ$ 中，边 AP、AQ 和它们的夹角 $\angle PAQ$ 是已知的，因此 PQ 也就可以求出．

2982．设三角形 ABC 的内切圆半径是 r，证明

$$r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

和

$$r=(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}\text{ 等．}$$

解　设内心是 O，因为直线 OA、OB、OC 分别将角 A、B、C 二等分，所以

$$BD=r\operatorname{ctg}\frac{B}{2},\quad CD=r\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

(D 是边 BC 上的切点)

$$\therefore\quad r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=a.$$

$$\therefore\quad r\sin\frac{B+C}{2}=a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

$$\therefore\quad r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

又　　$r=AE\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$

（E 是边 AB 上的切点）

2983. 在三角形 ABC 中，证明

$$\frac{a^2[\cos(B-C)+\cos A]}{4\sin A}=S.$$

解　所给式子的左边

$$=\frac{a^2[\cos(B-C)-\cos(B+C)]}{4\sin A}$$

$$=\frac{2a^2\sin B\sin C}{4\sin A}=\frac{(a\sin B)(a\sin C)}{2\sin A}$$

$$=\frac{(b\sin A)(c\sin A)}{2\sin A}=\frac{bc\sin A}{2}=S.$$

2984. 在三角形 ABC 中，证明

$$\left(\frac{a^2}{\sin A}+\frac{b^2}{\sin B}+\frac{c^2}{\sin C}\right)\times\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=S.$$

解　设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则

所给式子的左边

$$=k^2(\sin A+\sin B+\sin C)\times\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=k^2\left(4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\times\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=\frac{1}{2}k^2\sin A\sin B\sin C$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C=S.$$

2985. 证明三角形 ABC 的面积是

$$\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A).$$

解　从顶点 C 向 AB 或它的延长线引垂线 CD．假定角 A 和 B 是锐角，D 在点 A 和 B 之间．因此

$$CD=b\sin A,\quad AD=b\cos A,$$

$\triangle ACD$ 的面积

$$=\frac{1}{2}b^2\sin A\cos A=\frac{1}{4}b^2\sin 2A.$$

同理

$\triangle BCD$ 的面积

$$=\frac{1}{2}a^2\sin B\cos B=\frac{1}{4}a^2\sin 2B.$$

三角形 ABC 的面积是

$$\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A).$$

再假定 B 是钝角，D 在 AB 的延长线上．象前面一样，$\triangle ACD$ 的面积是 $\frac{1}{4}b^2\sin 2A$，$\triangle CBD$ 的面积是

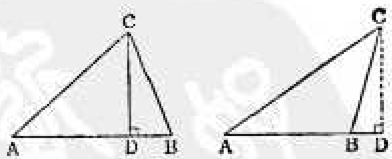
$$\frac{1}{2}a^2\sin(180^\circ-B)\cos(180^\circ-B)$$

$$=\frac{a^2}{4}\sin(360^\circ-2B).$$

因此 $\triangle ABC$ 的面积是

$$\frac{1}{4}[b^2\sin 2A-a^2\sin(360^\circ-2B)]$$

$$=\frac{1}{4}(b^2\sin 2A+a^2\sin 2B).$$



2986. 证明三角形 ABC 的面积是

$$\frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

解　$\frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$=\frac{2abc}{2s}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}\times\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=S.$$

2987. 证明三角形 ABC 的面积是

$$S=s(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

解　$s(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=s(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=S.$$

2988. 有一个各边成等差数列的三角形。证明中边上的高、以及与中边相切的旁切圆的半径，各等于内切圆半径的3倍。

解　设 a、b、c 是成等差数列的三条边，则 $2b=a+c$。从顶点 B 向对边作高，这条高的长度是

$$a\sin C=\frac{ab\sin C}{b}=\frac{2S}{b}, \qquad ①$$

与中边相切的旁切圆的半径是

$$\frac{S}{s-b}=\frac{2S}{a+c-b}=\frac{2S}{b}, \qquad ②$$

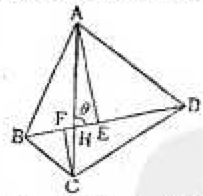
内切圆的半径是

$$\frac{S}{s}=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2S}{3b}, \qquad ③$$

其中①式和②式是③式的3倍。

B. 四边形、多边形

2989. 设四边形的对角线是 m、n，θ 是它们的夹角，证明四边形的面积等于 $\frac{1}{2}mn\sin\theta$。



解　设 $ABCD$ 是四边形，对角线 BD、AC 分别是 m、n，它们的交点是 H。四边形 $ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$。若从 A、C 向 BD 作垂线 AE、CF，则

$$\triangle ABD\text{面积}=\frac{1}{2}BD\cdot AE,$$

$$\triangle BCD\text{面积}=\frac{1}{2}BD\cdot CF.$$

因为

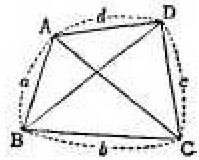
$$AE=AH\cdot\sin\theta,\quad CF=CH\cdot\sin\theta,$$

所以

$$S=\frac{1}{2}BD\cdot AH\sin\theta+\frac{1}{2}BD\cdot CH\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}BD(AH+CH)\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}mn\sin\theta.$$

2990. 在四边形 $ABCD$ 中，若 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，证明这个四边形的面积不超过 $\frac{(a+c)(b+d)}{4}$。

解　四边形 $ABCD$ 被对角线 AC 分成两个三角形，即



$$\text{四边形 }ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD.$$

设四边形 $ABCD$ 的面积是 S，则

$$S=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D.$$

因为正弦能取的最大值是1，所以

$$S\leqq\frac{1}{2}(ab+cd).$$

同理　　$S=\triangle ABD+\triangle BCD,$

从而　　$S\leqq\frac{1}{2}(ad+bc).$

将两个不等式两边相加，得

$$2S\leqq\frac{1}{2}(ab+cd+ad+bc),$$

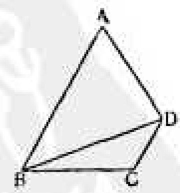
$$\therefore\quad S\leqq\frac{1}{4}(a+c)(b+d).$$

如要使等号成立，那么最初的两个不等式中的等号都必须成立。因此

$$A=B=C=D=90°,$$

即四边形是长方形时等号成立。

2991. 求任意四边形的面积。



解　设四边形 $ABCD$ 的面积是 S，边

$$AB=a,\quad BC=b,$$
$$CD=c,\quad DA=d,$$

则

$$S=\triangle ABD+\triangle BCD$$
$$=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C. \qquad ①$$

又　　$a^2+d^2-2ad\cos A$
$$=BD^2=b^2+c^2-2bc\cos C.$$

因此

$$a^2+d^2-b^2-c^2=2ad\cos A-2bc\cos C.$$

从①得

$$4S=2ad\sin A+2bc\sin C.$$

将上面两式平方，相加得

$$16S^2+(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$$
$$=4a^2d^2+4b^2c^2-8abcd\cos(A+C)$$
$$=4(ad+bc)^2-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

因此

$$\begin{aligned}S^2&=\frac{1}{16}(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)\\&\quad\times(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2)\\&\quad-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}\\&=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\\&\quad-abcd\cos^2\frac{A+C}{2},\end{aligned}$$

其中 $\qquad 2s=a+b+c+d.$

2992. 设上题对角线的夹角是 φ，证明四边形的面积是

$$S=\frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)\operatorname{tg}\varphi.$$

解 设对角线的交点是 O，则从 $\triangle OBC$ 得

$$\begin{aligned}b^2&=OB^2+OC^2-2OB\cdot OC\cos(180^\circ-\varphi)\\&=OB^2+OC^2+2OB\cdot OC\cos\varphi,\end{aligned}$$

从 $\triangle ODA$ 得

$$\begin{aligned}d^2&=OD^2+OA^2-2OD\cdot OA\cos(180^\circ-\varphi)\\&=OD^2+OA^2+2OD\cdot OA\cos\varphi,\end{aligned}$$

从 $\triangle OAB$ 得

$$a^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\varphi,$$

从 $\triangle OCD$ 得

$$c^2=OC^2+OD^2-2OC\cdot OD\cos\varphi.$$

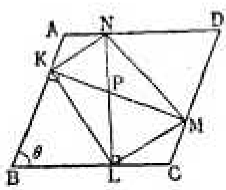
因此

$$\begin{aligned}&b^2+d^2-a^2-c^2\\&=2(OA+OC)(OB+OD)\cos\varphi\\&=2AC\cdot BD\cos\varphi.\end{aligned}$$

两边乘以 $\frac{1}{4}\operatorname{tg}\varphi$，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)\operatorname{tg}\varphi\\&=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\varphi=S.\end{aligned}$$

2993. 在平行四边形 $ABCD$ 中，角 ABC 用 θ 表示，从这个平行四边形内的一点 P 向边 AB、BC、CD、DA 作垂线，垂足分别是 K、L、M、N，证明四边形 $KLMN$ 的面积是 $\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin^3\theta$.



解 上图中

$$KM=BC\sin\theta,\quad LN=AB\sin\theta.$$

设四边形 $KLMN$ 的面积是 S，则

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}KM\cdot LN\sin\angle KPL\\&=\frac{1}{2}BC\sin\theta\cdot AB\sin\theta\sin(180^\circ-\theta)\\&=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin^3\theta.\end{aligned}$$

2994. 求对角线是 10cm 和 12cm、它们的交角是 60° 的四边形的面积.

解 $S=\frac{1}{2}\times10\times12\times\sin60^\circ$

$$=60\times\frac{\sqrt{3}}{2}=30\sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$

2995. 在四边形 $ABCD$ 中，设

$AB=a,$

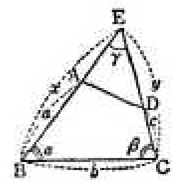
$BC=b,$

$CD=c,$

$\angle ABC=\alpha,$

$\angle BCD=\beta.$

证明这个四边形的面积 S 可用下式表示.



$$S=\frac{1}{2}[ab\sin\alpha+bc\sin\beta-ac\sin(\alpha+\beta)].$$

解 设 $\alpha+\beta\neq180^\circ$ 时，BA 和 CD 的延长线的交点是 E，且

$$BE=x,\quad CE=y,\quad \angle BEC=\gamma.$$

如果 $\alpha+\beta<180^\circ$，则

$$\frac{x}{\sin\beta}=\frac{y}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\gamma},$$

$$\therefore\quad x=\frac{b\sin\beta}{\sin\gamma},\quad y=\frac{b\sin\alpha}{\sin\gamma},$$

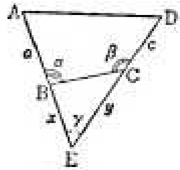
$$\begin{aligned}S&=\triangle EBC-\triangle EAD\\&=\frac{1}{2}xy\sin\gamma-\frac{1}{2}(x-a)(y-c)\sin\gamma\\&=\frac{1}{2}(ay+cx-ac)\sin\gamma\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{ab\sin\alpha}{\sin\gamma}+\frac{bc\sin\beta}{\sin\gamma}-ac\right)\sin\gamma\\&=\frac{1}{2}(ab\sin\alpha+bc\sin\beta-ac\sin\gamma).\end{aligned}$$

因为 $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$，所以

$$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta).$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\,[ab\sin\alpha+bc\sin\beta-ac\sin(\alpha+\beta)].$$

如果 $\alpha+\beta>180°$，则



$$\frac{x}{\sin(180°-\beta)}=\frac{y}{\sin(180°-\alpha)}=\frac{b}{\sin\gamma}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{b\sin\beta}{\sin\gamma},\quad y=\frac{b\sin\alpha}{\sin\gamma},$$

$$\begin{aligned}S&=\triangle EAD-\triangle EBC\\&=\frac{1}{2}\,(x+a)\,(y+c)\sin\gamma-\frac{1}{2}\,xy\sin\gamma\\&=\frac{1}{2}\,(cy+cx+ac)\sin\gamma\\&=\frac{1}{2}\,(ab\sin\alpha+bc\sin\beta+ac\sin\gamma).\end{aligned}$$

从 $\gamma=\alpha-(180°-\beta)=\alpha+\beta-180°$ 得

$$\sin\gamma=-\sin(\alpha+\beta).$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\,[ab\sin\alpha+bc\sin\beta-ac\sin(\alpha+\beta)].$$

当 $\alpha+\beta=180°$ 时，从 $AB\parallel CD$ 得

$$\triangle ABD=\triangle ABC=\frac{1}{2}\,ab\sin\alpha,$$

$$\triangle BCD=\frac{1}{2}\,bc\sin\beta,$$

$$\begin{aligned}S&=\triangle ABD+\triangle BCD\\&=\frac{1}{2}\,(ab\sin\alpha+bc\sin\beta).\end{aligned}$$

因为 $\sin(\alpha+\beta)=0$，所以上面的等式也成立。

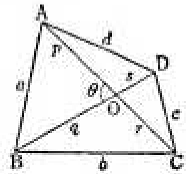
2996．设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 是 l、m，它们的交点是 O，$\angle AOB=\theta$，证明

(1) $S=\dfrac{1}{4}(-a^2+b^2-c^2+d^2)\operatorname{tg}\theta$.

(2) $S=\dfrac{1}{4}\sqrt{4l^2m^2-(-a^2+b^2-c^2+d^2)^2}$.

解　(1) 设 $OA=p$，$OB=q$，$OC=r$，$OD=s$，由余弦定理得

$$\begin{aligned}a^2&=p^2+q^2-2pq\cos\theta,\\b^2&=q^2+r^2-2qr\cos(180°-\theta)\\&=q^2+r^2+2qr\cos\theta,\\c^2&=r^2+s^2-2rs\cos\theta,\\d^2&=p^2+s^2-2ps\cos(180°-\theta)\\&=p^2+s^2+2ps\cos\theta.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\therefore\quad -a^2+b^2-c^2+d^2&=2(pq+qr+rs+sp)\times\cos\theta\\&=2(q+s)\,(p+r)\cos\theta=2lm\cos\theta.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\,lm\sin\theta=\frac{1}{2}\,lm\cos\theta\cdot\operatorname{tg}\theta\\&=\frac{1}{4}\,(-a^2+b^2-c^2+d^2)\operatorname{tg}\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\quad S^2&=\left(\frac{1}{2}\,lm\sin\theta\right)^2\\&=\frac{1}{4}\,l^2m^2(1-\cos^2\theta)\\&=\frac{1}{16}\,[4l^2m^2-(2lm\cos\theta)^2]\\&=\frac{1}{16}\,[4l^2m^2-(-a^2+b^2-c^2+d^2)^2].\end{aligned}$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{4}\sqrt{4l^2m^2-(-a^2+b^2-c^2+d^2)^2}.$$

注　如果设 $\angle AOD=\theta$，那么

$$S=\frac{1}{4}\,(a^2-b^2+c^2-d^2)\operatorname{tg}\theta.$$

2997．在对角线的和为定长的四边形中，面积最大的是怎样的形状？说明理由．

解　在四边形 $ABCD$ 中，设 $AC=x$，$BD=y$，$x+y=a$（一定）．又设 AC、BD 的交点是 O，$OA=p$，$OB=q$，$OC=r$，$OD=s$，于是

$$p+r=x,\quad q+s=y.$$

若 $\angle AOB=\theta$，则

$$\triangle AOB\text{ 面积}=\frac{1}{2}\,pq\sin\theta,$$

$$\triangle BOC\text{ 面积}=\frac{1}{2}\,qr\sin\theta,$$

$$\triangle COD\text{ 面积}=\frac{1}{2}\,rs\sin\theta,$$

$$\triangle DOA\text{ 面积}=\frac{1}{2}\,sp\sin\theta.$$

因此

四边形 $ABCD$ 面积

$$=\frac{1}{2}pq\sin\theta+\frac{1}{2}qr\sin\theta+\frac{1}{2}rs\sin\theta+\frac{1}{2}sp\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}(pq+qr+rs+sp)\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}(p+r)(q+s)\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}xy\sin\theta.$$

因此，当 $\theta=90^\circ$ 的时候积 xy 达到最大，即四边形的面积成为最大. 因为 x、y 都是正的，所以

$$\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2},$$
$$\therefore\quad xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{a^2}{4}.$$

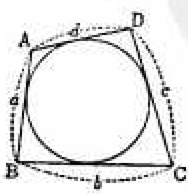
因为等号只有在 $x=y$ 的时候成立，所以 xy 在 $x=y$ 时取得最大值 $\frac{a^2}{4}$. 因此在两对角线都等于 $\frac{a}{2}$ 且互相垂直的时候面积最大.

2998. 若四边形 $ABCD$ 外切于圆，证明

$$S=\sqrt{abcd}\sin\alpha\quad\left(\frac{\angle A+\angle C}{2}=\alpha\right).$$

解　因为四边形 $ABCD$ 外切于圆，所以 $a+c=b+d=s$.

(s 是周长的一半)



$$\therefore\quad s-a=c,$$
$$s-b=d,$$
$$s-c=a,$$
$$s-d=b.$$

因此由第 2991 题得

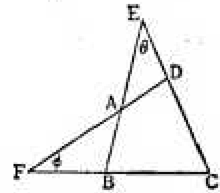
$$S=\sqrt{abcd-abcd\cos^2\alpha}$$
$$=\sqrt{abcd(1-\cos^2\alpha)}$$
$$=\sqrt{abcd\sin^2\alpha}$$
$$=\sqrt{abcd}\sin\alpha.$$

2999. 在四边形 $ABCD$ 中，设 AB、CD 的夹角是 θ，AD、BC 的夹角是 φ，证明

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{D}{2}=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

解　$\theta=180^\circ-B-C$，$\varphi=180^\circ-D-C$，

所以　$\frac{\theta+\varphi}{2}=\frac{360^\circ-B-D-C-C}{2}$,



$$\frac{\theta+\varphi}{2}=\frac{A-C}{2}.$$
$$\therefore\quad\cos\frac{\theta+\varphi}{2}=\cos\frac{A-C}{2}.$$
$$\therefore\quad\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}.\qquad①$$

又　$$\frac{\varphi-\theta}{2}=\frac{B-D}{2},$$
$$\therefore\quad\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{D}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{D}{2}.\qquad②$$

又　$$\frac{A+C}{2}=180^\circ-\frac{B+D}{2},$$
$$\therefore\quad\cos\frac{A+C}{2}=-\cos\frac{B+D}{2}.$$
$$\therefore\quad\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{D}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{D}{2}.\qquad③$$

①+②，再利用③，就能得到本题所要证明的结果.

3000. 四边形 $ABCD$ 的四个角用 A、B、C、D 表示，四条边 AB、BC、CD、DA 分别用 a、b、c、d 表示，设 $B+D=2\alpha$，四边形的面积是 S.

(1) 证明

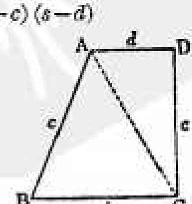
$$4S=2ab\sin B+2cd\sin D,$$
$$a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos B-2cd\cos D.$$

(2) 将上面两式分别平方，相加，并推导等式

$$S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\alpha,$$

其中

$$2s=a+b+c+d.$$



(3) 若四边形 $ABCD$ 内接于圆，试从 (2) 的结果写出求 S 的式子.

解 (1) 四边形 $ABCD$ 面积

$$=\triangle ABC\text{ 面积}+\triangle ADC\text{ 面积}$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D,$$

即 $$S=\frac{1}{2}(ab\sin B+cd\sin D).$$

$$\therefore\quad 4S=2ab\sin B+2cd\sin D.\qquad ①$$

又,在 $\triangle ABC$ 中

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$$
$$=a^2+b^2-2ab\cos B.$$

同理,从 $\triangle ADC$ 得

$$AC^2=c^2+d^2-2cd\cos D.$$
$$\therefore\quad a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D.$$
$$\therefore\quad a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos B-2cd\cos D.\qquad ②$$

(2) 将 ①、② 的两边平方,得

$$16S^2=4a^2b^2\sin^2 B+4c^2d^2\sin^2 D+8abcd\sin B\sin D,$$
$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2\cos^2 B+4c^2d^2\cos^2 D-8abcd\cos B\cos D.$$

将这两个式子相加,得

$$16S^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cos(B+D).$$

设 $B+D=2\alpha$, 因为 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$, 所以

$$16S^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$
$$=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd(2\cos^2\alpha-1)$$
$$=4(a^2b^2+2abcd+c^2d^2)-16abcd\cos^2\alpha$$
$$=4(ab+cd)^2-16abcd\cos^2\alpha.$$

因此

$$16S^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-16abcd\cos^2\alpha$$
$$=(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)\times(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)-16abcd\cos^2\alpha$$
$$=[(a^2+2ab+b^2)-(c^2-2cd+d^2)]\times[(c^2+2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)]-16abcd\cos^2\alpha$$
$$=[(a+b)^2-(c-d)^2]\times[(c+d)^2-(a-b)^2]-16abcd\cos^2\alpha$$
$$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)\times(c+d+a-b)(c+d-a+b)-16abcd\cos^2\alpha.$$

设 $a+b+c+d=2s$, 则

$$a+b+c-d=a+b+c+d-2d=2s-2d=2(s-d),$$

同理 $$a+b-c+d=2(s-c),$$
$$a-b+c+d=2(s-b),$$
$$b+c+d-a=2(s-a),$$

因此

$$16S^2=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-16abcd\cos^2\alpha,$$
$$S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\alpha.$$

(3) 当四边形 $ABCD$ 内接于圆时,

$$\angle B+\angle D=180^\circ.$$

因为 $\alpha=90^\circ$, $\cos\alpha=0$,

所以

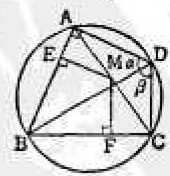
$$S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d),$$
$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

3001. 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A=\angle C=90^\circ$, 从对角线 AC 的中点 M 向 AB、BC 作垂线,垂足分别是 E、F.

(1) 若 $BD=a$, $\angle ADB=\alpha$, $\angle CDB=\beta$, 用 a、α、β 表示 AC 的长.

(2) 证明 $ME\cdot AD+MF\cdot CD=\frac{1}{2}AC^2$.

解 (1) 作四边形 $ABCD$ 的外接圆,因为 BD 是圆的直径,所以用正弦定理得



$$\frac{AC}{\sin(\alpha+\beta)}=BD=a,$$

$$\therefore\quad AC=a\sin(\alpha+\beta).$$

(2) $$ME=\frac{1}{2}AC\sin\beta,$$

$$MF=\frac{1}{2}AC\sin\alpha,$$

$$\therefore\quad ME\cdot AD+MF\cdot CD$$
$$=\frac{1}{2}AC\sin\beta\cdot a\cos\alpha+\frac{1}{2}AC\sin\alpha\cdot a\cos\beta$$
$$=\frac{1}{2}AC\cdot a\sin(\alpha+\beta).$$

由(1)已知　$AC=a\sin(\alpha+\beta)$,

$$\therefore\quad ME\cdot AD+MF\cdot CD=\frac{1}{2}AC^2.$$

3002. 设半径为 R 的圆的内接正五边形和正十边形的一边分别是 a 和 a'，它们的内切圆的半径是 r 和 r'，证明 $a^2-a'^2=R^2$ 和

$$\frac{a}{r}+\frac{a'}{r'}=\frac{2R}{r'}.$$

解　$a=2R\sin 36°$,　$a'=2R\sin 18°$,

因此

$$a^2-a'^2=4R^2\left[\frac{10-2\sqrt{5}}{16}-\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}\right]$$

$$=\frac{4R^2\times 4}{16}=R^2.$$

又　$\frac{a}{r}=2\operatorname{tg}36°$,　$\frac{a'}{r'}=2\operatorname{tg}18°$,

因此

$$\frac{a}{r}+\frac{a'}{r'}=2\left(\frac{\sin 36°}{\cos 36°}+\frac{\sin 18°}{\cos 18°}\right)$$

$$=\frac{2\sin(36°+18°)}{\cos 36°\cos 18°}$$

$$=\frac{2\sin 54°}{\cos 36°\cos 18°}$$

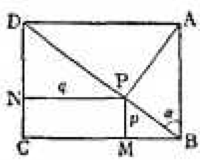
$$=\frac{2}{\cos 18°}=\frac{2R}{r'}.$$

3003. 从长方形 $ABCD$ 的一个顶点 A 向对角线 BD 作垂线 AP，再从 P 向 BC、DC 作垂线 PM、PN。设 BD 的长是 c，PM 和 PN 的长分别是 p 和 q，证明

$$p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}.$$

解　设

$\angle DBA=\alpha$,



则

$AB=c\cos\alpha$,

$BP=AB\cos\alpha$

$=c\cos^2\alpha$,

$PM=BP\cos\angle BPM=BP\cos\alpha=c\cos^3\alpha$,

因此　　　$p=c\cos^3\alpha$.

同理　　　$AD=c\sin\alpha$,

$PD=AD\sin\angle PAD=AD\sin\alpha=c\sin^2\alpha$,

$PN=PD\sin\angle PDN=PD\sin\alpha=c\sin^3\alpha$,

即　　　$q=c\sin^3\alpha$.

因此

$$p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}=(c\cos^3\alpha)^{\frac{2}{3}}+(c\sin^3\alpha)^{\frac{2}{3}}$$

$$=c^{\frac{2}{3}}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=c^{\frac{2}{3}}.$$

3004. 设三角形 ABC 的面积是 S，证明 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$.

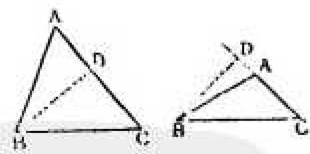
解　在 $\triangle ABC$ 中从 B 向 AC 作垂线，垂足是 D。若 A 是锐角，则 D 在边 AC 上，若 A 是钝角，则 D 在 CA 的延长线上。在前一种情况下，$\angle BAD$ 等于 $\angle BAC$；在后一种情况下，$\angle BAD$ 等于 $180°-\angle BAC$。因此不管哪一种情况，都有

$$\sin\angle BAD=\sin A.$$

$$\therefore\quad BD=AB\cdot\sin\angle BAD=c\sin A.$$

因此　$S=\frac{1}{2}BD\cdot AC=\frac{1}{2}bc\sin A$.

同理　$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$.

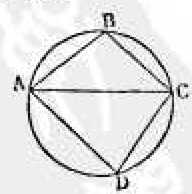


3005. 求圆内接四边形对角线的长。

解　设四边形是 $ABCD$，且

$AB=a$,　$BC=b$,

$CD=c$,　$DA=d$.



从三角形 ABC 得

$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B$,

从三角形 CDA 得

$$AC^2=c^2+d^2-2cd\cos D$$

$$=c^2+d^2+2cd\cos B.$$

$$c^2+d^2+2cd\cos B=a^2+b^2-2ab\cos B.$$

$$\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

$$\therefore\quad AC^2=c^2+d^2+\frac{2cd(a^2+b^2-c^2-d^2)}{2(ab+cd)}$$

$$=c^2+d^2+\frac{cd(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd}$$

$$=\frac{(ac+bd)(cd+bc)}{ab+cd}.$$

同理　$\cos A=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$,

$$BD^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

3006. 若四边形 $ABCD$ 内接于圆，且 $AB=15$, $BC=13$, $CD=17$, $DA=22$, 求对角线 BD 的长.

解　从上题得

$$BD=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

将 $a=15$, $b=13$, $c=17$, $d=22$ 代入上式，得

$$BD=\sqrt{\frac{(15\cdot17+13\cdot22)(15\cdot13+17\cdot22)}{15\cdot22+13\cdot17}}$$
$$=\sqrt{\frac{307829}{551}}\approx23.6.$$

3007. 一个四边形，若它有内切圆和外接圆，证明它的面积等于四边乘积的平方根.

解　因为四边形内接于圆，所以它的面积是 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. 另一方面，四边形又有内切圆，所以两条对边的和等于另外两条对边的和，即 $a+c=b+d$. 因此

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)=a+c=b+d,$$
$$s-a=c,\quad s-b=d,$$
$$s-c=a,\quad s-d=b.$$

因此

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}=\sqrt{abcd}.$$

3008. 有一个四边形，它相对的两个角互为补角，证明：如果它没有一组对边相等，那么两条对角线相等是不可能的.

解　设 AC^2 和 BD^2 的值相等，则

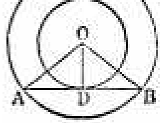
$$\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$
$$(ad+bc)^2=(ab+cd)^2,$$
$$ad+bc=ab+cd,$$
$$(a-c)(d-b)=0,$$

即　　$a=c$　或　$b=d$.

因而本题得证.

3009. 求正多边形的内切圆和外接圆的半径 r 和 R.

解　如图，AB 是正 n 边形的一边，O 是两个圆的圆心，OD 是内切圆的半径，OA 是外接圆的半径. 设



$$AB=a,\quad OA=R,\quad OD=r,$$

由于 $\angle AOB$ 等于 2π 的 n 分之一，即

$$\angle AOB=\frac{2\pi}{n},$$

因此　$$\angle AOD=\frac{\pi}{n},$$

$$AD=\frac{a}{2}=R\sin\frac{\pi}{n}=r\operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

因此　$$R=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}},\quad r=\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}.$$

3010. 设一边为 a 的正五边形外接圆的半径是 R，证明 $\frac{R}{a}\approx\frac{17}{20}$.

解　这里　$a=2R\sin\frac{\pi}{5}$.

因此

$$\frac{R}{a}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$
$$=\frac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}}=\frac{2\sqrt{200+40\sqrt{5}}}{\sqrt{80\times20}}$$
$$=\frac{\sqrt{200+40\sqrt{5}}}{20}=\frac{\sqrt{289.44}}{20}\approx\frac{17}{20}.$$

3011. 若圆内接正五边形的一边是 c，证明这个圆的半径是 $\frac{c\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}$.

解　设圆的半径是 r，则

$$r=\frac{c}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{2c}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$
$$=\frac{2c}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}}.$$

分子和分母同乘以 $\sqrt{5+\sqrt{5}}$，则

$$r=\frac{2c\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\times\sqrt{25-5}}=\frac{2c\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{40}}$$
$$=\frac{c\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}.$$

3012. 用内切圆或外接圆的半径表示正多边形的面积.

解　在第 3009 题的图中，三角形 AOB 的面积是

$$\frac{1}{2}AB\cdot OD=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}=\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},$$

因此正多边形的面积是

$$\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}=nR^2\sin^2\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$$
$$=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}.$$

这个正多边形的面积又等于

$$nr^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}=nr^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

3013. 用直线每隔一点连结正六边形的顶点，可以在原正六边形内得到一个新的正六边形．在这个正六边形里，再每隔一点连结它的顶点，又可以得到一个新的正六边形．这样不断地做下去，若把所得的正六边形的面积一个不漏地加起来，那么总面积等于原正六边形面积的一半．试加以证明．

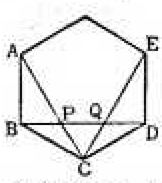
解　设 A、B、C、D、E 是正六边形邻接的五个顶点，连结 AC、BD、CE，得 AC 和 BD 的交点 P，及 BD 和 CE 的交点 Q，PQ 就是第二个正六边形的一边．$\angle DBC$ 是正六边形外接圆中 DC 边所对的圆心角的一半，即 $\frac{\pi}{6}$．同理 $\angle ACB$ 也是 $\frac{\pi}{6}$．这时

$$\frac{PC}{BC}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{6}\right)}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{2\pi}{6}}$$
$$=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}}.$$

$$PC=\frac{BC}{2\cos\frac{\pi}{6}},$$

$$PQ=2PC\sin\frac{1}{2}\angle PCQ=2PC\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=BC\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}.$$

$$PQ=\frac{BC}{\sqrt{3}}.$$



又因为相似多边形的面积之比等于它们的相似比的平方，设第一个正六边形的面积是 S，则第二个正六边形的面积是 $\frac{S}{3}$．同样，第三个正六边形的面积等于 $\frac{S}{3}\times\frac{1}{3}$，即 $\frac{S}{9}$．依次类推．因此各个新得到的正六边形的面积的总和是 $\frac{S}{3}+\frac{S}{9}+\frac{S}{27}+\cdots$，即是 $\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{1-\frac{1}{3}}$，因此总面积等于 $\frac{S}{2}$．

2. 四边形、多边形

3014. 圆的半径是 0.75，计算它的内接正十九边形的周长．

解　设圆的半径是 R，它的内接正十九边形的一边是 a，则 $\frac{a}{2}=R\sin\frac{\pi}{19}$．因此

$$19a=38R\sin\frac{\pi}{19}.$$

在半径为 0.75 的圆中

$$19a=38\times0.75\sin 9°28'25''\cdots$$
$$=28.5\sin 9°28'25''\cdots.$$

从而

$$\lg 19a=\lg 28.5+\lg\sin 9°28'25''\cdots$$
$$=1.45484+(9.21641-10)$$
$$=0.67125,$$
$$19a=4.691.$$

3015. 已知圆的内接四边形 $ABCD$ 的四条边是 a、b、c、d，求它的两条对角线 δ 和 δ' 的夹角．

解

$$a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2+2bc\cos A,$$

因此　$$\cos A=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(bc+ad)}.$$

同样可以求出 $\cos B$．从而可以求出两对角线 δ 和 δ'．因此，面积

$$S=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin A=\frac{1}{2}\delta\delta'\sin\alpha,$$

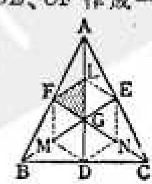
其中 α 是对角线的夹角．因此

$$\alpha=\arcsin\frac{(ad+bc)\sin A}{\delta\delta'}.$$

3016. 设三角形 ABC 的三条中线是 AD、BE、CF．

(1) 证明能用线段 AD、BE、CF 作成一个三角形．

(2) 求用三条中线作成的三角形和 $\triangle ABC$ 的面积之比．



解　(1) 三条中线 AD、BE、CF 相交于 $\triangle ABC$

的重心，设重心为 G，并设 AG 的中点是 L，则

$$\left.\begin{aligned}AD&=3LG,\\CF&=3GF.\end{aligned}\right\}\qquad ①$$

在 $\triangle ABG$ 中，F、L 分别是边 AB、AG 的中点，所以

$$BG=2FL,\quad \therefore\quad BE=3FL.\qquad ②$$

①、② 说明三条中线 AD、CF、BE 能作成一个三角形，这个三角形的各条边是 $\triangle LGF$ 各对应边的 3 倍，并与 $\triangle LGF$ 相似。

(2) 设 $\triangle ABC$ 的面积与由三条中线作成的三角形的面积分别是 S、S'，$\triangle LGF$ 的面积是 S''。再设 BG、CG 的中点分别是 M、N，连结 L、F，M、D，N、E，容易看出

$$S=12S''.\qquad ③$$

由 ① 得 $\quad S':S''=3^2:1^2=9:1,$

$$\therefore\quad S'=9S''.\qquad ④$$

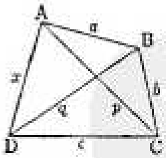
于是，由 ③、④ 得

$$S':S=9S'':12S''=3:4.$$

3017. 已知四边形 $ABCD$ 的三边 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$ 和两对角线

$$AC=p,\quad BD=q,$$

说明求 AD 的方法。



解 设 $AD=x$。在 $\triangle BCD$ 中

$$\cos\angle BCD=\frac{BC^2+CD^2-BD^2}{2BC\cdot CD}=\frac{b^2+c^2-q^2}{2bc},$$

由此可以算出 $\angle BCD$。在 $\triangle ABC$ 中

$$\cos\angle ACB=\frac{BC^2+CA^2-AB^2}{2BC\cdot CA}=\frac{b^2+p^2-a^2}{2bp},$$

由此可以算出 $\angle ACB$。由

$$\angle ACD=\angle BCD-\angle ACB,$$

又可以算出 $\angle ACD$。于是

$$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD,$$

即 $\quad x^2=p^2+c^2-2pc\cos\angle ACD,$

由上式就可求出 x。

别解 因为已知三角形 ABC 的三边，所以

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle ACB=\sqrt{\frac{(a-b+p)(b-p+a)}{(a+b+p)(b+p-a)}},$$

由此可求得 $\angle ACB$。又因为三角形 BCD 的三边也是已知的，所以

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle BCD=\sqrt{\frac{(b-c+q)(c+q-b)}{(b+c+q)(c-q+b)}},$$

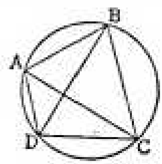
又可求得 $\angle BCD$。于是可以求出 $\angle ACD$，并由

$$x^2=p^2+c^2-2pc\cos\angle ACD$$

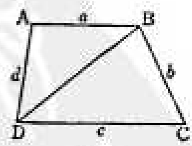
求出 x。

3018. 若四边形的一组对角都是直角，且另外还有一个角和夹这个角的两条边是已知的，解这个四边形。

解 设四边形是 $ABCD$，其中 $\angle B$ 和 $\angle D$ 是直角，并且 $\angle A$ 和 AB、AD 是已知的。在 $\triangle ABD$ 中，因为两边和夹角是已知的，所以这个三角形的其他元素可以求出。在求得 BD 和 $\angle ABD$、$\angle ADB$ 后，在 $\triangle BCD$ 中，两个角 DBC、BDC 和一条边 BD 就是已知的了。因此又可以求出 BC、CD 和角 C（$\angle C$ 也可以从它是 $\angle A$ 的补角而立即求出来）。



3019. 已知梯形的四条边 a、b、c、d，求它的各个角。



解 如图，设梯形是 $ABCD$，从 $\triangle ABD$ 得

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AD\cdot AB\cos\angle BAD,$$

又，从 $\triangle BCD$ 得

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD.$$

设 $\angle ADC=\theta$，$\angle BCD=\varphi$，则

$$\angle DAB=\pi-\theta,\quad \angle CBA=\pi-\varphi,$$

$$a^2+d^2+2ad\cos\theta=b^2+c^2-2bc\cos\varphi.$$

同理，考虑对角线 AC 的长，得

$$d^2+c^2-2dc\cos\theta=b^2+a^2+2ab\cos\varphi.$$

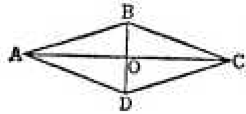
从这两个式子求 $\cos\theta$ 和 $\cos\varphi$，得

$$\cos\varphi=\frac{(c-a)^2+b^2-d^2}{2b(c-a)},$$

$$\cos\theta=\frac{(a-c)^2+d^2-b^2}{2d(c-a)}.$$

从而可以求出梯形所有的四个角。

3020. 若菱形的一个角是 $37°24'36''$，两对角线的和是 465，求菱形的边长。



解 设菱形是 $ABCD$，且

$$\angle BAD=37°24'36''.$$

于是 $$BO=BA\sin\angle BAO,$$
$$AO=BA\cos\angle BAO.$$

设菱形的一边是 a，则

$$BO=a\sin 18°42'18'',$$
$$AO=a\cos 18°42'18''.$$

因此

$$a\sin 18°42'18''+a\cos 18°42'18''=\frac{465}{2}.$$

从而

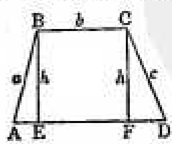
$$2a\sin 45°\cos 26°17'42''=232.5.$$

下面可以利用对数计算，即

$$\begin{aligned}\lg a&=\lg 116.25-\lg\sin 45°\\&\quad-\lg\cos 26°17'42''\\&=2.06540-(9.84949-10)\\&\quad-(9.95256-10)\\&=2.26335.\end{aligned}$$

因此 $$a=183.379\cdots.$$

3021. 梯形的高是 h，上底是 b，两腰是 a 和 c，求它的各个角和面积。若 $a=42$，$b=68$，$c=75$，$h=15$，那么角和面积的值是多少？



解 设梯形是 $ABCD$，从 B 和 C 向下底作垂线，得垂足 E 和 F。于是，从 $\triangle ABE$ 得

$$\sin A=\frac{BE}{AB}=\frac{h}{a}.$$

由此可以求出 $\angle A$。由

$$AE=AB\cos\angle BAE$$

求出 AE。同样，从 $\triangle CDF$ 可以求出 $\angle D$ 和 DF。于是由

$$\angle ABC=180°-A,\quad \angle DCB=180°-D,$$

可以求出 $\angle B$ 和 $\angle C$。又，可以从

$$\frac{1}{2}(BC+AD)h$$

求得面积。若 $a=42$，$b=68$，$c=75$，$h=15$，则 $\sin A=\dfrac{15}{42}=\dfrac{5}{14}$，由对数表或三角函数表求得

$$A=20°55'29''.$$

又 $$\sin D=\frac{h}{c}=\frac{15}{75}=\frac{1}{5},$$

由对数表或三角函数表求得

$$D=11°32'13''.$$

因而

$$\begin{aligned}B&=180°-A=180°-20°55'29''\\&=159°4'31'',\\C&=180°-D=180°-11°32'13''\\&=168°27'47''.\end{aligned}$$

又，由

$$AE=AB\cos A=42\cos 20°55'29'',$$

得 $$AE=39.217,$$

由 $$DF=DC\cos D=75\cos 11°32'13'',$$

得 $$DF=73.485.$$

因此

$$\begin{aligned}AD&=AE+EF+FD\\&=39.217+68+73.485\\&=180.702.\end{aligned}$$

面积是

$$\frac{1}{2}(68+180.702)\times 15=1865.27.$$

3022. 设对角互补的四边形的四条边顺次是 a、b、c、d，它们的值是 3、3、4、4，求这个四边形面积与内切圆和外接圆的半径。

解 设四边形的周长是 $2s$，则 $s=7$，$s-a=4$，$s-b=4$，$s-c=3$，$s-d=3$，因此

$$面积=\sqrt{4\times4\times3\times3}=12.$$

因为一组对边的和等于另外一组对边的和，所以四边形有内切圆。设内切圆的半径是 ρ，则

$$\frac{\rho}{2}(a+b+c+d)=四边形的面积,$$

即 $$\rho s=四边形的面积.$$

因此，内切圆的半径

$$\rho=\frac{12}{7}.$$

又 $$ab+cd=25,\quad ac+bd=24,$$
$$ad+bc=24,$$

因此外接圆的半径是

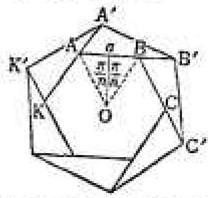
$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{25\times24\times24}{3\times3\times4\times4}}=\frac{5\times24}{4\times12}=\frac{5}{2}.$$

3023. 设 $ABC\cdots K$ 是边长为 a 的正 n 边形，从它的各个顶点按顺时针方向沿各边作长为 x 的线段 AB'、BC'、…、KA'，顺次连结 B'、C'、…、A' 等点。

(1) 证明所得的多边形 $A'B'C'\cdots K'$ 是正 n 边形。

(2) 求使正多边形 $A'B'C'\cdots K'$ 和所给的正方形 m^2 等积的 x 的值，并进行讨论。

(3) 求使它的面积达到极小的 x 的值。



解 (1) 因为 $AA'B'$、$BB'C'$、…等是两边和夹角分别相等的全等三角形，所以多边形 $A'B'C'\cdots K'$ 是等边等角的。因此它是正多边形。

(2) 正多边形 $A'B'C'\cdots K'$ 的面积

$$=n(\triangle AOB+\triangle AA'B')$$
$$=m^2. \qquad ①$$

由于 $$\angle A'AB'=\frac{2\pi}{n},$$

$$\triangle AOB=\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},$$

$$\triangle AA'B'=\frac{1}{2}x(x-a)\sin\frac{2\pi}{n},$$

因此①式变成

$$\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}+\frac{1}{2}x(x-a)\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{m^2}{n},$$

即

$$x^2-ax+\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}-\frac{2m^2}{n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}=0.$$

解这个方程，得

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{2m^2}{n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}-\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}}.$$

x 的这两个值对应于两个多边形，这两个多边形的顶点是关于边 KA、AB、…的中点互相对称的 A' 和 A''、B' 和 B''、…。为使 x 的这两个值都是实数，必须有

$$m^2\geq\frac{a^2n}{8}\sin\frac{2\pi}{n}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}.$$

(3) 根据上述条件，m^2 的极小值是

$$\frac{a^2n}{8}\sin\frac{2\pi}{n}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n},$$

这时 $x=\frac{a}{2}$。所以，极小的正多边形是以正多边形 $ABC\cdots K$ 各边的中点为顶点的。

3024. 在四边形 $ABCD$ 中，若

$$\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=0,$$

那么这个四边形是怎样的四边形？

解 $$\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$+2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$$

因为 $A+B+C+D=2\pi$，所以

$$\cos\frac{A+B}{2}=\cos\left(\pi-\frac{C+D}{2}\right)$$
$$=-\cos\frac{C+D}{2}.$$

因此

$$\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C-D}{2}\right)$$
$$=0.$$

从而 $$\cos\frac{A+B}{2}=0$$

或 $$\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C-D}{2}.$$

(i) 如果

$$\cos\frac{A+B}{2}=0,$$

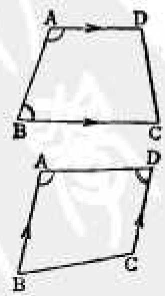
因为

$$0<\frac{A+B}{2}<\pi,$$

所以

$$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

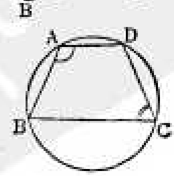
$$\therefore\quad A+B=C+D=\pi.$$



①

(ii) 如果

$$\cos\frac{A-B}{2}$$
$$=\cos\frac{C-D}{2},$$



因为 $-\frac{\pi}{2}<\frac{A-B}{2}$，$\frac{C-D}{2}<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{A-B}{2}=\frac{C-D}{2}$

或 $\frac{A-B}{2}=-\frac{C-D}{2}$.

$\therefore\quad A+D=B+C=\pi,$ ②

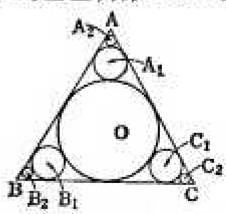
或 $A+C=B+D=\pi.$ ③

在 ① 的场合　$AD\parallel BC$,

在 ② 的场合　$AB\parallel CD$,

因此都是梯形. 在 ③ 的场合, 是圆的内接四边形. 从而四边形 $ABCD$ 或内接于圆, 或是梯形.

3025. 设边长为 a 的正三角形 ABC 的内切圆是圆 O. 如图所示, 作和两边 AB、AC 相切的圆 O 的外切圆 A_1, 再作和 AB、AC 相切的圆 A_1 的外切圆 A_2, 用同样的方法作圆 A_3、A_4、…、A_n、…, 并在 $\angle B$、$\angle C$ 内也同样地作圆 B_1、B_2、…、B_n、… 和圆 C_1、C_2、…、C_n、…. 请回答下列问题.



(1) 若圆 O 的半径是 r_0, 圆 A_n (或圆 B_n、C_n) 的半径是 $r_n(n=1, 2, \cdots)$, 试用 a 和 n 表示 r_0 和 r_n.

(2) 若圆 A_n、B_n、C_n 绕边 BC 旋转一周, 试用 a 和 n 表示所得的三个立体的体积之和. 再求出把圆 O 绕边 BC 旋转一周所得的立体的体积 V_0.

解　(1) 因为点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 所以

$$r_0=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

设和 BC 平行、和圆 O 外切的直线, 和 AB、AC 的交点是 B'、C', 则

$$\triangle AB'C'\backsim\triangle ABC,$$

它们的相似比是 1:3.

$$\therefore\quad r_1=\frac{1}{3}r_0,$$

$$r_n=\frac{1}{3}r_{n-1}\quad(n=1, 2, 3, \cdots),$$

$$r_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot r_0=\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

(2) 将圆 A_n 绕边 BC 旋转一周所得的立体的体积是

$$2\pi^2r_n^2[r_n+2(r_{n-1}+r_{n-2}+\cdots+r_1+r_0)].$$

将圆 B_n、C_n 绕边 BC 旋转一周所得的立体的体积共是 $4\pi^2r_n^3$, 因此

$$V_n=2\pi^2r_n^2[3r_n+2(r_{n-1}+r_{n-2}+\cdots+r_0)]$$

$$=4\pi^2\frac{a^2}{3^{2n+1}\times4}\cdot\frac{r_0\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}{1-\frac{1}{3}}$$

$$+2\pi^2\left(\frac{\sqrt{3}a}{2\cdot3^{n+1}}\right)^3$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2a^3\left(\frac{1}{3^{2n+1}}\right).$$

又　$V_0=2\pi^2r_0^3=\frac{\sqrt{3}}{36}\pi^2a^3.$

3026. 若三角形 ABC 的两条边的比是 9:7, 夹角是 $47°25'$, 求其他的角. 其中,

$\lg 2=0.3010300,$

$\lg\operatorname{tg}66°17'30''=0.3573942,$

$\lg\operatorname{tg}15°53'=\bar{1}.4541479,$

1′ 的差是 0.0004797.

解　$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\frac{9-7}{9+7}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$

$$=\frac{1}{8}\operatorname{ctg}23°42'30''.$$

因此

$$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\lg\operatorname{ctg}23°42'30''-\lg 8$$

$$=\lg\operatorname{tg}66°17'30''-3\lg 2$$

$$=\bar{1}.4543042.$$

$$\begin{array}{r}\bar{1}.4543042\\ \bar{1}.4541479\\ \hline 0.0001563\end{array}$$

$$0.0004797:0.0001563=60'':x,$$

由此得　$x=20''.$

因此　$\frac{1}{2}(B-C)=15°53'20''.$

又　$\frac{1}{2}(B+C)=66°17'30'',$

因此　$B=82°10'50'',$

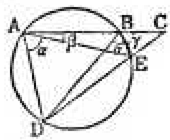
$C=50°24'10''.$

3027. 两直线 ABC 和 DEC 在 C 点相交, 且 $\angle DAE=\angle DBE=\alpha$, $\angle EAB=\beta$, $\angle EBC=\gamma$, 证明

$$BC=\frac{AB\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

解 因为 $\angle DAE=\angle DBE$，所以 A、B、E、D 在同一个圆上．因此

$$\angle ADE=\gamma,$$



从而

$$C=180^\circ-(\alpha+\beta+\gamma).$$

又因为

$$\angle AEB=\gamma-\beta,\quad \angle BEC=\alpha+\beta,$$

从 $\triangle EBC$ 得

$$BC=\frac{BE\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)},$$

从 $\triangle ABE$ 得

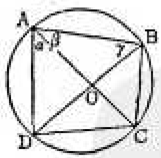
$$BE=\frac{AB\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)}.$$

因此

$$BC=\frac{AB\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

3028. 在圆的内接四边形 $ABCD$ 中，设 $\angle CAD=\alpha$，$\angle BAC=\beta$，$\angle ABD=\gamma$，证明

$$CD=\frac{AB\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

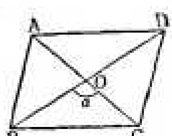


解 设 AC、BD 的交点是 O，因为 $\triangle AOB$ 和 $\triangle DOC$ 相似，所以

$$\frac{CD}{AB}=\frac{OD}{OA}=\frac{\sin\alpha}{\sin\angle ADB}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\pi-\angle ADB)}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

因此 $$CD=\frac{AB\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

3029. 已知平行四边形两对角线的长和它们的夹角，写出求各边的公式．



解 设平行四边形 $ABCD$ 的各边顺次是 a、b、c、d，已知两对角线是 m、n，它们的夹角是 α．再设对角线的交点是 O，在 $\triangle OAB$ 中，因为

$$OA=\frac{m}{2},\quad OB=\frac{n}{2},$$

$$\angle AOB=180^\circ-\alpha,$$

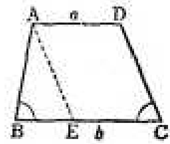
所以

$$a^2=\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{4}-2\times\frac{mn}{4}\cos(180^\circ-\alpha)$$
$$=\frac{1}{4}(m^2+n^2+2mn\cos\alpha).$$

同理 $$b^2=\frac{1}{4}(m^2+n^2-2mn\cos\alpha).$$

从这两个式子可以求出 a、b．又因为 $a=c$，$b=d$，所以 c、d 也就知道了．

3030. 已知梯形上底和下底的长以及两个底角，写出求其他的边和角的公式．



解 在梯形 $ABCD$ 中，设 $AD=a$，$BC=b$，角 B 和 C 是已知的．

$$A=180^\circ-B,$$
$$D=180^\circ-C.$$

作 AE 平行 DC，在 $\triangle ABE$ 中，$\angle E=\angle C$，$BE=b-a$．因此

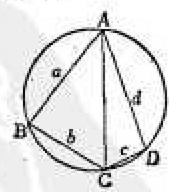
$$AB=\frac{BE\sin C}{\sin(B+C)}=\frac{(b-a)\sin C}{\sin(B+C)},$$

$$CD=AE=\frac{(b-a)\sin B}{\sin(B+C)}.$$

3031. 在圆的内接四边形 $ABCD$ 中，若

$$AB=a,\quad BC=b,$$
$$CD=c,\quad DA=d,$$

求 $\cos B$．



解 从 $\triangle ABC$ 得

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B.$$

又，从 $\triangle ADC$ 得

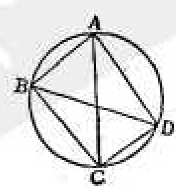
$$AC^2=c^2+d^2-2cd\cos D$$
$$=c^2+d^2+2cd\cos B.$$

因此

$$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B,$$

$$\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

3032. 在圆的内接四边形 $ABCD$ 中，证明 $\dfrac{AC}{\sin\angle B}=\dfrac{BD}{\sin\angle A}$．



解 因为

$$\angle ACB=\angle ADB,$$

从 $\triangle ABC$ 得

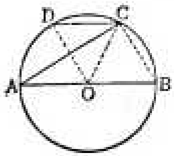
$$\frac{AC}{\sin\angle B}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}.$$

又，从 $\triangle ABD$ 得

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle A},$$

因此
$$\frac{AC}{\sin\angle B}=\frac{BD}{\sin\angle A}.$$

3033. 从直径 AB 的一端 A 引弦 AC，从点 C 再引平行于直径 AB 的弦 CD，求使 $AC=2CD$ 的角 BAC，精确到秒。



解　将点 C、D 和圆心 O 连结起来，设圆的半径是 R，

$$\angle BAC=\alpha,$$

则
$$\angle OCD=2\alpha,$$

因此
$$CD=2R\cos 2\alpha,$$
$$AC=2R\cos\alpha.$$

因此
$$2R\cos 2\alpha=R\cos\alpha,$$
$$4\cos^2\alpha-\cos\alpha-2=0,$$

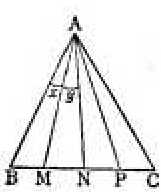
即
$$\cos\alpha=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}.$$

又因为 α 是锐角，所以 $\cos\alpha$ 是正值．为使计算简便起见，设 $\sqrt{33}=\operatorname{tg}\varphi$，于是

$$\cos\alpha=\frac{1}{8}(\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\varphi)$$
$$=\frac{\sin(45^\circ+\varphi)}{\sqrt{32}\cos\varphi},$$

由表查得　　$\alpha=32^\circ32'3''$.

3034. 将正三角形 ABC 的底边 BC 四等分，连结各分点和顶点，求顶角 A 被分成的四个部分及分线和底边的比。



解　若将边 BC 四等分的点是 M、N、P，容易看出，AN 是 BC 的垂线．设

$$\angle BAM=x,\quad \angle MAN=y,$$

求 x、y．因为

$$\operatorname{tg}y=\frac{MN}{AN}=\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}(30^\circ-y)=\frac{\operatorname{tg}30^\circ-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}30^\circ\operatorname{tg}y}$$
$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2\sqrt{3}}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{\frac{7}{6}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{7},$$

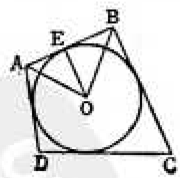
查表得

$$x=13^\circ53'52.40'',\quad y=16^\circ6'7.60''.$$

下面

$$\frac{AM}{BC}=\frac{AM}{4BM}=\frac{\sin 60^\circ}{4\sin x}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}{\operatorname{tg}x}=\frac{\sqrt{13}}{4}$$
$$=0.901,$$
$$\frac{AN}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866.$$

3035. 已知圆的外切四边形 $ABCD$ 的周长和角，解这个四边形。



解　$AE=OE\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$，

设四边形的周长是 $2s$，则

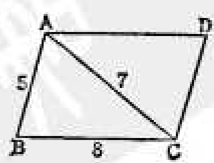
$$2s=2R\left(\Sigma\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right).$$

由此得
$$R=\frac{s}{\Sigma\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}.$$

这样就可以求出内切圆的半径．于是四边形的各边就可从 $R\left(\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}\right)$ 等式子求得。

3036. (1) 求两邻边是 5 cm、8 cm，一条对角线是 7 cm 的平行四边形的面积。

(2) 求 $BC=15$ cm，$\angle BAC=75^\circ$，$\angle CAD=45^\circ$ 的平行四边形 $ABCD$ 的面积。



解　(1)

$AB=5$ cm,

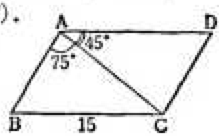
$BC=8$ cm,

$AC=7$ cm,

则
$$p=\frac{1}{2}(5+8+7)=10,$$

由海伦公式得

$$S=2\triangle ABC\text{ 面积}$$
$$=2\sqrt{10(10-5)(10-8)(10-7)}$$
$$=20\sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$



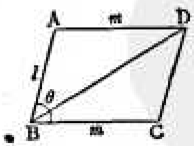
$BD=7$ cm 时也同样.

(2) 在三角形 ABC 中

$$\angle ACB=45°,\quad \angle ABC=60°,$$
$$\frac{AB}{\sin 45°}=\frac{15}{\sin 75°}.$$
$$\therefore\quad AB=\frac{\sin 45°}{\sin 75°}\times 15=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}\times 15$$
$$=\frac{30}{\sqrt{3}+1}=15(\sqrt{3}-1).$$
$$\therefore\quad S=2\times\frac{1}{2}BA\cdot BC\sin 60°$$
$$=15(\sqrt{3}-1)\times 15\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{225}{2}(3-\sqrt{3})\ (\text{cm}^2).$$

3037. 在平行四边形 $ABCD$ 中，若

$$AB=l,$$
$$BC=m,$$
$$\angle ABC=\theta,$$



证明 $BD=\sqrt{l^2+m^2+2lm\cos\theta}$.

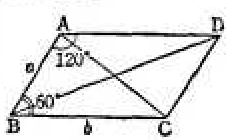
解 在三角形 ABD 中

$$A=180°-\theta,$$

由余弦定理得

$$BD=\sqrt{l^2+m^2-2lm\cos(180°-\theta)}$$
$$=\sqrt{l^2+m^2+2lm\cos\theta}.$$

3038. 求边长是 a、b，它们的夹角是 60° 的平行四边形的两条对角线的长.



解 在平行四边形 $ABCD$ 中，AC、BD 是对角线，由余弦定理得

$$AC=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 60°}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2-ab},$$
$$BD=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 120°}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+ab}.$$

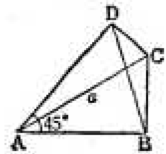
即两对角线的长是

$$\sqrt{a^2+b^2\pm ab}.$$

3039. 在凸四边形 $ABCD$ 中，若

$$\angle A=45°,$$
$$\angle B=\angle D=90°,$$
$$AC=a\ \text{cm},$$

求 BD 的长.



解 已知

$$\angle B=\angle D=90°,$$

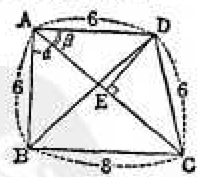
所以四边形 $ABCD$ 内接于以 AC 为直径的圆. 因此，在 $\triangle ABD$ 中，用正弦定理得

$$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=AC,$$
$$\therefore\quad BD=AC\sin\angle BAD$$
$$=a\sin 45°=\frac{a}{\sqrt{2}}\ (\text{cm}).$$

3040. 在凸四边形 $ABCD$ 中，若

$$\angle B=90°,$$
$$BC=8,$$
$$CD=DA=AB=6,$$

求 BD 的长.



解 设

$$\angle CAB=\alpha,\quad \angle DAC=\beta,$$

在三角形 ABD 中，由余弦定理得

$$BD^2=6^2+6^2-2\times 6\times 6\cos(\alpha+\beta).$$

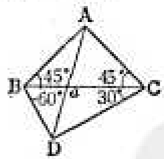
从 D 向对角线 AC 作垂线，设垂足是 E，则

$$AC=\sqrt{6^2+8^2}=10,$$
$$AE=\frac{1}{2}AC=5,$$
$$DE=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}.$$
$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},$$
$$\cos\alpha=\frac{AB}{AC}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},$$
$$\sin\beta=\frac{DE}{AD}=\frac{\sqrt{11}}{6},$$
$$\cos\beta=\frac{AE}{AD}=\frac{5}{6}.$$

因此

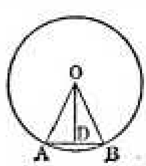
$$BD^2=72-72(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=72-72\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}-\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}\right)$$
$$=72\left(1-\frac{15-4\sqrt{11}}{30}\right)$$
$$=\frac{36}{15}(15+4\sqrt{11}),$$
$$\therefore\quad BD=\frac{6}{\sqrt{15}}\sqrt{15+2\sqrt{44}}$$
$$=\frac{2\sqrt{15}}{5}(\sqrt{11}+2)$$
$$=2\sqrt{\frac{33}{5}}+4\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

3041. 在三角形 ABC 中，
$$\angle ABC=\angle ACB=45^\circ,$$
$$BC=a,$$
在 BC 和 A 相反的一侧取一点 D，使
$$\angle CBD=60^\circ,\quad \angle BCD=30^\circ,$$
求 $\angle ADB$ 和 AD。



解　由条件得
$\angle BAC=\angle BDC=90^\circ$，所以 A、B、C、D 四点在以 BC 为直径的同一圆上。因此
$$\angle ADB=\angle ACB=45^\circ.$$
又因为 $\triangle ABD$ 的外接圆的直径是 BC，所以在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得
$$\frac{AD}{\sin\angle ABD}=BC,$$
$$\therefore\quad AD=BC\sin\angle ABD$$
$$=a\sin(45^\circ+60^\circ).$$
由加法定理得
$$AD=a(\sin 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\sin 60^\circ)$$
$$=a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}a.$$

3042. 求圆的面积和它的内接正十六边形的面积的比，并求出精确到小数第二位的比值。



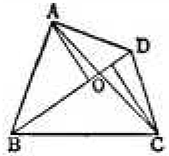
解　设圆 O 的内接正十六边形的一边是 AB，它的弦心距是 OD，圆的半径是 r，则
$$\angle AOD=\frac{360^\circ}{16\times 2}=\frac{45^\circ}{4},$$
因此
$$OD=OA\cos\angle AOD=r\cos\frac{45^\circ}{4},$$
$$AD=r\sin\frac{45^\circ}{4}.$$
因此，正十六边形的面积是
$$16OD\cdot AD=16r^2\cos\frac{45^\circ}{4}\sin\frac{45^\circ}{4}$$
$$=8r^2\sin\frac{45^\circ}{2}.$$
圆面积和内接正十六边形的面积的比是
$$\frac{\pi r^2}{8r^2\sin\frac{45^\circ}{2}}=\frac{\pi}{8\sin\frac{45^\circ}{2}}=\frac{\pi}{\frac{8\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\pi\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\pi\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{8}$$
$$\approx 0.3266\pi\approx 1.03.$$

3043. 求周长相同的正三角形、正方形和正六边形的面积的连比。

解　设相同的周长是 m，则正三角形、正方形、正六边形的一边分别是 $\frac{m}{3}$、$\frac{m}{4}$、$\frac{m}{6}$。因此它们的面积分别是
$$\frac{3}{4}\left(\frac{m}{3}\right)^2\operatorname{ctg}60^\circ=\frac{3}{4}\times\frac{m^2}{9}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{m^2}{12\sqrt{3}},$$
$$\frac{4}{4}\left(\frac{m}{4}\right)^2\operatorname{ctg}45^\circ=\frac{m^2}{16},$$
$$\frac{6}{4}\left(\frac{m}{6}\right)^2\operatorname{ctg}30^\circ=\frac{6}{4}\times\frac{m^2}{36}\times\sqrt{3}$$
$$=\frac{m^2\sqrt{3}}{24}.$$
所要求的比是
$$\frac{m^2}{12\sqrt{3}}:\frac{m^2}{16}:\frac{m^2\sqrt{3}}{24}=4:3\sqrt{3}:6.$$

3044. 设四边形的对角线是 h、k，它们的夹角是 θ，从各顶点向对角线所作的垂直线段是 a、b、c、d，证明
$$\sin\theta=\sqrt{\frac{(a+c)(b+d)}{hk}}.$$

解 设从四边形 $ABCD$ 的各顶点 A、B、C、D 向对角线所作垂直线段的长度分别是 a、b、c、d，对角线 AC、BD 的长度分别是 h、k，交点是 O，$\angle AOB=\theta$。于是



$$OA=a\csc\theta,\quad OC=c\csc\theta.$$

因此 $$OA+OC=(a+c)\csc\theta,$$

即 $$h=(a+c)\csc\theta. \qquad ①$$

又 $$OB=b\csc\theta,\quad OD=d\csc\theta,$$

$$OB+OD=(b+d)\csc\theta,$$

即 $$k=(b+d)\csc\theta. \qquad ②$$

从①、②得

$$hk=(a+c)(b+d)\csc^2\theta.$$

因此 $$\sin^2\theta=\frac{(a+c)(b+d)}{hk},$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{(a+c)(b+d)}{hk}}.$$

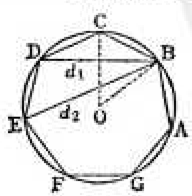
3045. 作正七边形 $ABCDEFG$ 所有的对角线，设它们的长分别是 d_1、d_2、…、d_{14}，证明

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_{14}}$$

$$=\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}+\frac{1}{CD}+\frac{1}{DE}$$

$$+\frac{1}{EF}+\frac{1}{FG}+\frac{1}{GA}.$$

解 设正七边形$ABCDEFG$的外接圆的圆心是 O，半径是1，则



$$d_1=2\sin\frac{2\pi}{7},$$

$$d_2=2\sin\frac{3\pi}{7}.$$

又

$$AB=2\sin\frac{\pi}{7}.$$

设 $\frac{\pi}{7}=\theta$，则 $7\theta=\pi$。因此

$$\sin 3\theta=\sin 4\theta.$$

于是

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_{14}}=7\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)$$

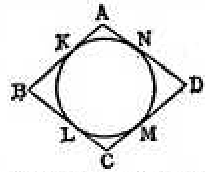
$$=7\times\frac{\sin 3\theta+\sin 2\theta}{2\sin 2\theta\sin 3\theta}$$

$$=\frac{7(\sin 4\theta+\sin 2\theta)}{2\sin 2\theta\sin 3\theta}$$

$$=\frac{14\sin 3\theta\cos\theta}{4\sin\theta\cos\theta\sin 3\theta}=\frac{7}{2\sin\theta}$$

$$=\frac{7}{AB}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}+\cdots+\frac{1}{GA}.$$

3046. 将边长是 a 的菱形在保证边长不变的条件下变形，请回答下列问题.



(1) 若菱形的内切圆的半径是 r，求 r 能够取值的范围.

(2) 若菱形中除去内切圆外，其他部分的面积是 S，求 S 的最大值.

解 (1) 设 $\angle ABD=\theta$，则

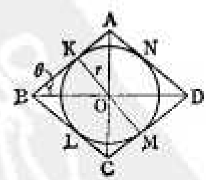
$$r=a\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}a\sin 2\theta,$$

$$\therefore\quad 0\leqq r\leqq\frac{1}{2}a.$$

(2) 因为所要求的面积是

$$2ra-\pi r^2=a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\sin 2\theta\right)\sin 2\theta,$$

当 $$\frac{\pi}{4}\sin 2\theta=\frac{1}{2},$$



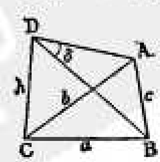
即 $$\sin 2\theta=\frac{2}{\pi}$$

时，这个函数取得最大值. 面积 S 的最大值是

$$a^2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{\pi}=\frac{a^2}{\pi}.$$

注 注意 $0\leqq\sin 2\theta\leqq 1$. $x(1-\alpha x)$ 取得最大值是在 $\alpha x=\frac{1}{2}$ 的时候.

3047. 在水平面上的三角形 ABC 中，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$. 在 C 点有一座塔，设塔的高 $CD=h$，若



$$\angle ADB=\delta,$$

求 h.

解 在 $\triangle ADB$ 中

$$AB^2=AD^2+DB^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB.$$

又 $$AD^2=AC^2+CD^2=b^2+h^2,$$

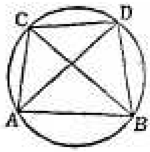
$$DB^2=BC^2+CD^2=a^2+h^2,$$

所以

$$c^2=a^2+b^2+2h^2-2\sqrt{(a^2+h^2)(b^2+h^2)}\cos\delta.$$

由此就可求得 h.

3048. 已知在同一水平面上的两点 C、D, 对 A、B 两点间的距离所张的角相等, 证明 $AB\sin\angle CBD=CD\sin\angle ADB$.



解 因为 AB 在 C、D 的张角相等, 所以 A、B、C、D 四点共圆. 在 $\triangle BDC$ 中

$$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}.$$

在 $\triangle ABD$ 中

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle DAB}.$$

又　　$\angle BCD=\angle DAB$,

所以　　$$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB},$$

即　　$AB\sin\angle CBD=CD\sin\angle ADB$.

3049. 若平行四边形两边的长是 8 cm 和 12 cm, 它们的夹角是 60°, 求对角线的长.

解 短的对角线的长是

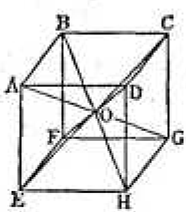
$$\sqrt{8^2+12^2-2\times8\times12\cos60^\circ}=4\sqrt{7}\,(\text{cm}).$$

长的对角线的长是

$$\sqrt{8^2+12^2+2\times8\times12\cos60^\circ}=4\sqrt{19}\,(\text{cm}).$$

3. 立体图形

3050. 计算立方体两条对角线所构成的角.



解 设立方体是 $ABCD$-$EFGH$, 对角线的交点是 O, 则对角线所构成的角有两组, 一组和 $\angle AOD$ 相等, 一组和 $\angle AOC$ 相等.

设这个立方体的边长是 a, 则对角线的长是 $\sqrt{3}\,a$, 所以 $\triangle AOD$ 的三边是

$$AO=DO=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\quad AD=a.$$

设 $\angle AOD=\theta$, 那么,

$$\cos\theta=\frac{OA^2+OD^2-AD^2}{2\times OA\times OD}=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2-a^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1}{3}.$$

$$\theta=\arccos\frac{1}{3}.$$

另外, $\triangle AOC$ 的三边是

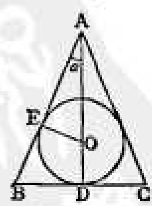
$$AO=CO=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\quad AC=\sqrt{2}\,a,$$

设 $\angle AOC=\varphi$, 那么,

$$\cos\varphi=\frac{AO^2+CO^2-AC^2}{2\times AO\times CO}=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2-2a^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}=-\frac{1}{3}.$$

因此　　$$\varphi=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

3051. 若直圆锥的顶角是 2α, 它的内切球的半径是 R, 求这个直圆锥的体积.



解 直圆锥 ABC 的体积是

$$V=\frac{1}{3}\pi BD^2\cdot AD.$$

又　　$$\frac{R}{AO}=\sin\alpha,$$

$$AO=\frac{R}{\sin\alpha},$$

所以

$$BD=AD\operatorname{tg}\alpha=R\left(\frac{1}{\sin\alpha}+1\right)\operatorname{tg}\alpha=R\cdot\frac{(1+\sin\alpha)\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{R(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha},$$

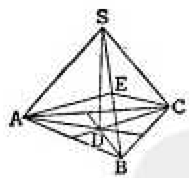
$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R^2(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$$
$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R^3(1+\sin\alpha)^3}{\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}.$$

3052. 计算正四面体的侧棱与底面的倾斜角和它的二面角.

解 设 $S\text{-}ABC$ 是正四面体，它的棱长是 $2a$，从顶点 S 向底面 ABC 作垂线所得的垂足是 D. 因为 D 是各边为 $2a$ 的正三角形的重心，所以 $AD=\frac{2}{3}\sqrt{3}\,a$. 因此棱 AS 与底面所成的角的余弦是

$$\frac{AD}{SA}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}a}{2a}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

如果考虑其他棱，也得到同样的结果. 所以任意一条侧棱与底面所成的角的大小，等于余弦为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的角.



设一条棱 SB 的中点是 E，则

$$AE=CE=\sqrt{3}\,a,$$

并且

$$AE\perp SB,\quad CE\perp SB.$$

因此两面角等于两腰是 $\sqrt{3}\,a$，底边是 $2a$ 的等腰三角形的顶角. 设这个角是 θ，则

$$4a^2=3a^2+3a^2-2\times3a^2\cos\theta,$$

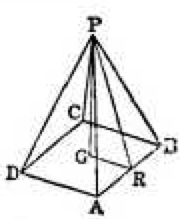
由此得
$$\cos\theta=\frac{1}{3},$$

即两面角的大小等于余弦为 $\frac{1}{3}$ 的角.

3053. 有一个正四棱锥，若它的底面的边长是 200，侧棱的长是 150，求侧面和底面所成的角. 其中

$$\lg 2=0.30103,\quad \lg\operatorname{tg}26°33'=\bar{1}.69868,$$
$$\lg\operatorname{tg}26°34'=\bar{1}.69900.$$

解 设底面正方形是 $ABCD$，顶点是 P，从 P 向底面引垂线 PG，再从它的垂足 G 向 AB 引垂线 GR. 设 φ 是侧面和底面所成的角，则



$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{PG}{GR}.$$

又
$$GR=100,$$
$$PG^2+GR^2=PR^2,\quad PR^2+AR^2=AP^2,$$

所以

$$PG^2=PR^2-GR^2=AP^2-AR^2-GR^2$$
$$=150^2-100^2-100^2=2500.$$
$$PG=50,\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}.$$

因此

$$\lg\operatorname{tg}\varphi=\lg\frac{1}{2}=-\lg 2=\bar{1}.69897.$$

$$\begin{array}{r} \bar{1}.69900 \\ \bar{1}.69868 \\ \hline 0.00032 \end{array}\qquad\begin{array}{r} \bar{1}.69897 \\ \bar{1}.69868 \\ \hline 0.00029 \end{array}$$

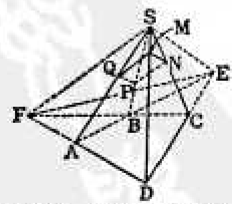
$$0.00032:0.00029=60'':x,$$
$$x=54''.$$

因此
$$\varphi=26°33'54''.$$

3054. 设四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 底面的两条对边 AB、DC 延长相交于 E 点，另外两条对边 DA、CB 延长相交于 F 点，从而平面 ASB 和 CSD 相交于直线 SE，平面 ASD 和 BSC 相交于直线 SF.

(1) 证明和平面 ESF 平行的四棱锥的截面 $MNPQ$ 是平行四边形.

(2) 确定使截面 $MNPQ$ 和已知正方形 k^2 等积的点 M.



解 (1) 两个平行的平面 $MNPQ$ 和 SEF，与平面 SFD 相交于两条平行的直线 MQ 和 SF，与平面 SFC 相交于两条平行的直线 NP 和 SF. 由于 MQ 和 NP 都平行于 SF，所以它们互相平行. 同样 MN 平行于 PQ，因而 $MNPQ$ 是平行四边形.

(2) 若角 ESN，SNM 用 α 表示，角 FSQ、SQM 用 α' 表示，角 ESF、NMQ 用 S 表示，角 MSN 用 β 表示，角 MSQ 用 β' 表示，则由 $MNPQ$ 的面积，得

$$MN\cdot MQ\sin S=k^2. \qquad ①$$

再设 $SM=x$，则从三角形 SMN 得

$$\frac{MN}{\sin\beta}=\frac{x}{\sin\alpha},\quad MN=x\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

从三角形 SMQ 得

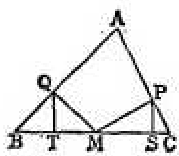
$$\frac{MQ}{\sin\beta'}=\frac{x}{\sin\alpha'},\quad MQ=x\cdot\frac{\sin\beta'}{\sin\alpha'}.$$

将这些值代入等式①，则

$$\frac{x^2\sin\beta\sin\beta'\sin S}{\sin\alpha\sin\alpha'}=k^2,$$

因此 $$x=k\sqrt{\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\beta\sin\beta'\sin S}}.$$

3055．已知三角形 ABC 的边 a 及角 B 和 C，在边 a 上求一点 M，使从这点向边 b、c 作垂线 MP 和 MQ 所得到的三角形 MPC 和 MQB，在整个三角形绕边 a 旋转时所生成的旋转体的体积相等。



解　根据题意

$$\frac{1}{3}\pi PS^2\cdot MC=\frac{1}{3}\pi QT^2\cdot MB.$$

设 $MC=x$，$MB=y$，则

$$PS=PC\sin C=x\sin C\cos C.$$

同理 $$QT=y\sin B\cos B.$$

因此

$$x^3\sin^2C\cos^2C=y^3\sin^2B\cos^2B,$$

$$x^3\sin^2 2C=y^3\sin^2 2B.\qquad ①$$

又 $$x+y=a.\qquad ②$$

解①与②就可得到 x 和 y 的值。从①得

$$x\sin^{\frac{2}{3}}2C=y\sin^{\frac{2}{3}}2B,$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{\sin^2 2B}}=\frac{y}{\sqrt[3]{\sin^2 2C}}=\frac{x+y}{\sqrt[3]{\sin^2 2B}+\sqrt[3]{\sin^2 2C}}.$$

由②得

$$x=\frac{a\sqrt[3]{\sin^2 2B}}{\sqrt[3]{\sin^2 2B}+\sqrt[3]{\sin^2 2C}}.$$

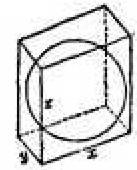
设 $$\sqrt[3]{\frac{\sin 2C}{\sin 2B}}=\operatorname{tg}\varphi,$$

则 $$x=\frac{a}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=a\cos^2\varphi.$$

从而 $$y=a\sin^2\varphi.$$

接下去，可以利用对数表进行计算。

3056．证明：外切于半径为R的球的平行六面体，它的各条棱和其他两条棱夹角的正弦成比例。



解　平行六面体的体积等于底面积乘以高。因为题中的平行六面体外切于球，所以每个面上的高都是 $2R$。又，长是 x 的棱和长是 y 的棱所构成的面的面积是

$$xy\sin\angle(xy),$$

其中 $\angle(xy)$ 是 x 棱和 y 棱所构成的角。因此

$$2Rxy\sin\angle(xy)=2Ryz\sin\angle(yz)=2Rxz\sin\angle(xz).$$

从 $$2Rxy\sin\angle(xy)=2Ryz\sin\angle(yz),$$

得 $$\frac{x}{\sin\angle(yz)}=\frac{z}{\sin\angle(xy)},$$

从

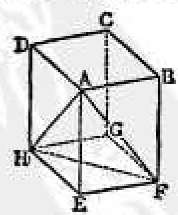
$$2Ryz\sin\angle(yz)=2Rxz\sin\angle(xz),$$

得 $$\frac{y}{\sin\angle(xz)}=\frac{x}{\sin\angle(yz)}.$$

$$\frac{x}{\sin\angle(yz)}=\frac{y}{\sin\angle(xz)}=\frac{z}{\sin\angle(xy)}.$$

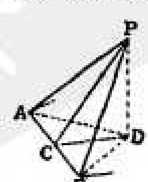
因此，各条棱和其他两条棱夹角的正弦成比例。

3057．已知平行六面体的三个方向上的棱和它们相互之间的夹角，计算这个平行六面体的体积。



解　设平行六面体是 $ABCD$-$EFGH$，显然，它的体积是锥体 A-HEF 的6倍。又锥体 A-HEF 的各条棱的长度都是容易知道的，所以它的体积是可以求出来的，因而可以求出平行六面体的体积。

3058．正棱锥的底面是边长为 1m 的正八边形，侧棱和高成 30° 角，求它的体积。



解　设正棱锥底面的一条边是 AB，它的中点是 C，高是 PD。于是

$$AB=1(\text{m}),$$

$$\angle BPD=30°.$$

又

$$\angle ADB=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ,\ CB=\frac{1}{2}(\mathrm{m}),$$

$$\angle CDB=\frac{45^\circ}{2},$$

并且

$$CD=CB\operatorname{ctg}\angle CDB=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{45^\circ}{2},$$

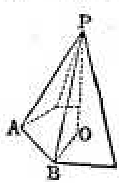
$$\begin{aligned}PD&=BD\operatorname{ctg}\angle BPD\\&=BC\csc\angle CDB\operatorname{ctg}\angle BPD\\&=\frac{1}{2}\csc\frac{45^\circ}{2}\operatorname{ctg}30^\circ.\end{aligned}$$

因此，体积是

$$\begin{aligned}&\frac{4}{3}AB\cdot CD\cdot PD\\&=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{45^\circ}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\csc\frac{45^\circ}{2}\operatorname{ctg}30^\circ\right)\\&=\frac{\cos\frac{45^\circ}{2}\cos 30^\circ}{3\sin^2\frac{45^\circ}{2}\sin 30^\circ}\\&=\frac{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}}\\&=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{3(2-\sqrt{2})}\\&=\frac{(2+\sqrt{2})\sqrt{6+3\sqrt{2}}}{3}\\&=\frac{1}{3}\sqrt{6(10+7\sqrt{2})}\\&\approx\frac{1}{3}\sqrt{119.396971}\approx 3.642.\end{aligned}$$

即体积约是 $3.642\,\mathrm{m}^3$。

3059. 直棱锥的底面是边长为 5 m 的正六边形，高是 12 m，求相邻两条侧棱的夹角的余弦。



解　设 $P\text{-}ABC\cdots$ 是底面为正六边形的直棱锥，它的高是 PO，则

$AB=5(\mathrm{m})$，　$PO=12(\mathrm{m})$，

O 是正六边形的中心。因此

$$OB=AB=5(\mathrm{m}),$$

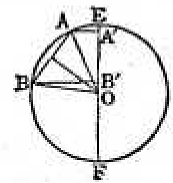
从而　　$PB=\sqrt{5^2+12^2}=13$。

又　　　$PA=PB=13$，

因此，所要求的相邻两侧棱的夹角 $\angle APB$ 的余弦是

$$\frac{13^2+13^2-5^2}{2\times13\times13}=\frac{313}{338}.$$

3060. 将弓形绕一条直径旋转所生成的体积，用这个弓形的弧所对的圆心角 α 和圆心到弦的距离 h，以及这条垂线与成为旋转轴的直径所夹的角 β 表示出来。



解　所要求的体积是

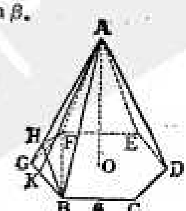
$$\frac{1}{6}\pi AB^2\cdot A'B'.$$

又　$$\begin{aligned}AB&=2h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\\OB&=OA=h\sec\frac{\alpha}{2},\\OA'&=OA\cos\angle AOE\\&=h\sec\frac{\alpha}{2}\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right),\\OB'&=OB\cos\angle BOB'\\&=h\sec\frac{\alpha}{2}\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right),\\A'B'&=OA'-OB'\\&=h\sec\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\\&=2h\sec\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2}\\&=2h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\beta.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}\pi AB^2\cdot A'B'\\&=\frac{1}{6}\pi\times4h^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\times2h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\beta\\&=\frac{4}{3}\pi h^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\sin\beta.\end{aligned}$$

3061. 将正六棱锥 $A\text{-}BCDEFG$ 两个相邻侧面所成的角的余弦，用底面的边长和锥体的高表示出来。



解　设底面正六边形

的边长是 a，高 AO 是 h。则

$$BF^2=2a^2-2a^2\cos 120^\circ=3a^2,$$

作 $BH\perp AG$，$AK\perp BG$，又得

$$BH^2=a^2\sin^2\angle BGH=a^2\left(\frac{AK}{AB}\right)^2$$

$$=\frac{a^2\left(h^2+a^2-\frac{1}{4}a^2\right)}{h^2+a^2}.$$

设 $\angle FHB=x$，则

$$BF^2=2BH^2-2BH^2\cos x.$$

$$\cos x=\frac{2BH^2-BF^2}{2BH^2}$$

$$=\frac{\dfrac{2a^2\left(h^2+a^2-\frac{1}{4}a^2\right)}{h^2+a^2}-3a^2}{\dfrac{2a^2\left(h^2+a^2-\frac{1}{4}a^2\right)}{h^2+a^2}}$$

$$=-\frac{2h^2+3a^2}{4h^2+3a^2}.$$

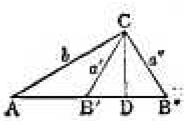
从这个式子就可求得 x。

4. 杂题

3062. 两个三角形 $AB'C$ 和 $AB''C$ 有一条公共边 b（其中 $b=CA$）和一个公共角 A，且 $B'C=a'$，$B''C=a''$。当 $a'=a''$ 时，设 $\angle ACB'=C'$，$\angle ACB''=C''$，证明

$$\operatorname{tg} A=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(C'+C'').$$

解　从 C 向 $B'B''$ 作垂线 CD，因为 $a'=a''$、即 $B'C=B''C$，所以 CD 是角 $B'CB''$ 的平分线。因此



$$\angle ACD=\frac{1}{2}(\angle ACB'+\angle ACB'')$$

$$=\frac{1}{2}(C'+C'').$$

又因为角 ACD 是角 A 的余角，所以

$$\frac{1}{2}(C'+C'')=90^\circ-A.$$

因此　$$\operatorname{tg} A=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(C'+C'').$$

3063. 设三角形 ABC 的三个内角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别是 a、b、c。若

$$a^2=c(b+c),\quad \angle B=57^\circ,$$

求 $\angle A$、$\angle C$。

解　从所给的式子得

$$\frac{a^2-c^2}{c}=b,$$

由正弦定理得

$$\frac{\sin^2 A-\sin^2 C}{\sin C}=\sin B,$$

即

$$\sin B=\frac{\cos 2C-\cos 2A}{2\sin C}$$

$$=\frac{2\sin(A-C)\sin(A+C)}{2\sin C}$$

$$=\frac{\sin(180^\circ-B-2C)\sin(180^\circ-B)}{\sin C}.$$

$$\therefore\quad \sin C=\sin(180^\circ-57^\circ-2C).$$

$$\therefore\quad C=123^\circ-2C\quad 或\quad C=57^\circ+2C.$$

（因为 $0<C<123^\circ$，所以 $C=57^\circ+2C-260^\circ$ 不成立。）

(i) 如果 $C=123^\circ-2C$，则

$$C=41^\circ,\quad A=82^\circ.$$

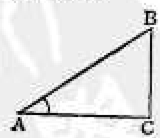
(ii) 如果 $C=57^\circ+2C$，那么这时所得的值和 $C>0$ 矛盾。

因此，结果是

$$C=41^\circ,\quad A=82^\circ.$$

3064. 已知直角三角形 ABC 的一个锐角 $\angle A$ 和面积 S，推导求三边的公式。

解　在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle C=90^\circ$。则



$$\frac{1}{2}ab=S,\quad a=b\operatorname{tg} A,$$

$$b^2\operatorname{tg} A=2S.$$

$$b=\sqrt{\frac{2S}{\operatorname{tg} A}}=\sqrt{2S\operatorname{ctg} A}.$$

而　$$a=\sqrt{2S\operatorname{ctg} A\operatorname{tg}^2 A}=\sqrt{2S\operatorname{tg} A}.$$

又　$$c=b\sec A=\sqrt{2S\operatorname{ctg} A\sec^2 A}$$

$$=\sqrt{\frac{4S}{\sin 2A}}=2\sqrt{S\csc 2A}.$$

3065. 在三角形 ABC 中，若 $a=6$，$c=5$，$\cos C=0.75$，求 b，精确到小数第二位。

解　$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

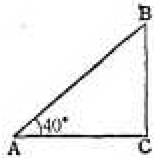
$$5^2=6^2+b^2-2\times 6\times 0.75b,$$

即　$$b^2-9b+11=0.$$

因此

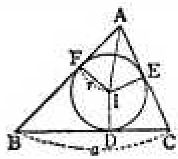
$$b=\frac{9\pm\sqrt{37}}{2}\approx 7.54,\ 或\ 1.46.$$

3066. 在 $\angle C$ 是直角的三角形 ABC 中，$\angle A=40°$，求 $\dfrac{BC}{AB}$ 和 $\dfrac{AC}{AB}$ 的值。



解
$$\frac{BC}{AB}=\sin 40°=0.64279,$$
$$\frac{AC}{AB}=\cos 40°=0.76604.$$

3067. 已知三角形 ABC 的 $\angle A$，$\angle A$ 的对边 a 和内切圆的半径 r，求它的面积。



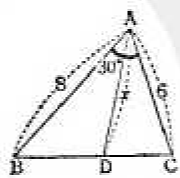
解 设三角形 ABC 的内切圆 I 和边 BC、CA、AB 的切点是 D、E、F，于是

$$BF=BD,\quad CE=CD,\quad AF=AE,$$
$$\therefore\quad BC+CA+AB=2(BC+AF)=2\left(a+r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right).$$

设三角形 ABC 的面积是 S，则

$$S=\frac{1}{2}(BC+CA+AB)r=r\left(a+r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right).$$

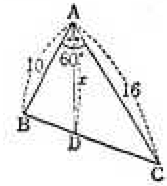
3068. 在三角形 ABC 中，
$\angle A=60°$，
$b=6\,\text{cm}$，
$c=8\,\text{cm}$，
若 $\angle A$ 的平分线和对边的交点是 D，那么 AD 的长度是多少？



解　$\triangle ABD+\triangle ADC=\triangle ABC$。
设 $AD=x\,\text{cm}$，由上式得

$$\frac{1}{2}\times 8x\sin 30°+\frac{1}{2}\times 6x\sin 30°=\frac{1}{2}\times 8\times 6\sin 60°,$$
$$x\left(8\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{2}\right)=48\times\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\therefore\quad x=\frac{48\sqrt{3}}{14}=\frac{24\sqrt{3}}{7}\,(\text{cm}).$$

3069. 在三角形 ABC 中，
$\angle A=60°$，
$AB=10\,\text{cm}$，
$AC=16\,\text{cm}$，
角 A 的平分线将它分成两个部分，求各个部分的面积。



解 设 $\angle A$ 的平分线是 AD，它的长是 x cm，由

$$\triangle ABD+\triangle ADC=\triangle ABC,$$

得
$$\frac{1}{2}\times 10x\sin 30°+\frac{1}{2}\times 16x\sin 30°=\frac{1}{2}\times 10\times 16\sin 60°,$$
$$(5+8)x=80\sqrt{3}$$
$$\therefore\quad x=\frac{80\sqrt{3}}{13}\,(\text{cm}).$$

因此

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times 10\times\frac{80\sqrt{3}}{13}\sin 30°=\frac{200}{13}\sqrt{3}\,(\text{cm}^2),$$
$$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times 16\times\frac{80\sqrt{3}}{13}\sin 30°=\frac{320}{13}\sqrt{3}\,(\text{cm}^2).$$

3070. 已知三角形 ABC 的一条边 a、其他两条边的和 $b+c$ 及一个角 A，说明解这个三角形的方法。

解 由
$$\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}$$
可以求出 $\dfrac{B+C}{2}$。由
$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$$
又可以求出 $\dfrac{B-C}{2}$。设
$$\frac{B+C}{2}=\alpha,\quad \frac{B-C}{2}=\beta,$$
则
$$B=\alpha+\beta,\quad C=\alpha-\beta.$$
至此三个角都知道了，所以只要由
$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$
再求出 b、c 就可以了。

3071. 已知两角 B、C 和 $b+c-a$，解三

角形 ABC.

解　由 $A=180°-(B+C)$ 可以求出 A. 又

$$s-a=\frac{1}{2}(b+c-a),$$

由

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}}{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}}=\frac{s-c}{s-a},$$

可以求出 $s-c$. 由 $(s-a)+(s-c)=b$ 可以求出 b, 由 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}$ 可以求出 c, 由

$$a=(b+c)-(b+c-a)$$

可以求出 a.

3072. 已知一个角 A、一条边 a 及其他两边的平方和, 解三角形 ABC.

解　$\frac{a^2}{\sin^2 A}=\frac{b^2+c^2}{\sin^2 B+\sin^2 C}$.

又

$$\begin{aligned}\sin^2 B+\sin^2 C&=\frac{1}{2}(1-\cos 2B+1-\cos 2C)\\&=1-\frac{1}{2}(\cos 2B+\cos 2C)\\&=1-\cos(B+C)\cos(B-C)\\&=1+\cos A\cos(B-C),\end{aligned}$$

所以　$\frac{a^2}{\sin^2 A}=\frac{b^2+c^2}{1+\cos A\cos(B-C)}$,

$$\cos(B-C)=\frac{(b^2+c^2)\sin^2 A-a^2}{a^2\cos A}.$$

由此可求出 $B-C$. 由 $B+C=180°-A$ 又可求出 $B+C$. 因此可以求出 B、C, 从而 b、c 也就可以求出来了.

3073. 已知一个角 A, 一条边 a 及其他两边的平方差 b^2-c^2, 解三角形 ABC.

解　$\frac{a^2}{\sin^2 A}=\frac{b^2-c^2}{\sin^2 B-\sin^2 C}$.

又

$$\begin{aligned}\sin^2 B-\sin^2 C&=\sin^2 B(\sin^2 C+\cos^2 C)\\&\quad-\sin^2 C(\sin^2 B+\cos^2 B)\\&=\sin^2 B\cos^2 C-\cos^2 B\sin^2 C\\&=\sin(B+C)\sin(B-C)\\&=\sin A\sin(B-C),\end{aligned}$$

所以　$\frac{a^2}{\sin^2 A}=\frac{b^2-c^2}{\sin A\sin(B-C)}$,

$$\sin(B-C)=\frac{(b^2-c^2)\sin A}{a^2},$$

由此可求出 $B-C$. 又 $B+C$ 是知道的, 所以可求出 B 和 C, 并进而求出 b、c.

3074. 已知一条边 a, 一个角 A 及

$$h^2+(b+c)^2=m^2,$$

解三角形 ABC. (其中 h 是边 a 上的高.)

解　从公式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R, \qquad ①$$

可以求出 R. 又 $bc=2hR$, 若将从 ① 式得到的 b 和 c 代入这个式子, 则得

$$4R^2\sin B\sin C=2hR.$$

$$h=2R\sin B\sin C,$$

$$\begin{aligned}h^2&=4R^2\sin^2 B\sin^2 C\\&=R^2[\cos(B-C)+\cos A]^2.\end{aligned}$$

另外, 从 ① 式可以证明

$$\frac{(b+c)^2}{(\sin B+\sin C)^2}=4R^2,$$

$$\begin{aligned}(b+c)^2&=4R^2(\sin B+\sin C)^2\\&=4R^2\times 4\sin^2\frac{B+C}{2}\cos^2\frac{B-C}{2}\\&=8R^2\cos^2\frac{A}{2}[1+\cos(B-C)].\end{aligned}$$

将上面的结果代入 $h^2+(b+c)^2=m^2$, 得

$$\begin{aligned}R^2\Big[&\cos^2(B-C)\\&+\left(2\cos A+8\cos^2\frac{A}{2}\right)\cos(B-C)\\&+\left(\cos^2 A+8\cos^2\frac{A}{2}\right)\Big]=m^2,\end{aligned}$$

由此可求出 $\cos(B-C)$, 并进而求出 $B-C$. 以下的解法同上题一样.

3075. 已知面积 S 和两个角 A、B, 解三角形 ABC.

解　由正弦定理得

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}. \qquad ①$$

将 ① 代入公式

$$S=\frac{1}{2}ab\sin(A+B),$$

得　$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sin B\sin(A+B)}{\sin A}$,

$$a^2=\frac{2S\sin A}{\sin B\sin(A+B)}.$$

由此可求得 a, 并由 ① 式求得 b. 接下去由 $C=180°-(A+B)$ 求出 C, 由

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

求出 c 等。

3076. 设菱形的一个角是 $54°$，它的一条长对角线是 1.25，计算它的边和面积。

解 一条长对角线将 $54°$ 的角二等分。设菱形的一条边是 a，则由

$$1.25=2a\cos 27°,$$

得
$$a=\frac{1.25}{2\cos 27°}.$$

$$\begin{aligned}\lg a&=\lg 1.25-\lg 2-\lg\cos 27°\\&=0.09691-0.30103-(9.94988-10)\\&=\bar{1}.84600,\end{aligned}$$

$$a=0.70145.$$

菱形的面积是

$$a^2\sin 54°=0.70145^2\sin 54°.$$

设面积为 S，则

$$\begin{aligned}\lg S&=2\lg 0.70145+\lg\sin 54°\\&=2\times(\bar{1}.84600)+\bar{1}.90796\\&=\bar{1}.59996,\end{aligned}$$

$$S=0.39807.$$

3077. 已知边 a、周长 $2s$ 和内切圆的半径 r，解三角形 ABC。

解 从
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}$$

可求出 $\angle A$。从 $b+c=2s-a$ 可求出 $b+c$。因为 $\angle A$ 已经知道，所以从

$$\frac{1}{2}bc\sin A=sr$$

又可以求出 bc。从而可以求出 b 和 c，并求出三个角。

3078. 在三角形 ABC 中，已知 a、b、c，求角 A、B、C 及面积 S。

解 利用公式

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

或
$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

求出角 A，并用同样的方法求出角 B 和 C。另外，从

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

得
$$\begin{aligned}S&=bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\&=bc\cdot\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}\\&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.\end{aligned}$$

3079. (1) 在三角形 ABC 中，已知一边 a、对角 A 及边 a 上的高 h，求可以确定 b、c 的方程。

(2) 为使三角形 ABC 是直角三角形，a、A 和 h 之间要满足怎样的关系？

解 (1) 从公式

$$ah=bc\sin A$$

和
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

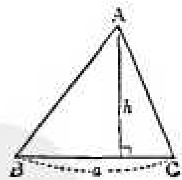
得
$$b^2+c^2=a^2+2ah\operatorname{ctg}A,$$

$$b^2c^2=\frac{a^2h^2}{\sin^2 A}.$$

因此 b^2 和 c^2 是方程

$$x^2-a(a+2h\operatorname{ctg}A)x+\frac{a^2h^2}{\sin^2 A}=0 \qquad ①$$

的根。



(2) 为使角 B 是直角（使角 C 是直角也一样），必须

$$b^2-c^2=a^2.$$

取方程 ① 两根的差，得

$$b^2-c^2=\sqrt{a^2(a+2h\operatorname{ctg}A)^2-\frac{4a^2h^2}{\sin^2 A}}.$$

因此，a、A 和 h 所要满足的关系是

$$\sqrt{a^2(a+2h\operatorname{ctg}A)^2\sin^2 A-4a^2h^2}=a^2\sin A.$$

变形得
$$a=h\operatorname{tg}A.$$

3080. 在三角形 ABC 中，

$$AB=3,\quad BC=\sqrt{7},\quad CA=2,$$

求 $\angle BAC$ 的值。又，若在 BC 上取一点 P，使 $BP:PC=1:2$，求 AP 的值。

解

$$\cos\angle BAC=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 3\cdot 2}=\frac{1}{2},$$

$$\angle BAC=60°.$$

又

$$\begin{aligned}AP^2&=3^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cos B\\&=9+\frac{7}{9}-2\sqrt{7}\cdot\frac{3^2+(\sqrt{7})^2-2^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{7}}\end{aligned}$$

$$=9+\frac{7}{9}-\frac{12}{3}=\frac{52}{9},$$

$$\therefore\quad AP=\frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

3081. 已知三角形 ABC 的一边、对角及其他两边的和，解三角形.

解 已知边 a、对角 A 及其他两边的和 $b+c$，因为

$$\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2},$$

所以可求出 $\frac{B+C}{2}$。根据正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{b+c}{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)},$$

因而 $$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{a},$$

由此又可求得 $\frac{B-C}{2}$. 从

$$\frac{B-C}{2}\ 和\ \frac{B+C}{2}$$

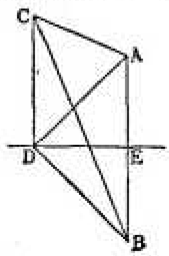
的值就可求出 B 和 C 了。

第十章　测　　量

1. 测量(一)

(不用对数的测量问题)

3082. 从东西相距1 km的两点A、B看气球，方向分别是北西和北东，仰角都是45°，求这个气球的高度。



解 设C是气球的位置，D是它在地面上的垂足，通过D的南北方向的线和AB的交点是E。因为在A和B的仰角都是45°，所以

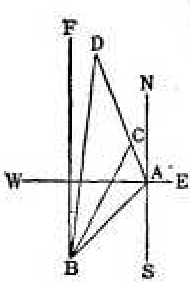
$$CD=DA=DB.$$

设$CD=h$，则

$$2h^2=AB^2,$$

即　$2h^2=1$，　$h=\frac{1}{\sqrt{2}}$(km)。

3083. 有一条往南南西方向的铁路。从A站开往B站的火车上，在A站看到相距1.5 km的两塔都在北北西方向上，到B站时看这两座塔，一座在北$7\frac{1}{2}°$东方向，另一座在北$37\frac{1}{2}°$东方向。火车从A站到B站花了2分钟，求火车每小时的速度。



解 设C和D是两座塔，F是B的正北一点，因为AB是南南西方向，所以$\angle WAB=22.5°$，AC是北北西方向，所以$\angle CAN=22.5°$，因此$\angle BAC=90°$。又因为

$$\angle FBD=7.5°,$$
$$\angle CBF=37.5°,$$

且　$\angle ABF=90°-22.5°=67.5°$，

所以　$\angle ABD=67.5°-7.5°=60°$，

$\angle ABC=67.5°-37.5°=30°$。

从$\triangle ABD$得$AD=AB\operatorname{tg}\angle DBA$，

从$\triangle ABC$得　$AC=AB\operatorname{tg}\angle CBA$，

$$DC=AD-AC=AB\operatorname{tg}\angle DBA-AB\operatorname{tg}\angle CBA,$$

即　　$1.5=AB\operatorname{tg}60°-AB\operatorname{tg}30°$。

因此

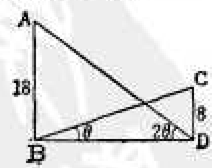
$$AB=\frac{1.5}{\operatorname{tg}60°-\operatorname{tg}30°}=\frac{1.5}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{1.5\sqrt{3}}{3-1}=0.75\sqrt{3}=1.299\cdots.$$

这段路程是火车在2分钟的时间里行驶的，所以火车1小时行驶

$$1.299\cdots\times\frac{60}{2}=38.97(\mathrm{km}).$$

3084. 有甲、乙两座塔矗立在同一水平面上。甲的高度是18 m，乙的高度是8 m。分别从这两座塔的塔基测另一座塔的仰角，得知甲塔的仰角是乙塔的两倍。求两座塔的距离。

解 设甲塔是AB，乙塔是CD，$\angle CBD=\theta$，因为$\angle ADB=2\theta$，



所以

$$BD=AB\operatorname{ctg}2\theta$$
$$=18\operatorname{ctg}2\theta,$$
$$BD=CD\operatorname{ctg}\theta$$
$$=8\operatorname{ctg}\theta,$$
$$18\operatorname{ctg}2\theta=8\operatorname{ctg}\theta,$$

即　$$\frac{9(\operatorname{ctg}^2\theta-1)}{2\operatorname{ctg}\theta}=4\operatorname{ctg}\theta.$$

由此得　　$\operatorname{ctg}^2\theta=9$。

又θ是锐角，所以$\operatorname{ctg}\theta=3$。因此

$$BD=CD\operatorname{ctg}\theta=8\times3=24,$$

即　　$BD=24$(m)。

3085. 从同一水平直线上的三点A、B和C眺望升高的气球，仰角分别是60°，45°和30°，求气球的高。其中$AB=BC=10$ m。

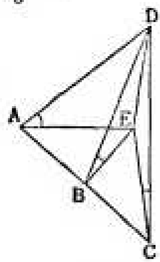
解 设气球的位置是D，它的高是DE。

$$\angle DAE=60°,\ \angle DBE=45°,$$
$$\angle DCE=30°,$$

$$AD=\frac{DE}{\sin 60^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}DE,$$

$$CD=\frac{DE}{\sin 30^\circ}=2DE,$$

$$BD=\frac{DE}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2}\,DE,$$



并且

$$AD^2+CD^2=2(BD^2+AB^2),$$

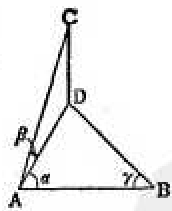
即 $$AL^2+CD^2-2BD^2=2AB^2,$$

即 $$DE^2\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+2^2-2(\sqrt{2})^2\right]=2\times 10^2.$$

$$DE^2=\frac{200}{\frac{4}{3}+4-4}=150,$$

$$DE=\sqrt{150}=12.2474\cdots\approx 12.25(\text{m}).$$

3086. AB 是长为 1000 m 的水平线. 从 A 测定 B 和山顶 C, 得到它们间的水平夹角 $\alpha=60^\circ$, C 的仰角 $\beta=22.5^\circ$. 从 B 测定 A 和 D, 得到它们间的水平夹角 $\gamma=45^\circ$. 求山的高度 CD.



解 在三角形 DAB 中

$$\frac{AD}{\sin\gamma}=\frac{AB}{\sin[180^\circ-(\alpha+\gamma)]},$$

$$\therefore\quad AD=\frac{AB\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{1000\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}.$$

这里 $$\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

$$\therefore\quad AD=1000\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=2000\times\frac{\sqrt{3}-1}{2}=1000(\sqrt{3}-1).$$

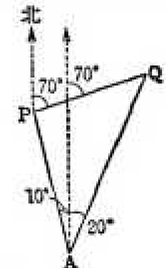
在三角形 CAD 中

$$CD=AD\,\mathrm{tg}\,\beta=1000(\sqrt{3}-1)\,\mathrm{tg}\,22.5^\circ.$$

又 $$\mathrm{tg}\,22.5^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{2}-1,$$

$$\therefore\quad CD=1000(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-1)\approx 303.1(\text{m}).$$

3087. 一艘轮船以每小时 18 海里的速度沿北 70° 东的航向离港, 10 点钟时位置在无线电台的北 10° 西的方向上, 12 点钟时位置在无线电台的北 20° 东的方向上. 求 10 点钟时船和无线电台的距离.



解 设无线电台的位置是 A, 船 10 时和 12 时的位置分别是 P、Q, 则

$$PQ=2\times 18=36,$$

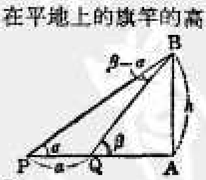
$$\angle Q=70^\circ-20^\circ=50^\circ.$$

在三角形 APQ 中

$$\frac{AP}{\sin Q}=\frac{PQ}{\sin A},$$

$$\therefore\quad AP=\frac{\sin Q}{\sin A}\times PQ=\frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ}\times 36=\frac{0.7660}{0.5}\times 36\approx 55.15(\text{海里}).$$

3088. 为测量直立在平地上的旗竿的高, 在这块平地上的一点 P 测得旗竿顶端的仰角是 α°, 在从 P 向旗竿靠拢 a m 的 Q 点, 测得旗竿顶端的仰角是 β°. 求旗竿的高度.



解 设旗竿 AB 的高度是 h, 在三角形 BPQ 中

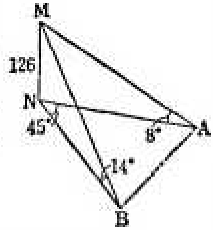
$$\frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{QB}{\sin\alpha},$$

$$\therefore\quad QB=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

在三角形 ABQ 中

$$h=QB\sin\beta=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}(\text{m}).$$

3089. 从标高 126 m 的山顶看在南面的船 A，俯角是 8°，看在南西方向的船 B，俯角是 14°。两船间的距离是多少米？



解 设从山顶 M 到水平面的垂足是 N，则

$\angle MAN=8^\circ$,

$\angle MBN=14^\circ$.

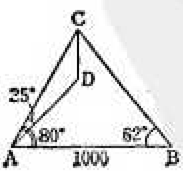
$$AN=MN\operatorname{ctg}8^\circ=126\operatorname{ctg}8^\circ,$$
$$BN=MN\operatorname{ctg}14^\circ=126\operatorname{ctg}14^\circ.$$

在三角形 ABN 中

$$\begin{aligned}AB^2&=AN^2+BN^2-2AN\cdot BN\cos45^\circ\\&=(126\operatorname{ctg}8^\circ)^2+(126\operatorname{ctg}14^\circ)^2\\&\quad-2\cdot126\operatorname{ctg}8^\circ\cdot126\operatorname{ctg}14^\circ\cdot\frac{1}{\sqrt2}\\&=126^2(\operatorname{ctg}^2 8^\circ+\operatorname{ctg}^2 14^\circ\\&\quad-\sqrt2\operatorname{ctg}8^\circ\operatorname{ctg}14^\circ)\\&=126^2(7.1154^2+4.0108^2\\&\quad-1.4142\times7.1154\times4.0108)\\&\approx126^2\times26.3564,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad AB=126\times5.13\approx646.4(\text{m}).$$

3090. 为了知道山的高度，在同一水平面上取两点 A、B，设从山顶 C 到这个水平面的垂足是 D，测得 $AB=1000\,\text{m}$，$\angle CAB=80^\circ$，$\angle CBA=62^\circ$，$\angle CAD=35^\circ$。求山的高度。



解 在三角形 ABC 中，由正弦定理得

$$\frac{1000}{\sin[180^\circ-(80^\circ+62^\circ)]}=\frac{AC}{\sin62^\circ},$$

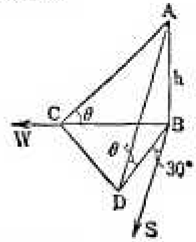
$$\therefore\quad AC=1000\times\frac{\sin62^\circ}{\sin38^\circ}$$

$$=1000\times\frac{0.8829}{0.6157}\approx1434.$$

在三角形 ADC 中

$$CD=AC\sin35^\circ=1434\times0.5736$$
$$\approx822.5(\text{m}).$$

3091. 某人站在高 h m 的山上，发现正西方向有一艘船，它的俯角是 θ。经过一段时间后，船的方位是南 30° 西，俯角变成 θ'。求这艘船前后两个位置间的距离。



解 设山的高度是 AB，船的前一个位置是 C，后一个位置是 D，所要求的距离 CD 是 x，则

$BC=h\operatorname{ctg}\theta$，$BD=h\operatorname{ctg}\theta'$。

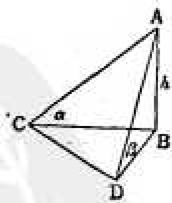
因此

$$\begin{aligned}x^2&=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cos60^\circ\\&=h^2\operatorname{ctg}^2\theta+h^2\operatorname{ctg}^2\theta'\\&\quad-2h^2\operatorname{ctg}\theta\operatorname{ctg}\theta'\times\frac12\\&=h^2(\operatorname{ctg}^2\theta+\operatorname{ctg}^2\theta'-\operatorname{ctg}\theta\operatorname{ctg}\theta'),\end{aligned}$$

$$x=h\sqrt{\operatorname{ctg}^2\theta+\operatorname{ctg}^2\theta'-\operatorname{ctg}\theta\operatorname{ctg}\theta'}.$$

注 实际计算时，上式用对数计算是不方便的。可以在已知三角形 BCD 的边 BC、BD 和它们的夹角 CBD 的基础上，先求出角 C 或 D，再由正弦定理求出 CD。

3092. 某人在高 h m 的峭壁上眺望在正西面的船，俯角是 α。1 小时后，可以在正南面用俯角 β 看到同一艘船。船的时速是多少？



解 设 AB 是峭壁，C 是船的前一个位置，D 是船的后一个位置，于是

$$AB=h\,\text{m},\ \angle ACB=\alpha,$$
$$\angle ADB=\beta,\quad \angle CBD=90^\circ.$$

因此 $\quad CB=h\operatorname{ctg}\alpha$，$DB=h\operatorname{ctg}\beta$，

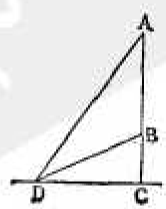
由于 $\quad DC^2=CB^2+BD^2$，

所以 $\quad DC=\sqrt{h^2(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)}$

$$=h\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}\ (\text{m}).$$

因为这是 1 小时所行的距离，所以它等于表示船的时速的数值。

3093. 在 10 m 高的城墙上直立着一根高度为 20 m 的旗杆。若在地上一点对旗杆的张角的正切是 0.5，那么在同一点对城墙的张角的正切是多少？



解 设 BC 是城墙，AB 是旗杆，D 是观测者的位置．这时

$$\operatorname{tg}\angle ADB=0.5.$$

又
$$\operatorname{tg}\angle ADB=\operatorname{tg}(\angle ADC-\angle BDC)=\frac{\operatorname{tg}\angle ADC-\operatorname{tg}\angle BDC}{1+\operatorname{tg}\angle ADC\operatorname{tg}\angle BDC}.$$

设 DC 为 x，因为 $BC=10$，$AC=AB+BC=30$，所以

$$\operatorname{tg}\angle ADC=\frac{30}{x},\ \operatorname{tg}\angle BDC=\frac{10}{x}.$$

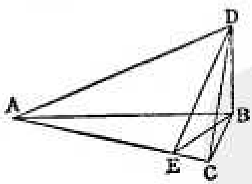
$$0.5=\frac{\frac{30}{x}-\frac{10}{x}}{1+\frac{30}{x}\cdot\frac{10}{x}}.$$

由此得 $x=10$，或 30．

从而 $\operatorname{tg}\angle BDC=\frac{10}{10}=1$，

或 $\operatorname{tg}\angle BDC=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$．

3094．从高 h 的塔顶看地上的一条直线，测得它两端的俯角是 α 和 β，并且到两端的视线互相垂直，求直线的长度和从塔顶到直线的距离．



解 设 DB 是塔，AC 是地上的一条直线，于是

$$\angle DAB=\alpha,$$
$$\angle DCB=\beta.$$

因此 $AD=DB\csc\angle DAB=h\csc\alpha$．

同样 $DC=h\csc\beta$．

又 $\angle ADC=90°$，

所以 $AC^2=AD^2+DC^2$，

即 $AC^2=h^2\csc^2\alpha+h^2\csc^2\beta$，

$$AC=h\sqrt{\csc^2\alpha+\csc^2\beta}.$$

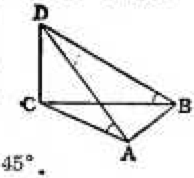
从 D 向 AC 作垂线 DE，则

$$AC\cdot DE=AD\cdot DC,$$

所以 $h\sqrt{\csc^2\alpha+\csc^2\beta}\,DE=h\csc\alpha\cdot h\csc\beta$．

由此得
$$DE=\frac{h\csc\alpha\csc\beta}{\sqrt{\csc^2\alpha+\csc^2\beta}}.$$

3095．相距 500 m 的甲乙两地各立着一个观测者，同时测量一个气球的方位和高度．甲测得方位是北 45° 西，仰角是 60°，乙测得方位是正西，仰角是 45°．求气球的高度．



解 设 A 是甲地，B 是乙地，CD 是气球的高．$AB=500$(m)．AC 是北 45° 西的方向，BC 是正西方向．因此

$$\angle ACB=45°.$$

设 $CD=x$，则

$$AC=x\operatorname{ctg}60°=x\times\frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$BC=x\operatorname{ctg}45°=x.$$

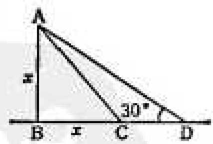
由 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos 45°$，

得
$$500^2=\frac{x^2}{3}+x^2-\frac{2x^2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$x^2=\frac{500^2\times3\,(4+\sqrt{6})}{10},$$

$$x=500\sqrt{\frac{3(4+\sqrt{6})}{10}}\approx695\text{(m)}.$$

3096．某塔的东面有相隔 200 m 的两个地点．从这两个地点测得塔顶的仰角分别是 45° 和 30°，塔的高度是多少？

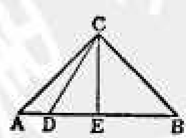


解 设 AB 是塔的高度，C 和 D 是两个观测点，因为这两个观测点都在塔的东面，所以塔底 B 和 C、D 在一条直线上．由于 $\angle ACB=45°$，如果设 AB 是 x，那么 BC 也是 x．又 $\frac{AB}{BD}=\operatorname{tg}\angle ADB$，所以

$$\frac{x}{200+x}=\operatorname{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

由此得 $x=\frac{200}{\sqrt{3}-1}\approx\frac{200}{0.73}\approx273.2$(m)．

3097．有东西相隔 $2\sqrt{3}$ km 的 A、B 两个小岛．从灯塔 C 看去，A 岛在南西方向，B 岛在南东方向．问 AB 之间离开 A 为 $(\sqrt{3}-1)$ km 的暗礁 D，在灯塔 C 的什么方位上？



解 从 C 作 AB 的垂线 CE，则 CE 是正南方向，所以

$\angle ACE=45°$, $\angle BCE=45°$.

因此 $\angle CAB=\angle CBA=45°$.

由此得知 E 是 AB 的中点,

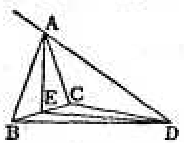
$$AE=CE=\frac{1}{2}AB$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}\,(\text{km}).$$

设 D 是暗礁的位置, 则 $AD=(\sqrt{3}-1)$(km), D 在 AE 之间, 并且 $DE=1$(km). 因此

$$\operatorname{tg}\angle DCE=\frac{DE}{CE}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\operatorname{tg}30°.$$

由此得 $\angle DCE=30°$, 即暗礁对于灯塔的方位角是南 30° 西.

3098. 将一块木制的等腰三角形板面朝太阳、顶点朝上垂直竖立在地上. 假如三角形的底是 $2a$ m, 高是 h m, 太阳的高度是 30°, 那么这个三角形影子的半个顶角的正切是多少?

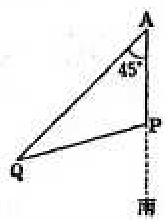


解 设 ABC 是等腰三角形, BDC 是它的影子, 于是 DBC 也是等腰三角形. 取 BC 的中点 E, 得 $AE=h$, $\angle ADE=30°$. 因此

$$ED=h\operatorname{ctg}30°=h\sqrt{3}.$$

又, $EC=a$, 因此影子顶角的一半、即角 EDC 的正切是 $\frac{EC}{ED}$, 即 $\frac{a}{h\sqrt{3}}$.

3099. 一架飞机保持 800 m 的高度, 沿固定的方向飞行. 在某点的正南、仰角是 11°20′ 的位置上看到它后, 过了 50 秒钟又在西南方向、仰角是 5°40′ 的位置上再次看到它. 问飞机的速度每秒约多少m? 其中设 $\operatorname{tg}11°20'=\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}5°40'=\frac{1}{10}$.



解 设观测点是 A, 飞机第一个位置的正下方的地点是 P, 第二个位置正下方的地点是 Q, 则

$$AP=800\operatorname{ctg}11°20'=800\times 5,$$
$$AQ=800\operatorname{ctg}5°40'=800\times 10.$$

设飞机每秒的速度是 x m, 得

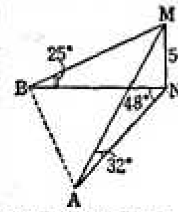
$$PQ^2=(50x)^2=(800\times 5)^2+(800\times 10)^2$$
$$-2(800\times 5)(800\times 10)\cos 45°$$
$$=800^2(125-50\sqrt{2}),$$

$$\therefore\quad 50x=800\times 5\sqrt{5-2\sqrt{2}},$$
$$\therefore\quad x=80\times 1.47\approx 118\,(\text{米/秒}).$$

注

$\operatorname{ctg}11°20'=4.9894$, $\operatorname{ctg}5°40'=10.0780$, 本题分别用 5、10 作为它们的近似值.

3100. 在高 500 m 的山顶上, 测量在西面的学校和在北 42° 西的停车场的俯角, 分别得 32° 和 25°. 推导求学校和停车场的水平距离的式子.



解 设学校和停车场的位置分别是 A、B, 从山顶 M 到水平面的垂线的足是 N, 于是

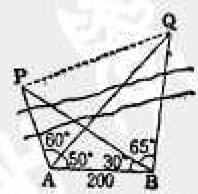
$$\angle MAN=32°,\ \angle MBN=25°,$$
$$AN=MN\operatorname{ctg}32°=500\operatorname{ctg}32°,$$
$$BN=MN\operatorname{ctg}25°=500\operatorname{ctg}25°.$$

在三角形 ABN 中

$$AB^2=AN^2+NB^2$$
$$-2AN\cdot BN\cos(90°-42°)$$
$$=(500\operatorname{ctg}32°)^2+(500\operatorname{ctg}25°)^2$$
$$-2\times 500^2\operatorname{ctg}32°\operatorname{ctg}25°\sin 42°$$
$$=500^2(\operatorname{ctg}^2 32°+\operatorname{ctg}^2 25°$$
$$-2\operatorname{ctg}32°\operatorname{ctg}25°\sin 42°),$$

$$\therefore\quad AB=500(\operatorname{ctg}^2 32°+\operatorname{ctg}^2 25°$$
$$-2\operatorname{ctg}32°\operatorname{ctg}25°\sin 42°)^{\frac{1}{2}}\,(\text{m}).$$

3101. 为了求河对岸 P、Q 两点间的距离, 做了如图所示的测量. 由此列出计算 P、Q 间的距离的式子, 并进行实际计算.



解 从三角形 ABP、ABQ 分别求 AP、AQ, 再从三角形 APQ 求 PQ 即可.

在三角形 ABP 中

$$\frac{200}{\sin[180°-(60°+50°+30°)]}$$
$$=\frac{AP}{\sin 30°},$$

$$\therefore \quad AP=200\times\frac{\sin 30^\circ}{\sin 40^\circ}=200\times\frac{0.5}{0.6428}$$
$$\approx 155.6.$$

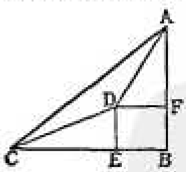
又，在三角形 ABQ 中

$$\frac{200}{\sin[180^\circ-(50^\circ+30^\circ+65^\circ)]}$$
$$=\frac{AQ}{\sin(30^\circ+65^\circ)},$$
$$\therefore \quad AQ=200\times\frac{\sin 95^\circ}{\sin 35^\circ}=200\times\frac{\cos 5^\circ}{\sin 35^\circ}$$
$$=200\times\frac{0.9962}{0.5736}\approx 347.4.$$

因此在三角形 APQ 中，

$$PQ^2=AP^2+AQ^2-2AP\cdot AQ\cos 60^\circ$$
$$=155.6^2+347.4^2-2\times 155.6$$
$$\times 347.4\times\frac{1}{2}=90842.68.$$
$$\therefore \quad PQ=301.4.$$

3102．从山脚观测山顶的仰角为 2α，由山脚出发沿一条倾角为 α 的山路向上走 1 里再观测山顶，仰角为 3α，求山的高度。



解 设 AB 为山高，C 为山脚下作第一次观测的地点，D 为山腰上作第二次观测的地点．作 DF、DE 分别垂直于 AB、BC，因为

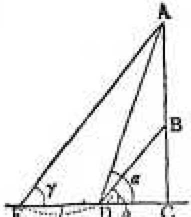
$$\angle ACB=2\alpha,\ \angle ADF=3\alpha,$$

所以 $\angle CAD=\alpha$。又因为 $\angle ACD=\angle ACB-\angle DCB=2\alpha-\alpha=\alpha$，所以 $AD=DC=1$，从而

$$AF=AD\sin\angle ADF=\sin 3\alpha,$$
$$BF=DE=CD\sin\angle DCE=\sin\alpha,$$

即 $AB=\sin 3\alpha+\sin\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha$.

3103．小山上有一座塔，从某处观测塔顶与小山顶，仰角分别为 α、β．后退 l m 再观测塔顶，仰角为 γ，求塔高与小山的高．



解 设 BC 为小山高，AB 为山上的塔，D 为前一个观测点，E 为后一个观测点．在 $\triangle ADE$ 中，

$$\frac{AD}{\sin E}=\frac{ED}{\sin\angle EAD},$$

即
$$AD=\frac{l\sin\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)}.$$

又在 $\triangle ADB$ 中，

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin\angle ABD},$$
$$AB=\frac{AD\sin(\alpha-\beta)}{\sin\angle DBC}$$
$$=\frac{l\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\gamma)\cos\beta}.$$

又从 $\triangle ADB$ 有

$$\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{BD}{\sin\angle BAD},$$

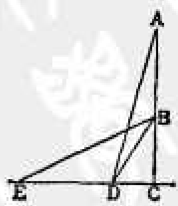
其中
$$\sin\angle ABD=\sin\angle DBC$$
$$=\cos\angle BDC=\cos\beta,$$
$$\sin\angle BAD=\cos\angle ADC=\cos\alpha.$$

所以
$$\frac{AD}{\cos\beta}=\frac{BD}{\cos\alpha},$$
$$\therefore \quad BD=\frac{AD\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{l\sin\gamma\cos\alpha}{\sin(\alpha-\gamma)\cos\beta}.$$

因为 $BC=BD\sin\beta$，所以

$$BC=\frac{l\sin\gamma\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\gamma)\cos\beta}$$
$$=\frac{l\sin\gamma\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin(\alpha-\gamma)}\ (\mathrm{m}).$$

3104．某人观测塔顶及顶上的旗竿顶，得仰角分别为 α、$90^\circ-\alpha$。后退 a m 再观测塔顶，仰角为原来的一半，求旗竿的长．



解 设塔为 BC，旗竿为 AB，D 为最初的观测位置，E 为后一个观测位置．因为 $\angle BDC=\alpha$，$\angle BED=\frac{1}{2}\alpha$，所以 $\angle EBD=\alpha-\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\alpha$，$DB=ED$，故

$$BC=DB\sin\angle BDC=a\sin\alpha,$$
$$AC=DC\,\mathrm{tg}\,\angle ADC$$
$$=DB\cos\angle BDC\cdot\mathrm{tg}\,\angle ADC$$
$$=a\cos\alpha\,\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)$$
$$=a\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

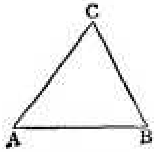
从而 $AB=AC-BC=a\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha-a\sin\alpha$

$$=a\left(\cos\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)$$

$$=a\left(\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$=a\cos 2\alpha\csc\alpha\,(\mathrm{m}).$$

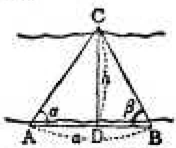
3105. 怎样测定到一个可以看见但不能走到的点的距离?



解 设 AC 是要测的距离. 在适当的方向测出一条基线 AB,依次在 A、B 安置测角仪器测出 $\angle BAC$, $\angle CBA$,这样在 $\triangle ABC$ 中已知一边和两个邻角,就可以求出 AC, 即

$$AC=\frac{AB\sin B}{\sin(A+B)}.$$

3106. 为了测定一条河的宽度, 在河的一边定出基线 AB, 用经纬仪测定关于对岸一点 C 的角 CAB、角 CBA, 设 $AB=a$, $\angle CAB=\alpha$, $\angle CBA=\beta$, 试把河宽 h 用 a、α、β 表示出来.



解 在 $\triangle ABC$ 中用正弦定律,有

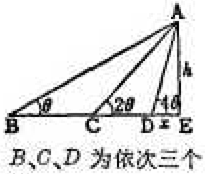
$$\frac{a}{\sin[180^\circ-(\alpha+\beta)]}=\frac{AC}{\sin\beta},$$

$$\therefore\quad AC=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

设由 C 向 AB 所作的高是 CD, 则

$$h=CD=AC\sin\alpha=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

3107. 从地面上一点测量塔顶的仰角, 如果从这点向塔走 30 m 后再测塔顶的仰角为原来的 2 倍, 在同一方向上再走 $10\sqrt{3}$ m 后测的仰角是第二次测得的 2 倍, 试求第一次测得的仰角.



解 设 $AE=h$ 为塔, B、C、D 为依次三个观测点, 设 $\angle ABE=\theta$, 则

$$\angle ACE=2\theta,\ \angle ADE=4\theta,$$

故 $\quad BE=h\operatorname{ctg}\theta,\ CE=h\operatorname{ctg}2\theta,$

$$BC=h\operatorname{ctg}\theta-h\operatorname{ctg}2\theta.$$

同理, $CD=h\operatorname{ctg}2\theta-h\operatorname{ctg}4\theta$, 从而

$$\frac{BC}{CD}=\frac{\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{ctg}2\theta}{\operatorname{ctg}2\theta-\operatorname{ctg}4\theta}.$$

其中 $\quad\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{30}{10\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$

且 $\quad\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{ctg}2\theta=\dfrac{1}{\sin 2\theta},$

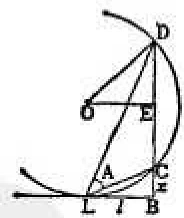
$$\operatorname{ctg}2\theta-\operatorname{ctg}4\theta=\frac{1}{\sin 4\theta},$$

所以 $\quad\sqrt{3}=\dfrac{\sin 4\theta}{\sin 2\theta}=2\cos 2\theta,$

$$\cos 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore\quad 2\theta=30^\circ,\ \theta=15^\circ.$$

3108. 有塔 BC, 上立旗竿 CD, 已知在距塔底 B 为 l 的地方看旗竿能有最大的张角, 求塔高和旗竿长.



解 设 L 在过 B 的水平线上, 如果 $\angle DLC$ 最大, 则过 D、C、L 所作的圆与 BL 相切. 故

$$BL^2=BC\cdot BD.\quad ①$$

又设这个圆的中心为 O, 由 O 向 DC 作垂线 OE, 则 $\angle DOE=\angle DLC=A$, $OE=LB=l$, 因此

$$DE=OE\operatorname{tg}\angle DOE=l\operatorname{tg}A.$$

竿长为 $\quad DC=2l\operatorname{tg}A.$

把这个值代入 ①, 且设 $BC=x$, 有

$$l^2=x(x+2l\operatorname{tg}A),$$

解这个关于 x 的二次方程, 且取 $\cos A>0$, 有

$$x=\frac{l(1-\sin A)}{\cos A}$$

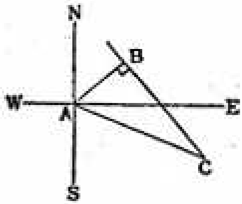
$$=\frac{l\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{l\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)}{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}$$

$$=l\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right).$$

3109. 一天上午 10 时在灯塔上观测到东北方向距灯塔 9 海里处有一艘轮船, 船向东南方向开. 下午 1 时这艘船在灯塔的东 15° 南的方向上. 试求船的速度及第二次观测时

船距灯塔多远。



解　设 A 为灯塔的位置，B 为上午10时船的位置，C 为下午1时船的位置。因为 AB 为东北方向，BC 为东南方向，所以 $\angle ABC=90^\circ$。因为 AC 为东 15° 南，所以 $\angle BAC=60^\circ$。在直角三角形 ABC 中，

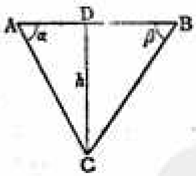
$$BC=AB\cdot \operatorname{tg}\angle BAC$$
$$=9\cdot \operatorname{tg}60^\circ=9\sqrt{3}\text{（海里）}.$$

故　$$AC=AB\cdot \sec\angle BAC$$
$$=9\sec 60^\circ=18\text{（海里）}.$$

由于从 B 到 C 化了三小时，所以速度为

$$9\sqrt{3}\div 3=3\sqrt{3}\approx 5.196\text{（海里/小时）}.$$

3110. 在V形溪谷上架有长为 l 的水平的桥，溪谷两岸的倾角分别为 α、β，证明溪底至桥的高度为 $\dfrac{l}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$。



解　设 AB 为水平的桥，溪谷的两岸为 AC、BC，则 $\angle CAB=\alpha$，$\angle CBA=\beta$，作 $CD\perp AB$，设 $CD=h$，则

$$AD=CD\operatorname{ctg}A,\ DB=CD\operatorname{ctg}B,$$

从而　$$l=AD+DB=h\operatorname{ctg}\alpha+h\operatorname{ctg}\beta,$$

故　$$h=\frac{l}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}.$$

3111. 假设地球的轨道是一个半径为92700000公里的圆，设由天狼星看这个轨道所张的角为0.4″，求地球到天狼星的距离。

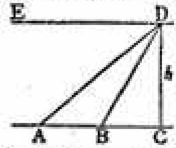
解　微小圆心角所对的弧长可以近似地等于相应的弦长，故所求的距离相当于求一个圆的半径，在这个圆中0.4″的圆心角所对的弧长约为92700000×2公里。设所求的距离为 x 公里，

$$0.4'':180^\circ=92700000\times 2:\pi x,$$

$$x=\frac{180\times 60\times 60\times 92700000\times 2}{\pi\times 0.4}$$

$$=\frac{300348\times 10^9}{\pi}\approx 9.56\times 10^{13}\text{（公里）}.$$

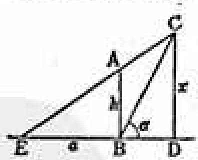
3112. 有高为 h m的塔 CD，从塔顶 D 看塔底所在水平直线上的两点 A、B（A、B 在塔的同一侧），俯角为 $45^\circ-A$，$45^\circ+A$。求 A、B 的距离。



解　设 DE 为过 D 的水平线，则 $DC=h$(m)，
$\angle EDA=45^\circ-A$，$\angle EDB=45^\circ+A$，从而
$$\angle CDB=45^\circ-A,\ \angle CDA=45^\circ+A.$$
又因为
$$CA=DC\operatorname{tg}\angle CDA,\ CB=DC\cdot\operatorname{tg}\angle CDB,$$
则　$AB=DC\cdot\operatorname{tg}\angle CDA-DC\cdot\operatorname{tg}\angle CDB$，
从而

$$AB=h[\operatorname{tg}(45^\circ+A)-\operatorname{tg}(45^\circ-A)]$$
$$=h\left[\frac{1+\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}A}-\frac{1-\operatorname{tg}A}{1+\operatorname{tg}A}\right]$$
$$=h\,\frac{4\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2A}=2h\operatorname{tg}2A\text{(m)}.$$

3113. 从距离高为 h 的塔底 a 的地方，看见塔顶与山顶成一直线，从塔底处看山顶仰角为 α。求山的高度。



解　设塔为 AB，山为 CD，E 为第一次观测的地方。则 $EB=a$，$\angle CBD=\alpha$，若设 $CD=x$，由相似三角形，则

$$DE=CD\cdot\frac{BE}{AB}=\frac{ax}{h},$$

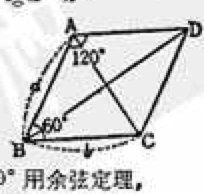
所以　$$DB=\frac{ax}{h}-a,$$

从而在 $\triangle CBD$ 中

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{x}{\dfrac{ax}{h}-a},$$

$$\therefore\ x=\frac{ah\operatorname{tg}\alpha}{a\operatorname{tg}\alpha-h}.$$

3114. 平行四边形中两相邻边为 a、b，夹角为 60°，求两条对角线的长。



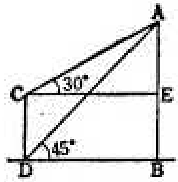
解　设平行四边形为 $ABCD$，$\angle ABC=60^\circ$ 用余弦定理，

$$AC=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2-ab},$$

$$BD=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+ab}\,.$$

故两条对角线的长为 $\sqrt{a^2+b^2\pm ab}$。

3115. 水塔与一座高为 30 m 的楼在同一水平面上，从楼底观测塔顶仰角为 45°，从楼顶观测塔顶仰角为 30°，求塔的高度和塔与楼的距离。



解 设 AB 为塔，CD 为楼，过楼顶 C 的水平线交塔于 E，因为 $\angle ACE=30^\circ$，$\angle ADB=45^\circ$，所以 $AB=DB$，设 $AB=DB=x$，在 $\triangle ACE$ 中，$CE=AE\operatorname{ctg}\angle ACE$，从而

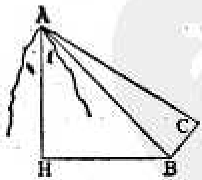
$$x=(x-30)\operatorname{ctg}30^\circ=(x-30)\sqrt{3},$$

从而

$$x=\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{30\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$=15(3+\sqrt{3})\approx 70.98(\mathrm{m}).$$

这就是所求的距离和塔高。

3116. 怎样测定一座山的高度。



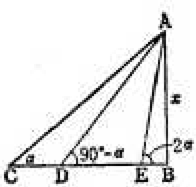
解 设观测者的位置为 B，山顶为 A，先测出基线 BC，在 B 处安放测量仪器测出仰角 ABH。再测 ABC 平面中的 $\angle ABC$、$\angle ACB$。在 $\triangle ABC$ 中已知一边、二角可以求出 BA，为

$$BA=\frac{BC\sin\angle ACB}{\sin(\angle ACB+\angle ABC)},$$

然后，在直角三角形 AHB 中已知斜边和一角可以求出 AH，为

$$AH=h=BA\sin\angle ABH$$
$$=\frac{BC\sin\angle ACB\sin\angle ABH}{\sin(\angle ACB+\angle ABC)}.$$

3117. 从甲地向塔的方向前进 a(m)，到达了乙地，再前进 b(m)，到达丙地。若在乙地看塔的仰角为甲地的仰角的余角，丙地的仰角为甲地的二倍，试求甲地看塔的仰角和塔高。



解 设甲、乙、丙三地为 C, D、E, AB 为塔高并设为 x，因为 $CB=AB\operatorname{ctg}C$, $DB=AB\operatorname{ctg}\angle ADB$，所以代入 $CD=CB-DB$ 后有

$$a=x\operatorname{ctg}\alpha-x\operatorname{tg}\alpha=2x\operatorname{ctg}2\alpha.$$

又从 $DB=AB\operatorname{ctg}\angle ADB$,
$EB=AB\operatorname{ctg}\angle AEB$,
$DB=DB-EB$,

得

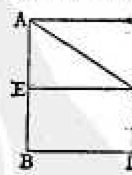
$$b=x\operatorname{tg}\alpha-x\operatorname{ctg}2\alpha=-x\cdot\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha\sin 2\alpha}.$$

从这两个式子解出 α、x 即可。这只要把这两个式子相除，有

$$\frac{a}{b}=-\frac{2\cos 2\alpha\cos\alpha}{\cos 3\alpha}=\frac{2-4\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha-3},$$
$$4\cos^2\alpha=\frac{3a+2b}{a+b},$$

于是可得 α。再由 $AB=AE\sin\angle AEB$, $AE=CE$ 知，$AB=(a+b)\sin 2\alpha$，于是可得塔高。

3118. 从一个高为 300 m 的塔顶看另一个塔的俯角为 30°，两个塔距离 90 m，求小塔的高。

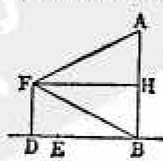


解 设大塔为 AB，小塔为 CD，过 C 且与水平线 DB 平行的直线与 AB 交于 E，因为 $\angle ACE=30^\circ$，所以

$$AE=EC\operatorname{tg}\angle ACE=90\cdot\operatorname{tg}30^\circ=\frac{90}{\sqrt{3}},$$

从而 $$CD=AB-AE=300-\frac{90}{\sqrt{3}}$$
$$=30(10-\sqrt{3})(\mathrm{m}).$$

3119. 在塔的周围有一条宽度等于塔高的护河。离河的对侧岸边 c m 处有另一座高为 a m 的塔，从第二座塔顶看第一座塔的张角为 45°，第一座塔高多少？



解 设 AB 为第一座塔，BE 为护河宽，DF 为第二座塔，$BH=a$, $AB=h$，则 $AH=h-a$, $DE=c$。

$$\operatorname{tg}\angle AFB=\frac{\operatorname{tg}\angle AFH+\operatorname{tg}\angle BFH}{1-\operatorname{tg}\angle AFH\operatorname{tg}\angle BFH}$$

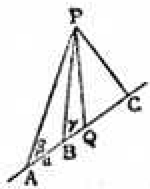
$$=\frac{\dfrac{AH}{FH}+\dfrac{HB}{FH}}{1-\dfrac{AH}{FH}\cdot\dfrac{HB}{FH}}$$

$$=\frac{\dfrac{h-a}{c+h}+\dfrac{a}{c+h}}{1-\dfrac{h-a}{c+h}\cdot\dfrac{a}{c+h}}$$

$$=\operatorname{tg}45^\circ=1,$$

$$\therefore\quad h=\frac{a^2+c^2}{a-c}.$$

3120. 在与垂直方向交成 α 角的斜面 ABC 上，立有一座塔 PQ，又知道从 A、B 看塔的张角为 β、γ，$AB=a$，求塔高 h。



解 设由 P 向 ABC 所作的垂线为 PC，在 $\triangle PAC$ 中，$AC=PC\operatorname{ctg}\angle PAC$。又在 $\triangle PBC$ 中，$BC=PC\operatorname{ctg}\angle PBC$。即 $AC=PC\operatorname{ctg}\beta$，$BC=PC\operatorname{ctg}\gamma$。

$$\therefore\quad AC-BC=a=PC(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma),$$

从而

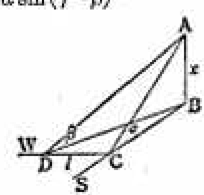
$$PC=\frac{a}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma}=\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\gamma-\beta)}.$$

因为 $PQ\sin\angle PQC=PC$，$\angle PQC=\alpha$，

所以 $$PQ\sin\alpha=\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\gamma-\beta)},$$

$$\therefore\quad PQ=\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}.$$

3121. 在塔的正南方某处测出塔顶的仰角为 α，由此处向西走 l 后再测塔顶，仰角为 β，求塔高。



解 设 AB 为塔，C、D 为先后两次观测的地点。设 $AB=x$，则在 $\triangle ABC$ 中，

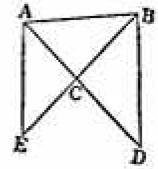
$$BC=AB\operatorname{ctg}\alpha=x\operatorname{ctg}\alpha,$$

同理在 $\triangle ABD$ 中 $BD=x\operatorname{ctg}\beta$。又在直角三角形 BCD 中有 $BD^2-BC^2=CD^2$，从而

$$x^2\operatorname{ctg}^2\beta-x^2\operatorname{ctg}^2\alpha=l^2,$$

故 $$x=\frac{l}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta-\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

3122. 甲乙二人在同一点 C 开始观测 A、B，先测出看 A、B 的张角。然后甲沿 AC 直线后退，直至看 A、B 的张角为先前的一半，设这点为 D 且测出 CD，乙沿 BC 直线后退，直至看 A、B 的张角为先前的一半，设这点为 E 且测出 CE，求 AB 的距离。



解 因为 $\angle ADB=\frac{1}{2}\angle ACB$，所以 $CB=CD$。同理 $CA=CE$。在三角形 ABC 中已知 CB、AC 及夹角 ACB，从而可求出 AB。

3123. 作一个过 $\triangle ABC$ 的顶点 A，且与 BC 切于 D 的圆，这个圆与 CA、AB 交于点 E、F。已知 $AE=a$，$ED=b$，$DF=c$，$FA=d$，求 BC 的长。

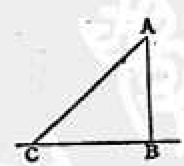
解 设 $\angle AED=x$，则 $\angle AFD=\pi-x$，所以

$$AD^2=a^2+b^2-2ab\cos x$$
$$=c^2+d^2+2cd\cos x,$$

故 $$\cos x=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

由此可求出 $\angle AED$ 和 $\angle AFD$，并进而求出 AD，解 $\triangle AED$，求出 $\angle DAE$，因为 $\angle CDE=\angle DAE$，所以 $\angle CDE$ 可求。又知道了 $\angle AED$ 后可求 $\angle CED$。于是在 $\triangle CDE$ 中 CD 可求。同理 BD 可求。这样就求出了 BC。

3124. 从某处看高为 66 m 的绝壁顶部仰角为 $41^\circ18'$，求顶部至观测者的距离，已知 $\sin 41^\circ18'=0.66$。



解 设 A 为绝壁的顶部，C 为观测者的位置。因为 $AB=66\,\text{m}$，$\angle ACB=41^\circ18'$，所以

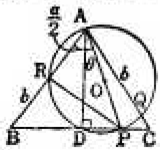
$$AC=\frac{AB}{\sin 41^\circ18'}=\frac{66}{0.66}=100(\text{m}).$$

3125. 在三角形 ABC 中 $BC=a$，$AB-AC=b$（a、b 为常数）。D 为 BC 边的中点，过 A、D 的圆与 BC、CA、AB 边分别交于 P、Q、R，证明

(1) $PQ+PR$ 为常数。

(2) 四边形 $ARPQ$ 的周长为常数。

解 设过 AD 的圆的圆心为 O，半径为 r，因为 $\angle PDA$ 为直角，所以 O 在 AP 上，$AP=2r$. 设 $\angle DAP=\theta$, $\angle BAC=\alpha$, 则



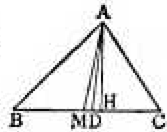
$$2r=AP=AD\sec\theta.$$

(1) $$PR=AP\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)$$
$$=AD\sec\theta\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right),$$
$$PQ=AP\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)$$
$$=AD\sec\theta\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right).$$

$\therefore$ $PQ+PR$
$$=AD\sec\theta\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)\right]=2AD\sec\theta\times\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+\theta+\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\times\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+\theta-\frac{\alpha}{2}+\theta\right)$$
$$=2AD\sec\theta\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta$$
$$=2AD\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}.$$

(2) $AR+RP+PQ+QA$
$$=AP\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right]$$
$$=AD\sec\theta\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right]=AD\sec\theta\times\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\theta+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta\right)$$
$$=\frac{4b^2-a^2}{2b}+\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}$$
$=$常数。

3126. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=7\,\text{cm}$, $CA=5\,\text{cm}$, $AB=6\,\text{cm}$, 试答



(1) 求 BC 边上的中线 AM 的长度。

(2) 求 BC 边上的高 AH 的长度。

(3) 求角 A 的角平分线 AD 的长度。

解 (1) 由中线定理
$$AB^2+AC^2=2(BM^2+AM^2),$$
$$\therefore\quad 36+25=2(12.25+AM^2),$$
$$\therefore\quad 2AM^2=36.5,$$
$$\therefore\quad AM^2=18.25,$$
$$\therefore\quad AM\approx4.27\,(\text{cm}).$$

(2) 由海伦公式知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{9\times2\times3\times4}$,
$$\therefore\quad \sqrt{9\times2\times3\times4}=\frac{1}{2}\times7\times AH,$$
$$\therefore\quad AH=\frac{12\sqrt{6}}{7}\approx4.20\,(\text{cm}).$$

(3) $$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B,$$
$$25=36+49-84\cos B,$$
$$84\cos B=60,\quad \therefore\quad \cos B=\frac{5}{7}.$$

又 $$BD=7\times\frac{6}{11}=\frac{42}{11},$$
$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B$$
$$=36+\frac{1764}{121}-\frac{2\times6\times42\times5}{11\times7}$$
$$=\frac{4356+1764-3960}{121}=\frac{2160}{121}.$$
$$\therefore\quad AD=\frac{12}{11}\sqrt{15}\approx4.23\,(\text{cm}).$$

2. 三角形的解法

3127. 已知 a、b、c, 求 A、B、C。

解 由
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}},\qquad ①$$

可以求得 A、B、C。

如果先求出

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

并使用这个辅助元素，则可由

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}$$

更加方便地计算出 A、B、C。

但是，由上面的前二式求出 A、B，再用

$$A+B+C=180° \quad ②$$

求出 C 的方法，因为下列理由往往不予采用。

(i) 由②求出的 C 值综合了 A、B 的误差，因此比由①直接求出 C 精确度要低。

(ii) 与前面方法相比也不见得简化多少。

但用前一种方法②不一定成立，这些误差用前一方法是无法避免的。

3128. 已知三角形 ABC 的两个角和一边，解这个三角形。

解 设已知三角形的两个角 A、C 和一条边 b，

则 $\quad B=180°-A-C,\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B},$

故 $\quad a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}.$

$$\lg a=\lg b+\lg\sin A-\lg\sin B,$$

同理 $\quad \lg c=\lg b+\lg\sin C-\lg\sin B.$

即可以求出 B、a、c。又如果已知的是 A、B 两角，那么由 $C=180°-B-A$，解法与前相同。

3129. 已知 $c=12$，$a=3$，$C=90°$，解三角形 ABC。

解 $\quad b=\sqrt{12^2-3^2}\approx 11.6,$

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{3}{12}=0.25,$$

故由表查得 $A=14°28.6'$，从而

$B=90°-14°28.6'=75°31.4'$。

3130. 已知 $b:c=5:4$，$c=1000$(m)，$A=37°19'$，求出 b 和 c。

解 $\quad \operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$

$$=\frac{5-4}{5+4}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{1}{9}\operatorname{ctg}\frac{A}{2},$$

所以

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\lg\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\lg 9$$

$$=0.47150-0.95424=\bar{1}.51726$$

$$=\lg\operatorname{tg}18°12'49''.$$

从而 $\quad \dfrac{B-C}{2}=18°12'49'',$

$\therefore\quad B-C=36°25'38''.$

又 $\quad B+C=180°-37°19'=142°41'.$

故 $\quad B=89°33'19'',\ C=53°7'41''.$

由 $\quad b=\dfrac{a\sin B}{\sin A},\ c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$

得 $\quad \lg b=\lg a+\lg\sin B-\lg\sin A$

$$=3+\bar{1}.99999-\bar{1}.78263$$

$$=3.21736=\lg 1649.5.$$

$\therefore\quad b=1649.5$(m)。

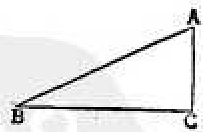
$$\lg c=\lg a+\lg\sin C-\lg\sin A$$

$$=3+\bar{1}.90308-\bar{1}.78263$$

$$=3.12045=\lg 1319.6,$$

$\therefore\quad c=1319.6$(m)。

3131. 在 C 为直角的三角形 ABC 中，已知边 BC 为 4 m，$\angle ABC=24°35'23''$，试求边 AC。



解 在直角三角形 ABC 中，

$$AC=BC\operatorname{tg}B=4\operatorname{tg}24°35'23''.$$

$\because\quad \operatorname{tg}24°35'23''=0.45762.$

从而

$$AC=4\times 0.45762=1.83048\text{(m)}.$$

3132. 已知三角形 ABC 中，$b=3.087$，$c=2.314$，$A=30°25'30''$，计算这个三角形以 a 边为轴旋转出来的体积。

解 已知两边夹角就可以解出这个三角形，从而可以求出 a 边上的高。设这个高的长度为 l，则所求的体积为 $\dfrac{1}{3}\pi l^2\times a$。现计算所要求的数，并代入上式。

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A$$

$$=\frac{3.087-2.314}{3.087+2.314}$$

$$\times\operatorname{ctg}15°12'45''.$$

从而 $\lg\operatorname{tg}\frac{(B-C)}{2}$

$$\begin{aligned}&=\lg 0.773+\lg\operatorname{ctg}15°12'45''\\&\quad-\lg 5.401=\overline{1}.8881795\\&\quad+0.5655456-0.7324742\\&=\overline{1}.7212509.\end{aligned}$$

由此得 $\frac{1}{2}(B-C)=27°45'31.6''$.

此外 $\frac{1}{2}(B+C)=90°-\frac{A}{2}$

$$=74°47'15''.$$

故 $B=102°32'46.6''$.

从而 $l=c\sin B=2.314\sin 77°27'13.4''$.

$$\begin{aligned}\lg l&=\lg 2.314+\lg\sin 77°27'13.4''\\&=0.3643634+\overline{1}.9895036\\&=0.3538670.\end{aligned}$$

又由正弦定理知 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}$,

$$\begin{aligned}\lg a&=\lg b+\lg\sin A-\lg\sin B\\&=\lg 3.087+\lg\sin 30°25'30''\\&\quad-\lg\sin 77°27'13.4''\\&=0.4895366+\overline{1}.7045023\\&\quad-\overline{1}.9895036=0.2045353.\end{aligned}$$

代入 $V=\frac{1}{3}\pi l^2 a$,

$$\begin{aligned}\lg V&=\lg\pi+2\lg l+\lg a-\lg 3\\&=0.4971499+2\times 0.3538670\\&\quad+0.2045253-0.4771213\\&=0.9322979.\end{aligned}$$

得 $V=8.556534$.

3133. 已知 $\sin x=\frac{3}{7}$, $\sec^2 y=5$, $\cos z=-\frac{3}{4}$, 求 x、y、z 的值. x、y、z 是小于 $180°$ 的正角.

解 由 $\sin x=\frac{3}{7}$ 得

$$\begin{aligned}\lg\sin x&=\lg 3-\lg 7=0.4771213\\&\quad-0.8450980=\overline{1}.6320233,\end{aligned}$$

从而 $x=25°22'37''$ 或 $154°37'23''$.

又由 $\sec^2 y=5$ 得 $\cos^2 y=0.2$,

$$\begin{aligned}\lg\cos y&=\frac{1}{2}\lg 0.2=\frac{1}{2}(\overline{1}.3010300)\\&=\overline{1}.650515.\end{aligned}$$

从而 $y=63°26'6''$.

又由 $\cos z=-\frac{3}{4}$ 先取 $\cos z'=\frac{3}{4}$,

$$\lg\cos z'=\lg 0.75=\overline{1}.8750613,$$

求出 $z'=41°24'35''$, 因为 $z=180°-z'$, 所以 $z=180°-41°24'35''=138°35'25''$.

3134. 已知 b、c、A, 求 a、B、C.

解 $\frac{B+C}{2}=\frac{180°-A}{2}$,

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{B+C}{2},$$

由第二式求出 $\frac{B-C}{2}$, 和第一式联立求出 B、C. 再由 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}$ 求出 a.

3135. 已知三角形的三边长为 750.32 m, 685.49 m, 664.03 m, 求三个内角.

解 用公式

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}.$$

$$\begin{array}{ll}a=750.32 & s-a=299.60\\ b=685.49 & s-b=364.43\\ c=664.03 & s-c=385.89\\ \hline 2s=2099.84 & \\ s=1049.92 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r}\lg(s-a)=2.47654\\ \lg(s-b)=2.56162\\ \lg(s-c)=2.58646\\ -\lg s=\overline{4}.97884\\ \hline 2\lg r=4.60346\\ \lg r=2.30173\\ -\lg(s-a)=\overline{3}.52346\\ -\lg(s-b)=\overline{3}.43838\\ -\lg(s-c)=\overline{3}.41354\\ \lg r=2.30173\\ -\lg(s-a)=\overline{3}.52346\\ \hline \lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\overline{1}.82519\end{array}$$

$$\therefore\quad A=67°32'11''$$

$$\begin{array}{r}\lg r=2.30173\\ -\lg(s-b)=\overline{3}.43838\\ \hline \lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\overline{1}.74011\end{array}$$

$$\therefore\quad B=57°35'36''.$$

$$\begin{array}{r}
\lg r=2.30173\\
-\lg(s-c)=\bar{3}.41354\\
\hline
\lg \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}=\bar{1}.71527
\end{array}$$

$$\therefore\quad C=54°52'11''$$

故
$$A=67°32'11'',\quad B=57°35'36'',\quad C=54°52'11''.$$

3136. 在$\triangle ABC$中，已知$A=58°37'58''$，$b=745.24\,\mathrm{m}$，$c=729.26\,\mathrm{m}$。计算B、C和a。

解 根据第3134题，用公式

$$\frac{B+C}{2}=\frac{180°-A}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{B+C}{2},$$

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}.$$

$$\begin{array}{rl}
b=745.24 & A=58°37'58''\\
c=729.36 & \\
\hline
b-c=15.88 & B+C=121°22'2''\\
b+c=1474.60 & \dfrac{B+C}{2}=60°41'1''.
\end{array}$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\lg(b-c)-\lg(b+c)+\lg\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}=1.20085-\bar{4}.83133+0.25061=\bar{2}.28279,$$

$$\therefore\quad \frac{B-C}{2}=3955''=1°5'55''.$$

$$\because\quad \frac{B+C}{2}=60°41'1'',\quad \frac{B-C}{2}=1°5'55'',$$

$$\therefore\quad B=61°46'56'',\quad C=59°35'6''.$$

$$\lg a=\lg b+\lg\sin A-\lg\sin B=2.87229+\bar{1}.93138-\bar{1}.94506=2.85861,$$

$$\therefore\quad a=722.12.$$

最后得
$$\begin{cases}B=61°46'56'',\\ C=59°35'6'',\\ a=722.12\,\mathrm{m}.\end{cases}$$

3137. 在三角形ABC中，已知$b=1024.6\,\mathrm{m}$，$c=1807.5\,\mathrm{m}$，$B=33°30'5''$，求a，A，C。

解 用公式

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b},\quad a=\frac{b\sin A}{\sin B},$$

$$A=180°-(B+C).$$

因为$B<90°$，$b<c$，所以当$\left|\dfrac{c\sin B}{b}\right|<$、$=$、$>1$时分别为有两解、一解、无解。

$$\begin{array}{r}
b=1024.6\\
c=1807.5\\
B=33°30'5''\\
\hline
-\lg b=\bar{4}.98945\\
\lg c=3.25708\\
\lg\sin B=\bar{1}.74191\\
\hline
\lg\sin C=\bar{1}.98844
\end{array}$$

$$\therefore\quad C_1=76°50'20'',\quad C_2=103°9'40''.$$

$$\begin{array}{r}
B=33°30'5''\\
C_1=76°50'20''\\
\hline
B+C_1=110°20'25''\\
A_1=69°39'35''\\
\hline
\lg b=3.01055\\
\lg\sin A_1=\bar{1}.97204\\
-\lg\sin B=0.25809\\
\hline
\lg a_1=3.24068
\end{array}$$

$$\therefore\quad a_1=1740.52.$$

$$\begin{array}{r}
B=33°30'5''\\
C_2=103°9'40''\\
\hline
B+C_2=136°39'45''\\
A_2=43°20'15''\\
\hline
\lg b=3.01055\\
\lg\sin A_2=\bar{1}.83651\\
-\lg\sin B=0.25809\\
\hline
\lg a_2=3.10515
\end{array}$$

$$\therefore\quad a_2=1273.94$$

故答案为$a=1740.5\,\mathrm{m}$，$A=69°39'35''$，$C=76°50'20''$或$a=1273.5\,\mathrm{m}$，$A=43°20'15''$，$C=103°9'40''$。

3138. 在三角形ABC中，$a=156$，$B=39°40'$，$C=72°21'$，解这个三角形。

解 $A=180°-(B+C)=180°-(39°40'+72°21')=67°59'$.

$$\lg b=\lg a+\lg\sin B-\lg\sin A$$
$$=\lg 156+\lg\sin 39°40'-\lg\sin 67°59'$$
$$=2.1931246+\bar{1}.8050385$$
$$-\bar{1}.9671148=2.0310483.$$

从而 $b=107.411$.

又

$$\lg c=\lg a+\lg\sin C-\lg\sin A$$
$$=\lg 156+\lg\sin 72°21'-\lg\sin 67°59'$$
$$=2.1931246+\bar{1}.9790594$$
$$-\bar{1}.9671148=2.2050692.$$

从而 $c=160.550$.

3139. 已知两边和其中一边的对角,解这个三角形.

解 设在$\triangle ABC$中,已知a、b两边和角A,则

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\ \therefore\ \sin B=\frac{b\sin A}{a}. \qquad ①$$

当$\frac{b\sin A}{a}>1$时不存在满足①的角B,因此不能构成三角形.

当$\frac{b\sin A}{a}=1$时,由①知$\sin B=1$,因此得$B=90°$. 这时若$A\geqq 90°$则不能构成三角形. 当$A<90°$时,$\triangle ABC$是以B为直角的直角三角形,因此

$$C=90°-A,\ c=b\cos A$$
$$(或\ c=\sqrt{a^2+b^2}).$$

当$\frac{b\sin A}{a}<1$时,满足①式的B值有两个,一个是锐角,另一个是钝角. 设锐角为B_1,钝角为B_2. 当$A+B_1<180°$,$A+B_2<180°$时取$B=B_1$或$B=B_2$都行,因此得到两解. 当$A+B_1<180$,$A+B_2\geqq 180°$时,$B=B_2$不能成立,只有$B=B_1$一个解. 当$A+B_1\geqq 180°$,$A+B_2\geqq 180°$时,$B=B_1$、$B=B_2$都不能成立,这时无解.

解出了B之后,可由$C=180°-A-B$求出C. 再由$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$或$c=\frac{b\sin C}{\sin B}$可以求出c.

注 1. 作$\angle CAD$等于已知角A,CA为已知边长b. 由C向AD作垂线CH,则$CH=b\sin A$. 当$\frac{b\sin A}{a}>1$时$b\sin A>a$,即$CH>a$,如果以C为圆心、a为半径作圆,那么这个圆不与AD相交. 当$\frac{b\sin A}{a}<1$时得$CH<a$,如果以C为圆心、a为半径作圆,那么必与AD相交. 但当交点B与A重合时不构成三角形ABC. 而当交点B在DA向A方向的延长线上时,$\angle CAB$为$\angle CAD$的补角,所以$\triangle ABC$不满足给出的条件,这就相当于$A+B\geqq 180°$时的情况.

2. 本题有两解时称为两值情形.

3140. 在三角形ABC中,若$B=60°40'$,$C=59°10'$,$a=10.62$,求b.

解

$$A=180°-(B+C)$$
$$=180°-(60°40'+59°10')$$
$$=60°10'.$$

因此

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{10.62\sin 60°40'}{\sin 60°10'},$$
$$\lg b=\lg 10.62+\lg\sin 60°40'$$
$$-\lg\sin 60°10'=1.0261$$
$$+\bar{1}.9404-\bar{1}.9382=1.0283,$$

从而 $b=10.673$.

3141. 在三角形ABC中,已知$b=63.279$,$c=56.283$,$A=46°29'35''$,求B、C、a.

解

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2};$$

所以

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\lg(b-c)$$
$$+\lg\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\lg(b+c).$$
$$b+c=63.279+56.283=119.562.$$

从而 $\lg(b+c)=2.0775932.$

又 $b-c=63.279-56.283=6.996,$

从而 $\lg(b-c)=0.8448498.$

又 $\frac{A}{2}=23°14'47.5'',$

从而 $\lg\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=0.3669740.$

因此

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=0.8448498$$
$$+0.3669740-2.0775932$$
$$=\bar{1}.1342306.$$

从而 $\frac{B-C}{2}=7°45'24.8''.$

而 $\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}=66°45'12.5'',$

所以 $B=7°45'24.8''+66°45'12.5''$

$=74°30'37.3''$.

$C=66°45'12.5''-7°45'24.8''$

$=58°59'47.7''$.

由此得

$$\begin{aligned}\lg a&=\lg b+\lg\sin A-\lg\sin B\\&=\lg 63.279+\lg\sin 46°29'35''\\&\quad-\lg\sin 74°30'37.3''\\&=1.8012596+\bar{1}.8605122\\&\quad-\bar{1}.9839323=1.6778395.\end{aligned}$$

从而 $a=47.625$.

3142. 已知三角形 ABC 的两边与夹角，解这个三角形.

解 设已知的是 b、c 边和角 A，则

$$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c},$$

$$\therefore\quad \frac{\sin(A+C)}{\sin C}=\frac{b}{c},$$

$$\therefore\quad \frac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin C}=\frac{b}{c},$$

$$\therefore\quad \sin A\operatorname{ctg}C+\cos A=\frac{b}{c}.$$

由此可求出 $\operatorname{ctg}C$，从而 C 可求，因此 B 也可以求出. 但这个方法不能用对数计算，为了使用对数，可如下法解答.

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{(B-C)}{2}}{\operatorname{tg}\frac{(B+C)}{2}}=\frac{b-c}{b+c},$$

因为 $\operatorname{tg}\frac{(B+C)}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$,

所以 $\operatorname{tg}\frac{(B-C)}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$,

由此求出 $\frac{1}{2}(B-C)$. 又因为

$$\frac{1}{2}(B+C)=90°-\frac{A}{2},$$

故 $\frac{1}{2}(B+C)$ 也可求出. 因此可以求出 B、C. 又从 $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$ 可以求出 a(当 $b=c$ 时，因为 $B=C=90°-\frac{A}{2}$，解法就更简单了).

注 因为

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}&=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}\\&=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}\\&=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}},\end{aligned}$$

所以 $$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}},$$

这样一种求 a 的方法在实际计算时是方便的.

3143. 已知三角形 ABC 中两边为 18、2，其夹角为 55°，求其他两个角.

解 $$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)&=\frac{18-2}{18+2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\\&=\frac{8}{10}\operatorname{ctg}27°30',\end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned}&\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)\\&=\lg\operatorname{ctg}27°30'+\lg 8-\lg 10\\&=\lg\operatorname{ctg}27°30'+3\lg 2-1\\&=0.1866133.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(B-C)=56°56'51''.$$

而 $\frac{1}{2}(B+C)=62°30'$,

所以 $B=119°26'51''$，$C=5°33'39''$.

3144. 已知三角形中有两边之比为 9:7，这两边的夹角是 64°12'，求其他的角.

解 $$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{(B-C)}{2}&=\frac{9-7}{9+7}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\\&=\frac{1}{8}\operatorname{ctg}32°6',\end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned}\lg\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}&=\lg\operatorname{ctg}32°6'-\lg 8\\&=\lg\operatorname{tg}57°54'-3\lg 2=\bar{1}.2994355,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(B-C)=11°16'10'',$$

又 $\frac{1}{2}(B+C)=57°54'$,

所以 $B=69°10'10''$，$C=46°37'50''$.

3145. 已知三角形 ABC 中 $a=30$, $b=20$, a、b 的夹角为 22°, 求其他的角.

解 $\operatorname{tg}\dfrac{(A-B)}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$

$$=\frac{30-20}{30+20}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{2}{10}\operatorname{ctg}11^\circ,$$

故 $\lg\operatorname{tg}\dfrac{(A-B)}{2}$

$$=\lg\operatorname{ctg}11^\circ+\lg 2-\lg 10$$
$$=\lg\operatorname{ctg}11^\circ+\lg 2-1$$
$$=0.0123777.$$

$\therefore\quad \dfrac{1}{2}(A-B)=45^\circ48'59'',$

又 $\dfrac{1}{2}(A+B)=79^\circ.$

所以 $A=124^\circ48'59''$, $B=33^\circ11'1''$.

3146. 已知$\triangle ABC$ 中 $b=14$, $c=11$, $A=60^\circ$, 证明 $B=71^\circ44'29.5''$.

解 $\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(B-C)=\dfrac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$

$$=\frac{3}{25}\operatorname{ctg}30^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{25},$$

故 $\lg\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(B-C)=\lg\dfrac{3\sqrt{3}}{25}$

$$=\frac{3}{2}\lg 3-\lg 25$$
$$=\frac{3}{2}\lg 3-\lg\frac{100}{4}$$
$$=\frac{3}{2}\lg 3-2+2\lg 2$$
$$=\bar{1}.3177419.$$

故 $\dfrac{1}{2}(B-C)=11^\circ44'29.5'',$

又 $\dfrac{1}{2}(B+C)=60^\circ,$

所以

$B=71^\circ44'29.5''$, $C=48^\circ15'30.5''$.

3147. 已知三角形 ABC 中两条边为 80、100, 夹角为 60°, 求其他的角.

解 $b=100$, $c=80$,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$
$$=\frac{1}{9}\operatorname{ctg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{9}=3^{-\frac{3}{2}},$$

故 $\lg\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(B-C)=\lg 3^{-\frac{3}{2}}$

$$=-\frac{3}{2}\lg 3=\bar{1}.2843180.$$

故 $\dfrac{1}{2}(B-C)=10^\circ53'36'',$

又 $\dfrac{1}{2}(B+C)=60^\circ,$

所以 $B=70^\circ53'36''$, $C=49^\circ6'24''$.

3148. 已知三角形 ABC 中两边为 3 和 5, 夹角为 120°, 求其他的角.

解 $b=5$, $c=3$,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$
$$=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}60^\circ=\frac{1}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{48}},$$

故 $\lg\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(B-C)=\lg\dfrac{1}{\sqrt{48}}$

$$=-\frac{1}{2}\lg 48=-\frac{1}{2}\times 1.6812412$$
$$=\bar{1}.1593794.$$

$\therefore\quad \dfrac{1}{2}(B-C)=8^\circ12'48'',$

又 $\dfrac{1}{2}(B+C)=30^\circ,$

所以 $B=38^\circ12'48''$, $C=21^\circ47'12''$.

3149. 已知三角形 ABC 中 $\dfrac{a}{b}=1.2$, $C=60^\circ$, 求其他的角.

解 $\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(A-B)=\dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$

$$=\frac{\left(1\frac{2}{9}-1\right)}{\left(1\frac{2}{9}+1\right)}\operatorname{ctg}30^\circ$$
$$=\frac{1}{10}\operatorname{ctg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{10}.$$

因此 $\lg\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(A-B)=\lg\dfrac{\sqrt{3}}{10}$

$$=\frac{1}{2}\lg 3-1=\bar{1}.2385606.$$

$\therefore\quad \dfrac{1}{2}(A-B)=9^\circ49'35'',$

又因为 $\dfrac{1}{2}(A+B)=60^\circ,$

所以 $A=69^\circ49'35''$, $B=50^\circ10'25''$.

3150. 已知三角形 ABC 中

$$\lg b=3.2714872,\ \lg c=1.1159263,$$
$$A=69°51'28.5'',$$

解这个三角形.

解　在公式 $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A$ 中设 $\frac{c}{b}=\operatorname{tg}\varphi$, 则

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}=\operatorname{tg}(45°-\varphi),$$

所以　$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\operatorname{tg}(45°-\varphi)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A,$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\lg\operatorname{tg}(45°-\varphi)+\lg\operatorname{ctg}\frac{A}{2},$$

其中　$\lg\operatorname{tg}\varphi=\lg c-\lg b=1.1159263-3.2714872=\bar{3}.8444391.$

故　　　$\varphi=24'1.6''.$

所以　$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\lg\operatorname{tg}44°35'58.4''+\lg\operatorname{ctg}34°55'44.3''$
$=\bar{1}.9939292+0.1559196$
$=0.1498488,$

$\therefore\ \frac{1}{2}(B-C)=54°41'39.1''.$

而　$\frac{1}{2}(B+C)=90°-\frac{1}{2}A$
$=90°-34°55'44.3''$
$=55°4'15.7''.$

所以　$B=109°45'54.9'',\ C=22'36.7''.$

又从　　$a=\frac{b\sin A}{\sin B},$

得　$\lg a=\lg b+\lg\sin A-\lg\sin B$
$=\lg b+\lg\sin 69°51'28.5''-\lg\sin 109°45'54.9''$
$=3.2714872+\bar{1}.9725923-\bar{1}.9736293=3.2704502.$

所以 $a=1864.02$. 又从给出的对数值直接可得 $b=1868.48,\ c=13.06$.

3151. 已知三角形 ABC 中两条边长为 8870.5 m, 13121.5 m, 夹角为 $65°16'30''$, 求第三边.

解　设 $b=8870.5,\ c=13121.5,\ A=65°16'30''$, 则有

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C-B)=\frac{c-b}{c+b}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A$$
$$=\frac{13121.5-8870.5}{13121.5+8870.5}\operatorname{ctg}32°38'15''.$$

从而　$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C-B)$
$=\lg 4251+\lg\operatorname{ctg}32°38'15''-\lg 21992=3.6284911+0.1935153-4.3422647$
$=\bar{1}.4797417,$

$\therefore\ \frac{1}{2}(C-B)=16°47'41''.$

又　$\frac{1}{2}(C+B)=90°-\frac{1}{2}A$
$=90°-\frac{1}{2}\times 65°16'30''$
$=57°21'45''.$

所以　　　$C=74°9'26''.$

又由正弦定理,

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{13121.5\times\sin 65°16'30''}{\sin 74°9'26''},$$

所以　$\lg a=\lg 13121.5+\lg\sin 65°16'30''-\lg\sin 74°9'26''=4.1179835+\bar{1}.9582416-\bar{1}.9831816$
$=4.0930435.$

由此得 $a=12389.2\,\text{m}$.

3152. 已知三角形 ABC 中 $a=35960.18,\ b=98712.97,\ C=35°18'57.17''$, 求 A、B、c 和三角形的面积.

解　$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-A)=\frac{b-a}{b+a}\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-A)=\frac{98712.97-35960.18}{98712.97+35960.18}\times\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\times 35°18'57.17''\right)$$
$$=\frac{62752.79}{134673.15}\operatorname{ctg}17°39'28.58''.$$

从而　$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-A)=\lg 62752.79+\lg\operatorname{ctg}17°39'28.58''-\lg 134673.15=4.7976330+0.4971197-5.1292810$
$=0.1654717,$

$\therefore\ \frac{1}{2}(B-A)=55°39'37.12'',$

而 $\frac{1}{2}(B+A)=90^\circ-\frac{C}{2}=72^\circ20'31.42''$，

所以

$$B=128^\circ0'8.54'',\ A=16^\circ40'54.30''.$$

又由正弦定理，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$，

所以
$$\begin{aligned}\lg c&=\lg a+\lg\sin C-\lg\sin A\\&=\lg 35960.18\\&\quad+\lg\sin 35^\circ18'57.17''\\&\quad-\lg\sin 16^\circ40'54.30''\\&=4.5558219+\bar{1}.7619908\\&\quad-\bar{1}.4579657=4.8598470,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad c=72418.08.$$

又关于面积 S 有

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B,$$

$$\therefore\quad \lg S=\lg a+\lg c+\lg\sin B-\lg 2,$$

其中 $\lg a$、$\lg c$ 都已知道，代入得

$$\begin{aligned}\lg S&=4.5558219+4.8598470\\&\quad+\lg\sin 128^\circ0'8.54''-\lg 2\\&=4.5558219+4.8598470\\&\quad+\bar{1}.8965181-0.3010300\\&=9.0111570.\end{aligned}$$

因此 $\qquad S\approx 1026023000.$

3153. 已知三角形 ABC 中 $b=187.1212$，$c=93.1478$，$A=70^\circ47'25.4''$，求三角形 ABC 的外接圆半径。

解 由 $\frac{b}{\sin B}=2R$，得

$$\lg R=\lg b-\lg\sin B-\lg 2.$$

象前题那样求出

$$\lg b=2.2721230,$$
$$\lg\sin B=\bar{1}.9931726,$$

从而

$$\begin{aligned}\lg R&=2.2721230-\bar{1}.9931726\\&\quad-0.3010300=1.97792104,\end{aligned}$$

因此 $\qquad R=95.0431.$

3154. 在三角形 ABC 中，已知 $a=279$，$b=386$，$c=293$，求 A、B、C。

解 注意到有

$$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{2}[\lg(s-b)+\lg(s-c)-\lg(s-a)-\lg s],$$

其中 $\qquad s=\frac{1}{2}(a+b+c)=479,$

从而 $s-a=200$，$s-b=93$，$s-c=186$，

故
$$\begin{aligned}\lg s&=2.6803355,\\\lg(s-a)&=2.3010300,\\\lg(s-b)&=1.9684829,\\\lg(s-c)&=2.2695129.\end{aligned}$$

把这些数值代入，

$$\begin{aligned}\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\frac{1}{2}(1.9684829+2.2695129\\&\quad-2.3010300-2.6803355)\\&=\bar{1}.6283152.\end{aligned}$$

从而 $\qquad \frac{A}{2}=23^\circ1'19''$，$A=46^\circ2'38''$。

又
$$\begin{aligned}\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\frac{1}{2}(2.3010300+2.2695129\\&\quad-1.9684829-2.6803355)\\&=\bar{1}.9608622.\end{aligned}$$

从而

$$\frac{B}{2}=42^\circ25'18.5'',\ B=84^\circ50'37''.$$

最后有

$$\begin{aligned}\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\frac{1}{2}(2.3010300+1.9684829\\&\quad-2.2695129-2.6803355)\\&=\bar{1}.6598323.\end{aligned}$$

从而 $\quad \frac{C}{2}=24^\circ33'22.4''$，$C=49^\circ6'45''$。

3155. 在三角形 ABC 中，已知 $a=18$，$b=20$，$c=22$，求 $\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}$。其中取 $\lg 2=0.3010300$，$\lg 3=0.4771213$。

解
$$s=30,\ s-a=12,$$
$$s-b=10,\ s-c=8.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{10\times 8}{30\times 12}}\\&=\sqrt{\frac{8}{36}}=\sqrt{\frac{2}{9}}.\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\lg\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{1}{2}\lg 2-\lg 3\\&=\bar{1}.6733937.\end{aligned}$$

3156. 已知三角形的三边为7、8、9，求各个角。

解 设 $a=7$, $b=8$, $c=9$. 从而 $s=12$, $s-a=5$, $s-b=4$, $s-c=3$.

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{4\times3}{12\times5}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{2}{10}},$$

故 $$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\lg\sqrt{\frac{2}{10}}=\frac{1}{2}(\lg2-\lg10)$$
$$=\frac{1}{2}(\lg2-1)=\bar{1}.6505150.$$

$$\therefore\quad \frac{A}{2}=24°5'41.44'',\ A=48°11'22.9'',$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}=\sqrt{\frac{5\times3}{12\times4}}$$
$$=\sqrt{\frac{5}{16}}=\sqrt{\frac{10}{32}},$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\lg\sqrt{\frac{10}{32}}=\frac{1}{2}(\lg10-\lg32)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\lg2=\bar{1}.7474250.$$

$$\therefore\quad \frac{B}{2}=29°12'21.36'',$$
$$B=58°24'42.7''.$$

从而 $$C=180°-48°11'22.9''-58°24'42.7''=73°23'54.4''.$$

3157. 已知 $\triangle ABC$ 中 $b=4c$, $A=65°$, 求 B、C.

解 在公式

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

中, 因为 $b=4c$, $A=65°$, 所以

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{4c-c}{4c+c}\operatorname{ctg}32°30'$$
$$=\frac{3}{5}\operatorname{ctg}32°30'.$$

从而 $$\lg\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=0.47712+0.19581-0.69897=\bar{1}.97396,$$

$$\therefore\quad \frac{B-C}{2}=43°17'.$$

又 $$\frac{B+C}{2}=\frac{180°-65°}{2}=57°30',$$

所以 $B=43°17'+57°30'=100°47'$,
$C=57°30'-43°17'=14°13'$.

3158. 已知三角形 ABC 中
$A=34°28'54''$, $b=654.74$,
$c=378.45$,
解这个三角形.

解 $$\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2},$$
$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2},$$
$$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

以上是计算时使用的公式, 计算过程如下:

先算 $\frac{B-C}{2}$.

$$\frac{A}{2}=17°14'27'',\ b=654.74,$$
$$c=378.45,$$
$$b+c=1033.19,\ b-c=276.29,$$
$$\lg(b-c)=2.44136,$$
$$\lg(b+c)=3.01418,$$
$$\lg\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=0.50817,$$

$$\therefore\quad \lg\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=2.44136+0.50817-3.01418=\bar{1}.93535,$$
$$\frac{B-C}{2}=40°45'4''.$$

又得 $$\frac{B+C}{2}=72°45'33'',$$

所以 $B=113°30'37''$, $C=32°0'29''$.

现在算 a,

$$\lg(b+c)=3.01418,$$
$$\lg\sin\frac{A}{2}=\lg\sin17°14'27''=\bar{1}.47186,$$
$$\lg\cos\frac{B-C}{2}=\lg\cos40°45'4''=\bar{1}.87941.$$

故 $$\lg a=3.01418+\bar{1}.47186-\bar{1}.87941=2.60663,$$

所以 $$a=404.23.$$

$$\therefore\quad a=404.23,\ B=113°30'37'',\ C=32°0'29''.$$

3159. 已知三角形 ABC 中
$A=73°49'36''$, $B=62°34'47''$,

$$c=428.38,$$

解这个三角形.

解　所用的公式是

$$C=180^\circ-(A+B),\ a=\frac{c\sin A}{\sin C},$$

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}.$$

计算过程如下. 先算 C,

$$C=180^\circ-73^\circ49'36''-62^\circ34'47''$$
$$=43^\circ35'37''.$$

再算 a,　　$\lg c=2.63183$,

$$\lg\sin A=\lg\sin 73^\circ49'36''=\bar{1}.98246,$$
$$\lg\sin C=\bar{1}.83856,$$

故　$\lg a=2.63183+\bar{1}.98246-\bar{1}.83856$

$$=2.77573,$$
$$a=596.66.$$

最后算 b,

$$\lg c=2.63183,\ \lg\sin B=\lg\sin 62^\circ34'47''$$
$$=\bar{1}.94824,\ \lg\sin C=\bar{1}.83856,$$

故　$\lg b=2.63183+\bar{1}.94824$

$$-\bar{1}.83856=2.74151,$$
$$b=551.45,$$
$$\therefore\quad a=596.69,\ b=551.45,$$
$$C=43^\circ35'37''.$$

3160. 已知三角形 ABC 中,

$A=32^\circ47'4''$, $B=44^\circ17'27''$, $b=372.67$. 求 a.

解　$a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{372.67\sin 32^\circ47'4''}{\sin 44^\circ17'27''}$,

从而　$\lg a=\lg 372.67+\lg\sin 32^\circ47'4''$

$$+\lg\csc 44^\circ17'27''=2.571324$$
$$+\bar{1}.733582+0.155957$$
$$=2.460863,$$

所以　　$a=288.977$.

3161. 已知三角形 ABC 中 $B=38^\circ26'8''$, $C=72^\circ15'6''$, BC 边$=1824.5\,\mathrm{m}$, 求角 B 的对边长.

解　$AC=\dfrac{BC\sin B}{\sin(B+C)}$

$$=\frac{1824.5\sin 38^\circ26'8''}{\sin(38^\circ26'8''+72^\circ15'6'')}$$

$$=\frac{1824.5\sin 38^\circ26'8''}{\sin 69^\circ18'46''},$$

从而　$\lg AC=\lg 1824.5+\lg\sin 38^\circ26'8''$

$$-\lg\sin 69^\circ18'46''$$
$$=3.261144+\bar{1}.793535$$
$$-\bar{1}.971055=3.083624,$$

从而　　$AC=1212.339\ \mathrm{m}$.

3162. 已知三角形 ABC 的三边为 32、40、66, 求最大的内角.

解　设 66 所对的角为角 C, C 就是最大角, 那么

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}},$$

其中　　$s=69,\ s-a=37,$

$$s-b=29,\ s-c=3.$$

故　$\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{69\times 3}{37\times 29}}=\sqrt{\dfrac{207}{1073}}$,

$$\lg\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\lg\sqrt{\frac{207}{1073}}$$

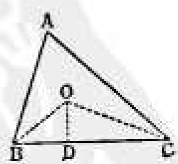
$$=\frac{1}{2}(\lg 207-\lg 1073)$$

$$=\bar{1}.6426853.$$

$$\therefore\quad \frac{C}{2}=66^\circ17'16.1'',$$

$$C=132^\circ34'32.2''.$$

3163. 已知角 A, 外接圆半径 R 和内切圆半径 r, 解三角形 ABC.



解　$\dfrac{a}{\sin A}=2R$, 故 $a=2R\sin A$, 于是 a 可求,

$$a=r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)$$

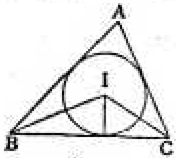
$$=r\frac{\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right)}{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}$$

$$=\frac{2r\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B-C}{2}-\cos\dfrac{B+C}{2}}$$

$$=\frac{2r\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B-C}{2}-\sin\dfrac{A}{2}},$$

由此可以求出 $\cos\dfrac{B-C}{2}$，即把 $\dfrac{B-C}{2}$ 和 $\dfrac{B+C}{2}=90°-\dfrac{A}{2}$ 联立可以求出 B 和 C，从而可求出 b、c。

3164. 在三角形 ABC 中，已知一边 a，一个角 B 和内切圆半径 r，解三角形 ABC。



解　因为 $a=r\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}+r\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$，所以

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{a-r\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}}{r},$$

由该式可以求出 C。知道了 B、C 两个角和一条边 a，用正弦定理可以求出 b、c、A。

3165. 已知三角形 ABC 中 a、b、c 为 4、5、6，求角 B。

解
$$s=\frac{15}{2},\ s-a=\frac{7}{2},$$
$$s-b=\frac{5}{2},\ s-c=\frac{3}{2}.$$
$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}=\sqrt{\frac{15\times5}{8\times12}}$$
$$=\sqrt{\frac{75}{96}}\approx0.88388,$$
$$\therefore\quad \frac{B}{2}=27°53'8'',\ B=55°46'16''.$$

3166. 已知三角形的三边为 5、6、7，用公式 $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$ 求最大的内角。

解　设 A 是最大边所对的角，则
$$a=7,\ s=9,\ s-a=2.$$
故
$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{9\times2}{5\times6}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$$
$$=\sqrt{\frac{6}{10}}\approx0.774597.$$
$$\therefore\quad \frac{A}{2}=39°13'53.5'',\ A=78°27'47''.$$

3167. 已知三角形 ABC 中 $a=73.4$，$b=64.9$，$B=48°13'25''$，求 A、C、c。

解
$$\begin{aligned}\lg\sin A&=\lg a+\lg\sin B-\lg b\\&=\lg73.4+\lg\sin48°13'25''\\&\quad-\lg64.9=\bar{1}.8656961\\&\quad+\bar{1}.8725936-1.8122447\\&=\bar{1}.9260450.\end{aligned}$$

因此　　$A=57°30'11.8''$

或　　$A=122°29'48.2''$，

若 $A=57°30'11.8''$，则
$$\begin{aligned}C&=180°-(57°30'11.8''+48°13'25'')\\&=74°16'23.2'',\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\lg c&=\lg b+\lg\sin C-\lg\sin B\\&=\lg64.9+\lg\sin74°16'23.2''\\&\quad-\lg\sin48°13'25''=1.8122447\\&\quad+\bar{1}.9834299-\bar{1}.8725936\\&=1.9230810.\end{aligned}$$

从而　　$c=83.7686$。

若 $A=122°29'48.2''$，则
$$\begin{aligned}C&=180°-(122°29'48.2''+48°13'25'')\\&=9°16'46.8'',\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\lg c&=\lg b+\lg\sin C-\lg\sin B\\&=\lg64.9+\lg\sin9°16'46.8''\\&\quad-\lg\sin48°13'25''=1.8122447\\&\quad+\bar{1}.2075094-\bar{1}.8725936\\&=1.1471605.\end{aligned}$$

从而　　$c=14.0333$。

3168. 已知三角形 ABC 中 $a=49263$，$b=59375$，$B=83°27'46''$，求 A、C、c。

解
$$\begin{aligned}\lg\sin A&=\lg a+\lg\sin B-\lg b\\&=\lg49263+\lg\sin83°27'46''\\&\quad-\lg59375=4.6925209\\&\quad-\bar{1}.9971670-4.7736036\\&=\bar{1}.9160843.\end{aligned}$$

从而 $A=55°31'2.6''$（因为 $b>a$，故 $B>A$，这时没有两种可能性），因此
$$\begin{aligned}C&=180°-(B+A)\\&=180°-(83°27'46''+55°31'2.6'')\\&=41°1'11.4'',\end{aligned}$$
故
$$\begin{aligned}\lg c&=\lg b+\lg\sin C-\lg\sin B\\&=\lg59375+\lg\sin41°1'11.4''\\&\quad-\lg\sin83°27'46''=4.7736036\\&\quad+\bar{1}.8171158-\bar{1}.9971670\\&=4.5935524.\end{aligned}$$

从而　　$c=39224$。

3169. 已知三角形 ABC 中 $a=2$，$c=3$，$\lg\sin A=\bar{1}.5228787$，求 C。其中取 $\lg3=0.4771213$。

解
$$\sin C=\frac{c}{a}\sin A,$$

$$\lg\sin C=\lg\sin A+\lg c-\lg a$$
$$=\lg\sin A+\lg 3-\lg 2$$
$$=\bar{1}.5228787+0.4771213$$
$$-\lg 2=-\lg 2.$$

故 $\lg\sin C=\lg\dfrac{1}{2}$，$\sin C=\dfrac{1}{2}$，

所以 $C=30°$ 或 $C=150°$。

3170. 在三角形 ABC 中，已知 $a=3428.58$，$B=108°15'27''$，$C=47°25'47''$，求 a 边上的高。

解 $A=180°-(108°15'27''+47°25'47'')$
$=24°18'46''$。

设 a 边上的高为 h，则 ah 与 $\dfrac{a^2\sin B\sin C}{\sin A}$ 都等于三角形面积的 2 倍，从而二者相等。因此 $h=\dfrac{a\sin B\sin C}{\sin A}$，

$$\lg h=\lg a+\lg\sin B+\lg\sin C-\lg\sin A$$
$$=\lg 3428.58+\lg\sin 108°15'27''$$
$$+\lg\sin 47°25'47''-\lg\sin 24°18'46''$$
$$=3.5351143+\bar{1}.9775673$$
$$+\bar{1}.8671422-\bar{1}.6145995$$
$$=3.7652243.$$

因此 $h=5824.04$。

3171. 已知三角形两边为 65、25，它们的对角的差为 60°，求这两个角。

解 $\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(B-C)=\dfrac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$，

故 $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{65+25}{65-25}\operatorname{tg}30°$

$$=\frac{9}{4}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx 1.29904,$$

$$\therefore\ \frac{A}{2}=37°35'21'',$$

$$A=75°10'42''.$$

$B+C=180°-75°10'42''=104°49'18''$，

又 $B-C=60°$，

所以 $B=82°24'39''$，$C=22°24'39''$。

3172. 已知三角形 ABC 中 $b=45.49$，$c=34.58$，$A=69°$，求 a 边上的中线。

解 设 a 边上的中线为 m，则

$$4m^2=b^2+c^2+2bc\cos A$$
$$=(b+c)^2-4bc\sin^2\frac{A}{2},$$

故 $$m=\frac{b+c}{2}\sqrt{1-\frac{4bc\sin^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}},$$

设 $$\frac{4bc\sin^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}=\sin^2\varphi,$$

那么 $m=\dfrac{b+c}{2}\cos\varphi$，由此可用对数计算如下。

$$2\lg\sin\varphi=\lg 4+\lg b+\lg c$$
$$+2\lg\sin\frac{A}{2}-2\lg(b+c)$$
$$=\lg 4+\lg 45.49+\lg 34.58$$
$$+2\lg\sin 34°30'$$
$$-2\lg(45.49+34.58)$$
$$=0.6020600+1.6579159$$
$$+1.5388250+2\times\bar{1}.7531280$$
$$-2\times 1.9034698=\bar{1}.4981173.$$

从而 $\lg\sin\varphi=\bar{1}.7490586$，
$\varphi=34°8'0.8''$，

故 $$\lg m=\lg(b+c)+\lg\cos\varphi-\lg 2$$
$$=\lg(45.49+34.58)$$
$$+\lg\cos 34°8'0.8''-\lg 2$$
$$=1.9034698+\bar{1}.9178897$$
$$-0.3010300=1.5203295.$$

由此得 $m=33.14$。

3173. 已知三角形的周长是 1.20，两个角是 35°17′15″ 和 62°43′30″，求三边。

解 由前面的叙述得

$$a=\frac{(a+b+c)\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

因为 $A=35°17'15''$，$B=62°43'30''$，

从而 $C=81°59'15''$，

$$a=\frac{1.20\sin 17°38'37.5''}{2\cos 31°21'45''\cos 40°59'37.5''}.$$

$$\lg a=\lg 0.6+\lg\sin 17°38'37.5''$$
$$-\lg\cos 31°21'45''$$
$$-\log\cos 40°59'37.5''$$
$$=\bar{1}.7781513+\bar{1}.4815825$$
$$-\bar{1}.9314028-\bar{1}.8778211$$
$$=\bar{1}.4505099.$$

从而 $a=0.282169$。

同样地，

$$\lg b=\lg 0.6+\lg\sin 31°21'45''-\lg\cos 17°38'37.5''-\lg\cos 40°59'37.5''$$
$$=\bar{1}.7781513+\bar{1}.7163793-\bar{1}.9790745-\bar{1}.8778211=\bar{1}.6376355.$$

从而 $b=0.4341457.$

$$\lg c=\lg 0.6+\lg\sin 40°59'37.5''-\lg\cos 17°38'37.5''-\lg\cos 31°21'45''$$
$$=\bar{1}.7781513+\bar{1}.8168884-\bar{1}.9790745-\bar{1}.9314028=\bar{1}.6845624.$$

从而 $c=0.483685.$

3174. 已知三角形 ABC 的面积 $S=18937.07$、两边之和 $a+b=1045.7$，两边之积 $ab=271744$，解这个三角形。

解 从 $a+b=1045.7$，$ab=271744$ 易得 a、b，设 $a>b$，则 $a=563.2$，$b=482.5$，又因为

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,\quad \sin C=\frac{2S}{ab},$$

从而由 $\lg\sin C=\lg 2+\lg S-\lg ab$ 可求出 C，即

$$\lg\sin C=\lg 2+\lg 18937.07-\lg 271744=0.3010300+4.2773128-5.4341600=\bar{1}.1441828.$$

从而 $C=8°0'42''.$

已知 C 以后，可有

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{563.2-482.5}{563.2+482.5}\operatorname{ctg}4°0'21'',$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\lg 80.7+\lg\operatorname{ctg}4°0'21''-\lg 1045.7=1.9068755+1.1547213-3.0194071=0.0421877,$$

从而 $\frac{1}{2}(A-B)=47°46'43''$，

而 $\frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{1}{2}C=90°-\frac{1}{2}\times 8°0'42''=85°59'39''.$

因此 $A=133°46'22''$，$B=38°12'56''$，

知道了三个角之后，可由

$$c=\frac{a}{\sin A}\sin C$$

求得 c，即

$$\lg c=\lg a+\lg\sin C-\lg\sin A=\lg 563.2+\bar{1}.1441840-\bar{1}.8585907=2.0362559,$$

所以 $c=108.7066.$

3175. 已知直圆锥的体积为 450，顶角为 $37°25'50''$，试计算它的全表面积。

解 设母线长为 l，顶角为 2θ，则 $l\cos\theta$、$l\sin\theta$ 分别是高与底面的半径，所以圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi(l\sin\theta)^2l\cos\theta$，把已知数据代入，有

$$\frac{1}{3}\pi l^3\sin^2 18°42'55''\times\cos 18°42'55''=450,$$

用公式 $2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$，可有

$$\pi l^3\sin 18°42'55''\sin 37°25'50''=2700,$$

由此得

$$\lg l=\frac{1}{3}(\lg 2700-\lg\pi-\lg\sin 18°42'55''-\lg\sin 37°25'50'')=\frac{1}{3}(3.43136-0.49715-\bar{1}.50632-\bar{1}.78376)=1.21471,$$

设全表面积为 S，则

$$\begin{aligned}S&=\text{底面积}+\text{侧面积}\\&=\pi(l\sin\theta)^2+\frac{1}{2}\times 2\pi l\sin\theta\times l\\&=\pi l^2\sin\theta(\sin\theta+1)=2\pi l^2\sin\theta\times\sin\left(45°+\frac{1}{2}\theta\right)\cos\left(\frac{1}{2}\theta-45°\right)\\&=2\pi l^2\sin\theta\sin\left(45°+\frac{1}{2}\theta\right)\times\cos\left(45°-\frac{1}{2}\theta\right)\\&=2\pi l^2\sin\theta\sin^2\left(45°+\frac{1}{2}\theta\right),\end{aligned}$$

故

$$\lg S=\lg 2+\lg\pi+2\lg l+\lg\sin\theta+2\lg\sin\left(45°+\frac{1}{2}\theta\right)=0.30103+0.49715+2.42942+\bar{1}.50632+2\times\bar{1}.90991=2.55374,$$

所以　　　$S=257.88$.

3176. 有一座高层建筑物，从建筑物的基部起在水平面上测出一段长度，到达了另一点，从这点再测出看建筑物顶部铁片的仰角，从而可以算出建筑物的高度. 如果测出的仰角有一个小误差，试求这样算出的建筑物高度的误差.

解　设测出的长度为 a，测出的仰角为 θ，$x=a\operatorname{tg}\theta$ 为建筑物的高，设角和高的真值为 $\theta+h$ 和 $x+\xi$，则 $x+\xi=a\operatorname{tg}(\theta+h)$，减去测出值，有

$$\xi=a[\operatorname{tg}(\theta+h)-\operatorname{tg}\theta]=\frac{a\sin h}{\cos(\theta+h)\cos\theta},$$

当 h 很微小时，分子的 $\sin h$ 可用 h 近似代替，分母的 $\cos(\theta+h)$ 可用 $\cos\theta$ 近似代替，所以有近似关系式

$$\xi=\frac{ah}{\cos^2\theta},$$

这就是当角有误差时引起的高度误差，这个误差与测出的高值之比是

$$\frac{ah}{\cos^2\theta}\div a\operatorname{tg}\theta=\frac{h}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2h}{\sin 2\theta}.$$

当 h 为已知时，这个比值仅当 $\sin 2\theta$ 最大，亦即 $2\theta=\frac{1}{2}\pi$ 时达到最小.

3177. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 A、b、c 后可以解出这个三角形. 如果 A 有一个小的误差时，B 相应地产生的误差是多少?

解　联系已知条件和 B 的公式是

$$\sin B=\frac{b}{c}\sin C=\frac{b}{c}\sin(A+B),\qquad ①$$

设 A 产生的误差为 h 弧度，k 为 B 相应地产生的误差，① 的正确写法是

$$\sin(B+k)=\frac{b}{c}\sin(A+B+h+k),\qquad ②$$

减去 ①，

$$\begin{aligned}\sin(B+k)-\sin B&=\frac{b}{c}[\sin(A+B+h+k)\\&\quad-\sin(A+B)]\end{aligned}$$

对这个式子取近似值，有

$$\begin{aligned}k\cos B&=\frac{b}{c}(h+k)\cos(A+B)\\&=-\frac{b}{c}(h+k)\cos C,\end{aligned}$$

从而　$k\left(\cos B+\frac{b}{c}\cos C\right)=-\frac{bh}{c}\cdot\cos C$,

故

$$\begin{aligned}k\left(\cos B+\frac{\sin B}{\sin C}\cos C\right)&\\=-\frac{h\sin B\cos C}{\sin C},&\end{aligned}$$

$$k=-\frac{h\sin B\cos C}{\sin A},$$

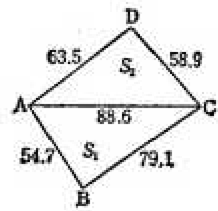
这样就得出了 k 与 h 的比.

3. 测量（二）

3178. 为了测量四边形 $ABCD$ 的面积，测得

$AB=54.7\text{ m}$,
$BC=79.1\text{ m}$,
$AC=88.6\text{ m}$,
$AD=63.5\text{ m}$,
$DC=58.9\text{ m}$,

试求四边形 $ABCD$ 的面积.



解　为了先求 $\triangle ABC$ 的面积，进行如下计算.

$$s=\frac{1}{2}(54.7+79.1+88.6)=111.2,$$

$$111.2-54.7=56.5,$$
$$111.2-79.1=32.1,$$
$$111.2-88.6=22.6,$$

$$S_1=\sqrt{111.2\times56.5\times32.1\times22.6},$$

$$\begin{aligned}\lg S_1&=\frac{1}{2}(\lg111.2+\lg56.5\\&\quad+\lg32.1+\lg22.6)\\&=\frac{1}{2}(2.0461+1.7520\\&\quad+1.5065+1.3541)\\&=\frac{1}{2}\times6.6587=3.3294,\end{aligned}$$

$$S_1=2135(\text{m}^2).\qquad ①$$

再求 $\triangle DAC$ 的面积，

$$s=\frac{1}{2}(88.6+63.5+58.9)=105.5,$$

$$105.5-88.6=16.9,$$
$$105.5-63.5=42.0,$$
$$105.5-58.9=46.6,$$

$$S_2=\sqrt{105.5\times16.9\times42.0\times46.6}$$

$$\lg S_2=\frac{1}{2}(\lg 105.5+\lg 16.9+\lg 42.0+\lg 46.6)$$
$$=\frac{1}{2}(2.0233+1.2279+1.6232+1.6684)$$
$$=\frac{1}{2}\times 6.5428=3.2714,$$
$$S_2=1868(\mathrm{m}^2).\qquad ②$$

故所求的面积可由 ①+② 得到:

$$2135+1868=4003(\mathrm{m}^2).$$

3179. 以 B 为直角的三角形 ABC 中，周长为 15 m，面积为 0.275 m²，求三条边、三个角和内切圆半径.

解　$s=\frac{15}{2}$，$S=0.275$，由公式 $rs=S$ 得

$$r=\frac{S}{s}=\frac{0.275}{\frac{15}{2}}=\frac{0.11}{3},$$

而斜边为

$$(2s-2r)\div 2=s-r=\frac{15}{2}-\frac{0.11}{3}=\frac{44.78}{6}=\frac{22.39}{3}.$$

其他两边之和为

$$15-\frac{22.39}{3}=\frac{22.61}{3},$$

两边之积为

$$2S=2\times 0.275=0.55,$$

所以这两边是下列方程的根:

$$X^2-\frac{22.61}{3}X+0.55=0.$$

解这个方程

$$X=\frac{22.61\pm 22.167}{6},$$

$$X=7.4628\quad 或\quad 0.0738.$$

计算上述求得的数据为三边的直角三角形，那么

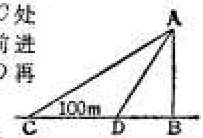
$$\sin A=\frac{7.4628}{7.4633},\quad A=89°20'12.39'',$$

$$\sin C=\frac{0.0738}{7.4633},\quad C=33'59.66''.$$

3180. 从某处看烟囱顶部的仰角为 7°10′，朝烟囱前进 100 m 之后的仰角变为 30°20′，由此求烟囱的高. 其中给出

$$\mathrm{ctg}\,7°10'=7.9530$$

和　　$\mathrm{ctg}\,30°20'=1.7090.$



解　设开始时由 C 处看烟囱 AB，然后前进 $CD=100$ m 到达 D 再看烟囱，这时

$$\angle ACB=7°10',$$
$$\angle ADB=30°20',$$

在 $\triangle ACB$、$\triangle ADB$ 中有

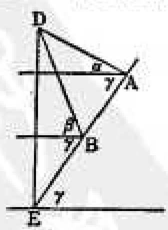
$$CB=AB\,\mathrm{ctg}\angle ACB,$$
$$DB=AB\,\mathrm{ctg}\angle ADB,$$

从而

$$CD=AB\,\mathrm{ctg}\angle ACB-AB\,\mathrm{ctg}\angle ADB,$$

$$AB=\frac{CD}{\mathrm{ctg}\angle ACB-\mathrm{ctg}\angle ADB}=\frac{100}{\mathrm{ctg}\,7°10'-\mathrm{ctg}\,30°22'}=\frac{100}{7.9530-1.7090}=16.015(\mathrm{m}).$$

3181. 在小山脚下有一座塔 DE，在小山的坡(为斜面)上取一基线 AB 并测出它的长，且设 AB 的延长线通过塔的基部 E，由 A、B 两处看塔顶 D 的仰角为 α 和 β，而在基线上任一点看基部 E 的俯角都是 γ. 求塔的高. 作为实例，可设 $AB=10$ m，



$$\alpha=37°12'41.5'',\ \beta=60°8'14'',$$
$$\gamma=72°56'18.5''.$$

解　因为 $\angle DAE=\alpha+\gamma$，$\angle DBE=\beta+\gamma$，所以

$$\angle BDA=\angle DBE-\angle DAE=\beta-\alpha,$$

在 $\triangle ABD$ 中用正弦定理有

$$AD=\frac{AB\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\beta-\alpha)},$$

又因 $\angle AED=90°-\gamma$，所以在 $\triangle ADE$ 中

$$DE=\frac{AD\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(90°-\gamma)},$$

用 AD 的值代入上式得

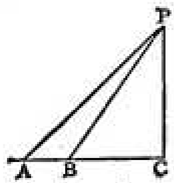
$$DE=\frac{AB\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\gamma\sin(\beta-\alpha)}$$

$$=\frac{10\sin 133^\circ4'32.5''\sin 110^\circ9'}{\cos 72^\circ56'18.5''\sin 22^\circ55'32.5''},$$

$$\begin{aligned}\lg DE&=1+\lg\sin 133^\circ4'32.5''\\&\quad+\lg\sin 110^\circ9'-\lg\cos 72^\circ56'18.5''\\&\quad-\lg\sin 22^\circ55'32.5''\\&=1+\bar{1}.8635917+\bar{1}.9725703\\&\quad-\bar{1}.4674579-\bar{1}.5905488\\&=1.7781553,\end{aligned}$$

所以　　$DE=60\,\mathrm{m}$.

3182. 河岸边B处站有一人，看对岸岸边一座塔PC的仰角为55°，现后退30 m至点A，再看塔的仰角为48°。试求河宽。



解　$\angle PBC=55^\circ$，

$\angle PAC=48^\circ$，

$AB=30\,\mathrm{m}$.

$$\frac{PB}{BA}=\frac{\sin\angle PAB}{\sin\angle APB}=\frac{\sin 48^\circ}{\sin 7^\circ},$$

$$\therefore\quad PB=\frac{30\sin 48^\circ}{\sin 7^\circ},$$

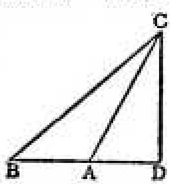
$$BC=BP\cos\angle PBC=BP\cos 55^\circ$$

$$=BP\sin 35^\circ=\frac{30\sin 48^\circ\sin 35^\circ}{\sin 7^\circ}.$$

$$\begin{aligned}\lg BC&=\lg 30+\lg\sin 48^\circ+\lg\sin 35^\circ\\&\quad-\lg\sin 7^\circ=1.4771213\\&\quad+\bar{1}.8710735+\bar{1}.7585913\\&\quad-\bar{1}.0858945=2.0208916.\end{aligned}$$

$\therefore\quad BC=104.928\,\mathrm{m}$.

3183. A、B是与塔基位于同一平面上的两点，从A测出的塔的仰角为65°25′，从B测出的塔的仰角为39°47′，AB的距离为32.28 m，试求塔高。



解　设CD为塔，则

$$BA=CD\operatorname{ctg}\angle CBD-CD\operatorname{ctg}\angle CAD,$$

故　$32.28=CD(\operatorname{ctg}39^\circ47'-\operatorname{ctg}65^\circ25')$

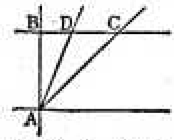
$$=CD\frac{\sin(65^\circ25'-39^\circ47')}{\sin 39^\circ47'\sin 65^\circ25'},$$

$$CD=\frac{32.28\sin 39^\circ47'\sin 65^\circ25'}{\sin 25^\circ38'},$$

$$\begin{aligned}\lg CD&=\lg 32.28+\lg\sin 39^\circ47'\\&\quad+\lg\sin 65^\circ25'-\lg\sin 25^\circ38'\\&=1.5089335+\bar{1}.8061027\\&\quad+\bar{1}.9587345-\bar{1}.6360969\\&=1.6376738.\end{aligned}$$

从而　　$CD=43.4184\,\mathrm{m}$.

3184. 有一条向北开的船，看见在船的北东与北北东方向有两座灯塔，开了20 km以后，再看两座灯塔都在船的东面，求两个灯塔之间的距离。



解　设A、B为船的先、后位置，C、D为灯塔的位置．因为$\angle CAB=45^\circ$，所以$AB=CB=20\,\mathrm{km}$，$\angle DAB=22.5^\circ$，从而

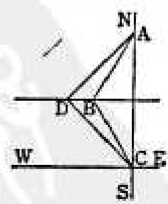
$$BD=AB\operatorname{tg}\angle DAB=20\operatorname{tg}22.5^\circ,$$

$$\lg BD=\lg 20+\lg\operatorname{tg}22.5^\circ=1.30103+\bar{1}.61722=0.91825,$$

故　　$BD=8.284$,

$$CD=20-8.284=11.716\,(\mathrm{km}).$$

3185. 某人看见北面与北30°西的方向有两个物体A、B，这个人向北西方向走1000 m之后，看见A、B在北东和东方。求A、B的距离。



解　设C、D为先后两个观测地，因为$\angle BCA=30^\circ$，$\angle DCA=45^\circ$，所以$\angle DCB=15^\circ$，$\angle CDB=45^\circ$，$CD=1000\,\mathrm{m}$．因为三角形ABD、CBD全等，所以$AB=BC$，因此只要求出BC的长度就知道A、B间的距离了。在$\triangle BCD$中

$$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin\angle CBD},$$

从而　$\begin{aligned}\lg BC&=\lg CD+\lg\sin\angle BDC\\&\quad-\lg\sin\angle CBD=\lg 1000\\&\quad+\lg\sin 45^\circ-\lg\sin 60^\circ\\&=3+\bar{1}.84949-\bar{1}.93753\\&=2.91196.\end{aligned}$

$BC=816.5\,\mathrm{m}$,

即有　　$AB=816.5\,\mathrm{m}$.

3186. 两次测量一棵树的影子长度分别为a、b，这两次的太阳的仰角之差为α，设树

高x，证明x满足

$$x^2+x(b-a)\operatorname{ctg}\alpha+ab=0.$$

解　设太阳的仰角为θ、$\theta+\alpha$时树影长为a、b，则得$x=a\operatorname{tg}\theta$,

$$x=b\operatorname{tg}(\theta+\alpha)=\frac{b(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\alpha)}{1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\alpha},$$

由第一式得$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{x}{a}$，代入第二式，有

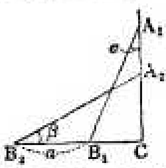
$$x=\frac{b\left(\dfrac{x}{a}+\operatorname{tg}\alpha\right)}{1-\dfrac{x}{a}\operatorname{tg}\alpha}=\frac{bx+ab\operatorname{tg}\alpha}{a-x\operatorname{tg}\alpha},$$

故　$$ax-x^2\operatorname{tg}\alpha=bx+ab\operatorname{tg}\alpha,$$

$$x^2\operatorname{tg}\alpha+x(b-a)+ab\operatorname{tg}\alpha=0,$$

即　$$x^2+x(b-a)\operatorname{ctg}\alpha+ab=0.$$

3187. 一根棒斜靠在墙上，与墙所成的角是α，当棒的下端远离墙壁滑动了am，棒与地面交成角β，问棒的上端向下滑了多少？



解　设棒AB的长为l，棒的上端A在地面上的投影为C，棒AB的先后位置是A_1B_1与A_2B_2，则

$$A_1C=l\cos\alpha,$$

$$A_2C=l\sin\beta,\ B_1C=l\sin\alpha,\ B_2C=l\cos\beta,$$

从而

$$A_1A_2=A_1C-A_2C=l(\cos\alpha-\sin\beta),$$

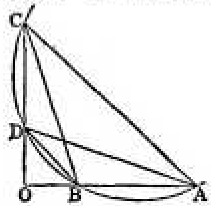
因为$B_2C-B_1C=B_2B_1$，所以

$$l\cos\beta-l\sin\alpha=a,$$

故$l=\dfrac{a}{\cos\beta-\sin\alpha}$，代入，有

$$A_1A_2=\frac{a(\cos\alpha-\sin\beta)}{\cos\beta-\sin\alpha}\ (\text{m}).$$

3188. 小山上有一纪念碑CD，平地上有A、B两点与CD在同一个铅垂面里，而A、B在同一个水平面上，A比B离CD更远。设测得A、B的距离为a，从A、B看纪念碑顶部C的仰角为α、β，而从A、B看整个碑的视角相等。求纪念碑的高。



解　设AB、CD的延长线交于O，$\angle CAD=\theta$，因为$\angle CAD=\angle CBD=\theta$，所以$C$、$D$、$B$、$A$在同一圆周上。因为$\angle ODB=\alpha$，$\angle OBD=\beta-\theta$，所以$\alpha+\beta-\theta=\dfrac{\pi}{2}$。设$OB=p$，$OD=q$，$CD=x$，则

$$\frac{x+q}{a+p}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\frac{q}{a+p}=\operatorname{tg}(\alpha-\theta)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{ctg}\beta,$$

$$\therefore\ \frac{x}{a+p}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$=-\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta}$$

$$=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},$$

$$\therefore\ \frac{a+p}{x}=-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)},$$

又　$$\frac{x+q}{p}=\operatorname{tg}\beta,$$

$$\frac{q}{p}=\operatorname{tg}(\beta-\theta)=\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\therefore\ \frac{x}{p}=\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta},$$

故　$$\frac{p}{x}=-\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)},$$

$$\frac{a}{x}=\frac{a+p}{x}-\frac{p}{x}=\left[-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)}\right]-\left[-\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}\right]=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)},$$

$$\therefore\ x=\frac{a\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

3189. 由A处看远处的目标D仰角为α，由此向D方向水平地前进至B，测得D的仰角为2α，再水平地前进至C测得D的仰角为3α，试证明AB约等于$3BC$。其中因为D很远，α是一个很小的角。

解　在$\triangle ABD$中，

$$\frac{AB}{\sin(2\alpha-\alpha)}=\frac{BD}{\sin\alpha},$$

所以$AB=BD$，又在$\triangle BCD$中

$$\frac{BD}{\sin 3\alpha}=\frac{BC}{\sin(3\alpha-2\alpha)},$$

所以 $AB=BD=\frac{BC\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$

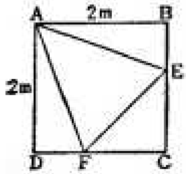
$=\frac{BC(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)}{\sin\alpha}$

$=BC(3-4\sin^2\alpha)$,

当 α 很小时 $4\sin^2\alpha$ 也极小,所以可舍去,得

$$AB\approx 3BC.$$

3190. 正方形的一个内接正三角形与正方形有一个顶点重合,正方形的边长为 2m,正三角形的边长是多少?



解 设正方形 $ABCD$ 的内接正三角形为 AEF, $AB=2$(m),

$$\angle BAE=\frac{1}{2}(90°-60°)=15°,$$

故 $AE=\frac{AB}{\cos\angle BAE}=\frac{2}{\cos 15°}$,

$\lg AE=\lg 2-\lg\cos 15°$

$=0.30103-\bar{1}.98494=0.31609$.

$AE\approx 2.0706$(m).

3191. 在一个平面上有一条直线道路和不在直线上的两点 A、B,设在直线上看 A、B 所张的角最大时的点是 P, AB 连线与道路的交点设为 C, CP 向 P 方向延线上有一点 Q,测出 $CP=d$, $\angle BPC=\alpha$, $\angle APQ=\beta$,问 A、B 两地的距离是多少?

解 因为过 A、B、P 的圆与 CP 切于 P,所以 $\angle BAP=\alpha$(或 $\pi-\alpha$), $\angle ABP=\beta$(或 $\pi-\beta$),从而在 $\triangle CBP$ 中

$$\frac{CB}{\sin\alpha}=\frac{d}{\sin(\pi-\beta)},$$

$$\therefore\ CB=\frac{d\sin\alpha}{\sin\beta},$$

又在 $\triangle CAP$ 中,

$$\frac{CA}{\sin(\pi-\beta)}=\frac{d}{\sin\alpha},$$

$$\therefore\ CA=\frac{d\sin\beta}{\sin\alpha},$$

从而 $CA-CB=AB$,

$$AB=\frac{d\sin\beta}{\sin\alpha}-\frac{d\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{d(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{d\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

3192. 在高为 a 的塔顶上有一旗竿,在离塔 b 处测旗竿的张角为一个小角 θ(用弧度度量),证明旗竿的长大体上等于 $\frac{a^2+b^2}{b}\theta$。

解 设看塔的仰角为 φ,旗竿长为 x,则

$$\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\frac{a+x}{b}=\operatorname{tg}(\varphi+\theta)=\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta}$$

$$=\frac{a+b\operatorname{tg}\theta}{b-a\operatorname{tg}\theta},$$

故 $\frac{x}{b}=\frac{a+b\operatorname{tg}\theta}{b-a\operatorname{tg}\theta}-\frac{a}{b}=\frac{(a^2+b^2)\operatorname{tg}\theta}{b(b-a\operatorname{tg}\theta)}$,

因为 θ 很小,所以 $\operatorname{tg}\theta$ 可看成是等于 θ 的,且与 b 相比, $a\operatorname{tg}\theta$ 很小,因此可舍去,

$$\therefore\ \frac{x}{b}\approx\frac{a^2+b^2}{b^2}\theta.$$

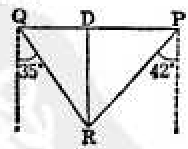
3193. 150 m 高的塔在地面上的影子为 75 m,求这时看太阳的仰角.

解 设所求仰角为 α,则

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{150}{75}=2,$$

$$\alpha=63°26'6''.$$

3194. 在东西走向的海岸上有相距 1000 m 的两点 P、Q,在海中有一岩石 R,从 P 看 R 在南 42° 西的方向上,从 Q 看 R 在南 35° 东的方向上,证明海岸至岩石的距离为



$$1000\times\frac{\sin 48°\sin 55°}{\sin 77°}\text{(m)}.$$

并把这个结果算至整米数.

解 设 PQ 与 R 的距离为 RD,则

$$PD=RD\operatorname{ctg}\angle DPR,$$

$$QD=RD\operatorname{ctg}\angle DQR,$$

故 $PD+QD=RD(\operatorname{ctg}\angle DPR+\operatorname{ctg}\angle DQR)$,

$$1000=RD(\operatorname{ctg}48°+\operatorname{ctg}55°),$$

$$RD=\frac{1000}{\operatorname{ctg}48°+\operatorname{ctg}55°}$$

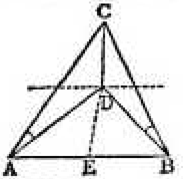
$$=1000\times\frac{\sin 48°\sin 55°}{\sin 103°}$$

$$=1000\times\frac{\sin 48°\sin 55°}{\sin 77°}\text{(m)},$$

$$\lg BD = \lg 1000 + \lg\sin 48° + \lg\sin 55° - \lg\sin 77° = 3 + \bar{1}.87107 + \bar{1}.91336 - \bar{1}.98872 = 2.79571,$$

$$BD \approx 625\,(\mathrm{m}).$$

3195. 河的对岸有一棵树，从此岸测得树顶仰角为 19°25′，沿河岸笔直走 120 m 再测树顶仰角与前相同，树所在处的河宽为 80 m，求树高多少？设已知



$$\lg \mathrm{tg}\, 19°25' = \bar{1}.54714,$$

$$\lg 3.5248 = 0.54714.$$

解　设先后两个观测点为 A、B，树高为 CD，河宽为 DE，则 $DE = 80\,\mathrm{m}$，$AB = 120\,\mathrm{m}$，$CE \perp AB$。因为 $\angle CAD = \angle CBD = 19°25'$，所以 $AD = BD$，从而 $AE = BE$，故

$$AD^2 = AE^2 + ED^2 = 60^2 + 80^2 = 10^4,$$

$$\therefore\quad AD = 10^2,$$

又　$CD = AD\,\mathrm{tg}\,19°25' = 10^2\,\mathrm{tg}\,19°25'$，

$$\therefore\quad \lg CD = 2 + \bar{1}.54714 = 1.54714 = \lg 35.248,$$

$$CD = 35.248\,(\mathrm{m}).$$

3196. 已知两圆的圆心距离为 a，外公切线的夹角为 2α，内公切线的夹角为 2β，求两个圆的半径。又设 $a = 714$，$\alpha = 36°8'$，$\beta = 75°48'$ 时两个圆的半径是多少？

解　设两圆的圆心为 O、O'，半径为 r、r'，设 $r < r'$，则

$$r' - r = a\sin\alpha,\quad r' + r = a\sin\beta,$$

从而

$$r' = \frac{1}{2}a(\sin\beta + \sin\alpha) = a\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$r = \frac{1}{2}a(\sin\beta - \sin\alpha) = a\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

已知 $a = 714$，$\alpha = 36°8'$，$\beta = 75°48'$，则

$$r' = 714\sin\frac{75°48' + 36°8'}{2} \times \cos\frac{75°48' - 36°8'}{2} = 714\sin 55°58'\cos 19°50'.$$

同理　$r = 714\cos 55°58'\sin 19°50'$，

故

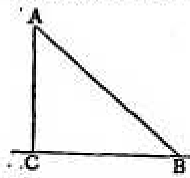
$$\lg r' = \lg 714 + \lg\sin 55°58' + \lg\cos 19°50' = 2.85370 + \bar{1}.91840 + \bar{1}.97344 = 2.74554.$$

从而　$r' = 556.6$。

$$\lg r = \lg 714 + \lg\cos 55°58' + \lg\sin 19°50' = 2.85370 + \bar{1}.74794 + \bar{1}.53056 = 2.13220.$$

从而　$r = 135.58$。

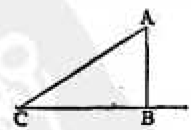
3197. 从高为 132 m 的悬崖底部所在平面上的一点，看悬崖顶部的仰角为 41°18′，求悬崖顶部至观测者的距离。其中 $\csc 41°18' = 1.5151$。



解　设 A 为悬崖顶部，C 为底部，B 为观察者的位置，$AC = 132\,\mathrm{m}$，$\angle B = 41°18'$，故

$$AB = AC\csc B = 132\csc 41°18' = 132 \times 1.5151 = 199.99\,(\mathrm{m}).$$

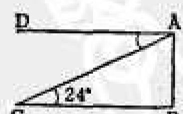
3198. 一座铁塔高为 200 m，在铁塔基部所在水平面上一点，看铁塔的顶部仰角为 3°30′，试求观测点与铁塔的距离。



解　设 AB 为铁塔，C 为观测点。$AB = 200\,\mathrm{m}$，$C = 3°30'$，所以

$$BC = AB\,\mathrm{ctg}\,C = 200 \times \mathrm{ctg}\,3°30' = 200 \times 16.350 = 3270\,(\mathrm{m}).$$

3199. 从高出水面 326 m 的岛顶看一艘小艇俯角为 24°，求小艇至岛的水面距离是多少？

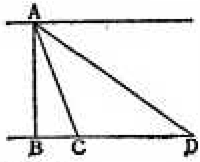


解　设 A 为岛顶，B 为岛顶的垂直投影，C 为小艇的位置，AD 为水平线，这时 $AB = 326\,\mathrm{m}$，$\angle ACB = \angle CAD = 24°$，则所求距离为

$$BC = AB\,\mathrm{ctg}\angle ACB = 326\,\mathrm{ctg}\,24° = 326 \times 2.2460 = 732.20\,(\mathrm{m}).$$

3200. 从高出海面 50 m 的灯塔顶上看正西面两块礁石的俯角为 75° 和 15°，求这两块礁石的距离。其中取

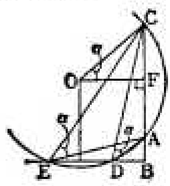
$ctg\,75°=0.268$, $ctg\,15°=3.732$.



解 设 AB 为灯塔，C、D 为两块礁石的位置，则 $\angle ACB$、$\angle ADB$ 分别等于从 A 看两块礁石的俯角，为 $75°$、$15°$，故

$$\begin{aligned}BD&=AB\,ctg\angle ADB,\\BC&=AB\,ctg\angle ACB,\\CD&=BD-BC=AB\,ctg\angle ADB-AB\,ctg\angle ACB\\&=50(ctg\,15°-ctg\,75°)\\&=50(3.732-0.268)\\&=50\times3.464=173.20\,(\mathrm{m}).\end{aligned}$$

3201. 塔顶上有一旗竿，离塔基 am 处看旗竿张角为 α 度．又在离塔基 bm 的另一处看旗竿的张角为 α 度．旗竿长多少？



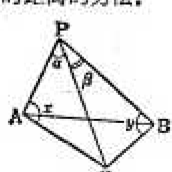
解 设 AB 为塔，AC 为旗竿，D、E 为两次观测的位置，则 $DB=a$，$EB=b$，因为 $\angle ADC=\alpha=\angle AEC$，所以 C、A、D、E 在同一个圆周上，设这个圆的圆心为 O，作 $OF\perp AC$，这时 $CF=\frac{1}{2}AC$，$\angle COF=\alpha$，所以在 $\triangle COF$ 中有

$$CF=OF\ tg\angle COF,$$

$$OF=\frac{1}{2}(DB+EB)=\frac{1}{2}(a+b).$$

$$\therefore\quad AC=2CF=(a+b)\,tg\,\alpha.$$

3202. 已知连结 A、B、C 中每两点的线段的长，在 A、B、C 所在平面上又有任意点 P，并且测出了 $\angle APC$、$\angle BPC$ 的大小，试叙述求 P 至 A、B、C 各点的距离的方法。



解 设

$$\angle APC=\alpha,\quad \angle BPC=\beta,\quad \angle PAC=x,\quad \angle PBC=y.$$

其中 α、β 为已知，所以如果求出了 x、y，PA、PB、PC 就可求了．在三角形 PAC、PBC 中已知两角和一边．现在来求 x、y，因为三角形 APC 和 BPC 的内角总和为四个直角，所以 $x+y=2\pi-\alpha-\beta-C$，即 x、y 的和可求。又从三角形 APC 中可得

$$PC=\frac{AC\sin\angle PAC}{\sin\angle APC}=\frac{b\sin x}{\sin\alpha}.$$

在三角形 BCP 中可得

$$PC=\frac{BC\sin\angle PBC}{\sin\angle BPC}=\frac{a\sin y}{\sin\beta},$$

故
$$\frac{b\sin x}{\sin\alpha}=\frac{a\sin y}{\sin\beta},$$

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{a\sin\alpha}{b\sin\beta},$$

设 $tg\,\varphi=\frac{a\sin\alpha}{b\sin\beta}$，由三角函数表可求出 φ 的值，从而

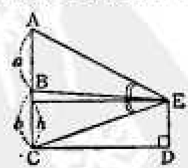
$$\frac{\sin x}{\sin y}=tg\,\varphi,$$

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{tg\,\varphi-1}{tg\,\varphi+1}=tg\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{tg\frac{1}{2}(x-y)}{tg\frac{1}{2}(x+y)}=tg\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right).$$

由这个方程可以确定 $x-y$．因为 $x+y$ 已求出，所以可以由此求出 x 和 y.

3203. 在高为 bm 的塔顶上有长为 am 的旗竿，在离塔基若干距离处看塔和看旗竿的张角相等．若眼睛离地面 h，求眼与塔基的距离。



解 设 A 为旗竿顶点，B 为塔顶，C 为塔基，E 为测量者的眼睛位置，过 E 作水平面的垂线 ED，则 $\angle BEC=\angle BEA$，所以

$$\frac{\sin\angle BEC}{\sin\angle EBC}=\frac{BC}{EC},$$

$$\frac{\sin\angle BEA}{\sin\angle EBA}=\frac{AB}{AE},$$

故
$$\frac{BC}{EC}=\frac{AB}{AE},$$

设 $CD=x$，则

$$EC=\sqrt{h^2+x^2},$$

$$EA=\sqrt{(a+b-h)^2+x^2},$$

所以 $\dfrac{b}{\sqrt{h^2+x^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{(a+b-h)^2+x^2}}$,

$$[(a+b-h)^2+x^2]b^2=(h^2+x^2)a^2,$$

$$x^2=\frac{b^2(a+b-h)^2-h^2a^2}{a^2-b^2},$$

故

$$EC^2=\frac{h^2(a^2-b^2)+b^2(a+b-h)^2-h^2a^2}{a^2-b^2}$$

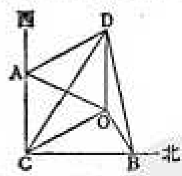
$$=\frac{b^2[(a+b-h)^2-h^2]}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{b^2(a+b)(a+b-2h)}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{b^2(a+b-2h)}{a-b}.$$

$$EC=b\left(\frac{a+b-2h}{a-b}\right)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{m}).$$

3204. 空中有一气球，从甲、乙、丙三处同时观测，仰角为45°、45°、60°，甲、乙分别在丙的西面和北面，试给出能求气球高度的方程式。



解 设甲、乙、丙的位置分别用 A、B、C 表示，x 为气球的高，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，O是气球在 ABC 平面上的射影，则

$$AO=x\operatorname{ctg}45°=x,\ BO=x\operatorname{ctg}45°=x,$$

$$CO=x\operatorname{ctg}60°=\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

故 $$\cos\angle ACO=\frac{b^2+\dfrac{x^2}{3}-x^2}{\dfrac{2bx}{\sqrt{3}}}=\frac{3b^2-2x^2}{2bx\sqrt{3}},$$

$$\cos\angle BCO=\frac{a^2+\dfrac{x^2}{3}-x^2}{\dfrac{2ax}{\sqrt{3}}}=\frac{3a^2-2x^2}{2ax\sqrt{3}}.$$

因为$\angle ACB$为直角，所以

$$\cos\angle BCO=\sin\angle ACO,$$

$$\left(\frac{3b^2-2x^2}{2bx\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{3a^2-2x^2}{2ax\sqrt{3}}\right)^2=1.$$

从而

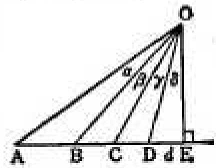
$$a^2(3b^2-2x^2)^2+b^2(3a^2-2x^2)^2=12a^2b^2x^2,$$

即 $$4x^4(a^2+b^2)-36a^2b^2x^2+9a^2b^2(a^2+b^2)=0.$$

因此所求的方程式是

$$4c^2x^4-36a^2b^2x^2+9a^2b^2c^2=0.$$

3205. 在南北向的道路上，自北向南依次有五个目标 A、B、C、D、E，从E的正东面某处 O 看这些目标有



$$\angle AOB=\alpha,\ \angle BOC=\beta,$$
$$\angle COD=\gamma,\ \angle DOE=\delta.$$

又设 $DE=d$，试求 AB、BC 和 CD。如果 $d=10(\mathrm{m})$，$\alpha=\beta=\gamma=\delta=15°$，试把上述要求的长度算至小数第二位。

解 $$OE=d\operatorname{ctg}\delta,$$

$$\therefore\ CE=OE\operatorname{tg}(\gamma+\delta)=d\operatorname{ctg}\delta\operatorname{tg}(\gamma+\delta),$$

$$\therefore\ CD=CE-d=d[\operatorname{ctg}\delta\operatorname{tg}(\gamma+\delta)-1]$$

$$=d\left[\frac{\cos\delta}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin(\gamma+\delta)}{\cos(\gamma+\delta)}-1\right]$$

$$=\frac{d[\sin(\gamma+\delta)\cos\delta-\cos(\gamma+\delta)\sin\delta]}{\sin\delta\cos(\gamma+\delta)}$$

$$=\frac{d\sin(\gamma+\delta-\delta)}{\sin\delta\cos(\gamma+\delta)}$$

$$=\frac{d\sin\gamma}{\sin\delta\cos(\gamma+\delta)},$$

$$BC=BE-CE$$
$$=d\operatorname{ctg}\delta[\operatorname{tg}(\beta+\gamma+\delta)-\operatorname{tg}(\gamma+\delta)]$$
$$=\frac{d\operatorname{ctg}\delta\sin\beta}{\cos(\beta+\gamma+\delta)\cos(\gamma+\delta)},$$

$$AB=AE-BE$$
$$=d\operatorname{ctg}\delta[\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-\operatorname{tg}(\beta+\gamma+\delta)]$$
$$=\frac{d\operatorname{ctg}\delta\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos(\beta+\gamma+\delta)}.$$

又当 $d=10(\mathrm{m})$，$\alpha=\beta=\gamma=\delta=15°$ 时，

$$AB=\frac{10\operatorname{ctg}15°\sin15°}{\cos60°\cos45°}=\frac{10\cos15°}{\cos60°\cos45°}$$

$$=\frac{10\times\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=10(1+\sqrt{3})\approx27.32,$$

$$BC=\frac{10\operatorname{ctg}15^\circ\sin15^\circ}{\cos45^\circ\cos30^\circ}$$

$$=\frac{10\cos15^\circ}{\cos45^\circ\cos30^\circ}=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{10}{3}(3+\sqrt{3})\approx15.77.$$

$$CD=\frac{10\sin15^\circ}{\sin15^\circ\cos30^\circ}=\frac{10}{\cos30^\circ}$$

$$=\frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{20}{3}\sqrt{3}\approx11.55.$$

即 $AB=27.32(\mathrm{m})$，$BC=15.77(\mathrm{m})$，

$CD=11.55(\mathrm{m})$.

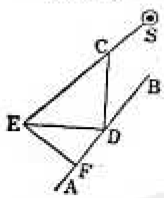
3206. 有走向为南 59°5′ 东、高为 20 m 的土墙. 太阳从南方以30° 倾角照下，问墙的影子多宽？设

$\lg2=0.30103$,

$\lg3=0.47712$,

$\lg29719=4.47303$,

$\lg\sin59^\circ5'=\bar{1}.93344$.



解 设 AB 为墙的走向，CD 为墙高，S 为太阳，CD 的影子为 ED，而影宽则等于从 E 到 AB 所作的垂线 EF 的长。从直角三角形 CDE 得

$$ED=CD\operatorname{ctg}\angle CED,$$

从直角三角形 EDF 得

$$EF=ED\sin\angle EDF,$$

从而 $EF=CD\operatorname{ctg}\angle CED\cdot\sin\angle EDF$,

其中 $CD=20\,\mathrm{m}$，$\angle CED=30^\circ$，又因为 ED 是正南向，DB 是南 59°5′ 东走向，所以

$$\angle EDF=59^\circ5',$$

所以 $EF=20\operatorname{ctg}30^\circ\sin59^\circ5'$

$$=20\sqrt{3}\times\sin59^\circ5',$$

$$\lg EF=\lg20+\frac{1}{2}\lg3+\lg\sin59^\circ5'$$

$$=1.30103+\frac{1}{2}\times0.47712$$

$$+\bar{1}.93344=1.47303.$$

$\therefore\ EF=29.7\,\mathrm{m}$.

3207. 在三角形 ABC 中，已知

$a=542.27$，$B=67^\circ28'47''$，

$C=64^\circ42'55''$，

试解这个三角形.

解 $A=180^\circ-(67^\circ28'47''+64^\circ42'55'')$

$=47^\circ48'18''$，

因此由正弦定理得

$$\lg b=\lg a+\lg\sin B-\lg\sin A$$

$$=\lg542.27+\lg\sin67^\circ28'47''$$

$$-\lg\sin47^\circ48'18''=2.7342156$$

$$+\bar{1}.9655516-\bar{1}.8697380$$

$$=2.8300292.$$

故 $b=676.128$.

又 $\lg c=\lg a+\lg\sin C-\lg\sin A$

$$=\lg542.27+\lg\sin64^\circ42'55''$$

$$-\lg\sin47^\circ48'18''=2.7342156$$

$$+\bar{1}.9562628-\bar{1}.8697380$$

$$=2.8207404,$$

故 $c=661.821$.

作为验算，用

$$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{1}{2}(B-C)},$$

其中

$b+c=676.128+661.821=1337.949$.

从而 $\lg(b+c)=3.1264396$,

又 $\lg\sin\frac{A}{2}=\lg\sin23^\circ54'9''=\bar{1}.6076496$,

$$\lg\cos\frac{B-C}{2}=\lg\cos1^\circ22'56''$$

$$=\bar{1}.9998736,$$

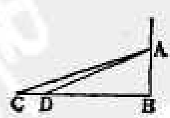
代入上式右边有

$$3.1264396+\bar{1}.6076496$$

$$-\bar{1}.9998736=2.7342156.$$

与前面给出的 $\lg a$ 一致.

3208. 从山顶上测位于同一方向的两座房屋，俯角为 23°20′、18°10′. 这两座房屋的距离是 440 m，求山高.



解 设 A 为山顶，B 为 A 在地平面上的射影，C、D 为两座房屋的位置。因为

$$DC=AB\operatorname{ctg}\angle ACB-AB\operatorname{ctg}\angle ADB,$$

所以

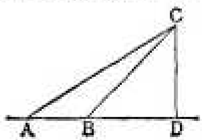
$$440=AB\operatorname{ctg}18°10'-AB\operatorname{ctg}23°20'$$
$$=AB\cdot\frac{\sin 5°10'}{\sin 18°10'\sin 23°20'},$$

从而　$AB=\dfrac{440\sin 18°10'\sin 23°20'}{\sin 5°10'}$,

故　$\lg AB=\lg 440+\lg\sin 18°10'$
$+\lg\sin 23°20'-\lg\sin 5°10'$
$=2.64345+\bar{1}.49385$
$+\bar{1}.59778-\bar{2}.95450$
$=2.78058$,

从而　　$AB\approx 603\ \mathrm{m}$.

3209. 从点B测山顶C的仰角为27°18′, 在同一水平面上从B点后退500 m至A点, 从点A测出的仰角为16°10′, 问山多高? 已知A、B、C在同一平面内, 且给出



$\lg\sin 27°18'=\bar{1}.66148$,
$\lg\sin 16°10'=\bar{1}.44472$,
$\lg\sin 11°8'=\bar{1}.28577$, $\lg 5=0.69897$,
$\lg 3307=3.51943$.

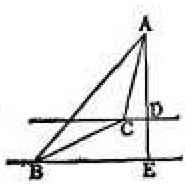
解　设D为C在水平面上的射影, 这时
$$AB=CD\operatorname{ctg}16°10'-CD\operatorname{ctg}27°18'$$
$$=CD\frac{\sin 11°8'}{\sin 16°10'\sin 27°18'},$$

所以　$CD=\dfrac{500\sin 16°10'\sin 27°18'}{\sin 11°8'}$

又　$\lg CD=\lg 500+\lg\sin 16°10'$
$+\lg\sin 27°18'-\lg\sin 11°8'$
$=2.69897+\bar{1}.44472+\bar{1}.66148$
$-\bar{1}.28577=2.51940$.

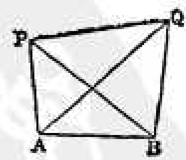
因此　　$CD\approx 330.7\ \mathrm{m}$.

3210. 山顶上立有一座铁塔, 从山脚下看铁塔顶部的仰角为47°. 由山脚向着铁塔沿32°倾角的山路攀登1000 m后, 再测塔顶仰角为77°, 试问铁塔顶部比山脚高出多少?



解　设A为铁塔顶部, B为第一次观测的位置, BC为山路, C为第二次观测的位置. AE为从A向过B的水平线所作的垂线, CD为过C的水平线, 因为
$$BC=1000\ \mathrm{m},\ \angle ABE=47°,$$
$$\angle CBE=32°.$$
从而$\angle ABC=15°$. 又因为$\angle ACD=77°$, 所以
$$\angle ACB=180°-77°+32°=135°,$$
$$\angle BAC=77°-47°=30°,$$
在$\triangle ABC$中有
$$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle BAC},$$
从而　$\dfrac{AB}{\sin 135°}=\dfrac{BC}{\sin 30°}$,
$$AB=\frac{1000\sin 45°}{\sin 30°}.$$
在$\triangle ABE$中$AE=AB\cdot\sin\angle ABE$, 所以
$$AE=\frac{1000\sin 45°\sin 47°}{\sin 30°}.$$
从而　$\lg AE=\lg 1000+\lg\sin 45°$
$+\lg\sin 47°-\lg\sin 30°$
$=3+\bar{1}.84949+\bar{1}.86413$
$-\bar{1}.69897=3.01465$.
$AE=1034.3\ \mathrm{m}$.

3211. 为测定平地上某两点P、Q的距离, 从A、B两处测得



$AB=394.82\ \mathrm{m}$,
$\angle PAB=75°28'41.6''$,
$\angle QAB=28°40'51.3''$,
$\angle PBQ=83°11'17.8''$,
$\angle ABP=41°10'32.7''$,

试计算PQ.

解　$PA=\dfrac{AB\sin\angle PBA}{\sin\angle APB}$
$$=\frac{394.82\sin 41°10'32.7''}{\sin 63°20'45.7''},$$
$$AQ=\frac{AB\sin\angle ABQ}{\sin\angle AQB}$$
$$=\frac{394.82\sin 124°21'50.5''}{\sin 26°57'18.2''},$$

故　$\lg PA=\lg 394.82+\lg\sin 41°10'32.7''$
$-\lg\sin 63°20'45.7''$
$=2.5963991+\bar{1}.8184707$
$-\bar{1}.9512073=2.4636625$.

$\lg AQ = \lg 394.82 + \lg\sin 124°21'50.5''$
$\quad -\lg\sin 26°57'18.2''$
$= 2.5963991 + \bar{1}.9167003$
$\quad -\bar{1}.6563775 = 2.8567219.$

由正切定理,可得

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\angle APQ - \angle AQP) = \frac{AQ-AP}{AQ+AP}\operatorname{ctg}\frac{\angle PAQ}{2}.$$

设 $\frac{AP}{AQ} = \operatorname{tg}\varphi$, 那么

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\angle APQ - \angle AQP) = \operatorname{tg}(45° - \varphi)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\angle PAQ}{2}.$$

因此可如下计算:

$\lg\operatorname{tg}\varphi = \lg AP - \lg AQ = 2.4636625$
$\quad -2.8567219 = \bar{1}.6069406.$
$\therefore\quad \varphi = 22°1'27.6''$,
$\therefore\quad \operatorname{tg}(45° - \varphi) = \operatorname{tg} 22°58'32.4''$,

而 $\frac{1}{2}\times\angle PAQ = \frac{1}{2}(\angle PAB - \angle QAB)$
$= \frac{1}{2}(75°28'41.6'' - 28°40'51.3'')$
$= 23°23'55.2''.$

从而 $\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\angle APQ - \angle AQP)$
$= \lg\operatorname{tg} 22°58'32.4''$
$\quad + \lg\operatorname{ctg} 23°23'55.2''$
$= \bar{1}.6273389 + 0.3638020$
$= \bar{1}.9911409.$

从而 $\frac{1}{2}(\angle APQ - \angle AQP)$
$= 44°24'56.4''$,

又 $\frac{1}{2}(\angle APQ + \angle AQP)$
$= 90° - \frac{1}{2}\times\angle PAQ$
$= 90° - 23°23'55.2''$
$= 66°36'4.8''.$

因此 $\angle APQ = 111°1'1.2''$,
$\angle AQP = 22°11'8.4''$,

在 $\triangle APQ$ 中用正弦定理,

$$PQ = \frac{AP\sin\angle PAQ}{\sin\angle AQP},$$

$\lg PQ = \lg AP + \lg\sin\angle PAQ$
$\quad -\lg\sin\angle AQP = 2.4636625$
$\quad +\lg\sin 46°47'50.3''$
$\quad -\lg\sin 22°11'8.4''$
$= 2.4636625 + \bar{1}.8626897$
$\quad -\bar{1}.5770425 = 2.7493097.$

从而 $PQ = 561.448\,\text{m}.$

3212. 从山顶看与山脚在同一平面上的两个地点的俯角为 α、β, 这两个地点分别与山顶在水平面上投影点相连,连线交成角 γ,这两点距离为 c, 证明山高为 $\frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\varphi}$,

其中 $\sin^2\varphi = \frac{\sin 2\alpha\sin 2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}\cos^2\frac{\gamma}{2}$.

解 设山高为 x, 则从山顶在水平面上的投影点至两地距离为 $x\operatorname{ctg}\alpha$、$x\operatorname{ctg}\beta$, 于是

$$c^2 = x^2\operatorname{ctg}^2\alpha + x^2\operatorname{ctg}^2\beta - 2x^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\gamma,$$

所以

$$x^2 = \frac{c^2}{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\gamma}$$
$$= (c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta) \div (\sin^2\beta\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\cos\gamma),$$

后一个括弧内可以化成

$$(\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha)^2 - \left(\sin 2\alpha\sin 2\beta\cos^2\frac{\gamma}{2}\right),$$

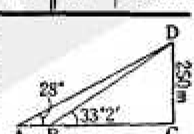
利用所给关于 φ 的关系式, 知道上式为 $\sin^2(\alpha+\beta)\cos^2\varphi$, 所以

$$x = \frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\varphi}.$$

3213. 在高为 250 米的山顶看平地上与观测者位于同一垂直面的两点, 俯角为 28° 和 33°2', 求这两点的距离. 设已知正弦函数表为

4°	0.0698	28°	0.4695	33°	0.5446
5°	0.0872	29°	0.4848	34°	0.5592

解 设 D 为山顶, C 为山顶在平地上的射影, A、B 为平地上的两点,则



$$AC = DC\operatorname{ctg}\angle DAC = 250\operatorname{ctg}28°,$$
$$BC = DC\operatorname{ctg}\angle DBC = 250\operatorname{ctg}33°2',$$

因此

$$AB = AC - BC = 250(\operatorname{ctg}28° - \operatorname{ctg}33°2')$$
$$= 250\times\frac{\sin(33°2' - 28°)}{\sin 28°\sin 33°2'}$$
$$= 250\times\frac{\sin 5°2'}{\sin 28°\sin 33°2'}.$$

用比例方法求有关的三角函数值。已知

$$\sin 5° = 0.0872,\ \sin 4° = 0.0698.$$
$$\sin 5° - \sin 4° = 0.0174,$$
$$60:2 = 0.0174:x,$$
$$x = 0.00058,$$
$$\therefore\ \sin 5°2' = 0.0872 + 0.0006 = 0.0878.$$

同理可算出 $\sin 33°2' = 0.5451$,

$$\therefore\ AB = \frac{250\times 0.0878}{0.4695\times 0.5451} = 85.8\ \mathrm{m}.$$